Les martingales

80-646-08
Calcul stochastique I

Geneviève Gauthier

HEC Montréal

Définition

Definition

Définition. Sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, où $\mathbb{F}$ est la filtration $\{\mathcal{F}_t : t \in \{0, 1, 2, ...\}\}$, le processus stochastique

$$M = \{M_t : t \in \{0, 1, 2, ...\}\}$$

est une *martingale* à temps discret si

M1 $\forall t \in \{0, 1, 2, ...\}$, $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[|M_t|] < \infty$;

M2 $\forall t \in \{0, 1, 2, ...\}$, M_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable;

M3 $\forall s, t \in \{0, 1, 2, ...\}$ tel que $s < t$, $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$.

Martingale

Processus à espérance constante

Theorem

Lemme. *Soit* $M = \{M_t : t \in \{0,1,2,...\}\}$, *une martingale construite sur l'espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. *Alors*

$$\forall t \in \{1,2,...\}\,, \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[M_t] = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[M_0]\,.$$

Preuve du lemme. $\forall t \in \{1,2,...\}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[M_t] &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[M_t |\mathcal{F}_0]\right] \text{ par } (EC3) \\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[M_0] \text{ par } (M3). \blacksquare \end{aligned}$$

- **Interprétation**. Une martingale est un processus stochastique qui, en moyenne, est constant. Cela ne signifie pas pour autant que ce processus varie peu car la variance $Var_{\mathbb{P}}[M_t]$, à tout instant, peut être infinie.

Exemple I

Exemple. Soit $\{\xi_t : t \in \{1, 2, ...\}\}$, une suite de $(\Omega, \mathcal{F})$ −variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées par rapport à la mesure $\mathbb{P}$ telles que

- $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[\xi_t] = 0$ et
- $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[\xi_t^2] < \infty$.

Posons

- $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$; $M_0 = 0$
- $\forall t \in \{1, 2, ...\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi_s : s \in \{1, ..., t\}\}$; $M_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$.

Le processus stochastique M est une martingale sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

Exemple II

- En effet,

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|M_t|\right] = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left|\sum_{s=1}^{t} \xi_s\right|\right] \le \sum_{s=1}^{t} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|\xi_s|\right] \le \sum_{s=1}^{t} \sqrt{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\xi_s^2\right]} < \infty$$

où la deuxième inégalité provient du fait que pour toute variable aléatoire,

$$0 \le \mathrm{Var}\left[|X|\right] = \mathrm{E}\left[|X|^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[|X|\right]\right)^2 \Rightarrow \mathrm{E}\left[|X|\right] \le \sqrt{\mathrm{E}\left[|X|^2\right]}.$$

- Le choix de la filtration fait en sorte que M est *adapté* (c'est-à-dire que $\forall t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, M_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable).

Exemple III

- Enfin, $\forall s, t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ tel que $s < t$,

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_t \,|\mathcal{F}_s\right] \\
= \;& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_s + \sum_{u=s+1}^{t} \xi_u \,|\mathcal{F}_s\right] \\
= \;& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_s \,|\mathcal{F}_s\right] + \sum_{u=s+1}^{t} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\xi_u \,|\mathcal{F}_s\right] \\
= \;& M_s + \sum_{u=s+1}^{t} \underbrace{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\xi_u \,|\mathcal{F}_s\right]}_{=\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[\xi_u]} \\
& \text{par } (EC1) \text{ car } M_s \text{ est } \mathcal{F}_s - \text{mesurable.et} \\
& \text{par } (EC7) \text{ car } \xi_u \text{ est indépendante de } \xi_1, \ldots, \xi_s. \\
= \;& M_s. \; \blacksquare
\end{aligned}
$$

Martingale I

Theorem

Lemme. *Dans la définition d'une martingale, la condition $(M3)$ est équivalente à*

M3* $\forall t \in \{1, 2, ...\}$, $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = M_{t-1}$.

