Transformation de variables aléatoires uniformes pour créer des variables aléatoires d'autres distributions

6-601-09 Simulation Monte Carlo

Geneviève Gauthier

HEC Montréal

Transformation de v.a. uniformes

La méthode d'inversion

Supposons que la fonction de répartition $F : \Re \longrightarrow [0,1]$ de la distribution que l'on veut simuler est continue et strictement croissante. Alors F admet une inverse que l'on note F^{-1} et qui est définie au moins sur l'intervalle $(0,1)$.

Transformation de v.a. uniforme

La méthode d'inversion

Théorème. $Y = F_X(X)$ *est de loi* $U(0,1)$.

Preuve. Nous allons déterminer la fonction de répartition de $F_X(X)$ et ainsi montrer qu'elle est celle d'une loi $U(0,1)$.

Comme $F_X : \Re \rightarrow [0,1]$ alors

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[F_X(X) \leq u] &= 0 \text{ pour tout } u < 0 \text{ et} \\ \mathrm{P}[F_X(X) \leq u] &= 1 \text{ pour tout } u > 1. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq u \leq 1$,

$$\mathrm{P}[F_X(X) \leq u] = \mathrm{P}\left[X \leq F_X^{-1}(u)\right] = F_X\left(F_X^{-1}(u)\right) = u. \;\square$$

Transformation de v.a. uniforme

La méthode d'inversion

Théorème. *Si U est une variable aléatoire de loi uniforme*$(0,1)$ *alors* $V = F^{-1}(U)$ *est de distribution* F.

Preuve. La fonction de répartition F_V de V satisfait, pour tout $v \in \Re$,

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P\left[F^{-1}(U) \leq v\right] \\ &= P\left[U \leq F(v)\right] \\ &= F_U(F(v)) \\ &= F(v). \square \end{aligned}$$

Exemple: la loi exponentielle. La fonction de répartition de la loi exponentielle d'espérance μ est

$$F(x) = \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)\right] \mathbf{1}_{x>0}.$$

Son inverse est donc

$$F^{-1}(y) = -\mu \ln(1-y) \text{ si } 0 < y < 1.$$

Si U est de loi uniforme$(0,1)$ alors

$$V = -\mu \ln(1-U)$$

est de loi exponentielle.

Transformation de v.a. uniformes

La méthode d'inversion

Vérification. Pour tout $v > 0$

$$\begin{aligned} P[V \leq v] &= P[-\mu \ln(1-U) \leq v] \\ &= P\left[U \leq 1 - \exp\left(-\frac{v}{\mu}\right)\right] \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{v}{\mu}\right). \square \end{aligned}$$

Transformation de v.a. uniformes

La méthode du rejet

Supposons que la fonction de répartition $F : \Re \rightarrow [0, 1]$ de la distribution que l'on veut simuler admet une fonction de densité f. Supposons aussi qu'il existe une autre distribution dont la fonction de répartition est $G : \Re \rightarrow [0, 1]$ telle que

1. on sait comment la simuler,
2. elle admet la fonction de densité $g : \Re \rightarrow [0, \infty)$,
3. il existe une constante c telle que $f(x) \leq cg(x)$ pour tout $x \in \Re$.

Transformation de v.a. uniformes

La méthode du rejet

L'algorithme est le suivant :

1. Simuler indépendamment U selon une distribution Uniforme$(0, 1)$ et X selon la loi G jusqu'à ce que

$$cU \leq \frac{f(X)}{g(X)}.$$

   (on rejette tous les couples (U, X) qui ne satisfont pas cette exigence.
2. Lorsque le couple (U, X) est accepté, posons $V = X$.

Transformation de v.a. uniformes

La méthode du rejet

Théorème. *La fonction de répartition F_V de V est F.*

Preuve. Premièrement, notons que pour tout nombre réel x,

$$\begin{aligned}
& P\left[X \leq x \text{ et } X \text{ n'est pas rejeté}\right] \\
= \; & P\left[X \leq x \text{ et } cU \leq \frac{f(X)}{g(X)}\right] \\
= \; & \int_{-\infty}^{x} P\left[cU \leq \frac{f(x)}{g(x)}\right] g(x) \; dx \\
= \; & \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{f(x)}{cg(x)}\right) g(x) \; dx \\
= \; & \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{x} f(x) \; dx = \frac{1}{c} F(x).
\end{aligned}$$

