L'intégrale stochastique : une approche intuitive

Les méthodes stochastiques dans les sciences de la gestion
6-640-93

Geneviève Gauthier

Dernière mise à jour : 4 janvier 2003

Plan de la présentation

- Introduction
- L'intégrale au sens de Riemann
- L'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien
- Les processus de base
- Les processus simples
- Les processus prévisibles

Introduction

Les théories de l'intégrale stochastique et des équations différentielles stochastiques ont été initialement développées par Kiyosi Itô vers 1940 (un des premiers articles importants a été publié en 1942).

L'intégrale au sens de Riemann

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction à valeurs réelles. En général, lorsque nous parlons de l'intégrale de la fonction f, nous nous référons à l'intégrale au sens de Riemann, $\int_a^b f(t)\,dt$, qui calcule l'aire sous la courbe $t \to f(t)$ comprise entre les bornes a et b.

L'intégrale au sens de Riemann (suite)

Premièrement, il nous faut réaliser que ce ne sont pas toutes les fonctions qui sont intégrables au sens de Riemann. Expliquons un peu : afin de construire l'intégrale de Riemann de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$, nous divisons cet intervalle en n sous-intervalles de même longueur $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ et, pour chacun d'eux, nous déterminons la plus grande et la plus petite valeur prise par la fonction f. Ainsi, pour tout $k \in \{1,...,n\}$, la plus petite valeur prise par la fonction f sur l'intervalle $\left[a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}\right]$ est

$$\underline{f}_k^{(n)} \equiv \inf\left\{f(t) \,\middle|\, a+(k-1)\frac{b-a}{n} \le t \le a+k\frac{b-a}{n}\right\} \qquad (1)$$

et la plus grande est

$$\bar{f}_k^{(n)} \equiv \sup\left\{f(t) \,\middle|\, a+(k-1)\frac{b-a}{n} \le t \le a+k\frac{b-a}{n}\right\}. \qquad (2)$$

L'intégrale au sens de Riemann (suite)

L'aire sous la courbe $t \to f(t)$ comprise entre les bornes $a+(k-1)\frac{b-a}{n}$ et $a+k\frac{b-a}{n}$ est donc supérieure à l'aire $\frac{b-a}{n}\underline{f}_k^{(n)}$ du rectangle de base $\frac{b-a}{n}$ et de hauteur $\underline{f}_k^{(n)}$ et inférieure à l'aire $\frac{b-a}{n}\bar{f}_k^{(n)}$ du rectangle de même base mais de hauteur $\bar{f}_k^{(n)}$.

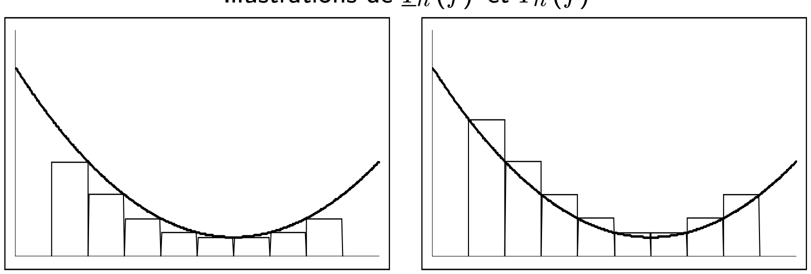
Par conséquent, si nous définissons

$$\underline{I}_n(f) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}\underline{f}_k^{(n)} \text{ et } \bar{I}_n(f) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}\bar{f}_k^{(n)} \qquad (3)$$

alors

$$\underline{I}_n(f) \le \int_a^b f(t)\,dt \le \bar{I}_n(f).$$

Illustrations de $\underline{I}_n(f)$ et $\bar{I}_n(f)$



L'intégrale au sens de Riemann (suite)

Les fonctions intégrables au sens de Riemann sont celles pour lesquelles les limites $\lim_{n\to\infty}\underline{I}_n(f)$ et $\lim_{n\to\infty}\bar{I}_n(f)$ existent et sont égales.

Nous définissons alors l'intégrale au sens de Riemann de la fonction f par

$$\int_a^b f(t)\,dt \equiv \lim_{n\to\infty}\underline{I}_n(f) = \lim_{n\to\infty}\bar{I}_n(f). \qquad (4)$$

Il est possible de montrer que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ existe pour toute fonction f continue sur l'intervalle $[a,b]$. Bien d'autres fonctions sont intégrables au sens de Riemann.

L'intégrale au sens de Riemann (suite)

Il existe cependant des fonctions qui ne le sont pas. Par exemple, considérons la fonction indicatrice $\delta_{\mathbb{Q}} : [0,1] \rightarrow \{0,1\}$ qui vaut 1 si l'argument est rationnel et 0 sinon. Alors, pour tout nombre naturel n, $\underline{I}_n = 0$ et $\bar{I}_n = 1$, ce qui implique que l'intégrale de Riemann n'est pas définie pour cette fonction.

L'intégrale au sens de Riemann (suite)

Nous allons regarder un cas très simple : l'intégrale de Riemann pour les fonctions de base, c'est-à-dire les fonctions $f : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ qui admettent la représentation $f(t) = c\delta_{(a,b]}(t)$, $a < b$, $c \in \mathbb{R}$ où $\delta_{(a,b]}$ représente la fonction indicatrice

$$\delta_{(a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (a,b] \\ 0 & \text{si } t \notin (a,b] \end{cases}. \tag{5}$$

L'intégrale au sens de Riemann (suite)

Si $f(t) = c\delta_{(a,b]}(t)$ alors l'intégrale au sens de Riemann de f est

$$\int_0^t f(s)\,ds = \int_0^t c\delta_{(a,b]}(s)\,ds \tag{6}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ c(t-a) & \text{si } a < t \leq b \\ c(b-a) & \text{si } t > b. \end{cases} \tag{7}$$

L'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien

Soit $\{W_t : t \geq 0\}$ un mouvement brownien standard construit sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$.

