Équations différentielles stochastiques
Exercices

Exercice 11.1. Le processus stochastique

$$\left\{C_t = C_0 e^{\alpha W_t} : t \geq 0\right\}, \ r_0 \geq 0$$

représente l'évolution d'un taux de change, c'est-à-dire que C_t est le nombre de dollars canadiens que l'on peut obtenir par dollar américain au temps t où $\{W_t : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard.

a) Déterminez l'équation différentielle stochastique satisfaite par le processus $\{C_t : t \geq 0\}$.

b) Le processus $\{X_t : t \geq 0\}$ modélise l'évolution d'un actif risqué en dollars américains. Il satisfait l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mu X_t \ dt + \sigma X_t \ dW_t^*$$

où $\{W_t^* : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard indépendant de $\{W_t : t \geq 0\}$. Déterminez l'équation différentielle stochastique satisfaite par l'évolution $\{Y_t : t \geq 0\}$ du titre risqué en dollars canadiens.

Exercice 11.2.

a) Démontrez qu'il existe une solution unique à l'équation

$$dX_t = a\left(b - X_t\right) dt + \sigma dW\left(t\right).$$

b) Déterminez de façon explicite cette solution.

c) Décrivez le comportement du processus selon les paramètres suivants:

$$\begin{aligned}
a &= 1, b = 1, \sigma = 1, \Delta t = 0,01 \text{ et } X_0 = 1 \\
a &= -1, b = 1, \sigma = 1, \Delta t = 0,01 \text{ et } X_0 = 1 \\
a &= 1, b = 1, \sigma = 0,1, \Delta t = 0,01 \text{ et } X_0 = 1 \\
a &= 1, b = 2, \sigma = 0,3, \Delta t = 0,01 \text{ et } X_0 = 1
\end{aligned}$$

Exercice 11.3. Décrivez le comportement de la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \left(\frac{1}{2} - X_t\right) dt + \sqrt{X_t\left(1 - X_t\right)} dW_t$$

en supposant que la valeur initiale X_0 est une variable aléatoire à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$. Expliquez intuitivement pourquoi X_t est aussi une variable aléatoire dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1.

Exercice 11.4. Supposons qu'une particule se promène de façon aléatoire sur un plan de façon telle que sa position au temps t est donnée par le couple $\left(W_t^{(1)}; W_t^{(2)}\right)$ où $W^{(1)}$ et $W^{(2)}$ sont deux mouvements browniens indépendants. La distance de cette particule à l'origine à l'instant t est donnée par

$$B_t = \sqrt{\left(W_t^{(1)}\right)^2 + \left(W_t^{(2)}\right)^2}.$$

Sachant que le processus de covariance quadratique de deux martingales indépendantes est nulle, utilisez le lemme d'Itô afin de démontrer que le processus B satisfait l'équation différentielle stochastique

$$dB_t = \frac{1}{2}\frac{1}{B_t}dt + \frac{W_t^{(1)}}{B_t}dW_t^{(1)} + \frac{W_t^{(2)}}{B_t}dW_t^{(2)}.$$

Exercice 11.5. Montrez que le processus stochastique $\{S_t : t \geq 0\}$ où

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s ds - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right)$$

où W est un $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}, \mathbb{P})$ −mouvement brownien satisfait l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Exercice 11.6. *Le modèle de Vasicek.* Montrez que le processus stochastique $\{r_t : t \geq 0\}$ où

$$r_t = \frac{\theta}{\alpha} + e^{-\alpha t}\left(r_0 - \frac{\theta}{\alpha}\right) + \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s} dW_s$$

où W est un $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}, \mathbb{P})$ −mouvement brownien satisfait l'équation différentielle stochastique

$$dr_t = (\theta - \alpha r_t)\, dt + \sigma dW_t.$$

Truc : Posez $Y_t = \int_0^t e^{\alpha s} dW_s$ et montrez que Y est un processus d'Itô.

