Les martingales
Exercices

Exercice 4.1. Montrez qu'une somme de martingales est une martingale.

Exercice 4.2.
a) Est-ce que tout processus markovien est une martingale ? Si oui, démontrez-le. Sinon, donnez un contre-exemple.
b) Est-ce que toute martingale est un processus markovien ? Si oui, démontrez-le. Sinon, donnez un contre-exemple.

Exercice 4.3. Soit $M = \{M_t : t \in \{0, 1, 2, ...\}\}$, une martingale de carré-intégrable, c'est-à-dire $\forall t \geq 0$, $\mathrm{E}\left[M_t^2\right] < \infty$, quelconque existant sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, où $\mathbb{F}$ est la filtration $\{\mathcal{F}_t : t \in \{0, 1, 2, ...\}\}$. Le processus $\eta = \{\eta_t : t \in \{0, 1, 2, ...\}\}$ construit sur le même espace probabilisé filtré est prévisible, c'est-à-dire que pour tout $t \in \{1, 2, ...\}$, η_t est $\mathcal{F}_{t-1}-$mesurable, η_0 étant $\mathcal{F}_0-$mesurable. De plus, nous supposerons que pour tout $t \in \{0, 1, 2, ...\}$, la variable aléatoire η_t est de carré-intégrable, c'est-à-dire que $\mathrm{E}\left[\left|\eta_t^2\right|\right] < \infty$. Montrez que le processus $N = \{N_t : t \in \{0, 1, 2, ...\}\}$ défini par

$$N_t = N_0 + \sum_{k=1}^{t} \eta_k \left(M_k - M_{k-1}\right)$$

est une martingale en autant que N_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable.

Exercice 4.4. Soit X une variable aléatoire intégrable $\left(\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|X|\right] < \infty\right)$ construite sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$. Montrez que le processus stochastique $\{M_t : t \in \{0, 1, 2, ...\}\}$ tel que

$$M_t = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X \left| \mathcal{F}_t\right.\right], \ \ t \geq 0$$

est une martingale.

Exercice 4.5. Considérons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel sont construites deux filtrations $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ et $\{\mathcal{G}_t : t \geq 0\}$ sastisfaisant

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$$

a) Soit $M = \{M_t : t \geq 0\}$ une $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}-$martingale et soit $N = \{N_t : t \geq 0\}$ une $\{\mathcal{G}_t : t \geq 0\}-$martingale. Est-ce que M est une $\{\mathcal{G}_t : t \geq 0\}-$martingale ? Est-ce que N est une $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}-$martingale ? Justifiez vos réponses.
b) Soit τ un $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}-$temps d'arrêt et θ un $\{\mathcal{G}_t : t \geq 0\}-$temps d'arrêt. Est-ce que θ est un $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}-$temps d'arrêt ? Est-ce que τ est un $\{\mathcal{G}_t : t \geq 0\}-$temps d'arrêt ? Justifiez vos réponses.

Exercice 4.6. Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ des variables aléatoires indépendantes d'espérance nulle et de variance $\mathrm{Var}[\varepsilon_i] = \sigma_i^2$. Posons

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \text{ et } T_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2.$$

Montrez que $\{S_n^2 - T_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale.

Exercice 4.7. Soit $\{X_t : t \geq 0\}$ une $\{\mathcal{G}_t : t \geq 0\}$ $-$martingale et $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. Montrez que $\{X_t : t \geq 0\}$ est aussi une $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ $-$martingale.

Solutions

1 Exercice 4.1

Soient $X = \{X_t : t \in \{0,1,...\}\}$ et $Y = \{Y_t : t \in \{0,1,...\}\}$, deux martingales de l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$.

Puisque $\forall t \in \{0,1,...\}$,

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[|X_t + Y_t|] \leq \underbrace{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[|X_t|]}_{\substack{<\infty \\ \text{car } X \text{ est une martingale}}} + \underbrace{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[|Y_t|]}_{\substack{<\infty \\ \text{car } Y \text{ est une martingale}}} < \infty$$

donc la condition $(M1)$ est vérifiée.

Comme une somme de variables aléatoires $\mathcal{F}_t-$mesurables est aussi $\mathcal{F}_t-$mesurable, $\forall t \in \{0,1,...\}$, $X_t + Y_t$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable donc le processus stochastique $X+Y$ est adapté à la filtration $\mathbb{F}$.

Il ne reste plus qu'à vérifier la condition $(M3)$: $\forall s,t \in \{0,1,...\}$ tels que $s < t$

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_t + Y_t \,|\mathcal{F}_s] = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_t \,|\mathcal{F}_s] + \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[Y_t \,|\mathcal{F}_s] = X_s + Y_s.$$

La preuve se généralise à une somme de plusieurs martingales en utilisant l'induction.

2 Exercice 4.2

a) Ce ne sont pas tous les processus markoviens qui sont des martingales. Voici un contre-exemple.