Condition technique. Comme nous allons travailler avec des égalités presque-sûre*, nous exigeons que l'ensemble des événements qui ont une probabilité nulle de se réaliser soit compris dans la tribu $\mathcal{F}_0$, c'est-à-dire que l'ensemble

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F} : P(A) = 0\} \subset \mathcal{F}_0. \tag{8}$$

De cette façon si X est $\mathcal{F}_t-$mesurable et que $Y = X$ $P-$presque-sûrement alors nous savons que Y est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

*$X = Y$ $P-$presque-sûrement si l'ensemble des ω pour lesquels X est différente de Y a une probabilité nulle, c'est-à-dire que

$$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\} = 0.$$

L'intégrale stochastique (suite)

Soit $\{X_t : t \geq 0\}$ un processus stochastique prévisible. Il est tentant de définir l'intégrale stochastique de X par rapport à W, trajectoire par trajectoire, en utilisant une généralisation de l'intégrale de Stieltjes :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \int X(\omega)\, dW(\omega). \tag{9}$$

Cela serait possible si les trajectoires du mouvement brownien W étaient à variation bornée, c'est-à-dire qu'elles pourraient s'exprimer comme une différence de deux fonctions non décroissantes. Or, comme les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas à variation bornée, il n'est pas possible d'utiliser cette approche. Nous devons définir l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien globalement, c'est-à-dire comme un processus stochastique en lui-même, et non pas trajectoire par trajectoire.

Les processus stochastiques de base

Nous appelons X un *processus stochastique de base* si X admet la représentation

$$X_t(\omega) = C(\omega)\, \delta_{(a,b]}(t) \tag{10}$$

où $a < b \in \mathbb{R}$ et C est une variable aléatoire $\mathcal{F}_a-$mesurable de carré-intégrable, c'est-à-dire que $E_P\left[C^2\right] < \infty$. Remarquons que ce processus est adapté à la filtration $\mathbb{F}$. En effet,

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq a \quad \text{qui est } \mathcal{F}_0 - \text{mesurable donc } \mathcal{F}_t - \text{mesurable} \\ C & \text{si } a < t \leq b \quad \text{qui est } \mathcal{F}_a - \text{mesurable donc } \mathcal{F}_t - \text{mesurable} \\ 0 & \text{si } b < t \quad \text{qui est } \mathcal{F}_0 - \text{mesurable donc } \mathcal{F}_t - \text{mesurable.} \end{cases}$$

Les processus stochastiques de base (suite)

En fait, X est plus que $\mathbb{F}-$adapté, il est $\mathbb{F}-$prévisible, mais la notion de *processus prévisible* est plus délicate à définir lorsque nous travaillons avec des processus à temps continu. Notons tout de même que les processus adaptés à trajectoires continues sont prévisibles. Intuitivement, si X_t représente le nombre de parts d'un titre détenues au temps t, alors $X_t(\omega) = C(\omega)\, \delta_{(a,b]}(t)$ signifie qu'immédiatement après l'annonce des prix au temps a et sur la base de l'information disponible au temps a (C étant $\mathcal{F}_a-$mesurable) nous achetons $C(\omega)$ parts du titre que nous conservons jusqu'au temps b. À cet instant, nous les revendons toutes.

Proposition. *Les processus $F-$adaptés dont les trajectoires sont continues à gauche sont des processus $F-$prévisibles. En particulier, les processus $F-$adaptés à trajectoires continues sont $F-$prévisibles.* (cf. Revuz et Yor)

Les processus stochastiques de base (suite)

L'intégrale stochastique de X par rapport au mouvement brownien est définie par

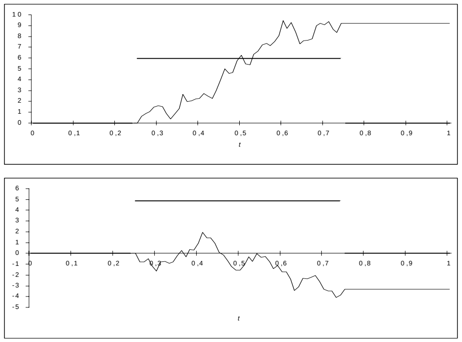
$$\left(\int_0^t X_s dW_s\right)(\omega) = C(\omega)\left(W_{t\wedge b}(\omega) - W_{t\wedge a}(\omega)\right) \tag{11}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ C(\omega)\left(W_t(\omega) - W_a(\omega)\right) & \text{si } a < t \leq b \\ C(\omega)\left(W_b(\omega) - W_a(\omega)\right) & \text{si } b < t. \end{cases} \tag{12}$$

Remarquons que pour tout t, l'intégrale $\int_0^t X_s\, dW_s$ est une variable aléatoire. De plus, $\left\{\int_0^t X_s\, dW_s : t \geq 0\right\}$ est un processus stochastique.

Les processus stochastiques de base (suite)

Trajectoires d'un processus stochastique de base ainsi que de son intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien



Integrale_stochastique.xls

Les processus stochastiques de base (suite)

Notons que

$$\int_0^t X_s dW_s = \int_0^\infty X_s \delta_{(0,t]}(s)\, dW_s. \tag{13}$$

Exercice. Vérifiez le!

Les processus stochastiques de base (suite)

Interprétation. Si, par exemple, le mouvement brownien W représente la variation du prix actualisé du titre par rapport à sa valeur initiale† ($W_t = S_t - S_0$, où S_t est le prix actualisé du titre au temps t), alors $\int_0^t X_s dW_s$ est la valeur actualisée du gain réalisé par l'investisseur. Remarquons sur les graphes que, pendant la période de temps où l'investisseur détient un nombre constant de parts du titre, la valeur actualisée de ses gains fluctue. Cela est uniquement causé par la fluctuation du prix du titre.

†L'exemple est quelque peu boiteux, car le mouvement brownien n'étant pas borné inférieurement, cela implique qu'il est possible que le prix du titre prenne des valeurs négatives. Oups!

Les processus stochastiques de base (suite)

Lemme 1. *Si X est un processus stochastique de base, alors*

$$\left\{ \int_0^t X_s dW_s : t \geq 0 \right\} \tag{14}$$

est une $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)-$martingale.

