Convergences de suite de variables aléatoires

Les méthodes stochastiques dans les sciences de la gestion
6-640-93

Geneviève Gauthier

Dernière mise à jour : 11 mars 2003

Plan de la présentation

- Les espaces métriques (rappel)
- Convergence presque sûre
- Convergence en probabilité
- Convergence en moyenne
- Convergence en distribution

Les espaces métriques

Définition. Supposons qu'il existe une fonction $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$ qui associe à tous les couples (u, v) de points de l'espace V un nombre réel et qui possède les trois caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} &(i) && \rho(u,v) \geq 0 \quad \forall u, v \in V \\ & && \rho(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v \\ &(ii) && \rho(u,v) = \rho(v,u) \quad \forall u, v \in V \\ &(iii) && \rho(u,w) \leq \rho(u,v) + \rho(v,w) \quad \forall u, v, w \in V \end{aligned} \tag{1}$$

La fonction ρ est alors appelée une *métrique* ou une *distance* et le couple (V, ρ) est un *espace métrique*.

Les espaces métriques (suite)

Exemple. L'espace est $V = \mathbb{R}^2$ et nous définissons

$$\rho((x_1, y_1); (x_2, y_2)) = \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Cette métrique est appelée la *métrique euclidienne*.

Exercice. Démontrez que la fonction $\rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie à la ligne (2) est bien une métrique sur $\mathbb{R}^2$.

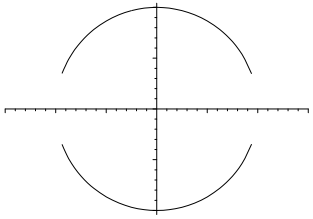
Les espaces métriques (suite)

Question. Quels sont les points de $\mathbb{R}^2$ qui sont à une distance euclidienne de $a > 0$ de l'origine ?

Les espaces métriques (suite)

Réponse.

$$
\begin{aligned}
& a = \rho\left((x,y)\,;(0,0)\right) = \left(x^2+y^2\right)^{1/2} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2 = a^2 \text{ (équation du cercle de rayon } a \text{ centré à l'origine)} && (4)\\
\Leftrightarrow\ & x^2 = a^2 - y^2 && (5)\\
\Leftrightarrow\ & a^2-y^2 \geq 0 \text{ et } x = \left(a^2-y^2\right)^{1/2} \text{ ou } x = -\left(a^2-y^2\right)^{1/2} && (6)\\
\Leftrightarrow\ & y^2 \leq a^2 \text{ et } x = \left(a^2-y^2\right)^{1/2} \text{ ou } x = -\left(a^2-y^2\right)^{1/2} && (7)\\
\Leftrightarrow\ & -a \leq y \leq a \text{ et } x = \left(a^2-y^2\right)^{1/2} \text{ ou } x = -\left(a^2-y^2\right)^{1/2} && (8)
\end{aligned}
$$



Les espaces métriques (suite)

La métrique euclidienne n'est pas la seule distance possible sur l'espace $\mathbb{R}^2$.

Exemple. Posons

$$\widetilde{\rho}\left((x_1,y_1)\,;(x_2,y_2)\right) = \max\left\{|x_1-x_2|\,;|y_1-y_2|\right\}. \qquad (9)$$

La fonction $\widetilde{\rho}$ est une métrique sur $\mathbb{R}^2$ puisque :

Vérification du point (i) : par construction, $\widetilde{\rho}$ est une fonction non négative.

$$
\begin{aligned}
& \max\left\{|x_1-x_2|\,;|y_1-y_2|\right\} = 0\\
\Leftrightarrow\ & |x_1-x_2| = 0 \text{ et } |y_1-y_2| = 0\\
\Leftrightarrow\ & x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2\\
\Leftrightarrow\ & (x_1,y_1) = (x_2,y_2)
\end{aligned}
$$

Vérification du point (ii) :

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}\left((x_1,y_1);(x_2,y_2)\right) &= \max\left\{|x_1-x_2|;|y_1-y_2|\right\}\\ &= \max\left\{|x_2-x_1|;|y_2-y_1|\right\}\\ &= \widetilde{\rho}\left((x_2,y_2);(x_1,y_1)\right)\end{aligned}$$