Transformation de v.a. uniformes

La méthode du rejet

En laissant tendre x vers l'infini, nous obtenons

$$\begin{aligned} & P\left[X \text{ n'est pas rejeté}\right] \\ = \quad & \lim_{x\to\infty} P\left[X \leq x \text{ et } X \text{ n'est pas rejeté}\right] \\ = \quad & \lim_{x\to\infty} \frac{1}{c} F\left(x\right) \\ = \quad & \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Transformation de v.a. uniformes

La méthode du rejet

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
P\left[V \leq v\right] &= P\left[X \leq v \,|X \text{ est accepté}\right] \\
&= \frac{P\left[X \leq v \text{ et } X \text{ est accepté}\right]}{P\left[X \text{ est accepté}\right]} \\
&= \frac{\frac{1}{c} F\left(v\right)}{\frac{1}{c}} \\
&= F\left(v\right). \square
\end{aligned}
$$

Remarque. Il faudra choisir G de sorte que c soit le plus près de 1 possible afin de limiter les rejets. Rappelons que $P\left[X \text{ est accepté}\right] = c^{-1}$.

Transformation de v.a. uniformes

Les variables discrètes

Supposons que nous voulons simuler une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ avec les probabilités $\{p_1, p_2, ..., p_n, ...\}$ respectivement. Notons que

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Si U est de loi uniforme$(0, 1)$ alors

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbf{1}_{\sum_{i=1}^{n-1} p_i < U \leq \sum_{i=1}^{n} p_i}$$

est la variable discrète que nous désirons simuler. Notons que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{a<U\leq b}$ vaut 1 si $a < U \leq b$ et 0 sinon et la somme $\sum_{i=1}^{0} p_n$ est posée égale à zéro.

Transformation de v.a. uniformes

Les variables discrètes

Preuve.

$$
\begin{aligned}
P\left[V = x_n\right] &= P\left[\sum_{i=1}^{n-1} p_i < U \leq \sum_{i=1}^{n} p_i\right] \\
&= F_U\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\right] - F_U\left[\sum_{i=1}^{n-1} p_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n-1} p_i \\
&= p_n. \ \square
\end{aligned}
$$

Transformation de v.a. uniformes

La méthode de composition

Supposons que la fonction de répartition $F : \Re \longrightarrow [0, 1]$ puisse s'exprimer comme une combinaison linéaire de fonctions de répartion $F_i : \Re \longrightarrow [0, 1]$, $i \in \{1, 2, ..., k\}$ que l'on sait simuler, c'est-à-dire que

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i F_i(x).$$

Notons qu'afin de préserver les propriétés de monotonicité et de non-négativité de F et pour qu'elle soit bornée par 1, nous avons généralement $p_i > 0$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$ et $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

Transformation de v.a. uniformes

La méthode de composition

Afin de simuler la variable aléatoire V de fonction de répartition F, il faut

1. simuler une variable aléatoire discrète X prenant la valeur i avec probabilité p_i, $i \in \{1, 2, ..., k\}$
2. cette variable X détermine la distribution F_i à utiliser pour simuler une deuxième variable aléatoire V.

La fonction de répartition de la variable aléatoire V est F.

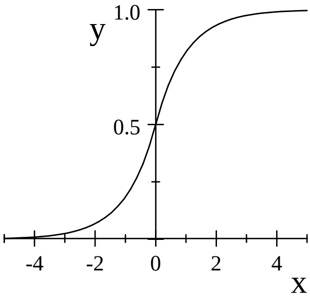
Preuve. Pour tout nombre réel v,

$$F_V(v) = \sum_{i=1}^{k} P[V \leq v | X = i] P[X = i]$$
$$= \sum_{i=1}^{k} F_i(v) p_i. \square$$

Cette technique est particulièrement utilisée lorsque $\Re$ est partitionné en un ensemble d'intervalles $I_1, ..., I_k$ et F_i est la fonction de répartition induite par F dont le support est I_i.

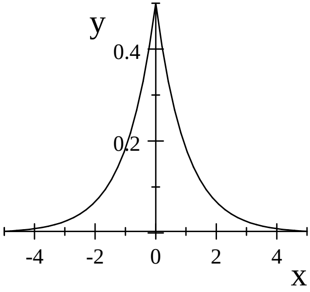
Exemple: la double exponentielle. La variable aléatoire V est de loi double exponentielle si sa fonction de répartition est

$$F_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{v}{\mu}} & \text{si } v < 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{v}{\mu}} & \text{si } v \geq 0. \end{cases}$$



Exemple (suite). Ceci implique que sa fonction de densité est

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu}\exp\left(\frac{v}{\mu}\right) & \text{si } v < 0, \\ \frac{1}{2\mu}\exp\left(-\frac{v}{\mu}\right) & \text{si } v \geq 0. \end{cases}.$$



Exemple (suite). Pour simuler une telle variable aléatoire,

1. on simule une variable aléatoire X qui prend les valeurs 1 ou 2 avec probabilité $1/2$.
2. si $X = 2$, on simule une variable V de loi exponentielle et si $X = 1$, on simule une variable V telle que $-V$ est de loi exponentielle.