Les processus stochastiques de base (suite)

Preuve du lemme 1. Rappelons que si M est une martingale et τ un temps d'arrêt, alors le processus stochastique arrêté $M^{\tau} = \{M_{t\wedge\tau} : t \geq 0\}$ est aussi une martingale. Comme le mouvement brownien est une martingale et que τ_a et τ_b où $\forall\omega \in \Omega$, $\tau_a(\omega) = a$ et $\tau_b(\omega) = b$ sont des temps d'arrêt, alors les processus stochastiques $W^{\tau_a} = \{W_{t\wedge a} : t \geq 0\}$ et $W^{\tau_b} = \{W_{t\wedge b} : t \geq 0\}$ sont tous deux des martingales.

Preuve du lemme 1 (suite)

Maintenant, vérifions la condition $(M1)$. Si $t \leq a$, alors

$$\begin{aligned} E_P\left[\left|\int_0^t X_u dW_u\right|\right] &= E_P\left[\left|C\left(W_{t\wedge b} - W_{t\wedge a}\right)\right|\right] \\ &= E_P\left[\left|C\left(W_t - W_t\right)\right|\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Preuve du lemme 1 (suite)

Par contre, si $t > a$, alors

$$\begin{aligned} & E_P\left[\left|\int_0^t X_u dW_u\right|\right] && (15) \\ = \ & E_P\left[\left|C\left(W_{t\wedge b} - W_a\right)\right|\right] && (16) \\ = \ & E_P\left[\left|C\right|\left|W_{t\wedge b} - W_a\right|\right] && (17) \\ \leq \ & \left(E_P\left[C^2\left(W_{t\wedge b} - W_a\right)^2\right]\right)^{1/2} \text{ (voir page suivante)} && (18) \\ = \ & \left(E_P\left[C^2 E_P\left[\left(W_{t\wedge b} - W_a\right)^2 \left|\mathcal{F}_a\right.\right]\right]\right)^{1/2} \ C \text{ étant } \mathcal{F}_a - \text{mesurable.} && (19) \\ = \ & \left(E_P\left[C^2 E_P\left[\left(W_{t\wedge b} - W_a\right)^2\right]\right]\right)^{1/2} W_{t\wedge b} - W_a \text{étant indépendante de } \mathcal{F}_a. \\ = \ & \left(\left(t \wedge b - a\right) E_P\left[C^2\right]\right)^{1/2} && (20) \\ < \ & \infty && (21) \end{aligned}$$

Preuve du lemme 1 (suite)

Justification de l'inégalité: pour toute variable aléatoire Y telle que $E\left[Y^2\right] < \infty$, nous avons

$$0 \leq Var\left[Y\right] = E\left[Y^2\right] - \left(E\left[Y\right]\right)^2 \tag{22}$$

ce qui implique que

$$E\left[Y\right] \leq \left(E\left[Y^2\right]\right)^{1/2} \tag{23}$$

Preuve du lemme 1 (suite)

En ce qui concerne la condition $(M2)$,

$$\left(\int_0^t X_s dW_s\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq a \quad \mathcal{F}_0 - \text{mesurable donc } \mathcal{F}_t - \text{mesurable}, \\ C\left(W_t - W_a\right) & \text{si } a < t \leq b \quad \mathcal{F}_t - \text{mesurable}, \\ C\left(W_b - W_a\right) & \text{si } b < t. \quad \mathcal{F}_b - \text{mesurable donc } \mathcal{F}_t - \text{mesurable}. \end{cases}$$

Preuve du lemme 1 (suite)

La condition $(M3)$ est, elle aussi, vérifiée car $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $0 \leq s < t$,

$$E_P\left[\int_0^t X_u dW_u \,|\mathcal{F}_s\right] = E_P\left[C\left(W_{t\wedge b} - W_{t\wedge a}\right)|\mathcal{F}_s\right]. \tag{24}$$

Preuve du lemme 1 (suite)

Or, si $s \leq a$, alors $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_a$. Comme C est $\mathcal{F}_a -$ mesurable, alors

$$\begin{aligned} E_P\left[\int_0^t X_u dW_u \,|\mathcal{F}_s\right] &= E_P\left[E_P\left[C\left(W_{t\wedge b} - W_{t\wedge a}\right)|\mathcal{F}_a\right]|\mathcal{F}_s\right] && (25) \\ &= E_P\left[C E_P\left[\left(W_{t\wedge b} - W_{t\wedge a}\right)|\mathcal{F}_a\right]|\mathcal{F}_s\right] && (26) \\ &= E_P\left[C\underbrace{\left(W_{a\wedge b} - W_{a\wedge a}\right)}_{=W_a - W_a = 0}|\mathcal{F}_s\right] && (27) \\ &\quad \text{car } W^{\tau_a} \text{ et } W^{\tau_b} \text{ sont des martingales,} \\ &= 0 && (28) \\ &= \int_0^s X_u dW_u. && (29) \end{aligned}$$

Preuve du lemme 1 (suite)

Si $s > a$, alors C est $\mathcal{F}_s -$ mesurable et, par conséquent,

$$\begin{aligned} E_P\left[\int_0^t X_u dW_u \,|\mathcal{F}_s\right] &= E_P\left[C\left(W_{t\wedge b} - W_{t\wedge a}\right)|\mathcal{F}_s\right] && (30) \\ &= C E_P\left[\left(W_{t\wedge b} - W_{t\wedge a}\right)|\mathcal{F}_s\right] && (31) \\ &= C\left(W_{s\wedge b} - W_{s\wedge a}\right) && (32) \\ &= \int_0^s X_u dW_u. && (33) \end{aligned}$$

Le processus $\int X_s dW_s$ est bien une martingale. $\blacksquare$

Les processus stochastiques simples

Nous appelons X un *processus stochastique simple* si X est une somme finie de processus de base :

$$X_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} C_i(\omega)\, \delta_{(a_i,b_i]}(t)\,. \tag{34}$$

Comme ce processus est une somme de processus $\mathbb{F}-$prévisibles, alors il est lui-même prévisible par rapport à la filtration $\mathbb{F}$.