Exercice 11.7. Considérons le système d'équations différentielles stochastiques

$$\begin{aligned} dX_t &= \kappa(\theta - X_t)\ dt + \sigma dW_t \\ dY_t &= \widetilde{\kappa}\left(\widetilde{\theta} - Y_t\right)\ dt + \widetilde{\sigma} d\widetilde{W}_t \end{aligned}$$

où les $\mathbb{P}-$mouvement brownien W et $\widetilde{W}$ sont tels que

$$\mathrm{Corr}^{\mathbb{P}}\left[W_t, \widetilde{W}_t\right] = \rho, \, \forall t > 0.$$

a) Déterminez l'unique solution forte associée à ce système.

b) Déterminez $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_t\right]$.

c) Le paramètre θ est souvent qualifié de *moyenne à long terme* et le paramètre κ est interprété comme étant la *vitesse du retour vers la moyenne*. Justifiez ces affirmations.

d) Déterminez $\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}\left[X_t\right]$.

e) Déterminez $\mathrm{Corr}^{\mathbb{P}}\left[X_t, Y_t\right]$.

Les solutions

1 Exercice 11.1

a) Posons $f(w) = C_0 e^{\alpha w}$. Puisque

$$\frac{d}{dw} f(w) = C_0 \alpha e^{\alpha w} \text{ et } \frac{d^2}{dw^2} f(w) = C_0 \alpha^2 e^{\alpha w},$$

$$f(W_t) = C_t, \ \frac{df}{dw}(W_t) = \alpha C_t \text{ et } \frac{d^2 f}{dw^2}(W_t) = \alpha^2 C_t.$$

Utilisant le lemme d'Itô, nous obtenons

$$dC_t = \alpha C_t \ dW_t + \frac{\alpha^2}{2} C_t \ dt.$$

b) La règle de multiplication nous donne

$$\begin{aligned}
dY_t &= dX_t C_t \\
&= X_t \ dC_t + C_t \ dX_t + d\langle X, C\rangle_t \\
&= X_t \left(\alpha C_t \ dW_t + \frac{\alpha^2}{2} C_t \ dt\right) + C_t \left(\mu X_t \ dt + \sigma X_t \ dW_t^*\right) \\
&= \alpha Y_t \ dW_t + \frac{\alpha^2}{2} Y_t \ dt + \mu Y_t \ dt + \sigma Y_t \ dW_t^* \\
&= \alpha Y_t \ dW_t + \sigma Y_t \ dW_t^* + \left(\frac{\alpha^2}{2} + \mu\right) Y_t \ dt
\end{aligned}$$

2 Exercice 11.2

a) Si l'équation différentielle stochastique satisfait les trois conditions suivantes, alors nous savons qu'il existe une unique solution.

$$\begin{array}{cc}
(i) & |b(x,t) - b(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leq K \ |x - y|, \ \forall t \geq 0 \\
(ii) & |b(x,t)| + |\sigma(x,t)| \leq K \ (1 + |x|), \ \forall t \geq 0 \\
(iii) & E[X_0^2] < \infty
\end{array}$$

Vérification de (i) :

$$\begin{aligned}
|b(x,t) - b(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| &= |a(b - x) - a(b - y)| + |\sigma - \sigma| \\
&= |a| \, |x - y|.
\end{aligned}$$

Vérification de (ii) : puisque

$$|x| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ x^2 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \leq \begin{cases} 1+x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1+x^2 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases},$$

alors

$$\begin{aligned} |b(x,t)| + |\sigma(x,t)| &= |a(b-x)| + |\sigma| \\ &\leq |a|(|b| + |x|) + |\sigma| \\ &\leq \max(|a||b| + |\sigma|, |a|)\left(1+x^2\right) \end{aligned}$$

Posons donc $K = \max(|a||b| + |\sigma|, |a|)(1+x^2)$.
Vérification de (iii) : comme la condition initiale n'était pas spécifiée, il suffit de choisir X_0 de carré-intégrable.

b) Si nous posons $Z_t = X_t - b$, alors, par le lemme d'Itô, nous avons que

$$\begin{aligned} dZ_t &= dX_t \\ &= a(b - X_t)\,dt + \sigma dW(t) \\ &= -aZ_t + \sigma dW(t). \end{aligned}$$

