

Techniques de réduction de la variance : variable antithétique, variable de contrôle et appariement des moments

6-601-09 Simulation Monte Carlo

Geneviève Gauthier

HEC Montréal

Rappel

Estimation d'une
moyenne
Propriétés statistiques
de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de
contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment -
méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment -
méthode *
Les deux premiers
moments
Travail pratique 3

- ▶ Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Elles sont obtenues à l'aide du générateur de nombre aléatoire de votre logiciel préféré.
- ▶ L'*estimateur de Monte Carlo* de la quantité

$$\theta \equiv \mathbb{E}[g(X)]$$

est

$$\hat{\theta}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i).$$

- ▶ Remarquons que $\hat{\theta}_n$ est une fonction de l'échantillon X_1, X_2, \dots, X_n . C'est une variable aléatoire.

Rappel

Estimation d'une moyenne

Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +

Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments

Travail pratique 3

1. Le paramètre devant être estimé : $\theta = E[g(X)]$.
2. La variance : $\sigma^2 = \text{Var}[g(X)] < \infty$.
3. L'estimateur : $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)$
4. La variance échantillonnale :

$$\left(\hat{\sigma}^{(n)}\right)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(g(X_i) - \hat{\theta}_n\right)^2$$

5. z_α est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la distribution normale centrée et réduite, c'est-à-dire que $\Pr[Z \leq z_\alpha] = 1 - \alpha$.

Rappel

Estimation d'une
moyenne

Propriétés statistiques
de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de
contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment -
méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment -
méthode *
Les deux premiers
moments
Travail pratique 3

1. $\hat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais et convergent pour θ .
2. $\hat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers la quantité à estimer θ lorsque la taille n de l'échantillon tend vers l'infini.
3. Le théorème limite central implique que

$$\sqrt{n} \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\Rightarrow} N(0, 1).$$

4. L'intervalle de confiance pour θ (de niveau de confiance $1 - \alpha$) est $\left[\hat{\theta}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}^{(n)}}{\sqrt{n}}; \hat{\theta}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}^{(n)}}{\sqrt{n}} \right]$.
5. La marge d'erreur est $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \simeq z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}^{(n)}}{\sqrt{n}}$.

Rappel

Estimation d'une moyenne

Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +

Propriétés statistiques

Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments

Travail pratique 3

- ▶ La marge d'erreur est $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\text{Var} [\hat{\theta}_n]}$
- ▶ Si on ne veut pas augmenter la taille de l'échantillon ni changer le niveau de confiance $1 - \alpha$, il nous faut réduire la variance σ^2 / n de l'estimateur.
- ▶ Est-il possible d'estimer θ à l'aide d'un nouvel estimateur dont la variance est plus petite que $\text{Var} [\hat{\theta}_n] = \sigma^2 / n$?

Rappel

Estimation d'une moyenne

Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variables antithétiques

Contexte

Souvent, nous cherchons à estimer

$$\theta = \mathbb{E} [g (Z)] = \int_{-\infty}^{\infty} g (z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) dz$$

où Z est une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

L'idée de la variable antithétique est de profiter de la symétrie de la distribution de Z . Notons que

$$\theta = \mathbb{E}[g(-Z)].$$

En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(-Z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(-z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(w) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw \text{ si } w = -z \\ &= \mathbb{E}[g(Z)].\end{aligned}$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variables antithétiques

Nouvelle transformation des données

- ▶ Parce que l'espérance est un opérateur linéaire,

$$\theta = \mathbb{E} \left[\frac{g(Z) + g(-Z)}{2} \right] = \mathbb{E} [h(Z)]$$

où $h(z) = (g(z) + g(-z)) / 2$.

- ▶ Or,

$$\begin{aligned} \zeta^2 &= \text{Var} [h(Z)] = \text{Var} \left[\frac{g(Z) + g(-Z)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{4} (\text{Var} [g(Z)] + \text{Var} [g(-Z)] + 2\text{Cov} [g(Z), g(-Z)]) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma^2 + \text{Cov} [g(Z), g(-Z)]) . \end{aligned}$$

- ▶ En créant un estimateur basé sur $h(Z)$ au lieu de $g(Z)$, nous aurons une réduction de la variance en autant que

$$\text{Cov} [g(Z), g(-Z)] < \sigma^2.$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des variables

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variables antithétiques

Réduction de variance garantie

Réduction de la variance

G. Gauthier

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

- ▶ Notons que puisque la corrélation est bornée par 1, alors

$$\begin{aligned} 1 &\geq \text{Corr}[g(Z), g(-Z)] \\ &= \frac{\text{Cov}[g(Z), g(-Z)]}{\sqrt{\text{Var}[g(Z)]} \sqrt{\text{Var}[g(-Z)]}} \\ &= \frac{\text{Cov}[g(Z), g(-Z)]}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

- ▶ Ainsi,

$$\text{Cov}[g(Z), g(-Z)] \leq \sigma^2,$$

c'est-à-dire que l'usage d'une variable antithétique ne peut pas augmenter la variance.