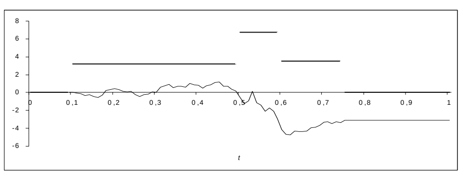
Les processus stochastiques simples (suite)

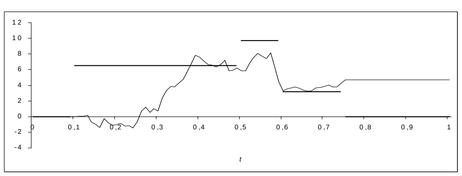
L'intégrale stochastique de X par rapport au mouvement brownien est définie comme la somme des intégrales stochastiques des processus de base constituant X :

$$\int_0^t X_s dW_s = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t C_i \delta_{(a_i,b_i]}(s)\, dW_s. \tag{35}$$

Les processus stochastiques simples (suite)

Trajectoires d'un processus stochastique simple et de son intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien





Le processus simple est de la forme $C_1\delta_{\left(\frac{1}{10},\frac{6}{10}\right]} + C_2\delta_{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]}$

Integrale_stochastique.xls

Les processus stochastiques simples (suite)

Premièrement, il faut s'assurer que cette définition ne présente pas d'incohérence, c'est-à-dire que si le processus stochastique simple X admet au moins deux représentations en termes de processus stochastiques de base, disons $\sum_{i=1}^{n} C_i \delta_{(a_i, b_i]}$ et $\sum_{j=1}^{m} \widetilde{C}_j \delta_{\left(\widetilde{a}_j, \widetilde{b}_j\right]}$, alors l'intégrale est définie de façon unique :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^t C_i \delta_{(a_i, b_i]}(s)\, dW_s = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \widetilde{C}_j \delta_{\left(\widetilde{a}_j, \widetilde{b}_j\right]}(s)\, dW_s. \tag{36}$$

Exercice. Démontrer que la définition de l'intégrale stochastique pour les processus simples ne dépend pas de la représentation choisie.

Les processus stochastiques simples (suite)

Lemme 3. *Si X est un processus stochastique simple, alors $\left\{\int_0^t X_s dW_s : t \geq 0\right\}$ est une $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ $-$martingale.*

Les processus stochastiques simples (suite)

Preuve du lemme 3. L'intégrale stochastique

$$\int_0^t X_s dW_s = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t C_i \delta_{(a_i, b_i]}(s)\, dW_s \tag{37}$$

du processus simple $X = \sum_{i=1}^{n} C_i \delta_{(a_i, b_i]}$ est la somme des intégrales stochastiques des processus de base le composant. Puisqu'une somme finie de martingales est aussi une martingale, le résultat découle du fait que les intégrales stochastiques des processus de base sont des martingales (lemme 1). ■

Les processus stochastiques simples (suite)

Le prochain résultat est assez technique et sera démontré en annexe. Il nous sera utile ultérieurement.

Lemme 4. *Si X est un processus simple, alors pour tout $t \geq 0$,*

$$E_P\left[\int_0^t X_s^2 ds\right] = E_P\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)^2\right]. \tag{38}$$

Ce lemme est cependant fort utile pour calculer la variance d'une intégrale stochastique. En effet,

$$\begin{aligned} Var_P\left[\int_0^t X_s dW_s\right] &= E_P\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)^2\right] - \left(\underbrace{E_P\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)\right]}_{=0}\right)^2 \\ &= E_P\left[\int_0^t X_s^2 ds\right] \\ &= \int_0^t E_P\left[X_s^2\right] ds \end{aligned}$$

Il est possible d'étendre ce calcul à d'autres processus X et d'établir d'une façon similaire une méthode pour le calcul de la covariance entre deux intégrales stochastiques (voir l'annexe).

Les processus prévisibles

Nous aimerions agrandir la classe des processus pour lesquels l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien peut être définie. Nous allons choisir la classe des processus $\mathbb{F}-$prévisibles pour lesquels il existe une suite de processus simples les approchant.

Proposition. *Les processus $F-$adaptés dont les trajectoires sont continues à gauche sont des processus $F-$prévisibles. En particulier, les processus $F-$adaptés à trajectoires continues sont $F-$prévisibles.*

Les processus prévisibles (suite)

Soit X un processus $\mathbb{F}-$prévisible pour lequel il existe une suite $\left\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ de processus simples convergeant vers X lorsque n croît vers l'infini.

Qui parle de convergence doit aussi parler de distance. En effet, comment mesure-t-on qu'une suite de processus stochastiques "approche" un autre processus? Quelle est la distance entre deux processus stochastiques? Pour répondre à cette question, nous devons définir l'espace des processus stochastiques sur lequel nous travaillons et la norme‡ que nous plaçons sur cet espace.

‡Rappelons que $\|\bullet\|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ est une norme sur l'espace $\mathcal{A}$ si

$$\begin{array}{rc} (i) & \|X\|_{\mathcal{A}} = 0 \Leftrightarrow X = 0; \\ (ii) & \forall X \in \mathcal{A} \text{ et } \forall a \in \mathbb{R},\ \|aX\|_{\mathcal{A}} = |a|\,\|X\|_{\mathcal{A}}; \\ (iii) & \forall X, Y \in \mathcal{A},\ \|X+Y\|_{\mathcal{A}} \le \|X\|_{\mathcal{A}} + \|Y\|_{\mathcal{A}} \text{ (l'inégalité du triangle).} \end{array}$$

Les processus prévisibles (suite)

Soit

$$\mathcal{A} = \left\{X \,\middle|\, X \text{ est un processus } \mathbb{F} - \text{prévisible tel que } E_P\left[\int_0^\infty X_t^2 dt\right] < \infty\right\}.$$

Exercice facultatif et assez difficile! La fonction $\|\bullet\|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ définie par

$$\|X\|_{\mathcal{A}} = \left(E_P\left[\int_0^\infty X_t^2 dt\right]\right)^{1/2} \tag{39}$$

est une norme sur l'espace $\mathcal{A}$.

