Introduction à la simulation de Monte Carlo

6-601-09 Simulation Monte Carlo

Geneviève Gauthier

HEC Montréal

Estimation ponctuelle d'une espérance

- Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Elles sont obtenues à l'aide du générateur de nombre aléatoire de votre logiciel préféré.
- L'*estimateur de Monte Carlo* de la quantité $\theta \equiv \mathrm{E}\left[g\left(X\right)\right]$ est

$$\widehat{\theta}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g\left(X_i\right).$$

- Remarquons que $\widehat{\theta}_n$ est une fonction de l'échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$. C'est une variable aléatoire.
- Exemple : Si X est un prix au temps T et que nous voulons tarifer une option d'achat, alors $g\left(X\right) = e^{-rT} \max\left(X - K; 0\right)$.

Propriétés asymptotiques I

Supposons que

$$\sigma^2 \equiv \mathrm{Var}\left[g\left(X\right)\right] < \infty.$$

Comme l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ est formé d'une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, alors :

Propriétés asymptotiques

Estimateur convergent

- $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais et convergent pour θ. En effet :

Sans biais

$$\mathrm{E}\left[\widehat{\theta}_n\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(X_i\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[g\left(X_i\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \theta = \theta.$$

Convergent

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[\widehat{\theta}_n\right] &= \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(X_i\right)\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Var}\left[g\left(X_i\right)\right]}_{=\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n} \\ &\rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Propriétés asymptotiques
loi forte des grands nombres

- La loi forte des grands nombres nous permet d'affirmer que $\widehat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers la quantité à estimer θ lorsque la taille n de l'échantillon tend vers l'infini, c'est-à-dire que

$$\Pr\left[\left|\lim_{n\to\infty}\widehat{\theta}_n-\theta\right|=0\right]=1.$$

Propriétés asymptotiques

Loi faible des grands nombres

- Le théorème limite central implique que

$$\frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} N(0,1)$$

(converge en loi vers une distribution normale centrée et réduite lorsque la taille n de l'échantillon tend vers l'infini).

Rappelons que

$$\sigma^2 \equiv \mathrm{Var}\left[g(X)\right].$$

Intervalle de confiance

Écart-type connu

Le dernier point nous permet de construire des *intervalles de confiance* autour de notre estimateur. En effet, si z_α est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la distribution normale centrée et réduite, c'est-à-dire que

$$\Pr\left[Z \leq z_\alpha\right] = 1-\alpha,$$

alors l'intervalle de confiance pour θ (de niveau de confiance $1-\alpha$) est

$$\left[\widehat{\theta}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \widehat{\theta}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

lorsque la taille n de l'échantillon est suffisamment grande.

Intervalle de confiance

Marge d'erreur

Nous pouvons évaluer la précision de notre estimation puisque nous savons que

$$
\begin{aligned}
1-\alpha &\cong \Pr\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n-\theta\right)}{\sigma} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \\
&= \Pr\left[\left|\widehat{\theta}_n-\theta\right| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]
\end{aligned}
$$

qui est équivalent à

$$
\Pr\left[\left|\widehat{\theta}_n-\theta\right| > z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \simeq \alpha.
$$

Ainsi, la marge d'erreur est

$$
\text{Marge d'erreur} = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.
$$

Estimation d'une espérance

Estimation de la variance

- Évidemment, en pratique, si on ne connaît pas $\theta \equiv \mathrm{E}\left[g\left(X\right)\right]$, il y a très peu de chance que l'on connaisse $\sigma^2 \equiv \mathrm{Var}\left[g\left(X\right)\right]$. Nous devons donc estimer σ^2.
- L'estimateur de Monte Carlo sans biais de σ^2 est

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(g\left(X_i\right)-\widehat{\theta}_n\right)^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(g\left(X_i\right)\right)^2-\frac{n}{n-1}\left(\widehat{\theta}_n\right)^2.
\end{aligned}$$

Estimation d'une espérance I

Intervalle de confiance

- Si

$$\widehat{\sigma}^{(n)} \equiv \sqrt{\widehat{\sigma}_n^2},$$

alors l'intervalle de confiance pour θ (de niveau de confiance $1-\alpha$) est

$$\left[\widehat{\theta}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\widehat{\sigma}^{(n)}}{\sqrt{n}} ; \widehat{\theta}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\widehat{\sigma}^{(n)}}{\sqrt{n}}\right]$$

lorsque la taille n de l'échantillon est suffisamment grande.