Vérification du point (iii) :

$$\begin{aligned}&\widetilde{\rho}\left((x_1,y_1);(x_3,y_3)\right)\\ =\ &\max\left\{|x_1-x_3|;|y_1-y_3|\right\}\\ =\ &\max\left\{|x_1-x_2+x_2-x_3|;|y_1-y_2+y_2-y_3|\right\}\\ \leq\ &\max\left\{|x_1-x_2|+|x_2-x_3|;|y_1-y_2|+|y_2-y_3|\right\}\\ \leq\ &\max\left\{|x_1-x_2|;|y_1-y_2|\right\}+\max\left\{|x_2-x_3|;|y_2-y_3|\right\}\\ =\ &\widetilde{\rho}\left((x_1,y_1);(x_2,y_2)\right)+\widetilde{\rho}\left((x_2,y_2);(x_3,y_3)\right).\end{aligned}$$

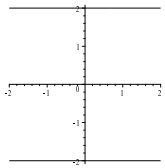
Les espaces métriques (suite)

Question. Quels sont les points de $\mathbb{R}^2$ qui sont à une distance $\widetilde{\rho}$ de $a>0$ de l'origine ?

Les espaces métriques (suite)

Réponse.

$$\begin{aligned}&a=\widetilde{\rho}\left((x,y);(0,0)\right)=\max\left\{|x|;|y|\right\}\\ \Leftrightarrow\ &|x|=a \text{ et } |y|\leq a \text{ ou } |x|\leq a \text{ et } |y|=a\\ \Leftrightarrow\ &x=a \text{ et } -a\leq y\leq a \text{ ou } x=-a \text{ et } -a\leq y\leq a\\ &\text{ou } -a\leq x\leq a \text{ et } y=a \text{ ou } -a\leq x\leq a \text{ et } y=-a\end{aligned}$$



Les espaces métriques (suite)

Définition. La suite de vecteurs $\{v_n : n\in\mathbb{N}\}$ *converge* dans l'espace métrique (V,ρ) s'il existe un point $v\in V$ tel que $\lim_{n\to\infty}\rho\left(v_n,v\right)=0$, c'est-à-dire si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un nombre entier positif $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_\varepsilon$, $\rho\left(v_n,v\right)<\varepsilon$ (à partir d'un certain rang, les éléments de la suite sont tous à une distance inférieure à une très petite quantité ε du point limite v).

Les espaces métriques (suite)

Exemple. La suite $\left\{\left(3+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n^2}\right):n\in\mathbb{N}\right\}$ converge sur l'espace $\left(\mathbb{R}^2,\rho\right)$ muni de la distance euclidienne vers le point $(3,5)$ car $(3,5)\in\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned}\rho\left(\left(3+\frac{1}{n};5-\frac{1}{n^2}\right);(3,5)\right) &= \left(\left(3+\frac{1}{n}-3\right)^2+\left(5-\frac{1}{n^2}-5\right)^2\right)^{1/2}\\ &= \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)^{1/2}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

Les espaces métriques (suite)

Exemple. La suite $\left\{\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n^2}\right):n\in\mathbb{N}\right\}$ ne converge pas sur l'espace

$$\left((0,\infty)\times(0,\infty),\rho\right)$$

muni de la distance euclidienne car le point $(0,0)$ ne fait pas partie de l'espace.

Les espaces métriques (suite)

Définition. La suite de vecteurs $\{v_n:n\in\mathbb{N}\}$ est une *suite de Cauchy* dans l'espace métrique (V,ρ) si $\lim_{m,n\to\infty}\rho\left(v_n,v_m\right)=0$, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang, les éléments de la suite sont tous à une distance inférieure à une très petite quantité ε les uns des autres.
Si une suite converge alors elle est une suite de Cauchy, mais si une suite est une suite de Cauchy alors nous ne sommes pas certain qu'elle converge car le point limite peut être à l'extérieur de l'espace.

Les espaces métriques (suite)

Les espace ne se limitent pas à des ensembles de points. Nous pouvons étudier des espaces de fonctions, des espaces de variables aléatoires, des espaces de processus stochastiques, des espaces d'ensembles, etc.

Les espaces métriques (suite)

Exemple. Soit $\mathcal{S}$, l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ existe et satisfaisant la condition $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty$. Nous pouvons construire plusieurs métriques sur cet espace. Par exemple :

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \text{ et } \widetilde{\rho}(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|\ dx. \quad (10)$$

La fonction ρ est bien une métrique sur $\mathcal{S}$ puisque, par construction, elle est une fonction à valeurs non négatives. De plus,

$$\rho(f,g) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x), \quad (11)$$

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x) - f(x)| = \rho(g,f) \quad (12)$$

et

$$\begin{aligned}
\rho(f,h) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - h(x)| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x) - h(x)| \\
&= \rho(f,g) + \rho(g,h).
\end{aligned}$$

Exercice. Montrer que $\widetilde{\rho}$ est bien une métrique sur $\mathcal{S}$.

