Introduction aux modèles de marché en temps discret : le modèle binomial

80-646-08
Calcul stochastique

Geneviève Gauthier

HEC Montréal

Le titre sans risque I

Le modèle de marché

- Le processus stochastique $\left\{ S_t^{(1)} : t = 0, 1 \right\}$ représente l'évolution du prix d'une part d'un titre non risqué (une obligation, par exemple).
  - Supposons que le temps est mesuré en périodes (une période pouvant correspondre à un an, à un mois, à une journée, à une heure, à une seconde, etc.)
  - Le *taux d'intérêt périodique r* soit constant pendant le temps d'observation du processus,
  - alors
  $$\forall \omega \in \Omega, \ S_1^{(1)}(\omega) = S_0^{(1)}(\omega)(1 + r).$$
  - On peut supposer que $\forall \omega \in \Omega, \ S_0^{(1)}(\omega) = 1$ ce qui implique que
  $$\forall \omega \in \Omega, \ S_1^{(1)}(\omega) = (1 + r).$$

Le titre risqué I

Le modèle de marché

- Le second processus stochastique $\left\{ S_t^{(2)} : t = 0, 1 \right\}$, lui, représente l'évolution du prix d'une part d'un titre risqué, $S_t^{(2)}$ étant le prix d'une part du titre au temps t.
- Comme le prix actuel d'une part de ce titre est connu avec certitude,

$$\forall \omega \in \Omega, \; S_0^{(2)}(\omega) = s_0 \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty).$$

- Nous supposons qu'à la période suivante, le prix d'une part du titre risqué ne peut prendre que deux valeurs, disons s_{11} et s_{12} ($s_{11}, s_{12} \in \mathbb{R}_+$, $s_{11} < s_{12}$).

Espace probabilisable I

- **Question**. Quel est l'espace probabilisable filtré nous permettant de modéliser cette situation?
- **Réponse**. Dans cet exemple, l'expérience aléatoire n'est pas clairement définie. Cependant, si nous considérons le processus stochastique à deux dimensions

$$\overrightarrow{S}_t = \left\{ \left(S_t^{(1)}, S_t^{(2)} \right) : t = 0, 1 \right\},$$

nous remarquons que ce processus n'a que deux trajectoires différentes, soit

	$\left(S_0^{(1)}, S_0^{(2)}\right)^\top$	$\left(S_1^{(1)}, S_1^{(2)}\right)^\top$
trajectoire $\#1$	$(1, s_0)^\top$	$(1+r, s_{11})^\top$
trajectoire $\#2$	$(1, s_0)^\top$	$(1+r, s_{12})^\top$

Espace probabilisable II

- Par conséquent, si $Card\left(\Omega\right) > 2$, alors il y aurait des trajectoires identiques, c'est-à-dire que

$$\exists \omega_1, \omega_2 \in \Omega \text{ tels que } \forall t \in \{0, 1\}, \ \overrightarrow{S}_t\left(\omega_1\right) = \overrightarrow{S}_t\left(\omega_2\right)$$

et alors même notre plus grande source d'information,

$$\mathcal{F}_1 = \sigma\left(S_0^{(1)}, S_0^{(2)}, S_1^{(1)}, S_1^{(2)}\right),$$

ne saurait distinguer entre la réalisation de ω_1 et celle de ω_2.

Espace probabilisable III

- Pour cette raison, nous choisissons $Card\left(\Omega\right) = 2$ et

$$
\begin{array}{ccc}
\omega & \left(S_0^{(1)}\left(\omega\right), S_0^{(2)}\left(\omega\right)\right)^\top & \left(S_1^{(1)}\left(\omega\right), S_1^{(2)}\left(\omega\right)\right)^\top \\
\\
\omega_1 & \left(1, s_0\right)^\top & \left(1 + r, s_{11}\right)^\top \\
\omega_2 & \left(1, s_0\right)^\top & \left(1 + r, s_{12}\right)^\top
\end{array}
$$

- Ce n'est pas la seule forme possible pour Ω, mais celle-ci est commode.
- Le fait de regrouper tous les ω indifférenciés sous une même appellation est pratique courante. C'est aussi une des raisons pour lesquelles plusieurs confondent les concepts d'ensemble fondamental et de variable aléatoire.

Espace probabilisable IV

- En choisissant un tel $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, nous serons en mesure de distinguer lequel de ses éléments s'est réalisé lorsque nous aurons observé le processus jusqu'à échéance, c'est-à-dire jusqu'à $t = 1$.
- C'est pourquoi,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \mathcal{F} \\ &= \{\text{tous les événements de } \Omega\} \\ &= \{\varnothing, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \Omega\}. \end{aligned}$$

Comme le processus S est constant au temps $t = 0, \mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. ■

Le portefeuille I

- Soit

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \text{le nombre de parts détenues du titre non risqué} \\ \phi_2 &= \text{le nombre de parts détenues du titre risqué.} \end{aligned}$$

Definition

On appelle *portefeuille* le couple $\overrightarrow{\phi} = (\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- Si ϕ_i est négatif, c'est qu'il y a eu vente à découvert de $-\phi_i$ parts du titre i.
- La valeur de ce portefeuille au temps t est

$$V_\phi(t, \omega) = \phi_1 S_t^{(1)}(\omega) + \phi_2 S_t^{(2)}(\omega).$$

Le portefeuille II

- Puisque $V_{\phi}(0, \omega) = \phi_1 + \phi_2 s_0$, nous devrons débourser un montant de $\phi_1 + \phi_2 s_0$ afin d'acquérir le portefeuille $\overrightarrow{\phi}$
  - si $\phi_1 + \phi_2 s_0 < 0$, nous recevrons un montant de $-(\phi_1 + \phi_2 s_0)$ lors de l'acquisition du portefeuille $\overrightarrow{\phi}$.

Opportunité d'arbitrage

Definition

On dit que $\overrightarrow{\phi}$ est une *opportunité d'arbitrage* si

$$\begin{array}{ll} (A1) & \forall \omega \in \Omega,\ \ V_\phi\left(0,\omega\right) = 0 \\ (A2) & \forall \omega \in \Omega,\ \ V_\phi\left(1,\omega\right) \geq 0 \\ (A3) & \exists \omega \in \Omega,\ \ V_\phi\left(1,\omega\right) > 0, \end{array}$$

c'est-à-dire qu'à partir d'un investissement nul $(A1)$, nous sommes certains de ne pas essuyer de perte $(A2)$ et nous avons une probabilité positive de réaliser un gain $(A3)$.

Quelles sont les opportunités d'arbitrage du modèle? I

- La condition $(A1)$ implique que, pour que $\overrightarrow{\phi} = (\phi_1, \phi_2)$ soit une opportunité d'arbitrage, il faut que

$$\phi_1 = -\phi_2 s_0 \tag{1}$$

puisque $0 = V_\phi(0, \omega) = \phi_1 + \phi_2 s_0$.

- Il faut dès à présent noter que la condition $(A3)$ nous assure que $(0, 0)$ n'est pas une opportunité d'arbitrage. De ce fait, $(-\phi_2 s_0, \phi_2)$ ne peut être une opportunité d'arbitrage si $\phi_2 = 0$. Supposons donc $\phi_2 \neq 0$.

Quelles sont les opportunités d'arbitrage du modèle? II

- La condition $(A2)$ fait en sorte que $(-\phi_2 s_0, \phi_2)$ est une opportunité d'arbitrage seulement si

$$\begin{aligned} V_\phi(1,\omega_1) &= -\phi_2 s_0 S_1^{(1)}(\omega_1) + \phi_2 S_1^{(2)}(\omega_1) \\ &= -\phi_2 s_0 (1+r) + \phi_2 s_{11} \\ &= \phi_2 (s_{11} - s_0(1+r)) \geq 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_\phi(1,\omega_2) &= -\phi_2 s_0 S_1^{(1)}(\omega_2) + \phi_2 S_2(1,\omega_2) \\ &= -\phi_2 s_0 (1+r) + \phi_2 s_{12} \\ &= \phi_2 (s_{12} - s_0(1+r)) \geq 0. \end{aligned}$$

Donc l'arbitrage ne sera possible que si
$s_{12} > s_{11} \geq s_0(1+r)$ ou si $s_{11} < s_{12} \leq s_0(1+r)$.