- Encore une fois, cet intervalle est construit autour de la loi asymptotique de notre estimateur et il faudra être prudent lorsque notre échantillon sera de petite taille.

Estimation d'une espérance II

Intervalle de confiance

- Notons que les tailles des échantillons sont habituellement très grandes lors des simulation de Monte Carlo. Nous n'avons donc pas besoin d'introduire la loi de Student puisque cette dernière converge vers la distribution normale centrée et réduite lorsque $n \longrightarrow \infty$

Estimation d'une espérance

La marge d'erreur

La marge d'erreur correspond à la demie de la longueur de l'intervalle de confiance, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\text{marge d'erreur} &= z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\mathrm{Var}\left[\widehat{\theta}_n\right]}.\end{aligned}$$

Estimation d'une espérance I

Un exemple

- Soit S, le prix d'un titre risqué au temps T. Nous voulons estimer la valeur au temps 0 d'une option d'achat dont le prix d'exercice est K et la maturité est T, c'est-à-dire que nous cherchons à estimer

$$\theta = \mathrm{E}^{Q}\left[e^{-rT}\max\left(S-K;0\right)\right]$$

  où Q représente une mesure neutre au risque.
- La fonction $g : \Re \rightarrow \Re$ est donc

$$g\left(x\right) = e^{-rT}\max\left(x-K;0\right).$$

Estimation d'une espérance II

Un exemple

- Nous supposerons aussi que nous sommes dans le cadre du modèle de Black et Scholes, c'est-à-dire que

$$S \overset{\mathcal{L}}{=} s_0 \exp\left[\left(r - \frac{\nu^2}{2}\right) T + \nu\sqrt{T} Z\right]$$

où s_0 est le prix au temps $t = 0$ du titre risqué, r représente le taux sans risque, ν est la volatilité instantanée du rendement du titre risqué, Z est une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite et $\overset{\mathcal{L}}{=}$ dénote une égalité en loi.

Estimation d'une espérance III

Un exemple

- Évidemment, cet exemple est purement pédagogique puisque, dans ce contexte, nous connaissons la valeur de θ :

$$
\begin{aligned}
\theta &= \mathrm{E}^{Q}\left[e^{-rT}\max\left(S-K;0\right)\right] \\
&= s_0 N\left(d\right) - Ke^{-rT} N\left(d-\nu\sqrt{T}\right) \\
&= s_0 \int_{-\infty}^{d} \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz}{\sqrt{2\pi}} - Ke^{-rT}\int_{-\infty}^{d-\nu T^{1/2}} \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} dz
\end{aligned}
$$

où

$$
d = \frac{\ln s_0 - \ln K + \left(r + \frac{\nu^2}{2}\right)T}{\nu\sqrt{T}}.
$$

Estimation d'une espérance IV

Un exemple

- Dans ce contexte, nous connaissons même l'écart-type puisque

$$\sigma^2 \equiv \mathrm{Var}\left[e^{-rT}\max\left(S-K;0\right)\right].$$

En effet, comme il est démontré en annexe,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= s_0^2 \exp\left(\nu^2 T\right) N\left(d+\nu\sqrt{T}\right) \\ &\quad -2s_0 K \exp\left(-rT\right) N\left(d\right) \\ &\quad +K^2 \exp\left(-2rT\right) N\left(d-\nu\sqrt{T}\right) \\ &\quad -\theta^2.\end{aligned}$$

Estimation d'une espérance V

Un exemple

- Dans le cas où $s_0 = 100$, $r = 0.05$, $\nu = 0.20$ et $T = 1$, nous avons

K	θ	σ
$K = 0.9 \times s_0$	16. 699 448 41	17. 388 722 50
$K = 1.0 \times s_0$	10. 450 583 57	14. 719 404 09
$K = 1.1 \times s_0$	06. 040 088 13	11. 634 744 06

Travail pratique 1 I

Évaluation d'une option dans le contexte NGARCH

- Nous allons reprendre la tarification des trois options en utilisant comme modèle de marché un processus NGARCH simulé sur une base quotidienne.