Les processus prévisibles (suite)

Il est dit que la suite $\left\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathcal{A}$ converge vers $X \in \mathcal{A}$ lorsque n croît vers l'infini si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \left\|X^{(n)} - X\right\|_{\mathcal{A}} = \lim_{n\to\infty} \left(E_P\left[\int_0^\infty \left(X_t^{(n)} - X_t\right)^2 dt\right]\right)^{1/2} = 0. \quad (40)$$

Les processus prévisibles (suite)

Il est tentant de définir l'intégrale stochastique de X par rapport au mouvement brownien comme la limite des intégrales stochastiques des processus simples, c'est-à-dire

$$\int_0^t X_s dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t X_s^{(n)} dW_s. \quad (41)$$

Deux problèmes sont soulevés par la dernière équation, l'un d'eux étant l'existence de cette limite.

Par exemple, supposons que nous travaillons sur l'espace des nombres strictement positifs $A \equiv \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ et que nous étudions la suite $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Cette suite ne converge pas dans l'espace A puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin A$. Bien entendu, cette suite converge dans l'espace $\mathbb{R}$.

La question est: est-ce que $\lim_{n\to\infty} \int_0^t X_s^{(n)} dW_s$ existe dans l'espace dans lequel nous travaillons?

Les processus prévisibles (suite)

Le second problème est que cette équation sous-tend que plus n est grand plus $\int_0^t X_s^{(n)} dW_s$ s'approche de $\int_0^t X_s dW_s$. Or, quelle est la distance entre deux intégrales stochastiques?

Rappelons qu'au lemme 3, nous avons établi que pour tout n, l'intégrale $\int X_s^{(n)} dW_s$ d'un processus simple est une martingale. De plus, il est possible d'établir que

$$E\left[\left(\int X_s^{(n)} dW_s\right)^2\right] < \infty. \quad (42)$$

Les processus prévisibles (suite)

Par conséquent, la suite servant à approcher $\int X_s \, dW_s$ est incluse dans l'espace

$$\mathcal{M} = \left\{ M \,\middle|\, M \text{ est une martingale telle que } \left(\sup_{t\geq 0} E_P\left[M_t^2\right]\right)^{1/2} < \infty \right\}. \quad (43)$$

Exercice facultatif et laborieux! La fonction $\|\bullet\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to [0, \infty)$ définie par

$$\|M\|_{\mathcal{M}} = \left(\sup_{t\geq 0} E_P\left[M_t^2\right]\right)^{1/2} \quad (44)$$

est une norme sur $\mathcal{M}$.

Les processus prévisibles (suite)

Ainsi, nous disons que la suite $\left\{M^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ de martingales appartenant à l'espace normé $(\mathcal{M}, \|\bullet\|_{\mathcal{M}})$ converge vers M si et seulement si $M \in \mathcal{M}$ et

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left\|M^{(n)} - M\right\|_{\mathcal{M}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\geq 0} E_P\left[\left(M_t^{(n)} - M_t\right)^2\right]\right)^{1/2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les processus prévisibles (suite)

L'idée derrière la construction de $\int_0^t X_s \, dW_s$ est que, d'un côté, nous avons l'espace $(\mathcal{A}, \|\bullet\|_{\mathcal{A}})$ des processus pour lesquels nous construisons l'intégrale stochastique, et d'autre part, nous avons l'espace $(\mathcal{M}, \|\bullet\|_{\mathcal{M}})$ contenant les intégrales stochastiques des processus du premier espace. Or, nous avons choisi les normes de sorte que si le processus X est un processus simple, alors $\|X\|_{\mathcal{A}} = \|\int X_s \, dW_s\|_{\mathcal{M}}$ (réf.: lemme 5 en annexe).

Les processus prévisibles (suite)

Cela entraîne que si la suite de processus simples $\left\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ est une suite de Cauchy[§] dans le premier espace, c'est-à-dire que

$$\left\|X^{(n)} - X^{(m)}\right\|_{\mathcal{A}} \stackrel{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{45}$$

alors la suite $\left\{\int_0^t X_s^{(n)} dW_s : n \in \mathbb{N}\right\}$ d'intégrales stochastiques est une suite de Cauchy dans le second:

$$\left\|\int_0^t X_s^{(n)} dW_s - \int X_s^{(m)} dW_s\right\|_{\mathcal{M}} \stackrel{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{46}$$

[§]La suite $\left\{M^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ est une suite de Cauchy sur l'espace normé $(\mathcal{M}, \|\bullet\|_{\mathcal{M}})$ si

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\|M^{(n)} - M^{(m)}\right\|_{\mathcal{M}} = 0.$$

Si $\left\{M^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ est une suite de Cauchy, nous ne pouvons pas, en général, affirmer que cette suite converge, car nous ne sommes pas certains que le point limite appartient à l'ensemble $\mathcal{M}$.

Les processus prévisibles (suite)

Il ne reste qu'à vérifier que le point limite de la suite d'intégrales stochastiques $\left\{\int_0^t X_s^{(n)} dW_s : n \in \mathbb{N}\right\}$ est bien un élément de $\mathcal{M}$ (réf. : lemme 6 en annexe).

Nous pourrons alors définir l'intégrale stochastique du processus prévisible $X = \lim_{n\to\infty} X^{(n)}$ par $\lim_{n\to\infty} \int_0^t X_s^{(n)} dW_s$.

En résumé

Nous avons défini l'intégrale stochastique par rapport au $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)-$mouvement brownien pour tous les processus X $\mathbb{F}-$prévisibles satisfaisant la condition

$$E_P\left[\int_0^\infty X_t^2 dt\right] < \infty.$$

Pour chacun de ces processus, nous avons établi que la famille d'intégrales stochastiques $\left\{\int_0^t X_s dW_s : t \geq 0\right\}$ est une $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)-$martingale.

En résumé

Il est possible d'étendre la classe de processus pour lesquels l'intégrale stochastique peut être définie. Cela fait intervenir les martingales locales ainsi que les semi-martingales. Nous renvoyons au livre écrit par Richard Durrett ceux qui aimeraient en connaître davantage. Mentionnons toutefois qu'il est possible que pour ce type de processus, la famille d'intégrales stochastiques $\left\{\int_0^t X_s dW_s : t \geq 0\right\}$ ne soit plus une martingale.