Variables antithétiques

Cas particulier I

- ▶ Le gain sera énorme si la fonction g est à peu près linéaire. En effet, le cas $g(x) = ax + b$ nous donne

$$\begin{aligned}\zeta^2 &= \text{Var} \left[\frac{g(Z) + g(-Z)}{2} \right] \\ &= \text{Var} \left[\frac{(aZ + b) + (-aZ + b)}{2} \right] \\ &= \text{Var} [b] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variables antithétiques

Cas particulier II

- ▶ D'autre part, il y a des fonctions pour lesquelles la variable antithétique ne fonctionne pas du tout : si $g(x) = ax^2$, alors

$$\begin{aligned}\zeta^2 &= \text{Var} \left[\frac{g(Z) + g(-Z)}{2} \right] \\ &= \text{Var} \left[\frac{aZ^2 + a(-Z)^2}{2} \right] \\ &= \text{Var} [aZ^2] \\ &= \sigma^2.\end{aligned}$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variables antithétiques

Définition de l'estimateur

L'estimateur de Monte Carlo de θ avec l'utilisation d'une variable antithétique est

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}_n^A &\equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(Z_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g(Z_i) + g(-Z_i)}{2}\end{aligned}$$

où Z_1, Z_2, \dots, Z_n sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale centrée et réduite.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

- ▶ Puisque $\widehat{\theta}_n^A \equiv n^{-1} \sum_{i=1}^n h(Z_i)$ est une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuée, ses propriétés asymptotiques sont les mêmes que celles de l'estimateur de Monte Carlo en substituant σ^2 par ζ^2 :
- ▶ Sans biais

$$\mathbb{E} \left[\widehat{\theta}_n^A \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [h(Z_i)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta = \theta.$$

- ▶ Convergent

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\widehat{\theta}_n^A \right] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var} [h(Z_i)] = \frac{\zeta^2}{n} \\ &\rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variables antithétiques

Exemple

$$\blacktriangleright g(Z_i) = e^{-rT} \max \left\{ S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z_i} - K; 0 \right\}$$

$$\blacktriangleright h(Z_i) = \frac{g(Z_i) + g(-Z_i)}{2}$$

Z_i	S_i	$g(Z_i)$	$S_i(-Z_i)$	$g(-Z_i)$	$h(Z_i)$
-0.709	89.42	0	118.75	27.35	13.67
0.044	103.96	13.28	102.14	11.54	12.41
-0.241	98.20	7.80	108.12	17.24	12.52
-0.973	84.81	0	125.19	33.47	16.74

$$S_0 = 100, r = 5\%, \nu = 0.2, T = 1, K/S_0 = 0.9, \theta = 16.70.$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Travail pratique 1 I

Évaluation d'une option dans le contexte NGARCH

- ▶ Le prix S_t de l'actif sous-jacent à la t ième journée, sous la mesure neutre au risque Q , est, $\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$\ln \frac{S_{t+1}}{S_t} = \rho - \frac{1}{2}h_{t+1} + (h_{t+1})^{1/2} \epsilon_{t+1}$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t (\epsilon_t - \tilde{\lambda})^2$$

où $\{\epsilon_t : t \in \mathbb{N}\}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes (d'espérance nulle et de variance unitaire) indépendantes sous la mesure Q .

- ▶ Le processus h représente la variance conditionnelle du rendement quotidien du titre: $h_{t+1} = \text{Var}_t^Q \left[\ln \frac{S_{t+1}}{S_t} \right]$.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Travail pratique 1 II

Évaluation d'une option dans le contexte NGARCH

- ▶ Les paramètres sont choisis de sorte que ce modèle de marché ait un comportement similaire à celui de Black et Scholes utilisé dans l'exemple.
 - ▶ $S_0 = 100$.
 - ▶ Le taux d'intérêt sans risque ρ est quotidien. Ainsi $\rho \times 365 = r$, d'où $\rho = 0.05/365 = 1.3699 \times 10^{-4}$.
 - ▶ Nous prendrons des valeurs typiquement observées pour les paramètres β : $\beta_0 = 0.00001$, $\beta_1 = 0.8$ et $\beta_2 = 0.1$.
 - ▶ La variance stationnaire est $h^* = \beta_0 \{1 - \beta_1 - \beta_2 [1 + \tilde{\lambda}^2]\}^{-1}$. Pour que la variance stationnaire (quotidienne) soit équivalente à celle utilisée dans le cadre de Black et Scholes, nous posons $h^* = \beta_0 \{1 - \beta_1 - \beta_2 [1 + \tilde{\lambda}^2]\}^{-1} = \nu^2 / 365$ ce qui implique que $\tilde{\lambda} = 0.29580$.
 - ▶ Finalement, nous posons $h_1 = h^* = 1.0959 \times 10^{-4}$.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Devoir 1

Les questions

Répondre aux questions suivantes en incluant les variables antithétiques. Il faut utiliser les mêmes valeurs de $\{\epsilon_t : t \in \mathbb{N}\}$ afin que les différences observées proviennent uniquement de l'utilisation des variables antithétiques et non pas d'un changement de nombres pseudo-aléatoires.

1. Déterminer le prix des options d'achat d'une maturité d'un an et dont les prix d'exercice sont respectivement $0.9 \times S_0$, S_0 et $1.1 \times S_0$ à l'aide d'une simulation de Monte Carlo pour des tailles d'échantillon égales à 5000, 10000, 50 000, 100 000, 500 000. et 1 000 000.
2. Construire les intervalles de confiance autour de ces prix.
3. Noter les temps de calcul nécessaires pour chaque taille d'échantillon.
4. Produisez un graphe présentant la marge d'erreur en abscisse et le temps de calcul en ordonnée.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

5. Comparer vos résultats avec ceux obtenus sans réduction de la variance (présenter les deux courbes sur le même graphe) et commentez.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variables de contrôle

Contexte

- ▶ Rappelons que le but est d'estimer $\theta = E[g(X)]$ où X est une variable aléatoire de distribution quelconque dont les deux premiers moments existent.
- ▶ Supposons maintenant qu'il existe une fonction $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que nous connaissons la quantité

$$\mu = E[\gamma(X)].$$

- ▶ Pouvons-nous utiliser cette information pour nous construire un estimateur dont la variance est plus petite que celle de l'estimateur de Monte Carlo ?