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, considérons la marche aléatoire X définie par

$$X_0 = 0 \text{ et } \forall t \in \{0,1,2,...\}, \; X_t = \sum_{n=1}^{t} \xi_n$$

où la suite $\{\xi_t : t \in \{1,2,...\}\}$ est composée de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[\xi_t] = \mu > 0$. Comme X est une marche aléatoire, c'est donc un processus markovien. Or X ne peut être une martingale car son espérance n'est pas constante. En effet,

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X_t] = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\sum_{n=1}^{t} \xi_n\right] = \sum_{n=1}^{t} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[\xi_n] = \sum_{n=1}^{t} \mu = t\mu. \; \blacksquare$$

b) Ce ne sont pas toutes les martingales qui sont markoviennes. En voici un contre-exemple :

ω	$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$	$X_3(\omega)$	P
ω_1	-1	-2	-4	$\frac{1}{8}$
ω_2	-1	-2	0	$\frac{1}{8}$
ω_3	-1	0	0	$\frac{1}{8}$
ω_4	-1	0	0	$\frac{1}{8}$
ω_5	1	0	2	$\frac{1}{8}$
ω_6	1	0	-2	$\frac{1}{8}$
ω_7	1	2	2	$\frac{1}{8}$
ω_8	1	2	2	$\frac{1}{8}$

En effet,

$$\begin{aligned}
\sigma\{X_1\} &= \sigma\{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}\} \\
\sigma\{X_1,X_2\} &= \sigma\{\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5,\omega_6\},\{\omega_7,\omega_8\}\} \\
\sigma\{X_1,X_2,X_3\} &= \sigma\{\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5\},\{\omega_6\},\{\omega_7,\omega_8\}\}
\end{aligned}$$

Le processus $X = \{X_t : t \in \{1,2,3\}\}$ n'est pas un processus markovien sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ où $\mathcal{F}$ est la tribu formée de l'ensemble de tous les événements de Ω. En effet,

$$\begin{aligned}
P(X_3 = 2\,|X_2 = 0) &= \frac{P(X_3 = 2 \text{ et } X_2 = 0)}{P(X_2 = 0)} \\
&= \frac{P\{\omega_5\}}{P\{\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
P(X_3 = 2\,|X_2 = 0 \text{ et } X_1 = -1) &= \frac{P(X_3 = 2,\ X_2 = 0 \text{ et } X_1 = -1)}{P(X_2 = 0 \text{ et } X_1 = -1)} \\
&= \frac{P(\varnothing)}{P\{\omega_3,\omega_4\}} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0.
\end{aligned}$$

Par contre, le processus $X = \{X_t : t \in \{1,2,3\}\}$ est une martingale sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si nous utilisons la filtration engendrée par le processus lui-même. En effet, la condition $(M1)$

est trivialement satisfaite, $(M2)$ l'est aussi par le choix même de la filtration. Il ne reste qu'à vérifier la condition $(M3^{*})$. Mais

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_3\left|\sigma\left\{X_1, X_2\right\}\right.\right] = X_2$$

car

$$\begin{aligned}
\forall\omega &\in \left\{\omega_1, \omega_2\right\}, \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_3\left|\sigma\left\{X_1, X_2\right\}\right.\right](\omega) = \frac{-4\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = -2 = X_2(\omega) \\
\forall\omega &\in \left\{\omega_3, \omega_4\right\}, \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_3\left|\sigma\left\{X_1, X_2\right\}\right.\right](\omega) = \frac{0\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = -0 = X_2(\omega) \\
\forall\omega &\in \left\{\omega_5, \omega_6\right\}, \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_3\left|\sigma\left\{X_1, X_2\right\}\right.\right](\omega) = \frac{2\times\frac{1}{8}-2\times\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = 0 = X_2(\omega) \\
\forall\omega &\in \left\{\omega_7, \omega_8\right\}, \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_3\left|\sigma\left\{X_1, X_2\right\}\right.\right](\omega) = \frac{2\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = 2 = X_2(\omega)
\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_2\left|\sigma\left\{X_1\right\}\right.\right] = X_1$$

car

$$\begin{aligned}
\forall\omega &\in \left\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\right\} \\
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_2\left|\sigma\left\{X_1\right\}\right.\right](\omega) &= \frac{-2\times\frac{1}{8}-2\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = -1 = X_1(\omega) \\
\forall\omega &\in \left\{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\right\} \\
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X_2\left|\sigma\left\{X_1\right\}\right.\right](\omega) &= \frac{0\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = 1 = X_1(\omega). \blacksquare
\end{aligned}$$

