Rappels des notions de tarification de produits dérivés

6-601-76 Techniques de simulation

Geneviève Gauthier

HEC Montréal

Mise en garde

- Le texte qui suit est un bref survol des principes qui permettent la tarification de produits dérivés.
- Le but est de justifier pourquoi nous voulons évaluer numériquement, à l'aide de la simulation de Monte Carlo, certaines intégrales.
- Certaines restrictions et détails techniques sont omis à dessein.

Les principes de tarification

Dans tous les modèles exempts d'opportunités d'arbitrage...

- Tous produits dérivés pouvant être parfaitement répliqués (couverts) à l'aide d'une stratégie d'investissement (autofinancée) doit avoir un prix égal à la valeur de la stratégie de réplication.
- Les processus de prix actualisés sont des martingales sous la mesure de probabilité associée aux choix du numéraire.

Le modèle de marché

Il y a d titres dont les prix au temps t sont modélisés par le système d'équations différentielles stochastiques

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= \mu_i(\mathbf{S}(t), t) S_i(t) dt + \sigma_i(\mathbf{S}(t), t) S_i(t) d\mathbf{W}^P(t) \\ &= \mu_i(\mathbf{S}(t), t) S_i(t) dt + \sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij}(\mathbf{S}(t), t) S_i(t) dW_j^P(t) \end{aligned}$$

où

- $\{\mathbf{W}^P(t) : t \geq 0\}$ est un $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}, P)$ $-$mouvement brownien de dimension k dont les composantes sont indépendantes entre elles,
- $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ est la filtration brownienne satisfaisant les conditions de régularité habituelles,
- $\sigma_i : \Re^d \times [0, \infty) \to \Re^k$ et $\mu_i : \Re^d \times [0, \infty) \to \Re$,
- il y a des conditions techniques que la matrice σ de dimension $d \times k$ et le vecteur μ de dimension $d \times 1$ doivent satisfaire afin qu'une solution au système existe.

La corrélation I

Le lemme d'Itô nous permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
& d \ln S_i(t) \\
= \; & \frac{1}{S_i(t)} dS_i(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{S_i^2(t)} d\langle S_i \rangle(t) \\
= \; & \left(\mu_i(\mathbf{S}(t), t) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\sigma_i^2(\mathbf{S}(t), t)}{2} \right) dt + \sigma_i(\mathbf{S}(t), t)\, d\mathbf{W}^P(t) \\
= \; & \left(\mu_i(\mathbf{S}(t), t) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\sigma_i^2(\mathbf{S}(t), t)}{2} \right) dt + \sum_{i^*=1}^{k} \sigma_{i,i^*}(\mathbf{S}(t), t)\, dW_{i^*}^P(t).
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\Sigma_{ij}(\mathbf{S}(t), t) = (\sigma_i(\mathbf{S}(t), t))^\top \sigma_j(\mathbf{S}(t), t)
$$

représente la corrélation instantanée entre les rendements des actifs.

La corrélation II

Attention! Il ne fait pas confondre la corrélation instantannée et la corrélation :

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Cov}^P\left[\ln S_i(t), \ln S_j(t)\right] \\
= \; & \mathrm{E}^P\left[\left(\int_0^t \sigma_i(\mathbf{S}(t), t)\, d\mathbf{W}^P(t)\right)\left(\int_0^t \sigma_j(\mathbf{S}(t), t)\, d\mathbf{W}^P(t)\right)\right] \\
= \; & \mathrm{E}^P\left[\left(\sum_{i^*=1}^{k} \int_0^t \sigma_{i,i^*}(\mathbf{S}(t), t)\, dW_{i^*}^P(t)\right)\left(\sum_{j^*=1}^{k} \int_0^t \sigma_{j,j^*}(\mathbf{S}(t), t)\, dW_{j^*}^P(t)\right)\right] \\
= \; & \sum_{i^*=1}^{k} \sum_{j^*=1}^{k} \mathrm{E}^P\left[\left(\int_0^t \sigma_{i,i^*}(\mathbf{S}(t), t)\, dW_{i^*}^P(t)\right)\left(\int_0^t \sigma_{j,j^*}(\mathbf{S}(t), t)\, dW_{j^*}^P(t)\right)\right] \\
= \; & \sum_{i^*=1}^{k} \sum_{j^*=1}^{k} \mathrm{E}^P\left[\int_0^t \sigma_{i,i^*}(\mathbf{S}(t), t)\, \sigma_{j,j^*}(\mathbf{S}(t), t)\, d\left\langle W_{i^*}^P, W_{j^*}^P\right\rangle(t)\right] \\
= \; & \sum_{i^*=1}^{k} \mathrm{E}^P\left[\int_0^t \sigma_{i,i^*}(\mathbf{S}(t), t)\, \sigma_{j,i^*}(\mathbf{S}(t), t)\, dt\right].
\end{aligned}
$$