Les espaces métriques (suite)

Exemple. Posons

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13)$$

et $g(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Les fonctions f_n et g appartiennent à l'espace $\mathcal{S}$.

$$\begin{aligned}
\rho(f_n, g) &= 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| = 1 \overset{n\to\infty}{\not\to} 0 \text{ et} \\
\widetilde{\rho}(f_n, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - g(x)|\ dx = \int_0^{\frac{1}{n}} 1\ dx = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que la suite $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge vers g sur l'espace métrique $(\mathcal{S}, \widetilde{\rho})$ mais ne converge pas sur l'espace métrique $(\mathcal{S}, \rho)$.

Convergence presque sûre

Définition. Soit X, une variable aléatoire et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, une suite de variables aléatoires, toutes construites sur le même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$.
X_n converge vers X "ω par ω" si, pour tout $\omega \in \Omega$, la suite de nombres réels $\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ converge vers le nombre réel $X(\omega)$, c'est-à-dire que

$$\forall \omega \in \Omega,\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega). \quad (14)$$

Ce dernier énoncé est équivalent à

$$\forall \omega \in \Omega \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_{\omega,\varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_{\omega,\varepsilon},\ |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon.$$

Convergence presque sûre (suite)

Définition. Soit X, une variable aléatoire et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, une suite de variables aléatoires, toutes construites sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
X_n converge vers X *presque sûrement* s'il existe un sous-ensemble A de Ω tel que $P(A) = 1$ et

$$\forall \omega \in A, \ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \tag{15}$$

c'est-à-dire si

$$P\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\right\} = 1 \tag{16}$$

ou encore si

$\forall \omega \in A$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_{\omega,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_{\omega,\varepsilon}, \ |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$.

Convergence presque sûre (suite)

Lorsque X_n converge presque sûrement vers X, il est possible qu'il existe un sous-ensemble de Ω pour lequel $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)$, mais la probabilité que ce sous-ensemble se réalise est nulle. Ce type de convergence est aussi connu sous l'appellation de *convergence presque partout* et de *convergence forte*. En anglais, la terminologie est "convergence almost surely", "convergence almost everywhere" et "strong convergence".

Convergence presque sûre (suite)

Remarquons que si la suite $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge vers X "ω par ω", alors elle converge peu importe la mesure de probabilité prévalant sur l'espace probabilisable. Par contre, si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge presque sûrement vers X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, il est possible qu'elle ne converge pas presque sûrement sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. C'est pourquoi nous écrivons $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X \ P-$p.s.

Convergence presque sûre (suite)

Exemple. Posons $\Omega = [0,1]$. La tribu utilisée est appelée la tribu borélienne, notée $\mathcal{B}[0,1]$, et correspond à la plus petite tribu contenant tous les intervalles de la forme $[a,b]$ contenus dans Ω. Nous utiliserons la mesure de Lebesgue λ définie par

$$\lambda[a,b] = b - a. \tag{17}$$

Pour chaque élément de la tribu borélienne, λ associe la "longueur" du sous-ensemble de Ω. Cette mesure est une probabilité puisque

$(P1)$ $\quad \lambda(\Omega) = \lambda[0,1] = 1 - 0 = 1.$

$(P2)$ $\quad$ Pour tout intervalle $[a,b]$ de Ω, $0 \leq \lambda[a,b] \leq 1$.

$(P3)$ $\quad$ Si les intervalles $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, ... sont mutuellement disjoints, alors $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda[a_i,b_i]$.

Convergence presque sûre (suite)

Pour tout entier naturel m et pour tout entier $k \in \{1, ..., 2^m\}$, nous définissons

$$\forall \omega \in [0,1]\,,\ Y_k^{(m)}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2^{m-1}} & \text{si } \frac{k-1}{2^m} \leq \omega < \frac{k}{2^m} \\ 1 & \text{si } \omega = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