Quelles sont les opportunités d'arbitrage du modèle? III

- L'ajout de la troisième condition $(A3)$ implique que si $s_{12} > s_{11} \geq s_0(1+r)$, alors, pour tout $\phi_2 > 0$, le portefeuille $(-\phi_2 s_0, \phi_2)$ est une opportunité d'arbitrage puisque

$$\begin{aligned} V_\phi(1,\omega_1) &= \phi_2(s_{11} - s_0(1+r)) \geq 0; \\ V_\phi(1,\omega_2) &= \phi_2(s_{12} - s_0(1+r)) > 0 \end{aligned}$$

et si $s_{11} < s_{12} \leq s_0(1+r)$ alors, pour tout $\phi_2 < 0$, le portefeuille $(-\phi_2 s_0, \phi_2)$ est une opportunité d'arbitrage car

$$\begin{aligned} V_\phi(1,\omega_1) &= \phi_2(s_{11} - s_0(1+r)) > 0; \\ V_\phi(1,\omega_2) &= \phi_2(s_{12} - s_0(1+r)) \geq 0. \end{aligned}$$

Quelles sont les opportunités d'arbitrage du modèle? IV

- Autrement dit, si $s_{12} > s_{11} \geq s_0\,(1+r)$ alors il suffit de
  - vendre à découvert ns_0 parts du titre non risqué (emprunter un montant de ns_0 dollars)
  - pour acheter n parts du titre risqué.
  - Le montant à débourser est $V_\phi\,(0) = -ns_0\; 1 + n\; s_0 = 0$.
  - À $t = 1$, nous vendons les parts du titre risqué (nous obtenons une somme de $nS_1^{(2)}\,(\omega)$ dollars)
  - et remboursons notre prêt ainsi que les intérêts (un montant de $ns_0\,(1+r)$ dollars).
  - Nous recevons donc un montant net de

$$nS_1^{(2)}\,(\omega) - ns_0\,(1+r) = V_{(-ns_0,n)}\,(1,\omega)$$

$$= \begin{cases} ns_{11} - ns_0\,(1+r) = n\,(s_{11} - s_0\,(1+r)) \geq 0 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ ns_{12} - ns_0\,(1+r) = n\,(s_{12} - s_0\,(1+r)) > 0 & \text{si } \omega = \omega_2. \end{cases}$$

Quelles sont les opportunités d'arbitrage du modèle? V

- Si $s_{11} < s_{12} \leq s_0 (1 + r)$ alors on peut
  - vendre à découvert n parts du titre risqué et
  - investir le montant ns_0 obtenu dans l'achat de ns_0 parts du titre sans risque:
  - $V_\phi (0) = ns_0 \; 1 - n \; s_0 = 0$.
  - Au temps $t = 1$, un montant de $ns_0 (1 + r)$ dollars est obtenu de la vente du titre sans risque et achetons à un coût de $nS_1^{(2)} (\omega)$ les n parts du titre risqué que nous avions vendues à découvert.
  - Le montant net de cette transaction est

$$
\begin{aligned}
& ns_0 (1 + r) - nS_1^{(2)} (\omega) \\
= \; & V_{(ns_0, -n)} (1, \omega) \\
= \; & \begin{cases} ns_0 (1 + r) - ns_{11} = n (s_0 (1 + r) - s_{11}) > 0 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ ns_0 (1 + r) - ns_{12} = n (s_0 (1 + r) - s_{12}) \geq 0 & \text{si } \omega = \omega_2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Quelles sont les opportunités d'arbitrage du modèle? VI

- Par contre, si $s_{11} < s_0\,(1+r) < s_{12}$, il n'y a pas de portefeuilles qui sont des opportunités d'arbitrage puisque
  - $V_\phi\,(0) = 0 \Rightarrow \phi_1 = -\phi_2 s_0$.
  - Si $\phi_2 = 0$, alors $V_\phi\,(1,\omega_1) = V_\phi\,(1,\omega_2) = 0$ et,
  - si $\phi_2 \neq 0$, alors $V_\phi\,(1,\omega_1)$ et $V_\phi\,(1,\omega_2)$ ne peuvent pas être tous les deux non négatifs puisque

$$\begin{aligned} V_\phi\,(1,\omega_1) &= \phi_2\underbrace{\left(s_{11} - s_0\,(1+r)\right)}_{<0} \\ \text{et } V_\phi\,(1,\omega_2) &= \phi_2\underbrace{\left(s_{12} - s_0\,(1+r)\right)}_{>0}. \end{aligned}$$

Quelles sont les opportunités d'arbitrage du modèle? VII

- **Dans ce qui suit, nous supposons que notre modèle de marché n'admet aucune opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire que**

$$s_{11} < s_0 (1 + r) < s_{12}. \tag{2}$$

Droit conditionnel I

Definition

Un **droit conditionnel** est un contrat entre deux parties, un vendeur et un acheteur, dont la valeur dépendra de l'état du marché pendant la période de validité du contrat. C'est comme un contrat d'assurance.

- Mathématiquement parlant, un droit conditionnel C est toute $(\Omega, \mathcal{F})$ −variable aléatoire à valeurs non négatives.

Droit conditionnel II

- Par exemple, une option de vente est un droit conditionnel intervenant au temps $t = 0$ entre les deux parties, permettant à l'acheteur de vendre, au temps $t = 1$, une part du titre risqué à un prix fixé dès maintenant, disons K, que l'on appelle le prix d'exercice.
  - Ainsi, si $S_1^{(2)} < K$ alors l'acheteur se prévaudra de son option et vendra sa part du titre risqué à un montant K supérieur à celui qu'il obtiendrait sur le marché.
  - Par contre, si $S_1^{(2)} \geq K$, l'acheteur n'exercera pas son option puisqu'il peut obtenir un meilleur prix sur le marché que celui qui est stipulé par le contrat.
  - Donc la valeur de l'option de vente est $\max\left(K - S_1^{(2)}, 0\right)$.
  - Bien entendu, le vendeur du droit conditionnel n'offrira pas cet avantage à l'acheteur sans être dédommagé. Le montant versé au temps $t = 0$ par l'acheteur au vendeur afin d'acquérir l'option est le prix du droit conditionnel.

Tarification

Droit conditionnel

- **Question**. Quel est le prix du droit conditionnel?

Tarification I

Peut-on choisir le portefeuille de sorte que sa valeur à $t = 1$ soit identique au droit contingent? Dans le cas où il y a autant de scénarios que de titres, il est possible d'obtenir une solution unique sous certaines conditions.
Si $c_i = C(\omega_i)$ alors

$$
\begin{aligned}
& \forall \omega \in \Omega, V_\phi(1, \omega) = C(\omega) \\
\Leftrightarrow \quad & \phi_1 (1 + r) + \phi_2 s_{11} = c_1 \text{ et } \phi_1 (1 + r) + \phi_2 s_{12} = c_2 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_{12} c_1 - s_{11} c_2}{(s_{12} - s_{11})(1+r)} \\ \frac{c_2 - c_1}{s_{12} - s_{11}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Tarification II

Ainsi, la valeur au temps $t = 0$ de ce portefeuille est

$$\begin{aligned} & V_\phi(0,\omega) \\ = \;& \frac{s_{12}c_1 - s_{11}c_2}{(s_{12}-s_{11})(1+r)} + \frac{c_2 - c_1}{s_{12}-s_{11}} s_0 \\ = \;& \frac{c_1}{1+r}\frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12}-s_{11}} + \frac{c_2}{1+r}\frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12}-s_{11}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Mesure neutre au risque I

- Jusqu'à présent, nous avons travaillé sur un espace probabilisable filtré et il n'a pas encore été question de mesure de probabilité.
- Posons

$$q = \frac{s_{12} - s_0 (1 + r)}{s_{12} - s_{11}}$$

et notons que la condition de non-arbitrage est équivalente au fait que q soit compris entre 0 et 1:

$$s_{11} < s_0 (1 + r) < s_{12} \Leftrightarrow 0 < q < 1.$$

- Ainsi, si $\mathbb{Q}(\omega_1) = q$ et $\mathbb{Q}(\omega_2) = 1 - q$ alors $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité construite sur notre espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$.