Le processus Z est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et nous avons montré que la solution à cette équation est

$$Z_t = Z_0 e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s.$$

En remplaçant Z_t par $X_t - b$ nous obtenons

$$X_t - b = (X_0 - b)\,e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s.$$

C'est pourquoi la solution est

$$X_t = X_0 \exp(-at) + b(1 - \exp(-at)) + \sigma \exp(-at) \int_0^t \exp(as)\,dW_s.$$

Posons $Y_t = \int_0^t \exp(as)\,dW_s$. $Y = \{Y_t : t \in [0,T]\}$ est un processus d'Itô[1] avec $Y_0 = 0$,

[1] **Rappel**. Le processus stochastique $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ est un processus d'Itô si pour tout $t \in [0,T]$,

$$X_t \overset{P-\text{p.s.}}{=} X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

où X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0-$mesurable, les processus $K = \{K_t : 0 \leq t \leq T\}$ et $H = \{H_t : 0 \leq t \leq T\}$ sont $\mathbb{F}-$adaptés,

$$\int_0^T |K_s|\,ds < \infty \text{ et } \int_0^T H_s^2 ds < \infty \; P-\text{p.s.}$$

Dans le cas qui nous occupe, $\int_0^T |K_s|\,ds = \int_0^T 0s = 0$ et $\int_0^T e^{2as} ds = \frac{1}{2}\frac{e^{2Ta}-1}{a} < \infty$.

$K_s = 0$ et $H_s = e^{as}$. De plus,

$$X_t = X_0 \exp(-at) + b(1 - \exp(-at)) + \sigma \exp(-at) Y_t.$$

Posons donc $f(y,t) = X_0 e^{-at} + b(1 - \exp(-at)) + \sigma e^{-at} y$ et notons que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial Y}(y,t) &= \sigma e^{-at} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(y,t) &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(X_0 e^{-at} + b(1 - \exp(-at)) + \sigma e^{-at} y\right) &= a\left(-X_0 e^{-at} + b e^{-at} - \sigma e^{-at} y\right) \\
&= a\left(b - X_0 e^{-at} - b + b e^{-at} - \sigma e^{-at} y\right) \\
&= a(b - f(y,t)).
\end{aligned}$$

Puisque $X_t = f(Y_t, t)$, nous pouvons utiliser la quatrième version du lemme d'Itô[2] afin d'obtenir le résultat désiré :

$$\begin{aligned}
df(Y_t,t) &= \frac{\partial f}{\partial Y}(Y_t,t)\ H_t\ dW_t \\
&\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}(Y_t,t)\ K_t + \frac{\partial f}{\partial t}(Y_t,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(Y_t,t)\ H_t^2\right)\ dt.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dX_t &= df(X_t,t) \\
&= \sigma e^{-at}\ e^{at}\ dW_t + \left(\sigma e^{-at}\ 0 + a(b - f(Y_t,t)) + \frac{1}{2} 0\ \left(e^{as}\right)^2\right)\ dt \\
&= \sigma\ dW_t + a(b - f(Y_t,t))\ dt \\
&= \sigma\ dW_t + a(b - X_t)\ dt. \blacksquare
\end{aligned}$$

3 Exercice 11.3

Le terme de dérive $\frac{1}{2} - X_t$ force un retour vers la valeur $\frac{1}{2}$. En effet, si $X_t > \frac{1}{2}$, alors $\frac{1}{2} - X_t < 0$ donnant une poussée à la baisse au processus X. Au contraire, si $X_t < \frac{1}{2}$, alors $\frac{1}{2} - X_t > 0$

[2] Rappel :

$$\begin{aligned}
df(Y_t,t) &= \frac{\partial f}{\partial Y}(Y_t,t)\ H_t\ dW_t \\
&\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}(Y_t,t)\ K_t + \frac{\partial f}{\partial t}(Y_t,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(Y_t,t)\ H_t^2\right)\ dt.
\end{aligned}$$

donnant une poussée à la hausse au processus X. Si $X_t = \frac{1}{2}$, le terme de dérive est nul et c'est le terme de diffusion qui aura un impact sur le comportement de X.