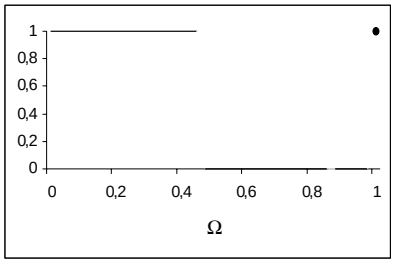
Posons

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_1^{(1)},\ X_2 = Y_2^{(1)}, \\ X_3 &= Y_1^{(2)},\ X_4 = Y_2^{(2)},\ X_5 = Y_3^{(2)},\ X_6 = Y_4^{(2)} \\ X_n &= Y_k^{(m)} \text{ si } n = 2^m - 2 + k,\ k \in \{1, ..., 2^m\} \end{aligned}$$

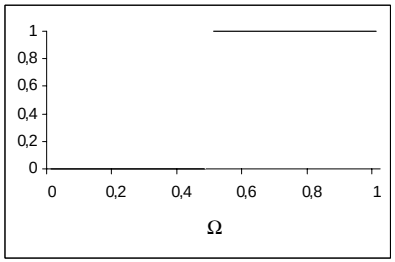
Remarquons que si $n = 2^m - 2 + k$, alors n tend vers l'infini si et seulement si m croît vers l'infini.

Convergence presque sûre (suite)

$X_1 = Y_1^{(1)}$

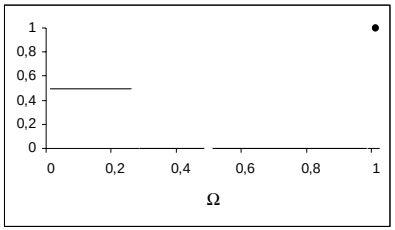


$X_2 = Y_2^{(1)}$

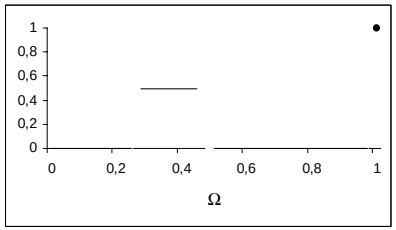


Convergence presque sûre (suite)

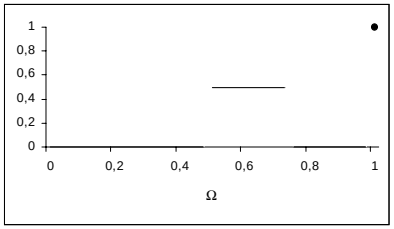
$X_3 = Y_1^{(2)}$



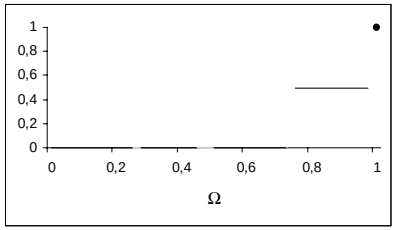
$X_4 = Y_2^{(2)}$



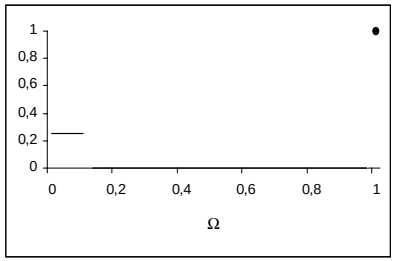
$X_5 = Y_3^{(2)}$



$X_6 = Y_4^{(2)}$

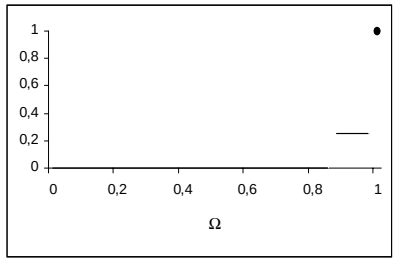


$X_7 = Y_1^{(3)}$



...

$X_{14} = Y_8^{(3)}$



...

Convergence presque sûre (suite)

Comme

$$\lambda\left\{\omega\in\Omega:\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=0\right\}=\lambda[0,1)=1-0=1,$$

X_n converge presque sûrement vers 0, mais ne converge pas vers 0 "ω par ω" puisque

$$\lim_{n\to\infty}X_n(1)=1.$$

Par contre si $X(\omega)=1$ si $\omega=1$ et 0 sinon, alors X_n converge vers X "ω par ω".■

Convergence presque sûre (suite)

À l'aide de l'exemple précédent, nous pouvons illustrer le fait que la convergence presque sûre dépend de la mesure de probabilité qui prévaut sur l'espace probabilisable $([0,1],\mathcal{B}[0,1])$. En effet, conservons la même suite de variables aléatoires, mais modifions la mesure de la façon suivante : pour tout événement $A\in\mathcal{B}[0,1]$,

$$\lambda^*(A)=\begin{cases}\frac{1}{2}\lambda(A) & \text{si } 1\notin A\\ \frac{1}{2}\lambda(A)+\frac{1}{2} & \text{si } 1\in A.\end{cases}\tag{18}$$