Mesure neutre au risque II

- Il est important de noter que $\mathbb{Q}\left(\omega_1\right)$ ne correspond vraisemblablement pas à la probabilité "réelle" que l'événement ω_1 survienne.
- Généralement, nous ne connaissons pas cette probabilité.
- Appelons donc $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité qui associe à chacun des ω de l'ensemble fondamental la probabilité "réelle" que cet événement survienne ($\mathbb{P}\left(\omega_1\right) = p$ et $\mathbb{P}\left(\omega_2\right) = 1 - p$).

Mesure neutre au risque III

- Comme nous l'avons déterminé à l'équation (3), le prix du droit conditionnel C est

$$
\begin{aligned}
& \frac{c_1}{1+r}\frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}-s_{11}} + \frac{c_2}{1+r}\frac{s_0(1+r)-s_{11}}{s_{12}-s_{11}} \\
= \; & \frac{c_1}{1+r}\frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}-s_{11}} + \frac{c_2}{1+r}\left(1-\frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}-s_{11}}\right) \\
= \; & \frac{c_1}{1+r}q + \frac{c_2}{1+r}(1-q) \\
= \; & \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{C}{1+r}\right] = \frac{1}{1+r}\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}[C].
\end{aligned}
$$

Donc, le prix de tout droit conditionnel C correspond à la valeur espérée, sous la mesure $\mathbb{Q}$, dudit droit conditionnel actualisé $\frac{C}{1+r}$

Mesure neutre au risque IV

- Merveilleux! Au lieu d'avoir à résoudre un problème d'optimisation afin de déterminer le prix d'un droit conditionnel, nous n'aurons qu'à calculer une espérance, pourvu que l'on connaisse la bonne mesure de probabilité à placer sur notre espace probabilisable filtré.

Mesure neutre au risque I

Pourquoi cette appellation?

Pourquoi cette appellation?

- Le rendement d'un titre pendant la période de temps allant de $t-1$ à t est défini par

$$R_S(t,\omega) = \frac{S_t(\omega) - S_{t-1}(\omega)}{S_{t-1}(\omega)}$$

où $S_t(\omega)$ dénote le prix d'une part du titre au temps t.

Mesure neutre au risque II

Pourquoi cette appellation?

- Pour toute mesure de probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$, le rendement espéré du titre sans risque sur la période de temps $[0, 1]$ est

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[R_{S^{(1)}}(1)\right] &= \sum_{\omega\in\Omega} \frac{S_1^{(1)}(\omega) - S_0^{(1)}(\omega)}{S_0^{(1)}(\omega)} \widehat{\mathbb{P}}(\omega) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} \frac{(1+r) - 1}{1} \widehat{\mathbb{P}}(\omega) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} r\widehat{\mathbb{P}}(\omega) \\
&= r.
\end{aligned}$$

Mesure neutre au risque III

Pourquoi cette appellation?

- Le rendement espéré du titre risqué, sous la mesure $\widehat{\mathbb{P}}$, est

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[R_{S^{(2)}}(1)\right] &= \sum_{i=1}^{2} \frac{S_1^{(2)}(\omega_i) - S_0^{(2)}(\omega_i)}{S_0^{(2)}(\omega_i)} \widehat{\mathbb{P}}(\omega_i) \\
&= \frac{s_{11} - s_0}{s_0} \widehat{\mathbb{P}}(\omega_1) + \frac{s_{12} - s_0}{s_0} \widehat{\mathbb{P}}(\omega_2).
\end{aligned}
$$

Mesure neutre au risque IV

Pourquoi cette appellation?

- Donc le "vrai" rendement espéré du titre risqué est celui calculé sous la mesure $\mathbb{P}$ et correspond à

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[R_{S^{(2)}}(1)\right] &= \frac{s_{11}-s_0}{s_0}\mathbb{P}(\omega_1)+\frac{s_{12}-s_0}{s_0}\mathbb{P}(\omega_2)\\
&= \frac{s_{11}-s_0}{s_0}p+\frac{s_{12}-s_0}{s_0}(1-p)\\
&= \left(\frac{s_{11}-s_0}{s_0}-\frac{s_{12}-s_0}{s_0}\right)p+\frac{s_{12}-s_0}{s_0}\\
&= \frac{s_{12}-s_0}{s_0}-\frac{s_{12}-s_{11}}{s_0}p
\end{aligned}$$

et cette dernière quantité sera, en général, différente de r.

Mesure neutre au risque V

Pourquoi cette appellation?

- Par contre, le rendement espéré du titre risqué, calculé sous la mesure $\mathbb{Q}$, est

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[R_{S^{(2)}}(1)\right] \\
= \;& \frac{s_{11}-s_0}{s_0}\mathbb{Q}\left(\omega_1\right)+\frac{s_{12}-s_0}{s_0}\mathbb{Q}\left(\omega_2\right) \\
= \;& \frac{s_{11}-s_0}{s_0}\frac{s_{12}-s_0\left(1+r\right)}{s_{12}-s_{11}} \\
& +\frac{s_{12}-s_0}{s_0}\left(1-\frac{s_{12}-s_0\left(1+r\right)}{s_{12}-s_{11}}\right) \\
= \;& r
\end{aligned}
$$

ce qui signifie que, sur l'espace $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{Q})$, il n'y a pas de bénéfice associé au risque, le rendement espéré du titre risqué est le même que celui du titre non risqué. ■

Mesure martingale I

Pourquoi cette appellation?

Pourquoi cette appellation?
Parce que, sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$, les processus de prix actualisés des titres $\left\{ \frac{S_t^{(i)}}{(1+r)^t} : t = 0, 1 \right\}$ sont des martingales.

Mesure martingale II

Pourquoi cette appellation?

Preuve. Dans le cas du titre sans risque,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left.\frac{S_1^{(1)}}{1+r}\right| \mathcal{F}_0\right] &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left.\frac{1+r}{1+r}\right| \mathcal{F}_0\right] \\ &= 1 \\ &= \frac{S_0^{(1)}}{(1+r)^0}. \end{aligned}$$

Mesure martingale III

Pourquoi cette appellation?

En ce qui concerne le titre risqué,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^{(2)}}{1+r}\middle|\mathcal{F}_0\right] &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^{(2)}}{1+r}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{2}\frac{S_1^{(2)}(\omega_i)}{1+r}\mathbb{Q}(\omega_i) \\
&= \frac{s_{11}}{1+r}\mathbb{Q}(\omega_1)+\frac{s_{12}}{1+r}\mathbb{Q}(\omega_2) \\
&= \frac{s_{11}}{1+r}\frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}-s_{11}}+\frac{s_{12}}{1+r}\frac{s_0(1+r)-s_{11}}{s_{12}-s_{11}} \\
&= s_0 \\
&= \frac{S_0^{(2)}}{(1+r)^0}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Facteur d'actualisation

- Nous avons vu que si le modèle n'admet pas l'arbitrage, alors il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ telle que le prix du droit contingent au temps 0 est l'espérance de la valeur actualisée de ses flux monétaires futurs

$$\text{Prix} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{C}{1+r}\right].$$

- Or, sous la «vraie» mesure de probabilité $\mathbb{P}$, il n'y a aucune raison d'actualiser les flux monétaires futurs avec le facteur d'actualisation issu du taux d'intérêt sans risque puisque le droit contingent est un actif risqué.
- On pourrait obtenir le prix du droit contingent en prenant l'espérance, sous la mesure $\mathbb{P}$, de la valeur actualisée de ses flux monétaires futurs.
- Le problème dans ce cas est de déterminer le facteur d'actualisation.