Le terme de diffusion $\sqrt{X_t (1 - X_t)}$ atteint sa valeur maximale lorsque $X_t = \frac{1}{2}$. Il sera nul lorsque $X_t = 0$ ou 1. Si $X_t = 0$, le terme de diffusion est nul et le terme de dérive sera positif, ce qui implique que $X_{t+\varepsilon}$ sera strictement positif. Si $X_t = 1$, le terme de diffusion est nul et le terme de dérive sera négatif, ce qui implique que $X_{t+\varepsilon}$ sera strictement inférieur à 1.

4 Exercice 11.4

Posons $f(w_1, w_2) = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial w_1}(w_1, w_2) &= \frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} = \frac{w_1}{f(w_1, w_2)}; \\
\frac{\partial f}{\partial w_2}(w_1, w_2) &= \frac{w_2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} = \frac{w_2}{f(w_1, w_2)}; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial w_1^2}(w_1, w_2) &= \frac{w_2^2}{\left(\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\right)^3} = \frac{w_2^2}{(f(w_1, w_2))^3}; \\
\frac{\partial^2 f}{\partial w_2^2}(w_1, w_2) &= \frac{w_1^2}{\left(\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\right)^3} = \frac{w_1^2}{(f(w_1, w_2))^3}; \\
\text{et } \frac{\partial^2 f}{\partial w_1 \partial w_2}(w_1, w_2) &= -\frac{w_1 w_2}{\left(\sqrt{w_1^2 + w_2^2}\right)^3}.
\end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
dB_t &= df\left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right) \\
&= \frac{W_t^{(1)}}{f\left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right)} dW_t^{(1)} + \frac{W_t^{(2)}}{f\left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right)} dW_t^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\left(W_t^{(2)}\right)^2}{\left(f\left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right)\right)^3} d\left\langle W^{(1)}\right\rangle_t + \frac{1}{2} \frac{\left(W_t^{(1)}\right)^2}{\left(f\left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right)\right)^3} d\left\langle W^{(2)}\right\rangle_t \\
&\quad - \frac{W_t^{(1)} W_t^{(2)}}{\left(f\left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right)\right)^3} d\left\langle W^{(1)}; W_t^{(2)}\right\rangle_t \\
&= \frac{W_t^{(1)}}{f\left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right)} dW_t^{(1)} + \frac{W_t^{(2)}}{f\left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right)} dW_t^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\left(W_t^{(1)}\right)^2 + \left(W_t^{(2)}\right)^2}{\left(f\left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right)\right)^3} dt \\
&= \frac{W_t^{(1)}}{B_t} dW_t^{(1)} + \frac{W_t^{(2)}}{B_t} dW_t^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{B_t^2}{B_t^3} dt \\
&= \frac{W_t^{(1)}}{B_t} dW_t^{(1)} + \frac{W_t^{(2)}}{B_t} dW_t^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{1}{B_t} dt.
\end{aligned}
$$

Les solutions non disponibles pour les étudiants

5 Exercice 11.7

a) ... directement des notes de cours ...

$$\begin{aligned} X_t &= \theta + (x_0 - \theta)\exp(-\kappa t) + \int_0^t \sigma \exp(-\kappa(t-s))\ dW_s \\ Y_t &= \widetilde{\theta} + \left(x_0 - \widetilde{\theta}\right)\exp(-\widetilde{\kappa} t) + \int_0^t \sigma \exp(-\widetilde{\kappa}(t-s))\ d\widetilde{W}_s \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_t] &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\theta + (x_0 - \theta)\exp(-\kappa t) + \int_0^t \sigma \exp(-\kappa(t-s))\ dW_s\right] \\ &= \theta + (r_0 - \theta)\exp(-\kappa t) + \underbrace{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t \sigma \exp(-\kappa(t-s))\ dW_s\right]}_{=0} \\ &= \theta + (x_0 - \theta)\exp(-\kappa t). \end{aligned}$$

c) En autant que $\kappa \geq 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_t] = \lim_{t\to\infty} \theta + (x_0 - \theta)\exp(-\kappa t) = \theta$$

c'est-à-dire que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists t(\kappa, \varepsilon) > 0$ tel que $\forall t > t(\kappa, \varepsilon)$, $\left|\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_t] - \theta\right| < \varepsilon$.