Voici un résultat nous permettant de vérifier si l'intégrale stochastique avec laquelle nous travaillons est une martingale :
Lemme. *Si X est un processus $F-$prévisible tel que $E_P\left[\int_0^t X_s^2 ds\right] < \infty$ alors $\{\int_0^s X_s dW_s : 0 \leq s \leq t\}$ est une $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)-$martingale* (réf. Revuz et Yor, corollaire 1.25, page 124).

Généralisation

Il est possible de définir l'intégrale stochastique par rapport à d'autres processus stochastiques que les martingales en imitant la construction que nous venons de donner.

Bibliographie

DURRETT, Richard (1996). *Stochastic Calculus, A Practical Introduction*, CRC Press, New York.

KARATZAS, Ioannis et SHREVE, Steven E. (1988). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York.

KARLIN, Samuel et TAYLOR, Howard M. (1975). *A First Course in Stochastic Processes,* deuxième édition, Academic Press, New York.

LAMBERTON, Damien et LAPEYRE, Bernard (1991). *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Éllipses, Paris.

REVUZ, Daniel et YOR, Marc (1991). *Continuous Martingale and Brownian Motion*, Springer-Verlag, New York.

Annexe

Nous aurons besoin ultérieurement de quelques résultats que nous allons tout de suite commencer à élaborer. Voici donc le premier :

Lemme 2. *Si X et Y sont des processus de base, alors pour tout $t \geq 0$,*

$$E_P\left[\int_0^t X_s Y_s ds\right] = E_P\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)\left(\int_0^t Y_s dW_s\right)\right].$$

Preuve du lemme 2. Il sera suffisant de montrer que

$$E_P\left[\int_0^\infty X_s Y_s ds\right] = E_P\left[\left(\int_0^\infty X_s dW_s\right)\left(\int_0^\infty Y_s dW_s\right)\right] \tag{47}$$

car

$$X = C\delta_{(a,b]} \text{ et } Y = \widetilde{C}\delta_{\left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right]} \tag{48}$$

étant des processus de base,

$$\begin{aligned} X\delta_{(0,t]} &= C\delta_{(a\wedge t, b\wedge t]}, & (49)\\ Y\delta_{(0,t]} &= \widetilde{C}\delta_{\left(\widetilde{a}\wedge t, \widetilde{b}\wedge t\right]} & (50)\\ \text{et } XY\delta_{(0,t]} &= C\widetilde{C}\delta_{\left((a\vee\widetilde{a})\wedge t, \left(b\wedge\widetilde{b}\right)\wedge t\right]} & (51)\end{aligned}$$

le sont aussi. Ainsi, si l'équation (47) est vérifiée, nous pouvons l'utiliser pour établir la troisième égalité dans le calcul qui suit :

Preuve du lemme 2 (suite)

$$\begin{aligned} E_P\left[\int_0^t X_s Y_s ds\right] &= E_P\left[\int_0^\infty X_s Y_s \delta_{(0,t]}(s)\, ds\right] & (52)\\ &= E_P\left[\int_0^\infty \left(X_s\delta_{(0,t]}(s)\right)\left(Y_s\delta_{(0,t]}(s)\right) ds\right] & (53)\\ &= E_P\left[\left(\int_0^\infty X_s\delta_{(0,t]}(s)\, dW_s\right)\left(\int_0^\infty Y_s\delta_{(0,t]}(s)\, dW_s\right)\right] \\ &= E_P\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)\left(\int_0^t Y_s dW_s\right)\right]. & (54)\end{aligned}$$

Preuve du lemme 2 (suite)

Établissons donc l'équation (47)

$$E_P\left[\int_0^\infty X_s Y_s ds\right] = E_P\left[\left(\int_0^\infty X_s dW_s\right)\left(\int_0^\infty Y_s dW_s\right)\right].$$

Trois cas doivent être traités séparément :

$$(i) \qquad (a,b] \cap \left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right] = \emptyset,$$

$$(ii) \qquad (a,b] = \left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right],$$

$$(iii) \quad (a,b] \neq \left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right] \text{ et } (a,b] \cap \left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right] \neq \emptyset.$$

Preuve du lemme 2 (suite)

Preuve de (i). Puisque $(a,b] \cap \left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right] = \emptyset$, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $a < b \leq \widetilde{a} < \widetilde{b}$. Puisque

$$X_s Y_s = C\widetilde{C}\delta_{(a,b]}(s)\,\delta_{\left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right]}(s) = 0,$$

alors $E_P\left[\int_0^\infty X_s Y_s ds\right] = 0$.

Preuve du lemme 2 (suite)

Maintenant, comme C, $\widetilde{C}$ et $(W_b - W_a)$ sont $\mathcal{F}_{\widetilde{a}}-$mesurables,

$$\begin{aligned}
& E_P\left[\left(\int_0^\infty X_s dW_s\right)\left(\int_0^\infty Y_s dW_s\right)\right] && (55)\\
= \; & E_P\left[C\left(W_b - W_a\right)\ \widetilde{C}\left(W_{\widetilde{b}} - W_{\widetilde{a}}\right)\right] && (56)\\
= \; & E_P\left[E_P\left[C\left(W_b - W_a\right)\ \widetilde{C}\left(W_{\widetilde{b}} - W_{\widetilde{a}}\right)|\mathcal{F}_{\widetilde{a}}\right]\right] && (57)\\
= \; & E_P\left[C\widetilde{C}\left(W_b - W_a\right)\ \underbrace{E_P\left[W_{\widetilde{b}} - W_{\widetilde{a}}\,|\mathcal{F}_{\widetilde{a}}\right]}_{=W_{\widetilde{a}}-W_{\widetilde{a}}=0}\right] && (58)\\
= \; & 0 = E_P\left[\int_0^\infty X_s Y_s ds\right] && (59)
\end{aligned}$$

établissant ainsi l'équation (47) dans ce cas particulier. ■

Preuve du lemme 2 (suite)