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variables de contrôle

Estimateur sans biais

Puisque

$$\begin{aligned} E[g(X) + \beta(\gamma(X) - \mu)] &= E[g(X)] + \beta(E[\gamma(X)] - \mu) \\ &= \theta + \beta(\mu - \mu) \\ &= \theta \end{aligned}$$

où β est une constante, nous proposons un estimateur basé sur la variable aléatoire

$$h_{\beta}(X) = g(X) + \beta(\gamma(X) - \mu).$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Notons que

$$\begin{aligned} & \text{Var} [h_{\beta}(X)] \\ = & \text{Var} [g(X) + \beta(\gamma(X) - \mu)] \\ = & \text{Var} [g(X)] + \text{Var} [\beta(\gamma(X) - \mu)] \\ & + 2\text{Cov} [g(X), \beta(\gamma(X) - \mu)] \\ = & \sigma^2 + \beta^2 \text{Var} [\gamma(X)] + 2\beta \text{Cov} [g(X), \gamma(X)]. \end{aligned}$$

Historiquement, la constante β était supposée égale à 1. Il est tout de même possible de la choisir de sorte que $\text{Var} [h_{\beta}(X)]$ soit la plus petite possible.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variation de contrôle

Beta optimal

Calculons la dérivée première :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\beta} \text{Var} [h_{\beta}(X)] \\ &= \frac{d}{d\beta} (\sigma^2 + \beta^2 \text{Var} [\gamma(X)] + 2\beta \text{Cov} [g(X), \gamma(X)]) \\ &= 2\beta \text{Var} [\gamma(X)] + 2 \text{Cov} [g(X), \gamma(X)]. \end{aligned}$$

Déterminons la valeur de β qui annule cette dérivée :

$$\tilde{\beta} = -\frac{\text{Cov} [g(X), \gamma(X)]}{\text{Var} [\gamma(X)]}.$$

Comme la dérivée seconde est positive

$$\left. \frac{d^2}{d\beta^2} \text{Var} [h_{\beta}(X)] \right|_{\beta=\tilde{\beta}} = 2 \text{Var} [\gamma(X)] > 0,$$

alors la variance minimale est atteinte lorsque $\beta = \tilde{\beta}$.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variation antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variation de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variables de contrôle

Réduction de la variance

Par conséquent, la variance minimale est

$$\begin{aligned}\zeta_{\tilde{\beta}}^2 &\equiv \text{Var} \left[h_{\tilde{\beta}}(X) \right] \\ &= \sigma^2 + \tilde{\beta}^2 \text{Var} [\gamma(X)] + 2\tilde{\beta} \text{Cov} [g(X), \gamma(X)] \\ &= \sigma^2 + \left(\frac{\text{Cov} [g(X), \gamma(X)]}{\text{Var} [\gamma(X)]} \right)^2 \text{Var} [\gamma(X)] \\ &\quad - 2 \frac{\text{Cov} [g(X), \gamma(X)]}{\text{Var} [\gamma(X)]} \text{Cov} [g(X), \gamma(X)] \\ &= \sigma^2 - \frac{(\text{Cov} [g(X), \gamma(X)])^2}{\text{Var} [\gamma(X)]} \\ &\leq \sigma^2.\end{aligned}$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variables de contrôle

Définition de l'estimateur

L'estimateur de Monte Carlo de θ avec variable de contrôle est

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}_n^{\tilde{\beta}} &\equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{\tilde{\beta}}(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[g(X_i) + \tilde{\beta}(\gamma(X_i) - \mu) \right]\end{aligned}$$

où X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

- ▶ Notre estimateur est une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Par conséquent, ses propriétés asymptotiques sont les mêmes que celles de l'estimateur de Monte Carlo en substituant σ^2 par $\zeta_{\tilde{\beta}}^2$.

- ▶ Sans biais :

$$\mathbb{E} \left[\widehat{\theta}_n^{\tilde{\beta}} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{\tilde{\beta}}(X_i) \right] = \mathbb{E} \left[h_{\tilde{\beta}}(X) \right] = \theta.$$

- ▶ Convergent :

$$\text{Var} \left[\widehat{\theta}_n^{\tilde{\beta}} \right] = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{(\text{Cov} [g(X), \gamma(X)])^2}{n \text{Var} [\gamma(X)]} \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

- ▶ L'estimateur $\hat{\theta}_n^{\tilde{\beta}}$ converge presque sûrement vers θ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- ▶ Le théorème limite central implique que

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{\tilde{\beta}} - \theta)}{\zeta_{\tilde{\beta}}}$$

converge en loi vers une distribution normale centrée et réduite lorsque la taille n de l'échantillon tend vers l'infini où

$$\zeta_{\tilde{\beta}}^2 = \sigma^2 - \frac{(\text{Cov}[g(X), \gamma(X)])^2}{\text{Var}[\gamma(X)]} \leq \sigma^2.$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

- ▶ En pratique, on ne peut déterminer la constante

$$\tilde{\beta} = -\frac{\text{Cov}[g(X), \gamma(X)]}{\text{Var}[\gamma(X)]}$$

aisément.

- ▶ Le problème provient du fait que $\text{Cov}[g(X), \gamma(X)]$ et, parfois, $\text{Var}[\gamma(X)]$ sont des quantités inconnues.
- ▶ Rappelons que $\theta = E[g(X)]$ est la quantité que nous voulons estimer. Il est donc fort probable que

$$\text{Cov}[g(X), \gamma(X)] = E[g(X)\gamma(X)] - \theta E[\gamma(X)]$$

soit aussi inconnue.