Il est possible de montrer que λ^* est une mesure de probabilité sur $([0,1],\mathcal{B}[0,1])$. Or, la suite $\{X_n:n\in\mathbb{N}\}$ ne converge pas vers 0 λ^*-presque sûrement puisque

$$\lambda^*\left\{\omega\in\Omega:\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=0\right\}=\lambda^*[0,1)=\frac{1}{2}\lambda[0,1)=\frac{1}{2}.$$

Convergence en probabilité

Définition. Soit X, une variable aléatoire et $\{X_n:n\in\mathbb{N}\}$, une suite de variables aléatoires, toutes construites sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Il est dit que X_n converge vers X *en probabilité* si

$$\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\to\infty}P\{\omega\in\Omega:|X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\}=0.\tag{19}$$

Ce type de convergence est aussi connu sous le nom de *convergence en mesure*.

Convergence en probabilité (suite)

Exemple. Sur l'espace probabilisé $([0,1],\mathcal{B}[0,1],\lambda)$, nous définissons, pour tout entier naturel m et pour tout entier $k\in\{1,...,2^m\}$,

$$\forall\omega\in[0,1],\ \widetilde{Y}_k^{(m)}(\omega)=\begin{cases}1 & \text{si } \frac{k-1}{2^m}\le\omega<\frac{k}{2^m}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.\tag{20}$$

Posons

$$\widetilde{X}_1 = \widetilde{Y}_1^{(1)},\ \widetilde{X}_2=\widetilde{Y}_2^{(1)},\tag{21}$$

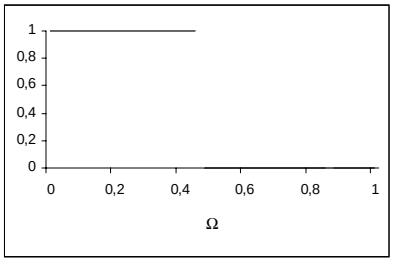
$$\widetilde{X}_3 = \widetilde{Y}_1^{(2)},\ \widetilde{X}_4=\widetilde{Y}_2^{(2)},\ \widetilde{X}_5=\widetilde{Y}_3^{(2)},\ \widetilde{X}_6=\widetilde{Y}_4^{(2)}\tag{22}$$

$$\widetilde{X}_n = \widetilde{Y}_k^{(m)} \text{ si } n=2^m-2+k,\ k\in\{1,...,2^m\},\tag{23}$$

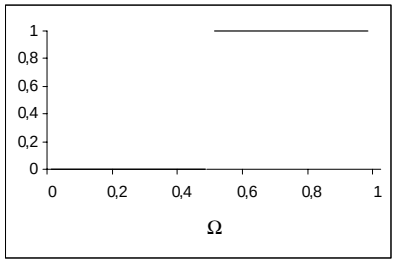
$$etc.$$

Convergence en probabilité (suite)

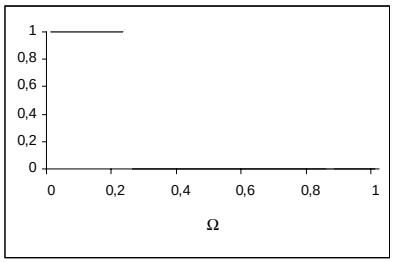
$\widetilde{X}_1 = \widetilde{Y}_1^{(1)}$



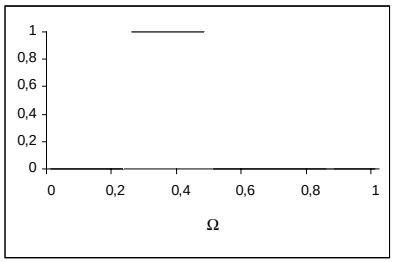
$\widetilde{X}_2 = \widetilde{Y}_2^{(1)}$



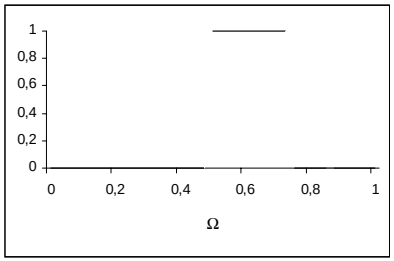
$\widetilde{X}_3 = \widetilde{Y}_1^{(2)}$