Portefeuille et stratégie d'investissement

- Un portefeuille est un vecteur $\boldsymbol{\theta} \in \Re^d$ dont la i ème composante représente le nombre de parts de l'actif i détenues.
- La valeur du portefeuille au temps t est

$$V(t) = \boldsymbol{\theta}^\top \cdot \mathbf{S}(t) = \sum_{i=1}^{d} \theta_i S_i(t)$$

- Une stratégie d'investissement est une sucession de portefeuilles : $\{\boldsymbol{\theta}(t) : t \geq 0\}$.

Les gains ou pertes I

- Si l'on détient le portefeuille $\boldsymbol{\theta}(t)$ pendant la période de temps $[t, t+h)$, alors la variation de la valeur du portefeuille entre le début et la fin de la période peut seulement être attribuée à la variation des prix:

$$\begin{aligned} V(t+h) - V(t) &= \boldsymbol{\theta}(t)^\top \cdot (\mathbf{S}(t+h) - \mathbf{S}(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \theta_i(t)(S_i(t+h) - S_i(t)). \end{aligned}$$

- En considérant plusieurs périodes de temps $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t$, nous trouvons

$$\begin{aligned} V(t) - V(0) &= \sum_{n=1}^{N} (V(t_n) - V(t_{n-1})) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\theta}(t_{n-1})^\top \cdot (\mathbf{S}(t_n) - \mathbf{S}(t_{n-1})) \end{aligned}$$

Les gains ou pertes II

- Ceci suggère qu'en temps continu, les gains obtenus d'une stratégie d'investissement au cours de la période de temps $[0, t]$ sont

$$V(t) - V(0) = \int_0^t \boldsymbol{\theta}(u)^\top d\mathbf{S}(u) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \boldsymbol{\theta}_i(u)\, d\mathbf{S}_i(u).$$

Stratégie d'investissement autofinancée

- Puisque $V(t) = \boldsymbol{\theta}(t)^\top \mathbf{S}(t)$, alors, appliquant le lemme d'Itô (règle de multiplication), nous trouvons

$$\begin{aligned} dV(t) &= d\left(\sum_{i=1}^{d} \theta_i(t) S_i(t)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \left(\theta_i(t)\, dS_i(t) + S_i(t)\, d\theta_i(t) + \langle \theta_i, S_i \rangle (t)\right) \\ &= \boldsymbol{\theta}(t)^\top d\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t)^\top d\boldsymbol{\theta}(t) + \sum_{i=1}^{d} \langle \theta_i, S_i \rangle (t) \end{aligned}$$

- Une stratégie d'investissement est dite autofinancée si sa valeur satisfait

$$dV(t) = \boldsymbol{\theta}(t)^\top d\mathbf{S}(t)$$

c'est-à-dire que $\mathbf{S}(t)^\top d\boldsymbol{\theta}(t) + \sum_{i=1}^{d} \langle \theta_i, S_i \rangle (t) = 0$.

Stratégie de réplication

- Considérons un produit dérivé dont la valeur au temps t est une fonction $g : \Re^d \times [0, \infty) \to \Re$ deux fois continûment différentiable des prix des d titres du modèle et du temps.
- Appliquant le lemme d'Itô, nous trouvons

$$\begin{aligned} dg(\mathbf{S}(t), t) &= \frac{\partial g}{\partial t}(\mathbf{S}(t), t)\, dt + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial g}{\partial S_i}(\mathbf{S}(t), t)\, dS_i(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{i^*=1}^{d} \frac{\partial^2 g}{\partial S_i \partial S_{i^*}}(\mathbf{S}(t), t)\, d\langle S_i, S_{i^*} \rangle \end{aligned}$$

- Si le produit dérivé peut être répliqué à partir de la stratégie d'investissement autofinancée $\boldsymbol{\theta}$, nous avons aussi $dg(\mathbf{S}(t), t) = \sum_{i=1}^{d} \theta_i(t)\, dS_i(t)$.
- Par comparaison, nous en déduisons que $\theta_i(t) = \frac{\partial g}{\partial S_i}(\mathbf{S}(t), t)$.