Remarquons que si $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2$, alors $t(\kappa_1, \varepsilon) > t(\kappa_2, \varepsilon)$, c'est-à-dire que plus κ est grand, moins cela prend de temps avant que $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_t]$ soit proche de θ.

d)

$$\begin{aligned} & \mathrm{Var}^{\mathbb{P}}\left[\theta + (x_0 - \theta)\exp(-\kappa t) + \int_0^t \sigma \exp(-\kappa(t-s))\ dW_s\right] \\ = & \mathrm{Var}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t \sigma \exp(-\kappa(t-s))\ dW_s\right] \\ = & \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\int_0^t \sigma \exp(-\kappa(t-s))\ dW_s\right)^2\right] \\ = & \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t (\sigma \exp(-\kappa(t-s)))^2\ ds\right] \\ = & \int_0^t (\sigma \exp(-\kappa(t-s)))^2\ ds \\ = & \frac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1 - e^{-2\kappa t}\right). \end{aligned}$$

e)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}^{\mathbb{P}}\left[X_t, Y_t\right] &= \mathrm{Cov}^{\mathbb{P}}\left[\begin{array}{c} \theta + (x_0 - \theta)\exp\left(-\kappa t\right) + \int_0^t \sigma \exp\left(-\kappa\left(t-s\right)\right)\ dW_s, \\ \widetilde{\theta} + \left(x_0 - \widetilde{\theta}\right)\exp\left(-\widetilde{\kappa} t\right) + \int_0^t \widetilde{\sigma}\exp\left(-\widetilde{\kappa}\left(t-s\right)\right)\ d\widetilde{W}_s \end{array}\right] \\
&= \mathrm{Cov}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t \sigma \exp\left(-\kappa\left(t-s\right)\right)\ dW_s, \int_0^t \widetilde{\sigma}\exp\left(-\widetilde{\kappa}\left(t-s\right)\right)\ d\widetilde{W}_s\right] \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\int_0^t \sigma \exp\left(-\kappa\left(t-s\right)\right)\ dW_s\right)\left(\int_0^t \widetilde{\sigma}\exp\left(-\widetilde{\kappa}\left(t-s\right)\right)\ d\widetilde{W}_s\right)\right] \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\int_0^t \sigma \exp\left(-\kappa\left(t-s\right)\right)\widetilde{\sigma}\exp\left(-\widetilde{\kappa}\left(t-s\right)\right)\rho\ ds\right)\right] \\
&= \rho\sigma\widetilde{\sigma}\int_0^t \exp\left(-\left(\kappa+\widetilde{\kappa}\right)\left(t-s\right)\right)\ ds \\
&= \frac{\rho\sigma\widetilde{\sigma}}{\kappa+\widetilde{\kappa}}\left(1-e^{-(\kappa+\widetilde{\kappa})t}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Corr}^{\mathbb{P}}\left[X_t, Y_t\right] &= \frac{\mathrm{Cov}^{\mathbb{P}}\left[X_t, Y_t\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}\left[X_t\right]}\sqrt{\mathrm{Var}^{\mathbb{P}}\left[Y_t\right]}} \\
&= \frac{\frac{\rho\sigma\widetilde{\sigma}}{\kappa+\widetilde{\kappa}}\left(1-e^{-(\kappa+\widetilde{\kappa})t}\right)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1-e^{-2\kappa t}\right)}\sqrt{\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2\widetilde{\kappa}}\left(1-e^{-2\widetilde{\kappa} t}\right)}} \\
&= 2\rho\frac{\sqrt{\kappa\widetilde{\kappa}}}{\kappa+\widetilde{\kappa}}\frac{1-e^{-(\kappa+\widetilde{\kappa})t}}{\sqrt{\left(1-e^{-2\kappa t}\right)\left(1-e^{-2\widetilde{\kappa} t}\right)}}.
\end{aligned}
$$