Transformation de v.a. uniformes

Ratio d'uniformes

Théorème. *Supposons que la fonction de répartition F admette une fonction de densité f. Posons*

$$A_f = \left\{ (v_1, v_2) \in \Re^2 : 0 < v_1 < \sqrt{f\left(\frac{v_2}{v_1}\right)} \right\}.$$

De plus, si le vecteur aléatoire (V_1, V_2) est uniformément distribué sur l'ensemble A_f, alors la variable aléatoire $V = V_2 / V_1$ a pour fonction de densité la fonction f (La preuve suit).

Transformation de v.a. uniformes

Ratio d'uniformes

Ce théorème est particulièrement utilisé lorsque A_f est inclus dans un interval compact $[0, a] \times [b_1, b_2]$.
L'algorithme est le suivant :

1. Simulons deux variables aléatoires indépendantes U_1 et U_2 de loi uniforme(0,1).
2. Posons
$$V_1 = aU_1 \text{ et } V_2 = b_1 + (b_2 - b_1)\, U_2$$
ce qui implique que V_1 est Uniforme$(0, a)$ et V_2 est Uniforme(b_1, b_2). Si le couple $(V_1, V_2) \notin A_f$, il est rejeté et l'opération est reprise jusqu'à ce qu'un couple soit accepté.
3. Lorsque $(V_1, V_2) \in A_f$, nous posons
$$V = \frac{V_2}{V_1}.$$

Transformation de v.a. uniforme

Ratio d'uniformes

La fonction de répartition de V est F.

Preuve. Premièrement, en posant $v = v_2 / v_1$ ($v_2 = v_1 v$ et $dv_2 = v_1 dv$), il vient

$$A_f = \left\{ (v_1, v) \in \Re^2 : 0 < v_1 < \sqrt{f(v)} \right\}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{Surface}(A_f) &= \int_{A_f} dv_1 \, dv_2 \\ &= \int_{A_f} v_1 \, dv_1 \, dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\sqrt{f(v)}} v_1 \, dv_1 \right) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(v)}{2} dv = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Transformation de v.a. uniformes

Ratio d'uniformes

Preuve (suite). Puisque le vecteur aléatoire (V_1, V_2) est uniformément distribué sur l'ensemble A_f, alors sa fonction de densité jointe est

$$f_{V_1,V_2}(v_1, v_2) = \begin{cases} 2 & \text{si } (v_1, v_2) \in A_f \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Transformation de v.a. uniformes

Ratio d'uniformes

Preuve (suite). Dans un premier temps, nous déterminerons la loi jointe du vecteur aléatoire (V_1, V). Comme $V_2 = VV_1$, le jacobien de la transformation est

$$\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial V_1} & \frac{\partial V_2}{\partial V_1} \\ \frac{\partial V_1}{\partial V} & \frac{\partial V_2}{\partial V} \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & V \\ 0 & V_1 \end{pmatrix}\right| = V_1.$$

Transformation de v.a. uniformes

Ratio d'uniformes

Par conséquent, la densité jointe est

$$\begin{aligned} f_{V_1,V}\left(v_1^*, v^*\right) &= v_1^* f_{V_1,V_2}\left(v_1^*, v^* v_1^*\right) \\ &= 2v_1^* \mathbf{1}_{0<v_1^*<\sqrt{f(v^*)}}. \end{aligned}$$

Preuve (suite). Ainsi, pour tout nombre réel v,

$$
\begin{aligned}
f_V(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{V_1,V}(v_1^*, v)\, dv_1^* \\
&= \int_0^{\sqrt{f(v)}} 2v_1^* dv_1^* \\
&= f(v). \square
\end{aligned}
$$

Transformation de v.a. uniformes

Box-Muller

Soit U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme(0,1). Posons

$$\begin{aligned} G_1 &= \sqrt{-2\ln U_1}\cos\left(2\pi U_2\right), \\ G_2 &= \sqrt{-2\ln U_1}\sin\left(2\pi U_2\right). \end{aligned}$$

Les variables aléatoires G_1 et G_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée et réduite. Il est à remarquer que l'on génère deux variables à la fois. (Kloeden, Platen, Schurz, p.11)

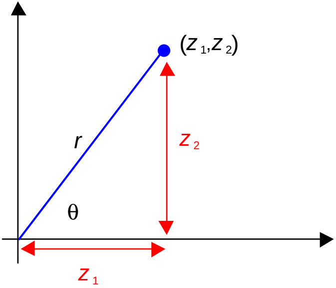
Transformation de v.a. uniformes

Box-Muller

Preuve. En exprimant le point (z_1, z_2) en coordonnée polaire, il vient

$$z_1 = r\cos\theta \text{ et } z_2 = r\sin\theta$$

où $r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ est la distance du vecteur (z_1, z_2) à l'origine et θ est l'angle entre le vecteur (z_1, z_2) et l'abscisse $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$.