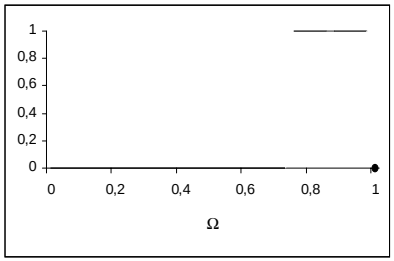
$\widetilde{X}_4 = \widetilde{Y}_2^{(2)}$



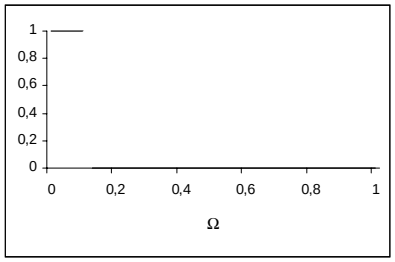
$\widetilde{X}_5 = \widetilde{Y}_3^{(2)}$



$\widetilde{X}_6 = \widetilde{Y}_4^{(2)}$

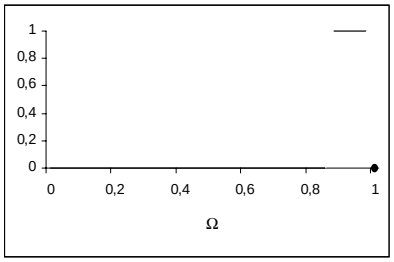


$\widetilde{X}_7 = \widetilde{Y}_1^{(3)}$



...

$\widetilde{X}_{14} = \widetilde{Y}_8^{(3)}$



...

Convergence en probabilité (suite)

Pour tout $\varepsilon \geq 1$

$$\lambda\left\{\omega \in \Omega : \left|\widetilde{X}_n(\omega) - 0\right| > \varepsilon\right\} = 0 \tag{24}$$

et pour tout $0 < \varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned}
\lambda\left\{\omega \in \Omega : \left|\widetilde{X}_n(\omega) - 0\right| > \varepsilon\right\} &= \lambda\left\{\omega \in \Omega : \left|\widetilde{Y}_k^{(m)} - 0\right| > \varepsilon\right\} && (25)\\
&= \lambda\left[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right) && (26)\\
&= \frac{k}{2^m} - \frac{k-1}{2^m} && (27)\\
&= \frac{1}{2^m} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 && (28)
\end{aligned}$$

donc $\widetilde{X}_n$ converge vers 0 en probabilité sur l'espace probabilisé $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$.

Convergence en probabilité (suite)

Par contre, pour tout ω, la suite de nombres réels dont le n ième terme est $\widetilde{X}_n(\omega)$ ne converge pas vers 0. En effet, périodiquement, $\widetilde{X}_n(\omega) = 1$ d'où

$$\lambda\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \widetilde{X}_n(\omega) = 0\right\} = \lambda\{\emptyset\} = 0. \tag{29}$$

Par conséquent, $\widetilde{X}_n$ ne converge pas vers 0 ni presque sûrement, ni "ω par ω". ■

Convergence en probabilité (suite)

Théorème. *Soit X, une variable aléatoire et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, une suite de variables aléatoires, toutes construites sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si X_n converge vers X presque sûrement, alors X_n converge aussi vers X en probabilité.* (Référence : Cohn, théorème 3.1.1, page 86 ou Billingsley, théorème 20.5, page 274.)

Théorème. *Soit X, une variable aléatoire et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, une suite de variables aléatoires, toutes construites sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si X_n converge vers X en probabilité, alors il existe une sous-suite $\{X_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ de $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que X_{n_k} converge vers X presque sûrement lorsque k croît vers l'infini.* (Référence : Cohn, théorème 3.1.2, pages 86-87 ou Billingsley, théorème 20.5, page 274.)