Le titre sans risque

Le modèle

- Le processus stochastique $\left\{S_t^{(1)} : t = 0, 1, 2\right\}$ représente l'évolution du prix d'une part d'un titre non risqué.
- Supposons que le taux d'intérêt périodique r soit constant pendant le temps d'observation du processus et que

$$\forall \omega \in \Omega,\ S_0^{(1)}(\omega) = 1,$$

alors

$$\forall \omega \in \Omega,\ S_t^{(1)}(\omega) = (1 + r)^t.$$

Le titre risqué I

Le modèle

- Le second processus stochastique $\left\{ S_t^{(2)} : t = 0, 1, 2 \right\}$, lui, représente l'évolution du prix d'une part d'un titre risqué, $S_t^{(2)}$ étant le prix d'une part du titre au temps t.
- Comme le prix actuel d'une part de ce titre est connu avec certitude,

$$\forall \omega \in \Omega, \; S_0^{(2)}(\omega) = s_0 \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty).$$

- Nous supposons qu'à la période suivante, soit $t = 1$, le prix d'une part du titre risqué ne peut prendre que deux valeurs, disons s_{11} et s_{12} ($s_{11}, s_{12} \in \mathbb{R}_+$, $s_{11} < s_{12}$).

Le titre risqué II

Le modèle

- Nous supposons qu'à la seconde période, soit $t = 2$, il n'y ait que quatre valeurs possibles pour le prix d'une part du titre, disons s_{21}, s_{22} (si $S_1^{(2)} = s_{11}$), s_{23} et s_{24} (si $S_1^{(2)} = s_{12}$) avec les contraintes $s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24} \in \mathbb{R}_+$, $s_{21} < s_{22}$, $s_{23} < s_{24}$.

Le titre risqué III

Le modèle

$$
\begin{array}{cccc}
\omega & \begin{pmatrix} S_0^{(1)}(\omega) \\ S_0^{(2)}(\omega) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_1^{(1)}(\omega) \\ S_1^{(2)}(\omega) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_2^{(1)}(\omega) \\ S_2^{(2)}(\omega) \end{pmatrix} \\
\omega_1 & (1, s_0)^\top & (1+r, s_{11})^\top & \left((1+r)^2, s_{21}\right)^\top \\
\omega_2 & (1, s_0)^\top & (1+r, s_{11})^\top & \left((1+r)^2, s_{22}\right)^\top \\
\omega_3 & (1, s_0)^\top & (1+r, s_{12})^\top & \left((1+r)^2, s_{23}\right)^\top \\
\omega_4 & (1, s_0)^\top & (1+r, s_{12})^\top & \left((1+r)^2, s_{24}\right)^\top
\end{array}
$$

Espace probabilisable filtré

Le modèle

- Tel que nous avons argumenté précédemment, nous pouvons justifier le choix d'un ensemble fondamental $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.
- La tribu $\mathcal{F}$ est l'ensemble de tous les événements de Ω
- et la filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t = 0, 1, 2\}$ est constituée des sous-tribus de $\mathcal{F}$ suivantes:
  - $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$,
  - $\mathcal{F}_1 = \sigma\{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$ et
  - $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$.

Exemple

Le modèle

Si $r = 10\%$ alors

$$
\begin{array}{cccc}
\omega & \begin{pmatrix} S_0^{(1)}(\omega) \\ S_0^{(2)}(\omega) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_1^{(1)}(\omega) \\ S_1^{(2)}(\omega) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_2^{(1)}(\omega) \\ S_2^{(2)}(\omega) \end{pmatrix} \\
\omega_1 & (1;2)^\top & (1,1;2)^\top & (1,21;1)^\top \\
\omega_2 & (1;2)^\top & (1,1;2)^\top & (1,21;3)^\top \\
\omega_3 & (1;2)^\top & (1,1;4)^\top & (1,21;1)^\top \\
\omega_4 & (1;2)^\top & (1,1;4)^\top & (1,21;5)^\top .
\end{array}
$$

Notation

Le titre sans risque

Definition

Un processus stochastique $X = \{X_t : t = 0, 1, 2, \dots\}$ construit sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$ est dit **prévisible** par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t : t = 0, 1, 2, \dots\}$ si X_0 est une $(\Omega, \mathcal{F}_0) -$ variable aléatoire et $\forall t \in \{1, 2, \dots\}$, X_t est une $(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}) -$ variable aléatoire.

Stratégie d'investissement I

- Les processus stochastiques prévisibles $\left\{\phi_t^{(1)} : t = 0, 1, 2\right\}$ et $\left\{\phi_t^{(2)} : t = 0, 1, 2\right\}$ représentent l'évolution de notre portefeuille au cours du temps:
  - $\phi_t^{(1)}$ = nombre de parts du titre non risqué détenues pendant la période de temps $(t-1, t]$,
  - $\phi_t^{(2)}$ = nombre de parts du titre risqué détenues pendant la période de temps $(t-1, t]$.
- Exceptionnellement, le portefeuille $\overrightarrow{\phi}_0 = \left(\phi_0^1, \phi_0^2\right)$ n'est détenu qu'à l'instant $t = 0$. Dans les faits, nous poserons $\overrightarrow{\phi}_0 = \overrightarrow{\phi}_1$.

Stratégie d'investissement II

Definition

Le processus stochastique à deux dimensions $\overrightarrow{\phi} = \left\{ \left(\phi_t^{(1)}, \phi_t^{(2)} \right) : t = 0, 1, 2 \right\}$ est appelé **stratégie d'investissement.**

ω	$\left(\phi_0^{(1)}(\omega) ; \phi_0^{(2)}(\omega)\right)$	$\left(\phi_1^{(1)}(\omega) ; \phi_1^{(2)}(\omega)\right)$	$\left(\phi_2^{(1)}(\omega) ; \phi_2^{(2)}(\omega)\right)$
ω_1	$\left(\phi_1^{(1)} ; \phi_1^{(2)}\right)$	$\left(\phi_1^{(1)} ; \phi_1^{(2)}\right)$	$\left(\phi_2^{(1)}(\omega_1) ; \phi_2^{(2)}(\omega_1)\right)$
ω_2	$\left(\phi_1^{(1)} ; \phi_1^{(2)}\right)$	$\left(\phi_1^{(1)} ; \phi_1^{(2)}\right)$	$\left(\phi_2^{(1)}(\omega_1) ; \phi_2^{(2)}(\omega_1)\right)$
ω_3	$\left(\phi_1^{(1)} ; \phi_1^{(2)}\right)$	$\left(\phi_1^{(1)} ; \phi_1^{(2)}\right)$	$\left(\phi_2^{(1)}(\omega_3) ; \phi_2^{(2)}(\omega_3)\right)$
ω_4	$\left(\phi_1^{(1)} ; \phi_1^{(2)}\right)$	$\left(\phi_1^{(1)} ; \phi_1^{(2)}\right)$	$\left(\phi_2^{(1)}(\omega_3) ; \phi_2^{(2)}(\omega_3)\right)$

- Nous acquérons au temps 0 le portefeuille $\overrightarrow{\phi}_1$ au coût de $V_\phi(0) = \phi_1^{(1)} \ 1 + \phi_1^{(2)} \ s_0$.

Stratégie d'investissement III

- Rappelons que $\phi_1^{(1)}$ et $\phi_1^{(2)}$ sont des $(\Omega, \mathcal{F}_0)-$ variables aléatoires, elles sont donc constantes.
- Lorsque, au temps $t = 1$, les nouveaux prix sont annoncés, la valeur de notre stratégie change pour devenir $V_\phi(1, \omega) = \phi_1^{(1)}\ (1+r) + \phi_1^{(2)}\ S_1^{(2)}(\omega)$.
- Tout de suite après l'annonce de ces prix, l'occasion nous est offerte de modifier notre portefeuille pour profiter de l'information acquise (nous savons maintenant différencier entre $\{\omega_1, \omega_2\}$ et $\{\omega_3, \omega_4\}$): nous liquidons $\overrightarrow{\phi}_1(\omega)$ (et nous obtenons un montant égal à $V_\phi(1, \omega)$) pour acheter le portefeuille $\overrightarrow{\phi}_2(\omega)$ au montant de $\phi_2^{(1)}(\omega)$ $(1+r) + \phi_2^{(2)}(\omega)\ S_1^{(2)}(\omega)$.
- Ce dernier portefeuille sera détenu jusqu'à l'instant $t = 2$, où une nouvelle annonce des prix des parts en modifiera la valeur: $V_\phi(2, \omega) = \phi_2^{(1)}(\omega)\ (1+r)^2 + \phi_2^{(2)}(\omega)\ S_2^{(2)}(\omega)$.

Stratégie d'investissement IV

- Nous obligeons les processus de portefeuilles à être prévisibles afin d'illustrer le fait que l'investisseur ne connaît pas les prix des titres à la période suivante lors de l'achat du portefeuille.