Variables de contrôle II

Estimation du beta

- ▶ Il est possible d'estimer

$$\tilde{\beta} = -\frac{\text{Cov}[g(X), \gamma(X)]}{\text{Var}[\gamma(X)]}$$

à l'aide de l'échantillon issu de la simulation de Monte Carlo. En effet, on peut utiliser les estimateurs de $\text{Cov}[g(X), \gamma(X)]$ et de $\text{Var}[\gamma(X)]$.

$$\tilde{\beta}_n \equiv -\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \gamma(X_i) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma(X_i)\right)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\gamma(X_i))^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma(X_i)\right)^2}$$

- ▶ La variable aléatoire $-\tilde{\beta}_n$ est la pente de la droite des moindres carrés obtenue en régressant la variable $g(X)$ sur la variable $\gamma(X)$.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'échantillonnage des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variables de contrôle I

Propriétés statistiques lorsque le beta est estimé

- ▶ $\tilde{\beta}_n$ est une variable aléatoire qui dépend de tout l'échantillon (on devrait écrire $\tilde{\beta}_n(X_1, \dots, X_n)$) contrairement à $\tilde{\beta}$ qui est une constante (déterministe).
- ▶ Cela a pour conséquence de modifier le comportement de notre estimateur de Monte Carlo avec variable de contrôle. En effet,

$$\begin{aligned}\theta_{\tilde{\beta}_n} &\equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{\tilde{\beta}_n}^{(n)}(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[g(X_i) + \tilde{\beta}_n^{(n)} (\gamma(X_i) - \mu) \right]\end{aligned}$$

n'est plus une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variables de contrôle II

Propriétés statistiques lorsque le beta est estimé

- ▶ Mais son comportement asymptotique sera essentiellement le même :

$$\begin{aligned} & \sqrt{n} \hat{\theta}_n^{\tilde{\beta}} \\ &= \sqrt{n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[g(X_i) + \tilde{\beta}_n (\gamma(X_i) - \mu) \right] \\ &= \sqrt{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[g(X_i) + \tilde{\beta} (\gamma(X_i) - \mu) \right] + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta} \right) (\gamma(X_i) - \mu) \right] \\ &= \underbrace{\sqrt{n} \hat{\theta}_n^{\tilde{\beta}}}_{\stackrel{n \rightarrow \infty}{\Rightarrow} N(\theta, \zeta_{\tilde{\beta}}^2) \text{ en loi}} + \underbrace{\left(\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta} \right)}_{\stackrel{n \rightarrow \infty}{\Rightarrow} 0 \text{ p.s.}} \underbrace{\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma(X_i) - \mu \right)}_{\stackrel{n \rightarrow \infty}{\Rightarrow} N(0, \text{Var}[\gamma(X)]) \text{ en loi}}. \end{aligned}$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Variables de contrôle III

Propriétés statistiques lorsque le beta est estimé

Cependant, la variance en petit échantillon sera modifiée :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\widehat{\theta}_n^{\tilde{\beta}} \right] &= \text{Var} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[g(X_i) + \tilde{\beta}_n (\gamma(X_i) - \mu) \right] \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \text{Cov} \left[\begin{array}{c} g(X_i) + \tilde{\beta}_n (\gamma(X_i) - \mu), \\ g(X_j) + \tilde{\beta}_n (\gamma(X_j) - \mu) \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\begin{array}{c} \text{Cov} [g(X_i), g(X_j)] + 2\text{Cov} [g(X_i), \tilde{\beta}_n (\gamma(X_j) - \mu)] \\ + \text{Cov} [\tilde{\beta}_n (\gamma(X_i) - \mu), \tilde{\beta}_n (\gamma(X_j) - \mu)] \end{array} \right) \\ &= \text{Var} \left[\widehat{\theta}_n^{\tilde{\beta}} \right] + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\begin{array}{c} +2\text{Cov} [g(X_i), \tilde{\beta}_n (\gamma(X_j) - \mu)] \\ + \text{Cov} [\tilde{\beta}_n (\gamma(X_i) - \mu), \tilde{\beta}_n (\gamma(X_j) - \mu)] \end{array} \right) \end{aligned}$$

Le dernier terme est le prix à payer pour avoir estimé $\tilde{\beta}$.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Multiplés variables de contrôle

L'idée de base

- ▶ Il est possible d'utiliser plusieurs variables de contrôle en même temps.
- ▶ En effet, s'il existe des fonctions $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ telles que pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, les quantités

$$\mu_j \equiv \mathbb{E}[\gamma(X_j)]$$

sont connues, alors nous proposons un estimateur basé sur la variable aléatoire

$$h_{\beta}(X) = g(X) + \sum_{j=1}^d \beta_j (\gamma_j(X) - \mu_j).$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiplés variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

- ▶ Sans biais pour θ :

$$E [h_{\beta}(X)] = \theta + \sum_{j=1}^d \beta_j (\mu_j - \mu_j) = \theta.$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiplés variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Multiplés variables de contrôle