Démonstration du lemme. Clairement, $(M3) \Rightarrow (M3^*)$ car $(M3^*)$ n'est qu'un cas particulier de $(M3)$. En effet, il suffit de poser $s = t - 1$.
Nous devons donc montrer que $(M3^*) \Rightarrow (M3)$. Cela se démontre par induction. Intuitivement, si $s < t$ alors

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[M_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[M_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] \mid \mathcal{F}_s\right] \text{ par } (EC3),\\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[M_{t-1} \mid \mathcal{F}_s] \text{ par } (M3^*).\end{aligned}$$

Martingale II

Mais si $s < t - 1$ alors nous pouvons reproduire ce raisonnement afin d'obtenir

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}\left[M_{t-1} \,|\mathcal{F}_s\right] &= E^{\mathbb{P}}\left[E^{\mathbb{P}}\left[M_{t-1}\,|\mathcal{F}_{t-2}\right]|\mathcal{F}_s\right] \text{ par } (EC3), \\ &= E^{\mathbb{P}}\left[M_{t-2}\,|\mathcal{F}_s\right] \text{ par } (M3^*). \end{aligned}$$

Il suffit alors de remplacer ce résultat dans la première équation:

$$E^{\mathbb{P}}\left[M_t\,|\mathcal{F}_s\right] = E^{\mathbb{P}}\left[M_{t-2}\,|\mathcal{F}_s\right].$$

En itérant cet algorithme, nous obtiendrons éventuellement

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}\left[M_t\,|\mathcal{F}_s\right] &= E^{\mathbb{P}}\left[M_{s+1}\,|\mathcal{F}_s\right] \\ &= M_s \text{ par } (M3^*). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple I

ω	ξ_1	ξ_2	ξ_3	$\mathbb{P}$	$\mathbb{Q}$	ω	ξ_1	ξ_2	ξ_3	$\mathbb{P}$	$\mathbb{Q}$
ω_1	-1	-1	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	ω_5	1	-1	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{14}$
ω_2	-1	-1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{14}$	ω_6	1	-1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{14}$
ω_3	-1	1	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{14}$	ω_7	1	1	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{14}$
ω_4	-1	1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{14}$	ω_8	1	1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{14}$

- Sur l'ensemble fondamental $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_8\}$, nous utiliserons la tribu $\mathcal{F}$ = l'ensemble de tous les événements de Ω. La filtration $\mathbb{F}$ est composée des sous-tribus

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &= \{\varnothing, \Omega\}, \\
\mathcal{F}_1 &= \sigma\{\xi_1\} = \sigma\{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}, \\
\mathcal{F}_2 &= \sigma\{\xi_1, \xi_2\} = \sigma\{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_5, \omega_6\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}, \\
\mathcal{F}_3 &= \sigma\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Exemple II

- Le processus stochastique M, construit sur l'espace probabilisable filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ est défini comme suit :
  - $M_0 = 0$,
  - $M_1 = \xi_1$
  - $M_2 = \xi_1 + \xi_2$ et
  - $M_3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.
- Par construction, M est adapté à la filtration $\mathbb{F}$.

Exemple III

- $M = \{M_t : t \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ est une martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.
  - En effet, la condition $(M2)$ est déjà vérifiée car M est $\mathbb{F}-$adapté.
  - La condition $(M1)$ est aussi satisfaite car $\forall t \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|M_t|\right] \leq \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|\xi_1|\right] + \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|\xi_2|\right] + \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|\xi_3|\right] = 3.$$

  - Vérifions la condition $(M3^*)$.

Exemple IV

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_1 \,|\mathcal{F}_0\right] &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_1\right] \text{ par } (EC4)\\
&= 0\\
&= M_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall \omega &\in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},\\
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_2 \,|\mathcal{F}_1\right](\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(-2\times\frac{1}{8} - 2\times\frac{1}{8} + 0\times\frac{1}{8} + 0\times\frac{1}{8}\right) = -1\\
M_1(\omega) &= -1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall \omega &\in \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\},\\
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_2 \,|\mathcal{F}_1\right](\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(0\times\frac{1}{8} + 0\times\frac{1}{8} + 2\times\frac{1}{8} + 2\times\frac{1}{8}\right) = 1\\
M_1(\omega) &= 1.
\end{aligned}
$$

Exemple V

$$\begin{aligned}
\forall \omega &\in \{\omega_1, \omega_2\}, \\
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_3 \,|\mathcal{F}_2\right](\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{4}}\left(-3 \times \frac{1}{8} - 1 \times \frac{1}{8}\right) = -2 \text{ et } M_2(\omega) = -2; \\
\forall \omega &\in \{\omega_3, \omega_4\}, \\
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_3 \,|\mathcal{F}_2\right](\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{4}}\left(-1 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{8}\right) = 0 \text{ et } M_2(\omega) = 0; \\
\forall \omega &\in \{\omega_5, \omega_6\}, \\
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_3 \,|\mathcal{F}_2\right](\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{4}}\left(-1 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{8}\right) = 0 \text{ et } M_2(\omega) = 0; \\
\forall \omega &\in \{\omega_7, \omega_8\}, \\
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_3 \,|\mathcal{F}_2\right](\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{4}}\left(1 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8}\right) = 2 \text{ et } M_2(\omega) = 2.
\end{aligned}$$