Stratégie d'investissement V

Definition

Une stratégie est dite **autofinancée** si, lors des changements de portefeuilles, il n'y a aucun argent "neuf" investi pas plus qu'il n'y a de l'argent de l'investissement qui est retiré, c'est-à-dire que $\forall t \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} & \phi_t^{(1)}(\omega)(1+r)^t + \phi_t^{(2)}(\omega) S_t^{(2)}(\omega) \\ = \; & \phi_{t+1}^{(1)}(\omega)(1+r)^t + \phi_{t+1}^{(2)}(\omega) S_t^{(2)}(\omega). \end{aligned}$$

Stratégie d'investissement VI

Definition

La **valeur** $V_\phi(t)$ de la stratégie ϕ au temps t est définie par

$$V_\phi(t,\omega) = \begin{cases} \phi_1^{(1)} + \phi_1^{(2)} s_0 & \text{si } t = 0 \\ \phi_t^{(1)}(\omega)(1+r)^t + \phi_t^{(2)}(\omega) S_t^{(2)}(\omega) & \text{si } t = 1, 2. \end{cases}$$

Remarquons que $\{V_\phi(t) : t = 0, 1, 2\}$ est un processus stochastique construit sur $(\Omega, \mathcal{F})$ adapté à $\mathbb{F}$.

Exemple I

Stratégie d'investissement

La stratégie qui suit est autofinancée (vérifiez!)

ω	$\left(\phi_0^{(1)}(\omega);\phi_0^{(2)}(\omega)\right)$	$\left(\phi_1^{(1)}(\omega);\phi_1^{(2)}(\omega)\right)$	$\left(\phi_2^{(1)}(\omega);\phi_2^{(2)}(\omega)\right)$
ω_1	$(-2;3)$	$(-2;3)$	$(-4;4,1)$
ω_2	$(-2;3)$	$(-2;3)$	$(-4;4,1)$
ω_3	$(-2;3)$	$(-2;3)$	$(1;2,175)$
ω_4	$(-2;3)$	$(-2;3)$	$(1;2,175)$

Exemple II

Stratégie d'investissement

et l'évolution de la valeur de cette stratégie est donnée par

ω	$V_\phi(0,\omega)$	$V_\phi(1,\omega)$	$V_\phi(2,\omega)$
ω_1	4	$3,8$	$-0,74$
ω_2	4	$3,8$	$7,46$
ω_3	4	$9,8$	$3,385$
ω_4	4	$9,8$	$12,085$

Opportunité d'arbitrage I

- **Question**. Quelles sont les conditions sur s_0, s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24} et r qui font en sorte que le modèle de marché n'admet pas d'opportunité d'arbitrage?

Opportunité d'arbitrage II

- **Réponse**. Pour répondre à cette question, il suffit de réaliser que le modèle multipériode n'est qu'une répétition du modèle à une seule période.
  - En effet, lors de l'étude du modèle à une période, nous avons établi qu'il est nécessaire que $s_{11} < s_0 \left(1 + r\right) < s_{12}$. Cette condition est toujours indispensable.
  - Maintenant, conditionnellement au fait que nous observons $S_1^{(2)} = s_{11}$, nous sommes dans une situation de modèle de marché à une seule période puisque, alors, deux valeurs sont possibles pour le prix d'une part du titre risqué à la prochaine période. Cela implique qu'il est nécessaire que $s_{21} < s_{11} \left(1 + r\right) < s_{22}$.
  - De même, conditionnellement au fait que nous observons $S_1^{(2)} = s_{12}$, il sera nécessaire que $s_{23} < s_{12} \left(1 + r\right) < s_{24}$.■
- **Exercice**. Vérifiez que le modèle de marché de l'exemple numérique n'admet pas d'arbitage.

Mesure neutre au risque I

- **Question**. Quelle est la mesure $\mathbb{Q}$ que l'on doit placer sur l'espace probabilisé

$$(\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \mathcal{F})$$

afin que les processus de prix actualisés des titres non risqué et risqué soient des martingales?

Mesure neutre au risque II

- **Réponse**. Le processus de prix actualisés du titre non risqué est une martingale sous n'importe quelle mesure de probabilité puisqu'il est constant

$$\left(\frac{S_t^{(1)}(\omega)}{(1+r)^t} = 1 \ \forall \omega \in \Omega, \forall t = 0, 1, 2 \right).$$

Mesure neutre au risque III

- Considérons maintenant le processus de prix actualisés du titre risqué. Nous cherchons la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ qui fait en sorte que

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_2^{(2)}}{(1+r)^2} \middle| \mathcal{F}_1 \right] = \frac{S_1^{(2)}}{(1+r)^1}$$

et

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^{(2)}}{1+r} \middle| \mathcal{F}_0 \right] = \frac{S_0^{(2)}}{(1+r)^0}.$$

Mesure neutre au risque IV

- Calculons!

D'une part, puisque

$$\begin{aligned}
E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^{(2)}}{1+r}\middle|\mathcal{F}_0\right] &= E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^{(2)}}{1+r}\right]\\
&= \frac{s_{11}}{1+r}\mathbb{Q}\{\omega_1,\omega_2\} + \frac{s_{12}}{1+r}\mathbb{Q}\{\omega_3,\omega_4\}\\
&= \frac{s_{11}}{1+r}\mathbb{Q}\{\omega_1,\omega_2\} + \frac{s_{12}}{1+r}\left(1-\mathbb{Q}\{\omega_1,\omega_2\}\right)\\
&= \frac{s_{12}}{1+r} - \frac{s_{12}-s_{11}}{1+r}\mathbb{Q}\{\omega_1,\omega_2\},\\
\text{et } \frac{S_0^{(2)}}{(1+r)^0} &= s_0,
\end{aligned}$$

Mesure neutre au risque V

alors

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left.\frac{S_1^{(2)}}{1+r}\right|\mathcal{F}_0\right]=\frac{S_0^{(2)}}{(1+r)^0} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{s_{12}}{1+r}-\frac{s_{12}-s_{11}}{1+r}\mathbb{Q}\left\{\omega_1,\omega_2\right\}=s_0 \\ \Leftrightarrow\quad & \mathbb{Q}\left\{\omega_1,\omega_2\right\}=\frac{s_{12}-s_0\left(1+r\right)}{s_{12}-s_{11}}. \end{aligned}$$

Mesure neutre au risque VI

D'autre part, puisque $\forall \omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left.\frac{S_2^{(2)}}{(1+r)^2}\right|\mathcal{F}_1\right](\omega) &= \frac{s_{21}}{(1+r)^2}\frac{\mathbb{Q}\{\omega_1\}}{\mathbb{Q}\{\omega_1,\omega_2\}} + \frac{s_{22}}{(1+r)^2}\frac{\mathbb{Q}\{\omega_2\}}{\mathbb{Q}\{\omega_1,\omega_2\}} \\
\text{et } \frac{S_1^{(2)}(\omega)}{(1+r)^1} &= \frac{s_{11}}{1+r}
\end{aligned}$$

alors $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left.\frac{S_2^{(2)}}{(1+r)^2}\right|\mathcal{F}_1\right] = \frac{S_1^{(2)}}{(1+r)^1}$ entraîne que

$$\begin{aligned}
\frac{s_{11}}{1+r} &= \frac{s_{21}}{(1+r)^2}\frac{\mathbb{Q}\{\omega_1\}}{\mathbb{Q}\{\omega_1,\omega_2\}} + \frac{s_{22}}{(1+r)^2}\frac{\mathbb{Q}\{\omega_2\}}{\mathbb{Q}\{\omega_1,\omega_2\}} \\
&= \frac{s_{21}}{(1+r)^2}\frac{\mathbb{Q}\{\omega_1\}}{\mathbb{Q}\{\omega_1,\omega_2\}} + \frac{s_{22}}{(1+r)^2}\left(1-\frac{\mathbb{Q}\{\omega_1\}}{\mathbb{Q}\{\omega_1,\omega_2\}}\right) \\
&= \frac{s_{22}}{(1+r)^2} - \frac{s_{22}-s_{21}}{(1+r)^2}\frac{\mathbb{Q}\{\omega_1\}}{\mathbb{Q}\{\omega_1,\omega_2\}} \\
&= \frac{s_{22}}{(1+r)^2} - \frac{s_{22}-s_{21}}{(1+r)^2}\frac{\mathbb{Q}\{\omega_1\}}{\frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}-s_{11}}}
\end{aligned}$$

Mesure neutre au risque VII

Nous en concluons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}\{\omega_1\} &= \frac{s_{22} - s_{11}(1+r)}{s_{22} - s_{21}} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} \\
&\text{et} \\
\mathbb{Q}\{\omega_2\} &= \mathbb{Q}\{\omega_1, \omega_2\} - \mathbb{Q}\{\omega_1\} \\
&= \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} - \frac{s_{22} - s_{11}(1+r)}{s_{22} - s_{21}} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} \\
&= \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} \left(1 - \frac{s_{22} - s_{11}(1+r)}{s_{22} - s_{21}}\right).
\end{aligned}$$

(Dans l'exemple numérique introduit auparavant $\mathbb{Q}\{\omega_1\} = 0,36$ et $\mathbb{Q}\{\omega_2\} = 0,54$.)