Travail pratique 1 II

Évaluation d'une option dans le contexte NGARCH

- Le prix S_t de l'actif sous-jacent à la t ième journée, sous la mesure neutre au risque Q, est, $\forall t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$,

$$\begin{aligned} \ln \frac{S_{t+1}}{S_t} &= \rho - \frac{1}{2} h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}} \epsilon_{t+1} \\ h_{t+1} &= \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t (\epsilon_t - \widetilde{\lambda})^2 \end{aligned}$$

  où $\{\epsilon_t : t \in \mathbb{N}\}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes (d'espérance nulle et de variance unitaire) indépendantes sous la mesure Q.
- Le processus h représente la variance conditionnelle du rendement quotidien du titre: $h_{t+1} = \mathrm{Var}_t^Q \left[\ln \frac{S_{t+1}}{S_t} \right]$.

Travail pratique 1 III

Évaluation d'une option dans le contexte NGARCH

- Les paramètres sont choisis de sorte que ce modèle de marché ait un comportement similaire à celui de Black et Scholes utilisé dans l'exemple.
  - $S_0 = 100$.
  - Le taux d'intérêt sans risque ρ est quoditien. Ainsi $\rho \times 365 = r$, d'où $\rho = 0.05/365 = 1.3699 \times 10^{-4}$.
  - Nous prendrons des valeurs typiquement observées pour les paramètres β: $\beta_0 = 0.00001$, $\beta_1 = 0.8$ et $\beta_2 = 0.1$.
  - La variance stationnaire est $h^* = \beta_0\{1 - \beta_1 - \beta_2[1 + \widetilde{\lambda}^2]\}^{-1}$. Pour que la variance stationnaire (quotidienne) soit équivalente à celle utilisée dans le cadre de Black et Scholes, nous posons $h^* = \beta_0\{1 - \beta_1 - \beta_2[1 + \widetilde{\lambda}^2]\}^{-1} = \nu^2/365$ ce qui implique que $\widetilde{\lambda} = 0.29580$.
  - Finalement, nous posons $h_1 = h^* = 1.0959 \times 10^{-4}$.

Devoir à rendre I

Les questions

1. Déteminer le prix des options d'achat d'une maturité de 6 mois dont les prix d'exercice sont respectivement $0.8 \times S_0$, $0.9 \times S_0$, S_0, $1.1 \times S_0$ et $1.2 \times S_0$ à l'aide d'une simulation de Monte Carlo pour des tailles d'échantillon égales à 5 000, 10 000, 25 000, 50 000 et 100 000.
2. Construire les intervalles de confiance autour de ces prix.
3. Noter les temps de calcul nécessaires pour chaque taille d'échantillon.
4. Produisez un graphe présentant la marge d'erreur en abscisse et le temps de calcul en ordonnée.

Quantile
Définition

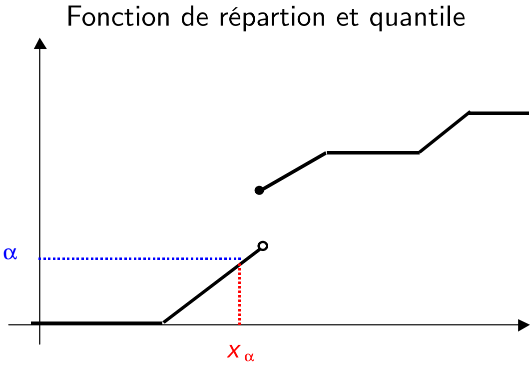
Définition. Pour tout $\alpha \in (0,1)$, le quantile d'ordre α de la distribution F_X est la quantité

$$x_\alpha = \inf \left\{ x \in \Re : F_X(x) \geq \alpha \right\},$$

c'est-à-dire que x_α est la plus petite valeur pour laquelle la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs plus petites ou égales à x_α est plus grande ou égale à α. Pourquoi ne pas avoir défini le quantile d'ordre α comme étant la quantité x_α satisfaisant l'équation