3 Exercice 4.3

Vérification de $(M1)$:

$$\begin{aligned}
E\left[|N_t|\right] &= E\left[\left|N_0+\sum_{k=1}^{t}\eta_k\left(M_k-M_{k-1}\right)\right|\right] \\
&\leq E\left[|N_0|\right]+\sum_{k=1}^{t}E\left[|\eta_k|\left|M_k-M_{k-1}\right|\right] \\
&\leq E\left[|N_0|\right]+\sum_{k=1}^{t}\left(E\left[|\eta_k|^2\right]\right)^{1/2}\left(E\left[|M_k-M_{k-1}|^2\right]\right)^{1/2} \\
&\quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&= E\left[|N_0|\right]+\sum_{k=1}^{t}\left(E\left[|\eta_k|^2\right]\right)^{1/2}\left(E\left[M_k^2-2M_kM_{k-1}+M_{k-1}^2\right]\right)^{1/2} \\
&= E\left[|N_0|\right]+\sum_{k=1}^{t}\left(E\left[|\eta_k|^2\right]\right)^{1/2}\left(E\left[M_k^2\right]-2E\left[M_kM_{k-1}\right]+E\left[M_{k-1}^2\right]\right) \\
&= E\left[|N_0|\right]+\sum_{k=1}^{t}\left(E\left[|\eta_k|^2\right]\right)^{1/2}\left(E\left[M_k^2\right]-2E\left[M_kM_{k-1}\right]+E\left[M_{k-1}^2\right]\right) \\
&\quad \text{puisque } E\left[M_kM_{k-1}\right] \begin{aligned}[t] &= E\left[E\left[M_kM_{k-1}\,|\mathcal{F}_{k-1}\right]\right] \\ &= E\left[M_{k-1}E\left[M_k\,|\mathcal{F}_{k-1}\right]\right] \\ &= E\left[M_{k-1}^2\right] \end{aligned} \\
&= \underbrace{E\left[|N_0|\right]}_{<\infty}+\sum_{k=1}^{t}\underbrace{\left(E\left[|\eta_k|^2\right]\right)^{1/2}}_{<\infty}\underbrace{\left(E\left[M_k^2\right]-E\left[M_{k-1}^2\right]\right)^{1/2}}_{<\infty} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Vérification de $(M2)$:

$$N_t=N_0+\sum_{k=1}^{t}\underbrace{\underbrace{\eta_k}_{\mathcal{F}_{k-1}-\text{mesurable}}\;\underbrace{\left(M_k-M_{k-1}\right)}_{\mathcal{F}_k-\text{mesurable}}}_{\mathcal{F}_k-\text{mesurable donc }\mathcal{F}_t-\text{mesurable}}\text{ est }\mathcal{F}_t-\text{mesurable.}$$

Vérification de $(M3)$: premièrement, notons que pour tout $0 \leq s < t < \infty$,

$$N_t = N_s + \sum_{k=s+1}^{t} \eta_k \left(M_k - M_{k-1}\right).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
N_t &= N_0 + \sum_{k=1}^{t} \eta_k \left(M_k - M_{k-1}\right) \\
&= N_0 + \sum_{k=1}^{s} \eta_k \left(M_k - M_{k-1}\right) + \sum_{k=s+1}^{t} \eta_k \left(M_k - M_{k-1}\right) \\
&= N_s + \sum_{k=s+1}^{t} \eta_k \left(M_k - M_{k-1}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E\left[N_t \middle| \mathcal{F}_s\right] &= E\left[N_s + \sum_{k=s+1}^{t} \eta_k \left(M_k - M_{k-1}\right) \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
&= N_s + \sum_{k=s+1}^{t} E\left[\eta_k \left(M_k - M_{k-1}\right) \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
&= N_s + \sum_{k=s+1}^{t} E\left[E\left[\eta_k \left(M_k - M_{k-1}\right) \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] \middle| \mathcal{F}_s\right] \text{ par } (EC3) \\
&= N_s + \sum_{k=s+1}^{t} E\left[\eta_k \underbrace{E\left[\left(M_k - M_{k-1}\right) \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right]}_{=0} \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
&= N_s.
\end{aligned}$$

4 Exercice 4.4

Vérification de $(M1)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|M_t|\right] &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left|\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X\,|\mathcal{F}_t\right]\right|\right] \\
&\leq \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\left|\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|X|\,|\mathcal{F}_t\right]\right|\right] \text{ car } X \leq |X| \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|X|\,|\mathcal{F}_t\right]\right] \text{ car } \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|X|\,|\mathcal{F}_t\right] \geq 0 \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[|X|\right] \text{ par } (EC3) \\
&< \infty \text{ par hypothèse}
\end{aligned}$$

Vérification de $(M2)$: $M_t = \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X\,|\mathcal{F}_t\right]$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable par la remarque précédent les propriétés de l'espérance conditionnelle.

Vérification de $(M3)$: Soit $0 \leq s \leq t$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[M_t\,|\mathcal{F}_s\right] &= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X\,|\mathcal{F}_t\right]|\mathcal{F}_s\right] \text{ par définition de } M_t \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left[X\,|\mathcal{F}_s\right] \text{ par } (EC3) \text{ car } \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \\
&= M_s \text{ par définition de } M_s. \blacksquare
\end{aligned}$$