La variance

$$\begin{aligned}
 & \text{Var} \left[h_{\beta}(X) \right] \\
 = & \text{Var} [g(X)] + 2 \sum_{j=1}^d \text{Cov} \left[g(X), \beta_j (\gamma_j(X) - \mu_j) \right] \\
 & + \sum_{j=1}^d \sum_{j'=1}^d \text{Cov} \left[\beta_j (\gamma_j(X) - \mu_j), \beta_{j'} (\gamma_{j'}(X) - \mu_{j'}) \right] \\
 = & \text{Var} [g(X)] + 2 \sum_{j=1}^d \beta_j \text{Cov} [g(X), \gamma_j(X)] \\
 & + \sum_{j=1}^d \beta_j^2 \text{Var} [\gamma_j(X)] + 2 \sum_{j=1}^d \sum_{j'=j+1}^d \beta_j \beta_{j'} \text{Cov} [\gamma_j(X), \gamma_{j'}(X)]
 \end{aligned}$$

Encore une fois, il est possible de choisir les constantes $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_d$ de sorte que la variance soit minimale.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiplés variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Multiplés variables de contrôle I

Minimisation de la variance

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiplés variables de contrôle

Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +

Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments

Travail pratique 3

- ▶ En effet, si $\nabla \text{Var} [h_{\beta}(X)]$ dénote le vecteur de dérivées premières, alors $\tilde{\beta}$, satisfaisant la relation $\nabla \text{Var} [h_{\tilde{\beta}}(X)] = \vec{0}$, rendra $\text{Var} [h_{\beta}(X)]$ optimale.

- ▶ Comme

$$\frac{\partial}{\partial \beta_i} \text{Var} [h_{\beta}(X)] = 2 \text{Cov} [g(X), \gamma_i(X)] + 2 \sum_{j=1}^d \beta_j \text{Cov} [\gamma_i(X), \gamma_j(X)],$$

alors le système de d équations linéaires à résoudre est

$$\underbrace{\left(\text{Cov} [\gamma_i(X), \gamma_j(X)] \right)_{i,j=1,\dots,d}}_{d \times d} \underbrace{\tilde{\beta}}_{d \times 1} = - \underbrace{\left(\text{Cov} [g(X), \gamma_i(X)] \right)_{i=1,\dots,d}}_{d \times 1}$$

Multiplés variables de contrôle II

Minimisation de la variance

- Puisque $(\text{Cov} [\gamma_i (X), \gamma_j (X)])_{i,j=1,\dots,d}$ est une matrice de variances-covariances, elle est définie positive et est donc inversible. La solution est donc

$$\tilde{\beta} = - \underbrace{(\text{Cov} [\gamma_i (X), \gamma_j (X)])_{i,j=1,\dots,d}^{-1}}_{d \times d} \underbrace{(\text{Cov} [g (X), \gamma_i (X)])_{i=1,\dots,d}}_{d \times 1}$$

- La matrice de dérivées secondes

$$\mathbf{H}_{\beta} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \text{Var} [h_{\beta} (X)] \right)_{i,j=1,\dots,d} = 2 \underbrace{(\text{Cov} [\gamma_i (X), \gamma_j (X)])_{i,j=1,\dots,d}}_{d \times d}$$

est définie positive (c'est 2 fois une matrice de variances-covariances). Par conséquent, $\tilde{\beta}$ fera en sorte que

$$\text{Var} [h_{\tilde{\beta}} (X)] \leq \text{Var} [h_{\beta} (X)] \text{ pour tout } \beta \in \mathbb{R}^d.$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiplés variables de contrôle
Travail pratique 2

Échantillonnage des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Multiplés variables de contrôle

La définition de l'estimateur

L'estimateur de Monte Carlo de θ avec plusieurs variables de contrôle est

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_n^{\tilde{\beta}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{\tilde{\beta}}(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[g(X_i) + \sum_{j=1}^d \tilde{\beta}_j \left(\gamma_j(X_i) - \mu_j \right) \right]\end{aligned}$$

où X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiplés variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Multiplés variables de contrôle

Efficiency

- ▶ L'ajout de variables de contrôle réduit la variance mais augmente le temps de calcul à chaque trajectoire.
- ▶ Il y a donc un compromis à faire entre la réduction de la variance et le temps de calcul.
- ▶ Il vient un temps où l'ajout d'une variable de contrôle supplémentaire diminue l'efficacité (précision versus temps de calcul) de l'estimateur.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiplés variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Multiples variables de contrôle

Exemple

- ▶ $g(S_i) = \exp(-rT) \max\{S_i - K; 0\}$
- ▶ $\beta = -1$

Z_i	S_i	$S_i - \phi$	$g(S_i)$	$h(S_i)$
-0.312	96.82	-8.31	6.48	14.79
0.294	109.28	4.15	18.34	14.19
-1.196	81.12	-24.01	0	24.01
-0.002	103.01	-2.12	12.37	14.49

$$\begin{aligned}
 S_0 &= 100, r = 5\%, \sigma = 0.2, \\
 \phi &= 105.13, \beta = -1, \\
 T &= 1, K/S_0 = 0.9, \theta = 16.70.
 \end{aligned}$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Multiples variables de contrôle

Exemple

- ▶ $g(S_i) = \exp(-rT) \max\{S_i - K; 0\}$
- ▶ $\beta = -0.77$

Z_i	S_i	$S_i - \phi$	$g(S_i)$	$h(S_i)$
-0.312	96.82	-8.31	6.48	12.88
0.294	109.28	4.15	18.34	15.15
-1.196	81.12	-24.01	0	18.49
-0.002	103.01	-2.12	12.37	14.00

$$S_0 = 100, r = 5\%, \sigma = 0.2,$$

$$\phi = 105.13, \beta = -0.77,$$

$$T = 1, K/S_0 = 0.9, \theta = 16.70.$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Reprendre la simulation de l'exercice précédent (dans le contexte NGARCH) en incluant comme variable de contrôle le prix de l'option dans le cadre du modèle de Black et Scholes.