Mesure neutre au risque VIII

De même, puisque $\forall \omega \in \{\omega_3, \omega_4\}$,

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_2^{(2)}}{(1+r)^2}\middle|\mathcal{F}_1\right](\omega) = \frac{s_{23}}{(1+r)^2}\frac{\mathbb{Q}\{\omega_3\}}{\mathbb{Q}\{\omega_3,\omega_4\}} + \frac{s_{24}}{(1+r)^2}\frac{\mathbb{Q}\{\omega_4\}}{\mathbb{Q}\{\omega_3,\omega_4\}}$$

$$\text{et } \frac{S_1^{(2)}(\omega)}{(1+r)^1} = \frac{s_{12}}{1+r},$$

alors $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_2^{(2)}}{(1+r)^2}\middle|\mathcal{F}_1\right] = \frac{S_1^{(2)}}{(1+r)^1}$ entraîne que

$$\begin{aligned}
\frac{s_{12}}{1+r} &= \frac{s_{23}}{(1+r)^2}\frac{\mathbb{Q}\{\omega_3\}}{\mathbb{Q}\{\omega_3,\omega_4\}} + \frac{s_{24}}{(1+r)^2}\frac{\mathbb{Q}\{\omega_4\}}{\mathbb{Q}\{\omega_3,\omega_4\}} \\
&= \frac{s_{23}}{(1+r)^2}\frac{\mathbb{Q}\{\omega_3\}}{\mathbb{Q}\{\omega_3,\omega_4\}} + \frac{s_{24}}{(1+r)^2}\left(1 - \frac{\mathbb{Q}\{\omega_3\}}{\mathbb{Q}\{\omega_3,\omega_4\}}\right) \\
&= \frac{s_{24}}{(1+r)^2} - \frac{s_{24}-s_{23}}{(1+r)^2}\frac{\mathbb{Q}\{\omega_3\}}{\mathbb{Q}\{\omega_3,\omega_4\}}.
\end{aligned}$$

Mesure neutre au risque IX

Nous en concluons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}\{\omega_3\} &= \frac{s_{24} - s_{12}(1+r)}{s_{24} - s_{23}} \mathbb{Q}\{\omega_3, \omega_4\} \\
&= \frac{s_{24} - s_{12}(1+r)}{s_{24} - s_{23}} \left(1 - \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}}\right) \\
\mathbb{Q}\{\omega_4\} &= \mathbb{Q}\{\omega_3, \omega_4\} - \mathbb{Q}\{\omega_3\} \\
&= \left(1 - \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}}\right)\left(1 - \frac{s_{24} - s_{12}(1+r)}{s_{24} - s_{23}}\right).
\end{aligned}$$

(Revenons à l'exemple numérique: $\mathbb{Q}\{\omega_3\} = 0,015$ et $\mathbb{Q}\{\omega_4\} = 0,085$.)■

Tarification I

- **Question**. Soit C un droit conditionnel. Quel est son prix au temps $t = 0$?

Réponse.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{C}{(1+r)^2}\right] \\
= \; & \frac{C(\omega_1)}{(1+r)^2}\frac{s_{22}-s_{11}(1+r)}{s_{22}-s_{21}}\frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}-s_{11}} \\
&+\frac{C(\omega_2)}{(1+r)^2}\frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}-s_{11}}\left(1-\frac{s_{22}-s_{11}(1+r)}{s_{22}-s_{21}}\right) \\
&+\frac{C(\omega_3)}{(1+r)^2}\frac{s_{24}-s_{12}(1+r)}{s_{24}-s_{23}}\left(1-\frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}-s_{11}}\right) \\
&+\frac{C(\omega_4)}{(1+r)^2}\left(1-\frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}-s_{11}}\right)\left(1-\frac{s_{24}-s_{12}(1+r)}{s_{24}-s_{23}}\right)
\end{aligned}
$$

Exemple I
Tarification

Le droit conditionnel est une option d'achat ayant pour prix d'exercice $K = 2$, c'est-à-dire que
$C(\omega) = \max\left(S_2^2(\omega) - K, 0\right)$.

ω	$\begin{pmatrix} S_0^{(1)}(\omega) \\ S_0^{(2)}(\omega) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} S_1^{(1)}(\omega) \\ S_1^{(2)}(\omega) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} S_2^{(1)}(\omega) \\ S_2^{(2)}(\omega) \end{pmatrix}$	$C(\omega)$
ω_1	$(1;2)^\top$	$(1,1;2)^\top$	$(1,21;1)^\top$	0
ω_2	$(1;2)^\top$	$(1,1;2)^\top$	$(1,21;3)^\top$	1
ω_3	$(1;2)^\top$	$(1,1;4)^\top$	$(1,21;1)^\top$	0
ω_4	$(1;2)^\top$	$(1,1;4)^\top$	$(1,21;5)^\top$	3

Exemple II

Tarification

Le coût de l'achat de l'option d'achat au temps $t = 0$ est

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{C}{(1+r)^2}\right] \\
= \quad & \frac{0}{1,21}\mathbb{Q}(\omega_1) + \frac{1}{1,21}\mathbb{Q}(\omega_2) + \frac{0}{1,21}\mathbb{Q}(\omega_3) + \frac{3}{1,21}\mathbb{Q}(\omega_4) \\
= \quad & \frac{0}{1,21}0,36 + \frac{1}{1,21}0,54 + \frac{0}{1,21}0,015 + \frac{3}{1,21}0,085 \\
\cong \quad & 0,65702.
\end{aligned}$$

Tarification

Droit conditionnel

La tarification du droit contingent est revue dans un contexte plus général où on ne suppose pas à priori que le portefeuille de réplication existe.

- **Question**. Quel est le prix du droit conditionnel?
- **Réponse**. Il faut considérer le point de vue du vendeur de l'option et aussi celui de l'acheteur.

Tarification I

Le vendeur

Le vendeur du droit conditionnel acceptera tout montant lui permettant l'acquisition d'un portefeuille dont la valeur au temps $t = 1$ sera supérieure ou égale au droit conditionnel. Le plus petit montant satisfaisant cette condition est

$$\inf \left\{ V_{\phi}(0) \in \mathbb{R} : \exists \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega, V_{\phi}(1, \omega) \geq C(\omega) \right\}.$$

Tarification II

Le vendeur

Rappel

$$\inf \left\{ V_\phi(0) \in \mathbb{R} : \exists \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega,\, V_\phi(1,\omega) \geq C(\omega) \right\}.$$

Si $c_i = C(\omega_i)$ alors

$$\begin{aligned} & \forall \omega \in \Omega,\, V_\phi(1,\omega) \geq C(\omega) \\ \Leftrightarrow \quad & \phi_1(1+r) + \phi_2 s_{11} \geq c_1 \text{ et } \phi_1(1+r) + \phi_2 s_{12} \geq c_2 \\ \Leftrightarrow \quad & \phi_2 \geq \frac{c_1 - \phi_1(1+r)}{s_{11}} \text{ et } \phi_2 \geq \frac{c_2 - \phi_1(1+r)}{s_{12}} \\ \Leftrightarrow \quad & \phi_2 \geq \max\left(\frac{c_1 - \phi_1(1+r)}{s_{11}} ; \frac{c_2 - \phi_1(1+r)}{s_{12}} \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Tarification III

Le vendeur

Ainsi, la valeur au temps $t = 0$ d'un portefeuille satisfaisant la contrainte (4) $\forall \omega \in \Omega$, $V_\phi(1, \omega) \geq C(\omega)$ est minorée par

$$\frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}},$$

c'est-à-dire que

$$V_\phi(0) \geq \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}.$$

La démonstration de cette affirmation se trouve aux deux pages suivantes.