Preuve (suite). Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi $N(0,1)$, la fonction de densité jointe est

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z_1^2+z_2^2}{2}\right).$$

Nous cherchons la loi jointe de R et Θ sachant que

$$Z_1 = R\cos\Theta \text{ et } Z_2 = R\sin\Theta.$$

Le jacobien de la transformation est

$$\begin{aligned} \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial R} & \frac{\partial Z_2}{\partial R} \\ \frac{\partial Z_1}{\partial \Theta} & \frac{\partial Z_2}{\partial \Theta} \end{pmatrix}\right| &= \left|\det\begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -R\sin\Theta & R\cos\Theta \end{pmatrix}\right| \\ &= R\cos^2\Theta + R\sin^2\Theta = R. \end{aligned}$$

Transformation de v.a. uniformes

Box-Muller

Preuve (suite). Par conséquent, la fonction de densité jointe de R et Θ est

$$\begin{aligned} f_{R,\Theta}(r,\theta) &= f_{Z_1,Z_2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r \\ &= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}{2}\right) r \\ &= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r \end{aligned}$$

si $r \geq 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$ et 0 sinon.

Preuve (suite). D'autre part, si on pose

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{si } 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$f_R(r) = \begin{cases} r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) & \text{si } r \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $f_{R,\Theta}(r,\theta)$ s'exprime comme le produit de deux fonctions de densité

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_\Theta(\theta)\, f_R(r)$$

ce qui implique que Θ et R sont indépendantes.

Preuve (suite).
De plus, comme $f_\Theta(\theta)$ est la fonction de densité d'une distribution uniforme$(0, 2\pi)$, alors

$$\Theta = 2\pi U_2$$

où U_2 est de loi uniforme$(0, 1)$ et l'égalité est en distribution.

Preuve (suite). Finalement, puisque $R = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$, la variable aléatoire

$$U_1 = \exp\left(-\frac{R^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{Z_1^2 + Z_2^2}{2}\right)$$

est de loi uniforme(0,1) puisque (1) $0 \leq U_1 \leq 1$ et ...

Transformation de v.a. uniformes

Box-Muller

(2) nous avons pour tout $0 \leq u \leq 1$,

$$\begin{aligned}
& F_{U_1}(u) \\
= \; & P\left[\exp\left(-\frac{Z_1^2 + Z_2^2}{2}\right) \leq u\right] \\
= \; & P\left[Z_1^2 + Z_2^2 \geq -2\ln u\right] \\
= \; & \int_{-2\ln u}^{\infty} \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx \text{ puisque la loi de } Z_1^2 + Z_2^2 \text{ est } \chi_2^2 \\
= \; & u
\end{aligned}$$

Ainsi, $R = \sqrt{-2\ln(U_1)}$.

Transformation de v.a. uniformes

Box-Muller

Preuve (suite). En conclusion,

$$G_1 = R\cos\Theta \qquad G_2 = R\sin\Theta$$

$$G_1 = \sqrt{-2\ln U_1}\cos 2\pi U_2 \qquad G_2 = \sqrt{-2\ln U_1}\sin 2\pi U_2$$

où les deux dernières égalités sont des égalités en loi et U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme(0,1). $\square$

Transformation d'une variable aléatoire

Calcul de la fonction de densité

Théorème. *Soit X une variable aléatoire, f_X sa fonction de densité et F_X sa fonction de répartition. Posons $Y = g^{-1}(X)$ où g est une fonction croissante différentiable et inversible. Alors la fonction de densité de Y est $f_Y(y) = f_X(g(y))\, g'(y)$ où $g'(y) = \frac{dg}{dy}(y)$.*

Preuve. La fonction de répartion de Y est

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P[Y \leq y] \\ &= P\left[g^{-1}(X) \leq y\right] \\ &= P[X \leq g(y)] \text{ car } g \text{ est croissante} \\ &= F_X(g(y)). \end{aligned}$$

La fonction de densité est

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(g(y)) = f_X(g(y)) \frac{dg}{dy}(y). \square$$