1. Déterminer le prix des options d'achat d'une maturité d'un an et dont les prix d'exercice sont respectivement $0.9 \times S_0$, S_0 et $1.1 \times S_0$ à l'aide d'une simulation de Monte Carlo pour des tailles d'échantillon égales à 5000, 10000, 50 000, 100 000, 500 000 et 1 000 000.
2. Construire les intervalles de confiance autour de ces prix.
3. Noter les temps de calcul nécessaires pour chaque taille d'échantillon.
4. Produisez un graphe présentant la marge d'erreur en abscisse et le temps de calcul en ordonnée.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

5. Comparer vos résultats avec ceux obtenus sans réduction de la variance et avec l'utilisation de la variable antithétique (présenter les courbes sur le même graphe) et commentez.

Il faut utiliser les mêmes valeurs de $\{\epsilon_t : t \in \mathbb{N}\}$ afin que les différences observées proviennent uniquement de l'utilisation de la variable de contrôle et non pas d'un changement de nombres pseudo-aléatoires.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

- ▶ Le but est encore d'estimer

$$\theta = \mathbb{E}[g(X)]$$

où X est une variable aléatoire de distribution quelconque dont les deux premiers moments existent.

- ▶ Dans bien des cas, nous connaissons l'espérance

$$\mu_X \equiv \mathbb{E}[X]$$

de la variable aléatoire X .

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Appariement du premier moment II

Contexte

- ▶ Lors de la simulation des n copies indépendantes de X , X_1, \dots, X_n , il est fort probable que la moyenne échantillonnale soit différente de l'espérance théorique, c'est-à-dire que

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \neq \mu_X.$$

- ▶ L'idée derrière l'appariement du premier moment est de s'assurer que la moyenne échantillonnale soit égale à l'espérance théorique.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Appariement du premier moment

Méthode additive

- ▶ Après avoir simulé les variables X_1, \dots, X_n , nous en construisons de nouvelles à partir des premières :

$$X_i^{*(n)} = X_i - \bar{X}_n + \mu_X.$$

- ▶ Remarquons que

$$\bar{X}_n^{*(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{*(n)} = \bar{X}_n - \bar{X}_n + \mu_X = \mu_X.$$

- ▶ De plus, $X_1^{*(n)}, \dots, X_n^{*(n)}$ sont toujours identiquement distribuées mais elles ne sont plus indépendantes. Cela rendra l'obtention des propriétés asymptotiques de notre estimateur plus difficile.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Appariement du premier moment

Méthode additive - Définition

L'estimateur proposé est

$$\widehat{\theta}_n^{M1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g \left(X_i^{*(n)} \right).$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +

Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments

Travail pratique 3

Appariement du premier moment

Méthode additive - Convergence forte I

- ▶ Si la fonction g est différentiable et que sa dérivée est continue, alors le développement en série de Taylor de g autour du point x_0 nous donne

$$g(x) = g(x_0) + g'(y)(x - x_0)$$

pour un certain y satisfaisant la contrainte $\min(x, x_0) \leq y \leq \max(x, x_0)$.

- ▶ Remplaçant x par $X_i^{*(n)} = X_i - \bar{X}_n + \mu_X$ et x_0 par X_i , nous obtenons

$$\begin{aligned} g\left(X_i^{*(n)}\right) &= g\left(X_i\right) + g'\left(Y_i^{(n)}\right)\left(X_i^{*(n)} - X_i\right) \\ &= g\left(X_i\right) - g'\left(Y_i^{(n)}\right)\left(\bar{X}_n - \mu_X\right) \end{aligned}$$

où $Y_i^{(n)}$ est une variable aléatoire telle que

$$\min\left(X_i^{*(n)}, X_i\right) \leq Y_i^{(n)} \leq \max\left(X_i^{*(n)}, X_i\right).$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +

Propriétés statistiques

Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments

Travail pratique 3

Appariement du premier moment

Méthode additive - Convergence forte II

Nous pouvons donc réécrire notre estimateur sous la forme

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_n^{M1} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(g(X_i) - g'(Y_i^{(n)}) (\bar{X}_n - \mu_X) \right) \\ &= \hat{\theta}_n - (\bar{X}_n - \mu_X) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g'(Y_i^{(n)}).\end{aligned}$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +

Propriétés statistiques

Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments

Travail pratique 3

Appariement du premier moment

Méthode additive - Convergence forte III

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

$$\widehat{\theta}_n^{M1} = \underbrace{\widehat{\theta}_n}_{\rightarrow \theta \text{ p.s.}} - \underbrace{(\bar{X}_n - \mu_X)}_{\rightarrow 0 \text{ p.s.}} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g'(Y_i^{(n)})}_{< \infty \text{ p.s.}} \rightarrow \theta \text{ p.s.}$$

puisque

1. La loi forte des grands nombres implique que

$$X_i^{*(n)} - X_i = \mu_X - \bar{X}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ p.s.}$$

2. $Y_i^{(n)} - X_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ p.s. puisque

$$\underbrace{\min(X_i^{*(n)} - X_i, 0)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ p.s.}} \leq Y_i^{(n)} - X_i \leq \underbrace{\max(X_i^{*(n)} - X_i, 0)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ p.s.}} .$$

3. Si g est une fonction continue, alors $g(Y_i^{(n)}) - g(X_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ p.s.

4. Sous certaines conditions, nous aurons aussi

$$E \left[\left| g(Y_i^{(n)}) - g(X_i) \right| \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Appariement du premier moment

Méthode additive - Calcul du biais I

L'estimateur est biaisé mais asymptotiquement sans biais.