Exemple VI

- Par contre $M = \{M_t : t \in \{0,1,2,3\}\}$ n'est pas une martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$. En effet,

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[M_1 \,|\mathcal{F}_0\right] \\
= \; & \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[M_1\right] \text{ par } (EC4) \\
= \; & \frac{-1}{2} + \frac{-1}{14} + \frac{-1}{14} + \frac{-1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} \\
= \; & -\frac{6}{14} \\
\neq \; & 0 \\
= \; & M_0 .
\end{aligned}$$

Exemple VII

- **Conclusion**. Le fait qu'un processus stochastique soit une martingale dépend de la filtration et de la mesure. C'est pourquoi on voit parfois la notation $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$ −martingale

Processus arrêté

Définition

Definition

Définition. Le processus stochastique X et le temps d'arrêt τ sont construits sur le même espace probabilisable filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$. Le processus stochastique X^τ défini par

$$X_t^\tau(\omega) = X_{t \wedge \tau(\omega)}(\omega) \tag{1}$$

est appelé le *processus arrêté* par τ.

Processus arrêté I

Exemple

ω	X_0	X_1	X_2	X_3	τ	X_0^τ	X_1^τ	X_2^τ	X_3^τ
ω_1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1	1
ω_2	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	3	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
ω_3	1	2	1	1	1	1	2	2	2
ω_4	1	2	2	1	1	1	2	2	2

Martingale arrêtée I

Théorème

Theorem

Théorème. *Si la martingale M et le temps d'arrêt τ sont construits sur le même espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ alors le processus arrêté M^τ est lui aussi une martingale sur cet espace.*

Martingale arrêtée II

Théorème

Preuve du théorème. La clef de la démonstration est d'exprimer M_t^τ en termes des composantes du processus M.

$$\begin{aligned} M_0^\tau &= M_0 \\ \text{et } \forall t \in \{1, 2, \ldots\}, \; M_t^\tau &= M_t^\tau \left(\sum_{k=0}^{t-1} \mathbb{I}_{\{\tau=k\}} + \mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} \mathbb{I}_{\{\tau=k\}} M_t^\tau + \mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}} M_t^\tau \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} \mathbb{I}_{\{\tau=k\}} M_k + \mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}} M_t . \end{aligned}$$

Martingale arrêtée III

Théorème

- Vérification de la condition $(M1)$:

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|M_0^{\tau}|\right] = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|M_0|\right] < \infty$$

et $\forall t \in \{1, 2, \ldots\}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|M_t^{\tau}|\right] &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left|\sum_{k=0}^{t-1} \mathbb{I}_{\{\tau=k\}} M_k + \mathbb{I}_{\{\tau\geq t\}} M_t\right|\right] \\
&\leq \sum_{k=0}^{t-1} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|\mathbb{I}_{\{\tau=k\}} M_k|\right] + \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|\mathbb{I}_{\{\tau\geq t\}} M_t|\right] \\
&\leq \sum_{k=0}^{t-1} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|M_k|\right] + \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|M_t|\right] < \infty
\end{aligned}$$

car M étant une martingale, nous avons que $\forall t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|M_t|\right] < \infty$.

Martingale arrêtée IV

- Vérification de la condition $(M2)$:

$$M_0^\tau = M_0 \text{ est } \mathcal{F}_0 - \text{mesurable.} \tag{2}$$

Maintenant, $\forall t \in \{1, 2, \dots\}$,

$$M_t^\tau = \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} \underbrace{\mathbb{I}_{\{\tau=k\}}}_{\substack{\mathcal{F}_k-\text{mesurable} \\ \text{car } \{\tau=k\}\in\mathcal{F}_k}} \underbrace{M_k}_{\substack{\mathcal{F}_k-\text{mesurable} \\ \text{car } M \text{ est adapté.}}}}_{\mathcal{F}_t-\text{mesurable car } k<t\Rightarrow\mathcal{F}_k\subseteq\mathcal{F}_t}$$

$$+ \underbrace{\mathbb{I}_{\{\tau\geq t\}}}_{\substack{\mathcal{F}_{t-1}-\text{mesurable} \\ \text{car} \\ \{\tau\geq t\}=\{\tau\leq t-1\}^c\in\mathcal{F}_{t-1}}} \underbrace{M_t}_{\substack{\mathcal{F}_t-\text{mesurable} \\ \text{car } M \text{ est adapté.}}}$$