Tarification IV

Le vendeur

$$\forall \overrightarrow{\phi} \in \left\{ \overrightarrow{\phi} : V_\phi(1) \geq C \right\},$$

$$\begin{aligned}
& V_\phi(0) \\
= \quad & \phi_1 + \phi_2 s_0 \\
\geq \quad & \phi_1 + s_0 \max\left(\frac{c_1 - \phi_1(1+r)}{s_{11}}; \frac{c_2 - \phi_1(1+r)}{s_{12}} \right) \\
= \quad & \max\left(\phi_1 + s_0 \frac{c_1 - \phi_1(1+r)}{s_{11}}; \phi_1 + s_0 \frac{c_2 - \phi_1(1+r)}{s_{12}} \right) \\
= \quad & \max\left(-\tfrac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{11}} \phi_1 + \tfrac{s_0 c_1}{s_{11}}; \quad \tfrac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12}} \phi_1 + \tfrac{s_0 c_2}{s_{12}} \right)
\end{aligned}$$

Tarification V

Le vendeur

$$= \begin{cases} -\frac{s_0(1+r)-s_{11}}{s_{11}}\phi_1 + \frac{s_0 c_1}{s_{11}} & \text{si } \phi_1 \leq \frac{s_{12}c_1 - s_{11}c_2}{(s_{12}-s_{11})(1+r)} \\ \frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}}\phi_1 + \frac{s_0 c_2}{s_{12}} & \text{si } \phi_1 > \frac{s_{12}c_1 - s_{11}c_2}{(s_{12}-s_{11})(1+r)} \end{cases}$$

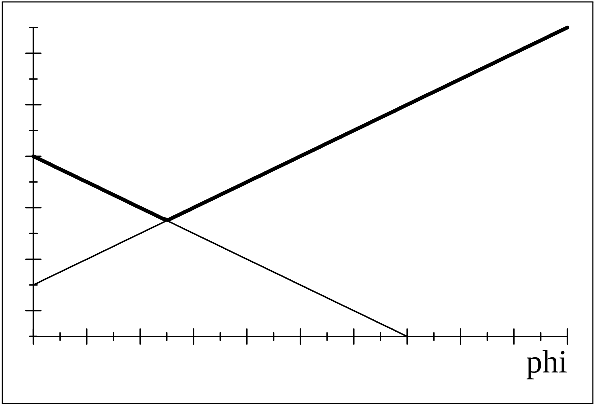
(voir le graphe à la page suivante)

$$\geq \begin{cases} -\frac{s_0(1+r)-s_{11}}{s_{11}}\frac{s_{12}c_1 - s_{11}c_2}{(s_{12}-s_{11})(1+r)} + \frac{s_0 c_1}{s_{11}} & \text{si } \phi_1 \leq \frac{s_{12}c_1 - s_{11}c_2}{(s_{12}-s_{11})(1+r)} \\ \frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}}\frac{s_{12}c_1 - s_{11}c_2}{(s_{12}-s_{11})(1+r)} + \frac{s_0 c_2}{s_{12}} & \text{si } \phi_1 > \frac{s_{12}c_1 - s_{11}c_2}{(s_{12}-s_{11})(1+r)} \end{cases}$$

$$= \frac{c_1}{1+r}\frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}-s_{11}} + \frac{c_2}{1+r}\frac{s_0(1+r)-s_{11}}{s_{12}-s_{11}}.$$

Tarification VI

Le vendeur



Tarification VII

Le vendeur

Par conséquent, puisque $\forall \overrightarrow{\phi} \in \left\{ \overrightarrow{\phi} : V_\phi(1) \geq C \right\}$,

$$V_\phi(0) \geq \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0 (1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0 (1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}$$

alors

$$\begin{aligned} \inf \quad & \left\{ V_\phi(0) \in \mathbb{R} : \exists \phi \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega, V_\phi(1, \omega) \geq C(\omega) \right\} \\ \geq \quad & \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0 (1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0 (1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Tarification VIII

Le vendeur

D'autre part, considérons le portefeuille $\widehat{\phi}$ satisfaisant l'égalité $V_{\widehat{\phi}}(1) = C$:

$$\begin{aligned} & \forall \omega \in \Omega, V_{\widehat{\phi}}(1, \omega) = C(\omega) \\ \Leftrightarrow \quad & \widehat{\phi}_1 (1+r) + \widehat{\phi}_2 s_{11} = c_1 \text{ et } \widehat{\phi}_1 (1+r) + \widehat{\phi}_2 s_{12} = c_2 \\ \Leftrightarrow \quad & \widehat{\phi}_1 = \frac{c_1 s_{12} - c_2 s_{11}}{(s_{12} - s_{11})(1+r)} \text{ et } \widehat{\phi}_2 = \frac{c_2 - c_1}{s_{12} - s_{11}} \end{aligned}$$

Tarification IX

Le vendeur

Comme

$$\overrightarrow{\widehat{\phi}} \in \left\{ \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 : \forall \omega \in \Omega, V_\phi\left(1,\omega\right) \geq C\left(\omega\right) \right\},$$

alors

$$\begin{aligned} & \inf \quad \left\{ V_\phi\left(0\right) \in \mathbb{R} : \exists\, \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega, V_\phi\left(1,\omega\right) \geq C\left(\omega\right) \right\} \\ \leq \quad & V_{\widehat{\phi}}\left(0\right) = \frac{c_1 s_{12} - c_2 s_{11}}{\left(s_{12} - s_{11}\right)\left(1+r\right)} + \frac{c_2 - c_1}{s_{12} - s_{11}} s_0 \\ = \quad & \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0\left(1+r\right)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0\left(1+r\right) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}. \end{aligned}$$

Tarification X

Le vendeur

Rappel. L'inégalité (5) est

$$\begin{aligned} \inf \quad & \left\{ V_\phi(0) \in \mathbb{R} : \exists \phi \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega, V_\phi(1,\omega) \geq C(\omega) \right\} \\ \geq \quad & \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}} \end{aligned}$$

tandis que nous venons d'établir que

$$\begin{aligned} \inf \quad & \left\{ V_\phi(0) \in \mathbb{R} : \exists \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega, V_\phi(1,\omega) \geq C(\omega) \right\} \\ \leq \quad & \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, le plus petit prix acceptable pour le vendeur du droit conditionnel est

$$\begin{aligned} \inf \quad & \left\{ V_\phi(0) \in \mathbb{R} : \exists \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega, V_\phi(1,\omega) \geq C(\omega) \right\} \\ = \quad & \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}. \end{aligned}$$

Tarification I

L'acheteur

Si l'acheteur s'endette d'un montant x à l'instant $t = 0$ afin d'acheter le droit conditionnel, alors au moment où il choisira d'exercer ou non son droit conditionnel $(t = 1)$, il veut être en mesure de rembourser sa dette (d'où l'existence de la stratégie $-\overrightarrow{\phi}$ telle que $V_{-\phi}(0) = -x$ et $V_{-\phi}(1, \omega) + C(\omega) \geq 0$). Par conséquent, le plus grand montant que l'acheteur du droit conditionnel accepte de débourser est

$$\sup \left\{ V_\phi(0) \in \mathbb{R} : \exists \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega,\ V_\phi(1, \omega) \leq C(\omega) \right\}.$$

Tarification II

L'acheteur

Rappel

$$\sup \left\{ V_{\phi}\left(0\right) \in \mathbb{R} : \exists \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^{2} \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega,\ V_{\phi}\left(1, \omega\right) \leq C\left(\omega\right) \right\}.$$