Preuve de (ii). Supposons maintenant que $(a,b] = \left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right]$. Alors

$$\begin{aligned}
E_P\left[\int_0^\infty X_s Y_s ds\right] &= E_P\left[\int_0^\infty C\widetilde{C}\delta_{(a,b]}dt\right] && (60)\\
&= E_P\left[C\widetilde{C}\int_0^\infty \delta_{(a,b]}dt\right] && (61)\\
&= E_P\left[C\widetilde{C}\,(b-a)\right] && (62)\\
&= (b-a)\,E_P\left[C\widetilde{C}\right]. && (63)
\end{aligned}$$

Preuve du lemme 2 (suite)

D'autre part,

$$E_P\left[\left(\int_0^\infty X_s dW_s\right)\left(\int_0^\infty Y_s dW_s\right)\right] \quad (64)$$

$$= E_P\left[C\left(W_b - W_a\right)\ \widetilde{C}\left(W_b - W_a\right)\right] \quad (65)$$

$$= E_P\left[C\widetilde{C}E_P\left[\left(W_b - W_a\right)^2 |\mathcal{F}_a\right]\right] \text{ car } C \text{ et } \widetilde{C} \text{ sont } \mathcal{F}_a - \text{mesurables}$$

$$= E_P\left[C\widetilde{C}E_P\left[\left(W_b - W_a\right)^2\right]\right] \quad (66)$$

car $W_b - W_a$ est indépendante de $\mathcal{F}_a$

$$= E_P\left[C\widetilde{C}\left(b-a\right)\right] \text{ car } W_b - W_a \text{ est de loi } N\left(0, b-a\right) \quad (67)$$

$$= \left(b-a\right)E_P\left[C\widetilde{C}\right] = E_P\left[\int_0^\infty X_s Y_s ds\right] \quad (68)$$

établissant l'équation (47) pour cet autre cas particulier.■

Preuve du lemme 2 (suite)

Preuve de (iii). Nous avons que $(a,b] \neq \left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right]$ et $(a,b] \cap \left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right] \neq \emptyset$. Posons $a^* = a \vee \widetilde{a}$ et $b^* = b \wedge b^*$. D'une part,

$$E_P\left[\int_0^\infty X_s Y_s ds\right] = E_P\left[\int_0^\infty C\delta_{(a,b]}\widetilde{C}\delta_{\left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right]}dt\right] \quad (69)$$

$$= E_P\left[\int_0^\infty C\widetilde{C}\delta_{(a^*,b^*]}dt\right] \quad (70)$$

$$= E_P\left[C\widetilde{C}\int_0^\infty \delta_{(a^*,b^*]}dt\right] \quad (71)$$

$$= E_P\left[C\widetilde{C}\left(b^* - a^*\right)\right] \quad (72)$$

$$= \left(b^* - a^*\right)E_P\left[C\widetilde{C}\right]. \quad (73)$$

Preuve du lemme 2 (suite)

Dans ce qui suit, s'il advenait des intervalles de la forme $(\alpha,\beta]$ où $\alpha \geq \beta$, alors nous définissons $(\alpha,\beta] = \emptyset$. D'autre part, comme

$$\int_0^\infty X_s dW_s \quad (74)$$

$$= C\left(W_b - W_a\right) \quad (75)$$

$$= C\left(W_b - W_{b^*} + W_{b^*} - W_{a^*} + W_{a^*} - W_a\right) \quad (76)$$

$$= C\left(W_b - W_{b^*}\right) + C\left(W_{b^*} - W_{a^*}\right) + C\left(W_{a^*} - W_a\right) \quad (77)$$

$$= \int_0^\infty C\delta_{(b^*,b]}dW_s + \int_0^\infty C\delta_{(a^*,b^*]}dW_s + \int_0^\infty C\delta_{(a,a^*]}dW_s, \quad (78)$$

Preuve du lemme 2 (suite)

$$\int_0^\infty Y_s dW_s \tag{79}$$

$$= \widetilde{C}\left(W_{\widetilde{b}} - W_{\widetilde{a}}\right) \tag{80}$$

$$= \widetilde{C}\left(W_{\widetilde{b}} - W_{b^*} + W_{b^*} - W_{a^*} + W_{a^*} - W_{\widetilde{a}}\right) \tag{81}$$

$$= \widetilde{C}\left(W_{\widetilde{b}} - W_{b^*}\right) + \widetilde{C}\left(W_{b^*} - W_{a^*}\right) + \widetilde{C}\left(W_{a^*} - W_{\widetilde{a}}\right) \tag{82}$$

$$= \int_0^\infty \widetilde{C}\delta_{\left(b^*,\widetilde{b}\right]} dW_s + \int_0^\infty \widetilde{C}\delta_{(a^*,b^*]} dW_s + \int_0^\infty \widetilde{C}\delta_{(\widetilde{a},a^*]} dW_s \tag{83}$$

Preuve du lemme 2 (suite)

et

$$\begin{aligned}
(a,a^*] \cap (\tilde{a},a^*] &= \emptyset,\ (a,a^*] \cap (a^*,b^*] = \emptyset,\ (a,a^*] \cap \left(b^*,\widetilde{b}\right] = \emptyset, \\
(a^*,b^*] \cap (\tilde{a},a^*] &= \emptyset,\ (a^*,b^*] \cap \left(b^*,\widetilde{b}\right] = \emptyset, \\
(b^*,b] \cap (\tilde{a},a^*] &= \emptyset,\ (b^*,b] \cap (a^*,b^*] = \emptyset,\ (b^*,b] \cap \left(b^*,\widetilde{b}\right] = \emptyset,
\end{aligned}$$

nous pouvons utiliser les résultats obtenus aux points (i) et (ii) afin de compléter la démonstration : utilisant les expressions des lignes (78) et (83),

$$\begin{aligned}
& E_P\left[\left(\int_0^\infty X_s dW_s\right)\left(\int_0^\infty Y_s dW_s\right)\right] \\
&= E_P\left[\int_0^\infty \left(C\delta_{(a^*,b^*]} dW_s\right)\left(\int_0^\infty \widetilde{C}\delta_{(a^*,b^*]} dW_s\right)\right] \\
&= (b^* - a^*)\, E_P\left[C\widetilde{C}\right] \\
&= E_P\left[\int_0^\infty X_s Y_s ds\right]. \blacksquare
\end{aligned}$$

La démonstration du lemme 2 est maintenant complète. ■

Voici un deuxième résultat semblable au lemme 2 mais pour les processus simples.