est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

Martingale arrêtée V

Théorème

- Vérification de la condition $(M3^*)$: $\forall t \in \{1, 2, \ldots\}$,

$$
\begin{aligned}
& M_t^\tau - M_{t-1}^\tau \\
= \ & \left(\sum_{k=0}^{t-1} \mathbb{I}_{\{\tau = k\}} M_k + \mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}} M_t \right) \\
& - \left(\sum_{k=0}^{t-2} \mathbb{I}_{\{\tau = k\}} M_k + \mathbb{I}_{\{\tau \geq t-1\}} M_{t-1} \right) \\
= \ & \mathbb{I}_{\{\tau = t-1\}} M_{t-1} + \mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}} M_t - \mathbb{I}_{\{\tau \geq t-1\}} M_{t-1} \\
= \ & \mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}} M_t - \left(\mathbb{I}_{\{\tau \geq t-1\}} - \mathbb{I}_{\{\tau = t-1\}} \right) M_{t-1} \\
= \ & \mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}} M_t - \mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}} M_{t-1} \\
& \text{car } \{\tau = t-1\} \text{ et } \{\tau \geq t\} \text{ étant disjoints,} \\
& \mathbb{I}_{\{\tau = t-1\}} + \mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}} = \mathbb{I}_{\{\tau = t-1\} \cup \{\tau \geq t\}} = \mathbb{I}_{\{\tau \geq t-1\}}. \\
= \ & \mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}} \left(M_t - M_{t-1} \right).
\end{aligned}
$$

Martingale arrêtée VI

Théorème

Par conséquent, puisque $\mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}}$ est $\mathcal{F}_{t-1}-$mesurable

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_t^\tau \,|\mathcal{F}_{t-1}\right] - M_{t-1}^\tau \\
= \; & \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_t^\tau - M_{t-1}^\tau \,|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
= \; & \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}}\left(M_t - M_{t-1}\right)|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
= \; & \mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}}\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_t - M_{t-1}\,|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\
= \; & \mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}}\left(\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_t\,|\mathcal{F}_{t-1}\right] - \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_{t-1}\,|\mathcal{F}_{t-1}\right]\right) \\
= \; & \mathbb{I}_{\{\tau \geq t\}}\left(M_{t-1} - M_{t-1}\right) = 0
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_t^\tau\,|\mathcal{F}_{t-1}\right] = M_{t-1}^\tau. \quad \blacksquare$$

Optional Stopping Theorem

Theorem

Théorème (Optional Stopping Theorem). *Soit*

$$X = \{X_t : t \in \{0, 1, 2, \ldots\}\}$$

un processus construit sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, *où* $\mathbb{F}$ *est la filtration* $\{\mathcal{F}_t : t \in \{0, 1, 2, \ldots\}\}$. *Supposons que le processus stochastique* X *est* $\mathbb{F}-$*adapté et qu'il est intégrable, c'est-à-dire que* $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[|X_t|] < \infty$. *Alors* X *est une martingale si et seulement si*

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_\tau] = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_0]$$

pour tout temps d'arrêt τ *borné, c'est-à-dire que pour chaque temps d'arrêt* τ *considéré, il existe une constante* b *telle que*

$$\forall \omega \in \Omega,\ 0 \leq \tau(\omega) \leq b.$$

Optional Stopping Theorem I

Preuve du théorème.

- **Première partie.** Supposons que X est une martingale et montrons qu'alors, $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_\tau\right] = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_0\right]$ pour tout temps d'arrêt borné.

Soit τ, un temps d'arrêt borné quelconque. Il existe donc une constante b telle que $\forall \omega \in \Omega$, $0 \leq \tau\left(\omega\right) \leq b$. Par

Optional Stopping Theorem II

Preuve du théorème.