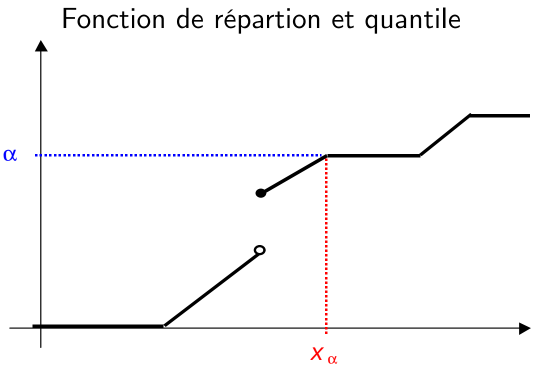
$$F_X(x_\alpha) = \alpha \text{ ?}$$

Quantile
Définition



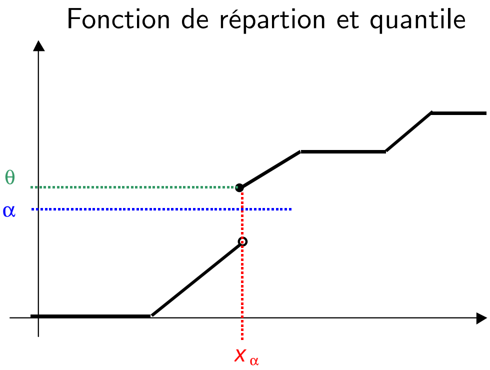
Quantile

Définition



Quantile

Définition



Mise en contexte

Lorsque le portefeuille est constitué d'instruments nombreux et complexes, il n'est généralement pas possible de connaître analytiquement la distribution de la valeur du portefeuille à un instant futur donné. On peut alors procéder par simulation. Dans d'autres cas, l'estimation d'un quantile se fait par échantillonnage.

L'échantillon et la notation

- Dans ce qui suit,

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$$

représente un échantillon constitué de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à la variable aléatoire X de fonction de répartition F_X. De plus, $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ désigne le même échantillon ordonné, c'est-à-dire que

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}.$$

Fonction de répartition empirique I

- **Définition**. La *fonction de répartition empirique* construite à partir de l'échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$ de taille n est

$$\forall x \in \Re,\ F_X^{(n)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}$$

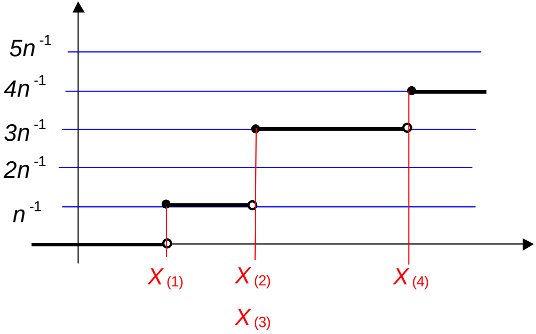
  où la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}$ vaut 1 si $X_i \leq x$ et 0 sinon.

- Pour un nombre réel x fixé, $F_X^{(n)}(x)$ est la proportion des observations de l'échantillon qui sont inférieures ou égales à x.

Fonction de répartition empirique II

▶

Portion d'une fonction de répartition empirique



L'estimation ponctuelle d'un quantile

- **Définition**. Pour tout $\alpha \in (0,1)$, l'estimateur $\widehat{x}_{\alpha}^{(n)}$ du quantile d'ordre α de la distribution F_X est la quantité

$$\widehat{x}_{\alpha}^{(n)} = \inf \left\{ x \in \Re : F_X^{(n)}(x) \geq \alpha \right\}$$

où $F_X^{(n)}$ est la fonction de répartition empirique.

- **Définition pragmatique**. Notons que si $\frac{k-1}{n} < \alpha \leq \frac{k}{n}$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, alors $\widehat{x}_{\alpha}^{(n)} = X_{(k)}$. Par conséquent, puisque $k - 1 < n\alpha \leq k$

$$\widehat{x}_{\alpha}^{(n)} = X_{(\lceil n\alpha \rceil)} = X_{(k)}.$$

où $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à x (et $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x).