Lemme 4. *Si X est un processus simple, alors pour tout $t \geq 0$,*

$$E_P\left[\int_0^t X_s^2\, ds\right] = E_P\left[\left(\int_0^t X_s\, dW_s\right)^2\right]. \tag{84}$$

Preuve du lemme 4. Soit $X = \sum_{i=1}^{n} C_i \delta_{(a_i,b_i]}$, un processus simple.

$$
\begin{aligned}
& E_P\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)^2\right] && (85)\\
= \; & E_P\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \int_0^t C_i \delta_{(a_i,b_i]}(s)\, dW_s\right)^2\right] && (86)\\
= \; & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_P\left(\int_0^t C_i \delta_{(a_i,b_i]}(s)\, dW_s\right)\left(\int_0^t C_j \delta_{(a_j,b_j]}(s)\, dW_s\right) && (87)\\
= \; & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_P\left[\int_0^t C_i \delta_{(a_i,b_i]}(s)\;\; C_j \delta_{(a_j,b_j]}(s)\;\; ds\right] \text{ par le lemme 2.} & \\
= \; & E_P\left[\int_0^t \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_i \delta_{(a_i,b_i]}(s)\;\; C_j \delta_{(a_j,b_j]}(s)\;\; ds\right] && (88)\\
= \; & E_P\left[\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{n} C_i \delta_{(a_i,b_i]}(s)\right)^2 \; ds\right] = E_P\left[\int_0^t X_s^2 \; ds\right]. \blacksquare && (89)
\end{aligned}
$$

Lemme 5. *Pour tout processus simple* Y, $\|Y\|_{\mathcal{A}} = \|\int Y_s dW_s\|_{\mathcal{M}}$.

Preuve du lemme 5. Remarquons que $\forall \omega \in \Omega$, la fonction $t \to \int_0^t Y_s^2(\omega)\, ds$ ainsi que la fonction $t \to E_P\left[\int_0^t Y_s^2 ds\right]$ sont non-décroissantes. Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\|Y\|_{\mathcal{A}}^2 &= E_P\left[\int_0^\infty Y_s^2 ds\right]\\
&= E_P\left[\lim_{t\to\infty}\int_0^t Y_s^2 ds\right]\\
&= \lim_{t\to\infty} E_P\left[\int_0^t Y_s^2 ds\right] \text{ par le théorème de la convergence monotone.}\\
&= \sup_{t\geq 0} E_P\left[\int_0^t Y_s^2 ds\right]\\
&= \sup_{t\geq 0} E_P\left[\left(\int_0^t Y_s dW_s\right)^2\right] \text{ par le lemme 4.}\\
&= \left\|\int Y_s dW_s\right\|_{\mathcal{M}}^2 \text{ par la définition même de } \|\bullet\|_{\mathcal{M}}. \blacksquare
\end{aligned}
$$

Preuve du lemme 5 (suite)

Ce dernier résultat fait en sorte que la suite $\left\{\int X_s^{(n)} dW_s : n \in \mathbb{N}\right\}$ d'intégrales stochastiques de processus simples par rapport au mouvement brownien est une suite de Cauchy puisque

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| \int X_s^{(n)} dW_s - \int X_s^{(m)} dW_s \right\|_{\mathcal{M}} = \lim_{n,m\to\infty} \left\| X^{(n)} - X^{(m)} \right\|_{\mathcal{A}} = 0$$

où la première égalité est une conséquence directe du lemme 5, $X^{(n)}$ et $X^{(m)}$ étant des processus stochastiques simples, et la deuxième égalité provient du fait que la suite $\left\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ est une suite de Cauchy puisqu'elle converge vers X.

Lemme 6. *L'espace normé* $(\mathcal{M}, \|\bullet\|_{\mathcal{M}})$ *est complet*[¶] (Durrett, 1996, théorème 4.6, page 57).

Comme $\left\{\int X_s^{(n)} dW_s : n \in \mathbb{N}\right\}$ est une suite de Cauchy sur l'espace complet $(\mathcal{M}, \|\bullet\|_{\mathcal{M}})$ alors cette limite converge, établissant ainsi l'existence de ce que nous avons appelé $\int X_s dW_s$, et ce point limite appartient à $(\mathcal{M}, \|\bullet\|_{\mathcal{M}})$, ce qui implique que l'intégrale stochastique de X par rapport à W, $\int X_s dW_s$, est une martingale, même pour certains processus adaptés qui ne sont pas des processus simples.

[¶]Un espace normé est dit complet si toute suite de Cauchy converge, c'est-à-dire que le point limite de toute suite de Cauchy appartient à l'espace.

Commentaire

Il est possible de démontrer que la définition de l'intégrale stochastique pour les processus stochastiques prévisibles $X \in \mathcal{A}$ possédant une suite de processus simples les approchant ne dépend pas de la suite choisie, c'est-à-dire que si $\left\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ et $\left\{\widetilde{X}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sont deux suites de processus simples telles que $\lim_{n\to\infty} \left\| X^{(n)} - X \right\|_{\mathcal{A}} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \left\| \widetilde{X}^{(n)} - X \right\|_{\mathcal{A}} = 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int X_s^{(n)} dW_s = \lim_{n\to\infty} \int \widetilde{X}^{(n)} dW_s. \qquad (90)$$

Commentaire

Un dernier commentaire: pour tout processus stochastique prévisible $X \in (\mathcal{A}, \|\bullet\|_{\mathcal{A}})$, il existe une suite $\left\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ de processus simples telle que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| X^{(n)} - X \right\|_{\mathcal{A}} = 0. \qquad (91)$$

(Durrett, 1996, lemme 4.5, page 57)