conséquent,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_\tau] &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\sum_{k=0}^{b} X_k \mathbb{I}_{\{\tau=k\}}\right] \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\sum_{k=0}^{b} X_k \left(\mathbb{I}_{\{\tau\geq k\}} - \mathbb{I}_{\{\tau\geq k+1\}}\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{b} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_k \mathbb{I}_{\{\tau\geq k\}}\right] - \sum_{k=0}^{b} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_k \mathbb{I}_{\{\tau\geq k+1\}}\right] \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_0] + \sum_{k=1}^{b} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_k \mathbb{I}_{\{\tau\geq k\}}\right] - \sum_{k=0}^{b-1} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_k \mathbb{I}_{\{\tau\geq k+1\}}\right] \\
&\quad \text{car } \mathbb{I}_{\{\tau\geq 0\}} = \mathbb{I}_{\Omega} = 1 \text{ et } \mathbb{I}_{\{\tau\geq b+1\}} = \mathbb{I}_{\varnothing} = 0. \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_0] + \sum_{k=1}^{b} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_k \mathbb{I}_{\{\tau\geq k\}}\right] - \sum_{k=1}^{b} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_{k-1} \mathbb{I}_{\{\tau\geq k\}}\right]
\end{aligned}
$$

Optional Stopping Theorem III

Preuve du théorème.

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_0] + \sum_{k=1}^{b} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[(X_k - X_{k-1})\,\mathbb{I}_{\{\tau \geq k\}}\right] \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_0] + \sum_{k=1}^{b} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[(X_k - X_{k-1})\,\mathbb{I}_{\{\tau \geq k\}} \,|\mathcal{F}_{k-1}\right]\right] \text{ par } (EC3), \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_0] + \sum_{k=1}^{b} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau \geq k\}}\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_k - X_{k-1} \,|\mathcal{F}_{k-1}\right]\right] \text{ par } (EC6), \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_0]
\end{aligned}
$$

car X étant une martingale,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_k - X_{k-1} \,|\mathcal{F}_{k-1}\right] &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_k \,|\mathcal{F}_{k-1}\right] - \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_{k-1} \,|\mathcal{F}_{k-1}\right] \\
&= X_{k-1} - X_{k-1} = 0.
\end{aligned}
$$

Optional Stopping Theorem IV

Preuve du théorème.

- **Deuxième partie**. Supposons maintenant que pour tout temps d'arrêt τ borné, $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_\tau\right] = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_0\right]$ et montrons qu'alors, le processus stochastique adapté et intégrable est une martingale.

Par hypothèse, X satisfait déjà aux conditions $(M1)$ et $(M2)$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\forall s, t \in \{0, 1, 2, ...\}$ tel que $s < t$, $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_t \,|\mathcal{F}_s\right] = X_s$.

-
  - Fixons donc s et $t \in \{0, 1, 2, ...\}$ tel que $s < t$.
  - Nous dénotons par $\mathrm{P}_s = \left\{A_1^{(s)}, ..., A_{n_s}^{(s)}\right\}$ la partition finie qu'engendre $\mathcal{F}_s$.

Optional Stopping Theorem V

Preuve du théorème.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n_s\}$ nous construisons un temps aléatoire :

$$S_i(\omega) = \begin{cases} s & \text{si } \omega \in A_i^{(s)} \\ t & \text{si } \omega \notin A_i^{(s)}. \end{cases}$$

S_i est un temps d'arrêt (évidemment borné) puisque $\forall u \in \{0, 1, 2, \ldots\}$,

$$\{\omega \in \Omega : S_i(\omega) = u\} = \begin{cases} A_i^{(s)} & \text{si } u = s & \in \mathcal{F}_s \\ \left(A_i^{(s)}\right)^c & \text{si } u = t & \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \\ \varnothing & \text{sinon} & \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_u \end{cases}.$$

Optional Stopping Theorem VI

Preuve du théorème.

Ainsi, par hypothèse, nous avons que

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_{S_i}\right] = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_0\right].$$

Par ailleurs, comme le temps aléatoire τ_t défini par $\forall \omega \in \Omega$, $\tau_t(\omega) = t$ est aussi un temps d'arrêt borné, nous avons, toujours par hypothèse, que

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_t\right] = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_{\tau_t}\right] = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_0\right]$$

d'où

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_{S_i}\right] = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_t\right].$$

Optional Stopping Theorem VII

Preuve du théorème.

Par conséquent, $\forall i \in \{1, \ldots, n_s\}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_t\right] - \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_{S_i}\right] \\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_t - X_{S_i}\right] \\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(X_t - X_{S_i}\right)\mathbb{I}_{A_i^{(s)}} + \left(X_t - X_{S_i}\right)\mathbb{I}_{\left(A_i^{(s)}\right)^c}\right] \\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(X_t - X_s\right)\mathbb{I}_{A_i^{(s)}} + \left(X_t - X_t\right)\mathbb{I}_{\left(A_i^{(s)}\right)^c}\right] \\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(X_t - X_s\right)\mathbb{I}_{A_i^{(s)}}\right] \\ &= \sum_{\omega\in A_i^{(s)}} \left(X_t(\omega) - X_s(\omega)\right)\mathbb{P}(\omega) \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{\omega\in A_i^{(s)}} X_t(\omega)\,\mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega\in A_i^{(s)}} X_s(\omega)\,\mathbb{P}(\omega).$$

Optional Stopping Theorem VIII

Preuve du théorème.