Tarification de produits dérivés réplicables

- Le taux d'intérêt instantané (sans risque de défaut) au temps t est noté $r(t)$.
- Le facteur d'actualisation (sans risque de défaut) au temps t est $\beta(t) = \exp\left(-\int_0^t r(u)\,du\right)$.
- Considérons un contrat qui paie un montant de $f(\mathbf{S}(T))$ à la date T.
- Si le contrat est accessible (c'est-à-dire qu'il peut être parfaitement répliqué à l'aide d'une stratégie d'investissement autofinancée), alors sa valeur au temps t est

$$\beta^{-1}(t)\,\mathrm{E}_t^Q\left[\beta(T)\,f(\mathbf{S}(T))\right]$$

où Q est une mesure neutre au risque et $\mathrm{E}_t^Q[\bullet]$.est l'espérance conditionnelle à l'information disponible au temps t.

Monde neutre au risque I

- Les processus $\{\beta(t) S_i(t) : t \geq 0\}$ doivent être des $Q-$martingales, $i = 1, 2, ..., d$.
- Puisque $d\beta(t) = -r(t)\beta(t)\,dt$,

$$
\begin{aligned}
& dY_i(t) \\
= \; & \beta(t)\,dS_i(t) + S_i(t)\,d\beta(t) + d\langle \beta, S_i\rangle(t) \\
= \; & \mu_i(\mathbf{S}(t), t)\,Y_i(t)\,dt + \sigma_i(\mathbf{S}(t), t)\,Y_i(t)\,d\mathbf{W}^P(t) \\
& -r(t)\,Y_i dt + 0 \\
= \; & (\mu_i(\mathbf{S}(t), t) - r(t))\,Y_i(t)\,dt \\
& +\sigma_i(\mathbf{S}(t), t)\,Y_i(t)\,d\mathbf{W}^P(t)
\end{aligned}
$$

où $Y_i(t) = \beta(t) S_i(t)$ est le prix actualisé de l'actif i.

Monde neutre au risque II

- Posons $W_j^Q(t) = W_j^P(t) + \int_0^t \gamma_j(t)$, $j = 1, 2, ..., k$.
-

$$
\begin{aligned}
& dY_i(t) \\
= \ & (\mu_i(\mathbf{S}(t), t) - r(t)) Y_i(t)\, dt \\
& + \sigma_i(\mathbf{S}(t), t) Y_i(t)\, d\mathbf{W}^P(t) \\
= \ & \left(\mu_i(\mathbf{S}(t), t) - r(t) - \sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij}(\mathbf{S}(t), t) \gamma_j(t) \right) Y_i(t)\, dt \\
& + \sigma_i(\mathbf{S}(t), t) Y_i(t)\, d\mathbf{W}^Q(t)
\end{aligned}
$$

- Nous devons donc résoudre

$$
\mu_i(\mathbf{S}(t), t) - r(t) - \sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij}(\mathbf{S}(t), t) \gamma_j(t) = 0,
$$

pour $i = 1, 2, ..., d$.

Monde neutre au risque III

- Sous forme vectorielle, nous devons résoudre

$$\underbrace{\mu\left(\mathbf{S}\left(t\right),t\right)}_{d\times 1}-\underbrace{r\left(t\right)}_{1\times 1}\underbrace{\mathbf{1}}_{d\times 1}-\underbrace{\sigma\left(\mathbf{S}\left(t\right),t\right)}_{d\times k}\underbrace{\gamma\left(t\right)}_{k\times 1}=\underbrace{\mathbf{0}}_{d\times 1}.$$

- Après avoir vérifié les conditions de Novikov, si le système admet
  - une seule solution, alors le marché est complet, c'est-à-dire qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage et tous les droits contingents sont accessibles;
  - une infinité de solution, alors il y a absence d'opportunité d'arbitrage mais certains droits contingents ne sont pas accessibles;
  - aucune solution, alors il y a de l'arbitrage dans le modèle.