En effet,

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{\theta}_n^{M1} \right] &= E \left[\widehat{\theta}_n \right] - E \left[\left(\bar{X}_n - \mu_X \right) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g' \left(Y_i^{(n)} \right) \right] \\ &= \theta - \underbrace{E \left[\left(\bar{X}_n - \mu_X \right) g' \left(Y_1^{(n)} \right) \right]}_{= \text{biais}} \end{aligned}$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +

Propriétés statistiques

Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments

Travail pratique 3

Appariement du premier moment

Méthode additive - Calcul du biais II

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

$$\begin{aligned} |\text{biais}| &\leq \mathbb{E} \left[\left| (\bar{X}_n - \mu_X) g' \left(Y_1^{(n)} \right) \right| \right] \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E} \left[(\bar{X}_n - \mu_X)^2 \right]} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(g' \left(Y_1^{(n)} \right) \right)^2 \right]} \\ &\quad \text{(inégalité de Cauchy-Schwartz)} \\ &\approx \sqrt{\text{Var} [\bar{X}_n]} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(g' (X_1) \right)^2 \right]} \\ &= \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

Appariement du premier moment

Méthode additive - Convergence faible I

- Utile pour déterminer l'intervalle de confiance construit autour de l'estimateur.

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n^{M1} - \theta) = \underbrace{\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, \sigma^2)} - \underbrace{\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu_X)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, \text{Var}[X])} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g'(Y_i^{(n)})}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[g'(X)] \text{ probabilité}}$$

puisque

1. $\sqrt{n} (\mu_X - \bar{X}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, \text{Var}[X])$ (convergence en loi).
2. Si les deux premiers moments de $g'(X)$ existent, la loi forte des grands nombres implique que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g'(X_i)$ converge presque sûrement vers son espérance.

3. Sous certaines conditions techniques, nous aurons

$$E \left[\left| g'(Y_1^{(n)}) - g'(X_1) \right| \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ ce qui entraîne que}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g'(Y_i^{(n)}) \text{ converge en probabilité vers } E[g'(X)].$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Appariement du premier moment

Méthode additive - Convergence faible II

Rappel :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{M1} - \theta) = \underbrace{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, \sigma^2)} - \underbrace{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_X)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, \text{Var}[X])} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g'(Y_i^{(n)})}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[g'(X)] \text{ probabilité}}$$

- ▶ On remarque que la variance de l'estimateur dépendra aussi du deuxième terme qui occasionne dans bien des cas une réduction de la variance.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +

Propriétés statistiques

Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments

Travail pratique 3

Appariement du premier moment I

Inconvénients

- ▶ Il est difficile d'estimer la variance de l'estimateur à l'aide d'un seul échantillon.
- ▶ La variance de l'estimateur est souvent estimée en utilisant la resimulation, c'est-à-dire que
 1. Un échantillon de taille n est simulé, produisant une estimation $\hat{\theta}_{n,j}^{M1}$
 2. L'étape 1 est répétée m fois, générant un échantillon d'estimation $\hat{\theta}_{n,1}^{M1}, \dots, \hat{\theta}_{n,m}^{M1}$.
 3. La variance de l'estimateur est estimée par la variance échantillonnale de $\hat{\theta}_{n,1}^{M1}, \dots, \hat{\theta}_{n,m}^{M1}$.
- ▶ Cette façon de procéder détruit le gain obtenu par la réduction de variance car le temps requis pour estimer la variance est de loin supérieur au temps requis pour effectuer une simulation de Monte Carlo naïve.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Appariement du premier moment II

Inconvénients

- ▶ Il est possible, dans certains cas, d'estimer la variance avec un seul échantillon (sans resimulation). Toutefois, le travail théorique requis est souvent lourd.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +

Propriétés statistiques

Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments

Travail pratique 3

Martingale empirique

Idée maîtresse

- ▶ Dans les modèles de marché n'admettant pas d'opportunité d'arbitrage, la valeur actualisée des actifs négociables sont des martingales sous une mesure neutre au risque.
- ▶ C'est cette idée qui est exploitée afin d'obtenir le premier moment théorique du processus simulé.
- ▶ De plus, la correction pour le premier moment est multiplicative au lieu d'être additive.

Réduction de la variance

G. Gauthier

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Martingale empirique

Contexte

- ▶ Soit $\{X(t) : t \in \mathcal{T}\}$ le processus stochastique modélisant l'évolution de la valeur actualisée d'un actif négociable sous une mesure neutre au risque où \mathcal{T} représente une famille d'indices temporels.
- ▶ Puisque $\{X(t) : t \in \mathcal{T}\}$ est une martingale, nous avons que

$$E[X(t)] = E[X(0)], \text{ pour tout } t \in \mathcal{T}.$$

- ▶ Lors de la simulation de la variable aléatoire $X(t)$, un échantillon $X_1(t), \dots, X_n(t)$ est créé. Or la moyenne échantillonnale n'est pas égale à la moyenne théorique, c'est-à-dire que

$$\bar{X}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(t) \neq E[X(0)].$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

- ▶ Duan et Simonato (1998) proposent la correction suivante :

$$\widehat{X}_i^{(n)}(t) \equiv X_i(t) \frac{\mathbb{E}[X(0)]}{\overline{X}_n(t)}.$$

- ▶ On peut alors vérifier que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \widehat{X}_i^{(n)}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(t) \frac{\mathbb{E}[X(0)]}{\overline{X}_n(t)} = \mathbb{E}[X(0)].$$