Nous pouvons maintenant conclure la preuve puisque,

$$
\begin{aligned}
E^{\mathbb{P}}\left[X_t \left| \mathcal{F}_s\right.\right] &= \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\mathbb{I}_{A_i^{(s)}}}{\mathbb{P}\left(A_i^{(s)}\right)} \sum_{\omega \in A_i^{(s)}} X_t(\omega)\,\mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\mathbb{I}_{A_i^{(s)}}}{\mathbb{P}\left(A_i^{(s)}\right)} \sum_{\omega \in A_i^{(s)}} X_s(\omega)\,\mathbb{P}(\omega) \\
&= E^{\mathbb{P}}\left[X_s \left| \mathcal{F}_s\right.\right] \\
&= X_s. \blacksquare
\end{aligned}
$$

Processus Markovien I

Définition

Definition

Définition. Un processus stochastique $X = \{X_t : t \in \mathcal{T}\}$, où $\mathcal{T}$ est un ensemble d'indices[a], est dit *markovien* si, pour tout $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in \mathcal{T}$, la distribution conditionnelle de X_{t_n} étant donné $X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}$ est égale à la distribution conditionnelle de X_{t_n} étant donné $X_{t_{n-1}}$, c'est-à-dire que pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left[X_{t_n} \leq x_n \,|X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right] \\ = \; & \mathbb{P}\left[X_{t_n} \leq x_n \,|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right]. \end{aligned}$$

[a] Par exemples, $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, T\}$ où T est un entier positif, $\mathcal{T} = [0, T]$ où T est un nombre réel positif, $\mathcal{T} = [0, \infty)$, etc.

Processus Markovien II

Définition

- Intuitivement, si nous supposons que les indices t sont temporels, le processus X est markovien si sa distribution dans le futur étant donné le présent et le passé ne dépend que du présent.

  "Une chaîne de Markov est donc un phénomène aléatoire sans mémoire: la distribution d'une observation à venir, étant donné la connaissance actuelle du système et de toute son histoire, est la même lorsque nous n'avons accès qu'à la connaissance de son état actuel."[1]

- L'ensemble des valeurs pouvant être prises par le processus est appelé l'*espace d'états* de X et nous le dénotons par $\mathcal{E}_X$.

[1] Jean Vaillancourt.

Processus Markovien I

Exemple

Exemple. Nous lançons un dé à répétition.

- La variable aléatoire ξ_n représente le nombre de points obtenus au n ième lancer.
- Le processus stochastique X représente le total des points obtenus à tout instant, c'est-à-dire que pour tout entier naturel t,

$$X_t = \sum_{n=1}^{t} \xi_n.$$

Processus Markovien II

Exemple

- X est un processus markovien. En effet,

$$X_t = \sum_{n=1}^{t} \xi_n = \sum_{n=1}^{t-1} \xi_n + \xi_t = X_{t-1} + \xi_t.$$

Or le résultat du t ième lancer de dé, ξ_t, est indépendant des résultats obtenus aux $t-1$ ièmes premiers lancers, $\sigma\left\{\xi_n : n \in \{1, ..., t-1\}\right\}$. Par conséquent, la distribution de X_t ne dépend du passé du processus stochatique, $\sigma\left\{\xi_n : n \in \{1, ..., t-1\}\right\}$, qu'à travers $\sigma\left\{X_{t-1}\right\}$.

Processus Markovien

Remarque

- **Question**. Pourquoi avons-nous besoin d'un espace probabilisé? L'espace probabilisable n'aurait pas été suffisant?
- **Réponse**. Nous avons besoin de la mesure de probabilité pour nous assurer que la propriété d'indépendance est satisfaite.

Processus Markovien

Marche aléatoire

Definition

Définition. Le processus stochastique X, construit sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, est une *marche aléatoire* s'il admet la représentation

$$X_0 = 0 \text{ et } \forall t \in \{1, 2, \ldots\}\,,\ X_t = \sum_{n=1}^{t} \xi_n$$

où la suite $\{\xi_t : t \in \{1, 2, \ldots\}\}$ est composée de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Les marches aléatoires sont des processus markoviens.