Convergence en moyenne

Définition. Soit X, une variable aléatoire et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, une suite de variables aléatoires, toutes construites sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Il est dit que X_n converge vers X *en moyenne* si

$$\lim_{n\to\infty} E_P\left[|X_n - X|\right] = 0. \tag{30}$$

Il faut noter qu'il est possible que $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ en moyenne sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, mais que cette même suite ne converge pas en moyenne si la mesure de probabilité prévalant sur l'espace probabilisable est modifiée, par exemple $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

Convergence en moyenne (suite)

Exemple. Reprenons la suite de variables aléatoires de l'exemple précédent sur l'espace probabilisé $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$, $\widetilde{X}_n$ converge en mesure vers 0 puisque*

$$\widetilde{X}_n(\omega) = \widetilde{Y}_k^{(m)}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{k-1}{2^m} \leq \omega < \frac{k}{2^m} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{31}$$

implique

$$\begin{aligned} E_\lambda\left[\left|\widetilde{X}_n - 0\right|\right] &= E_\lambda\left[\left|\widetilde{Y}_k^{(m)} - 0\right|\right] && (32) \\ &= \left(1\lambda\left[\left[\frac{k-1}{2^m}; \frac{k}{2^m}\right)\right] + 0\lambda\left[\left[\frac{k-1}{2^m}; \frac{k}{2^m}\right)^c\right]\right) && (33) \\ &= \frac{1}{2^m} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. && (34) \end{aligned}$$

$^*n = 2^m - 2 + k$

Nous avons ici un exemple d'une suite de variables aléatoires qui converge vers 0 en moyenne et en probabilité, mais pas presque sûrement. ■

Convergence en moyenne (suite)

Exemple. Sur l'espace probabilisé $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$, construisons la suite de variables aléatoires $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ comme suit :

$$Z_n(\omega) = \begin{cases} n & \text{si } 0 < \omega < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{35}$$

alors Z_n converge vers 0 "ω par ω" donc $\lambda-$presque sûrement et en probabilité, mais ne converge pas vers 0 en moyenne. En effet,

$$E_\lambda[|Z_n - 0|] = n\lambda\left(0, \frac{1}{n}\right) \tag{36}$$

$$= n\frac{1}{n} = 1 \overset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0. \tag{37}$$

Convergence en moyenne (suite)

Par contre, pour tout $\omega \in [0,1]$,

$$\forall n > \frac{1}{\omega},\ Z_n(\omega) = 0 \tag{38}$$

d'où $Z_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Convergence en moyenne (suite)

Théorème. *Soit X, une variable aléatoire et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, une suite de variables aléatoires, toutes construites sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si X_n converge vers X en moyenne, alors X_n converge aussi vers X en probabilité.* (Référence : Cohn, théorème 3.1.4, page 88.)

Convergence en moyenne (suite)

Preuve du théorème. C'est une conséquence directe de l'inégalité de Markov. En effet, pour toute variable aléatoire X construite sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et pour toute constante positive k,

$$\begin{aligned} E_P[|X|] &= E_P\left[|X|\,\delta_{\{|X|\leq k\}}\right] + E_P\left[|X|\,\delta_{\{|X|>k\}}\right] && (39)\\ &\geq E_P\left[|X|\,\delta_{\{|X|>k\}}\right] && (40)\\ &\geq E_P\left[k\delta_{\{|X|>k\}}\right] && (41)\\ &= kE_P\left[\delta_{\{|X|>k\}}\right] && (42)\\ &= k\left(P\{|X|>k\} + 0P\{|X|\leq k\}\right) && (43)\\ &= kP\{|X|>k\} && (44) \end{aligned}$$

Convergence en moyenne (suite)

ce qui implique que

$$P\{|X|>k\} \leq \frac{1}{k}E_P[|X|]. \qquad (45)$$

Supposons maintenant que $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge en moyenne vers X, c'est-à-dire que $E_P[|X_n - X|] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$,

$$P\{|X_n - X| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon}E_P[|X_n - X|] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \blacksquare \qquad (46)$$

Convergence en moyenne (suite)

Il est possible de généraliser le concept de convergence en moyenne :

Définition. Soit X, une variable aléatoire et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, une suite de variables aléatoires, toutes construites sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Soit p, un nombre entier positif. Il est dit que X_n converge vers X *en moyenne d'ordre* p si

$$\lim_{n\to\infty} E_P[|X_n - X|^p] = 0. \qquad (47)$$

Il est possible de montrer que $(E_P[|X_n - X|^p])^{\frac{1}{p}}$ est une distance entre les deux variables aléatoires X_n et X. Il est d'usage fréquent, en probabilité, de considérer l'ensemble $\mathcal{L}^p$ composé des variables aléatoires construites sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telles que $E_P[|X|^p] < \infty$ et muni de la norme $(E_P[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$. Une suite de variables aléatoires convergeant sur cet espace converge aussi en probabilité et en distribution.