- ▶ L'estimateur est $\widehat{\theta}_n^{ME} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g\left(\widehat{X}_i^{(n)}\right)$.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

- ▶ Rappel

$$\widehat{\theta}_n^{ME} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g \left(\widehat{X}_i^{(n)} \right)$$

- ▶ L'indépendance entre les trajectoires est détruite rendant plus difficile l'étude des propriétés statistiques de l'estimateur.
- ▶ Duan, Gauthier et Simonato (2001) ont pu établir les propriétés asymptotiques de l'estimateur dans le cas où la fonction g est linéaire par morceaux.
 - ▶ Cette dernière hypothèse est peu restrictive dans le cas des applications en finance puisque les flux monétaires engendrés par une grande classe de produits dérivés s'expriment sous cette forme.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3

► Il est possible de montrer que :

1. $\hat{\theta}_n^{ME}$ converge presque sûrement vers θ lorsque $n \rightarrow \infty$;
2. $\hat{\theta}_n^{ME}$ est biaisé et le biais est de l'ordre de n^{-1} ;
3. $\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n^{ME} - \theta \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, \zeta^2)$;

3.1 Pour les options d'achat, $\zeta^2 =$

$$\text{Var}^Q \left[e^{-rT} \max(S_T - K, 0) \right] + \Phi^2 \text{Var}^Q \left[e^{-rT} S_T \right] - 2\Phi \text{Cov}^Q \left[e^{-rT} \max(S_T - K, 0), e^{-rT} S_T \right] \text{ où}$$
$$\Phi = E^Q [S_T 1_{X > K}] / E \left[e^{rT} X(0) \right].$$

4. un estimateur de la variance est donné, il est obtenu à l'aide du même échantillon que celui permettant d'estimer θ (pas de ré-échantillonnage);
5. tous les cas étudiés démontrent une bonne réduction de la variance.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques

Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments
Travail pratique 3

Appariement des deux premiers moments

Modification des trajectoires

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments

Travail pratique 3

- ▶ On peut refaire l'exercice en utilisant

$$X_i^{** (n)} \equiv (X_i - \bar{X}_n) \frac{\sqrt{\text{Var}[X]}}{S_n} + \mu_X.$$

où

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Appariement des deux premiers moments

Modification des trajectoires

- Ainsi, les deux premiers moments empiriques de l'échantillon $X_1^{** (n)}, \dots, X_n^{** (n)}$ seront égaux à leur contrepartie théorique :

$$\bar{X}_n^{**} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{** (n)} = (\bar{X}_n - \bar{X}_n) \frac{\sqrt{\text{Var}[X]}}{S_X^{(n)}} + \mu_X = \mu_X$$

$$\begin{aligned} (S_n^{**})^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(X_i^{** (n)} - \bar{X}_n^{**} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left((X_i - \bar{X}_n) \frac{\sqrt{\text{Var}[X]}}{S_n} \right)^2 \\ &= \frac{\text{Var}[X]}{S_n^2} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \text{Var}[X] \end{aligned}$$

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments

Travail pratique 3

Appariement des deux premiers moments

Définition de l'estimateur

- ▶
$$\widehat{\theta}_n^{M2} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g \left(X_i^{** (n)} \right)$$
- ▶ Le problème de la dépendance entre les trajectoires demeure toujours présent et il faut travailler un peu plus fort pour obtenir les propriétés asymptotiques de l'estimateur
- ▶ Barraquand (1995) a proposé une méthode dans laquelle il apparie les moments des variables aléatoires gaussiennes simulées dans bien des cas en finance.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments

Travail pratique 3

- ▶ J. Barraquand, 1995, "Numerical valuation of high dimensional multivariate european securities, *Management Science*, **41**, 1882-1891.
- ▶ Phelim P. Boyle, Marc Broadie and Paul Glasserman, 1997, "Monte Carlo methods for security pricing", *Journal of Economic dynamics and control*, **21**, 1267-1321.
- ▶ Jin-Chuan Duan et Jean-Guy Simonato, 1998, "Empirical martingale simulation for asset prices", *Management Science*, **44**, 1218-1233.
- ▶ Jin-Chuan Duan, Geneviève Gauthier et Jean-Guy Simonato, 2001, "Asymptotic Distribution of the EMS Option Price Estimator", *Management Science*

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *

Les deux premiers moments

Travail pratique 3

Travail pratique 3

Reprendre la simulation de l'exercice précédent (dans le contexte NGARCH) en utilisant l'appariement des moments.

1. Déterminer le prix des options d'achat d'une maturité d'un an et dont les prix d'exercice sont respectivement $0.9 \times S_0$, S_0 et $1.1 \times S_0$ à l'aide d'une simulation de Monte Carlo pour des tailles d'échantillon égales à 5000, 10000, 50 000, 100 000 et 500 000.
2. Construire les intervalles de confiance autour de ces prix.
3. Noter les temps de calcul nécessaires pour chaque taille d'échantillon.
4. Produisez un graphe présentant la marge d'erreur en abscisse et le temps de calcul en ordonnée.
5. Comparer vos résultats avec ceux obtenus sans réduction de la variance et avec l'utilisation de la variable antithétique et variable de contrôle (présenter les courbes sur le même graphe) et commentez.

Rappel

Estimation d'une moyenne
Propriétés statistiques de l'estimateur

Variables antithétiques

Propriétés statistiques
Travail pratique 1

Variables de contrôle

Propriétés statistiques
Multiples variables de contrôle
Travail pratique 2

L'appariement des moments

Le premier moment - méthode +
Propriétés statistiques
Le premier moment - méthode *
Les deux premiers moments
Travail pratique 3