Notons que

$$\begin{aligned} & \forall \omega \in \Omega, V_{\phi}\left(1,\omega\right) \leq C\left(\omega\right) && (6) \\ \Leftrightarrow\quad & \phi_1\left(1+r\right) + \phi_2 s_{11} \leq c_1 \text{ et } \phi_1\left(1+r\right) + \phi_2 s_{12} \leq c_2 \\ \Leftrightarrow\quad & \phi_2 \leq \frac{c_1 - \phi_1\left(1+r\right)}{s_{11}} \text{ et } \phi_2 \leq \frac{c_2 - \phi_1\left(1+r\right)}{s_{12}} \\ \Leftrightarrow\quad & \phi_2 \leq \min\left(\frac{c_1 - \phi_1\left(1+r\right)}{s_{11}}; \frac{c_2 - \phi_1\left(1+r\right)}{s_{12}}\right). \end{aligned}$$

Tarification III

L'acheteur

La valeur $V_\phi(0)$ au temps $t = 0$ d'un portefeuille $\overrightarrow{\phi}$ satisfaisant la contrainte (6) $\forall \omega \in \Omega$, $V_\phi(1, \omega) \leq C(\omega)$ est majorée par

$$\frac{c_1}{1+r}\frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r}\frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}$$

c'est-à-dire que

$$V_\phi(0) \leq \frac{c_1}{1+r}\frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r}\frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}.$$

La preuve se trouve aux deux prochaines pages.

Tarification IV

L'acheteur

$$\forall \overrightarrow{\phi} \in \left\{ \overrightarrow{\phi} : V_\phi(1) \leq C \right\},$$

$$\begin{aligned}
& V_\phi(0) \\
= \quad & \phi_1 + \phi_2 s_0 \\
\leq \quad & \phi_1 + s_0 \min\left(\frac{c_1 - \phi_1(1+r)}{s_{11}}; \frac{c_2 - \phi_1(1+r)}{s_{12}} \right) \\
= \quad & \min\left(\phi_1 + s_0 \frac{c_1 - \phi_1(1+r)}{s_{11}}; \phi_1 + s_0 \frac{c_2 - \phi_1(1+r)}{s_{12}} \right) \\
= \quad & \min\left(-\frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{11}} \phi_1 + \frac{s_0 c_1}{s_{11}}; \quad \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12}} \phi_1 + \frac{s_0 c_2}{s_{12}} \right)
\end{aligned}$$

Tarification V

L'acheteur

$$= \begin{cases} -\frac{s_0(1+r)-s_{11}}{s_{11}}\phi_1 + \frac{s_0 c_1}{s_{11}} & \text{si } \phi_1 \geq \frac{c_1 s_{12} - s_{11} c_2}{(s_{12}-s_{11})(1+r)} \\ \frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}}\phi_1 + \frac{s_0 c_2}{s_{12}} & \text{si } \phi_1 < \frac{c_1 s_{12} - s_{11} c_2}{(s_{12}-s_{11})(1+r)} \end{cases}$$

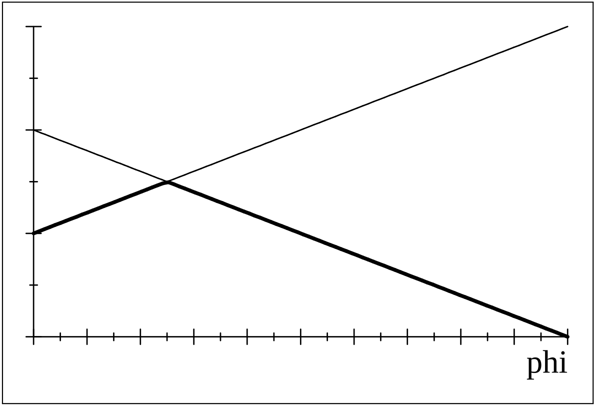
(voir le graphe à la page suivante)

$$\leq \begin{cases} -\frac{s_0(1+r)-s_{11}}{s_{11}} \frac{c_1 s_{12} - s_{11} c_2}{(s_{12}-s_{11})(1+r)} + \frac{s_0 c_1}{s_{11}} & \text{si } \phi_1 \geq \frac{c_1 s_{12} - s_{11} c_2}{(s_{12}-s_{11})(1+r)} \\ \\ \frac{s_{12}-s_0(1+r)}{s_{12}} \frac{c_1 s_{12} - s_{11} c_2}{(s_{12}-s_{11})(1+r)} + \frac{s_0 c_2}{s_{12}} & \text{si } \phi_1 < \frac{c_1 s_{12} - s_{11} c_2}{(s_{12}-s_{11})(1+r)} \end{cases}$$

$$= \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}.$$

Tarification VI

L'acheteur



Tarification VII

L'acheteur

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\sup \left\{ V_\phi(0) \in \mathbb{R} : \exists \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega,\ V_\phi(1,\omega) \leq C(\omega) \right\} \\
&\leq \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Tarification VIII

L'acheteur

D'autre part, considérons le portefeuille $\widehat{\phi}$ satisfaisant l'égalité $V_{\widehat{\phi}}(1) = C$.

$$
\begin{aligned}
& \forall \omega \in \Omega, V_{\widehat{\phi}}(1, \omega) = C(\omega) \\
\Leftrightarrow \quad & \widehat{\phi}_1 (1 + r) + \widehat{\phi}_2 s_{11} = c_1 \text{ et } \widehat{\phi}_1 (1 + r) + \widehat{\phi}_2 s_{12} = c_2 \\
\Leftrightarrow \quad & \widehat{\phi}_1 = \frac{c_1 s_{12} - c_2 s_{11}}{(s_{12} - s_{11})(1 + r)} \text{ et } \widehat{\phi}_2 = \frac{c_2 - c_1}{s_{12} - s_{11}}.
\end{aligned}
$$

Tarification IX
L'acheteur

Comme le portefeuille

$$\overrightarrow{\widehat{\phi}} \in \left\{ \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 : \forall \omega \in \Omega, \; V_\phi (1, \omega) \leq C(\omega) \right\}$$

alors

$$\begin{aligned} & \sup \quad \left\{ V_\phi (0) \in \mathbb{R} : \exists \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega, \; V_\phi (1, \omega) \leq C(\omega) \right\} \\ \geq & \quad V_{\widehat{\phi}} (0) = \frac{c_1 s_{12} - c_2 s_{11}}{(s_{12} - s_{11})(1 + r)} + \frac{c_2 - c_1}{s_{12} - s_{11}} s_0 \\ = & \quad \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0 (1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0 (1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}. \end{aligned}$$

Tarification X

L'acheteur

L'inégalité (7) établissait la relation

$$\begin{aligned} &\sup \quad \left\{ V_\phi(0) \in \mathbb{R} : \exists \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \forall \omega \in \Omega,\ V_\phi(1,\omega) \le C(\omega) \right\} \\ &\le \quad \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}} \end{aligned}$$

tandis que nous venons de montrer que

$$\begin{aligned} &\sup \quad \left\{ V_\phi(0) \in \mathbb{R} : \exists \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega,\ V_\phi(1,\omega) \le C(\omega) \right\} \\ &\ge \quad \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\sup \quad \left\{ V_\phi(0) \in \mathbb{R} : \exists \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega,\ V_\phi(1,\omega) \le C(\omega) \right\} \\ &= \quad \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}. \qquad (8) \end{aligned}$$

Tarification

Le prix

Comme le plus petit prix

$$\inf \quad \left\{ V_\phi(0) \in \mathbb{R} : \exists \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega, V_\phi(1,\omega) \geq C(\omega) \right\}$$

$$= \quad \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}.$$

que le vendeur du droit conditionnel considère suffisant est égal au plus grand prix

$$\sup \quad \left\{ V_\phi(0) \in \mathbb{R} : \exists \overrightarrow{\phi} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall \omega \in \Omega, \; V_\phi(1,\omega) \leq C(\omega) \right\}$$

$$= \quad \frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}.$$

que l'acheteur du droit conditionnel juge acceptable, les deux parties s'entendront pour un prix égal à

$$\frac{c_1}{1+r} \frac{s_{12} - s_0(1+r)}{s_{12} - s_{11}} + \frac{c_2}{1+r} \frac{s_0(1+r) - s_{11}}{s_{12} - s_{11}}. \tag{9}$$