Convergence en distribution

Définition. Soit X, une variable aléatoire construite sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, une suite de variables aléatoires, chacune construite sur son propre espace probabilisé $\left(\Omega^{(n)}, \mathcal{F}^{(n)}, P^{(n)}\right)$. Il est possible de toutes les construire sur le même espace probabilisé, mais cela n'est pas nécessaire.
Il est dit que X_n converge vers X *en distribution* si pour tout nombre réel x pour lequel la fonction de répartition F_X est continue à ce point,

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{P^{(n)}\left\{\omega^{(n)} \in \Omega^{(n)} : X_n(\omega) \leq x\right\}}_{F_{X_n}(x)} = \underbrace{P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}}_{F_X(x)}$$

où F_Y représente la fonction de répartition de la variable aléatoire Y. Ce type de convergence est aussi connu sous le nom de *convergence en loi* et de *convergence faible*.

Convergence en distribution (suite)

Exemple. Posons

Ω	X	Y	P
ω_1	1	1	$\frac{1}{4}$
ω_2	1	0	$\frac{1}{4}$
ω_3	0	1	$\frac{1}{4}$
ω_4	0	0	$\frac{1}{4}$

et remarquons que

$$F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} . \tag{48}$$

Convergence en distribution (suite)

Posons, pour tout entier n et pour tout $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega) = X(\omega)$. Alors X_n converge en distribution vers Y puisque

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} F_X(x) \tag{49}$$

$$= F_X(x) \tag{50}$$

$$= F_Y(x). \tag{51}$$

Mais X_n ne converge pas en probabilité vers Y puisque $\forall \varepsilon > 0$,

$$P\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\} \tag{52}$$

$$= P\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\} \tag{53}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon \geq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 < \varepsilon < 1 \end{cases} \overset{n\to\infty}{\not\to} 0. \blacksquare \tag{54}$$

Convergence en distribution (suite)
Théorème limite central

Théorème. Pour tout entier positif n, la variable aléatoire

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{55}$$

où $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ est une suite de variables aléatoires construites sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance μ et de variance finie σ^2. Alors,

$$n^{1/2}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \underset{\text{en distribution}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} Z \tag{56}$$

où Z est une variable aléatoire de distribution normale.

Résultats utiles

Soit X, une variable aléatoire et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, une suite de variables aléatoires, toutes construites sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$$\begin{array}{lcl} X_n \underset{\text{presque sûrement}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} X & \searrow & \\ & & X_n \underset{\text{en probabilité}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} X \;\rightarrow\; X_n \underset{\text{en distribution}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} X \\ X_n \underset{\text{en moyenne}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} X & \nearrow & \end{array}$$

Résultats utiles (suites)

Soit X, une variable aléatoire et $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$, des suites de variables aléatoires, toutes construites sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Billingsley, th. 25.4, p. 341 (en distribution)	Quelque soit le mode de convergence, si $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ et $X_n - Y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $Y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$
Billingsley, th. 25.3, p. 341	Soit μ, une constante. Si $X_n \underset{\text{distribution}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \mu$ alors $X_n \underset{\text{probabilité}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \mu$
Billingsley, cor. 1, p. 344	Si $X_n \underset{\text{distribution}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} X$ alors $f(X_n) \underset{\text{distribution}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f(X)$ pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
Billingsley, th. 25.8, p. 344 Ash, p. 322	$X_n \underset{\text{distribution}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} X$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} E_P[f(X_n)] = E_P[f(X)]$ pour toute fonction f continue et bornée.
Billingsley, cor. p. 348	Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Si $X_n \underset{\text{distribution}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} X$ et $\sup_n E_P\left[X_n^{k+\varepsilon}\right] < \infty$ alors $\lim_{n\to\infty} E_P\left[X_n^k\right] = E_P\left[X^k\right]$.

Et les martingales...

Théorème. *Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une martingale telle que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|] < \infty,$$

alors $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge presque sûrement (lorsque n croît vers l'infini) vers une limite X telle que $X < \infty$ presque sûrement.

Ce théorème nous indique qu'une grande majorité de martingales à temps discret convergent presque sûrement. Nous savons que la limite existe mais le théorème ne nous dit rien sur ce qu'elle est.

Bibliographie

ASH, Robert B. (1972). *Real analysis and Probability*, Academic Press, Orlando, Florida.

BILLINGSLEY, Patrick (1986). *Probability and Measure,* deuxième édition, Wiley, New York.

COHN, Donald L. (1980). *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston.

REVUZ, Daniel et YOR, Marc (1991). *Continuous Martingale and Brownian Motion*, Springer-Verlag, New York.