Exemple

Exemple. Nous voulons évaluer le quantile d'ordre $\alpha = 0.25$.

n	$n\alpha$	$\lceil n\alpha \rceil$
10	2.5	3
100	25	25

Exemple

Exemple. Nous voulons évaluer le quantile d'ordre $\alpha = 0.1\% = 10^{-3}$.

n	$n\alpha$	$\lceil n\alpha \rceil$
10^2	10^{-1}	1
10^3	10^0	1
10^4	10^1	10
10^5	10^2	100
10^6	10^3	1000

Estimation par intervalle de confiance

La notation

- Soit x_α, le quantile d'ordre α de la distribution F_X. Définissons les variables aléatoires

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq x_\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}$$

  et $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$.
- ξ représente le nombre d'observations inférieures où égales à x_α.

Estimation par intervalle de confiance

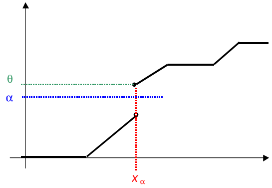
- Puisque ξ est une somme de variables aléatoires indépendantes et distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre

$$\theta = P\left(\xi_i = 1\right) = F_X\left(x_\alpha\right),$$

alors ξ est de loi binomiale(n, θ).

- Notons que si x_α n'est pas un point de discontinuité de la fonction F_X, alors $\theta = \alpha$. Sinon $\theta > \alpha$.

Fonction de répartition et quantile



Construction de l'intervalle de confiance

- Rappelons que $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$ dénote notre échantillon ordonné.
- Si $a \in \{1, 2, ..., n\}$, alors $\xi \geq a$ si et seulement s'il y a au moins a observations inférieures ou égales à x_α, c'est-à-dire si $X_{(a)} \leq x_\alpha$.
- Si $b \in \{1, 2, ..., n\}$, alors $\xi < b$ si et seulement s'il y moins de b observations inférieures ou égales à x_α, c'est-à-dire $X_{(b)} > x_\alpha$.

Utilisation de l'approximation normale

- Remarquons aussi que, puisque $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ est de loi binomiale(n, θ) , alors lorsque la taille n de la simulation est très grande, il est possible d'approcher la distribution de ξ par une distribution normale$(n\theta, n\theta\,(1-\theta))$.
- Plus θ est près de 0 ou de 1, plus la taille de la simulation devra être grande pour que l'approximation soit de bonne qualité. Or, dans le cas de l'estimation d'une valeur à risque, le θ sera petit.

Utilisation de l'approximation normale

- Rappel : $\xi \geq a \Leftrightarrow X_{(a)} \leq x_\alpha$ et $\xi < b \Leftrightarrow X_{(b)} > x_\alpha$.
- Posons, $\Delta_\beta = z_{\frac{\beta}{2}} \sqrt{n\theta(1-\theta)}$.
- Si $Z \sim N(0,1)$, alors

$$\begin{aligned}
1-\beta &= P\left[-z_{\frac{\beta}{2}} \leq Z < z_{\frac{\beta}{2}}\right] \\
&\cong P\left[-z_{\frac{\beta}{2}} \leq \frac{\xi - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} < z_{\frac{\beta}{2}}\right] \\
&= P\left[n\theta - \Delta_\beta \leq \xi < n\theta + \Delta_\beta\right] \\
&\leq P\left[\lfloor n\theta - \Delta_\beta \rfloor \leq \xi < \lceil n\theta + \Delta_\beta \rceil\right] \\
&= P\left[X_{(\lfloor n\theta - \Delta_\beta \rfloor)} \leq x_\alpha < X_{(\lceil n\theta + \Delta_\beta \rceil)}\right].
\end{aligned}$$

L'intervalle de confiance

- En résumé,
$$\left[X_{(b_*)}, X_{(b^*)}\right)$$
est un intervalle de confiance de niveau $1-\beta$ pour x_α où
$$\begin{aligned} b_* &= \left\lfloor n\theta - z_{\frac{\beta}{2}}\sqrt{n\theta\left(1-\theta\right)}\right\rfloor \\ \text{et } b^* &= \left\lceil n\theta + z_{\frac{\beta}{2}}\sqrt{n\theta\left(1-\theta\right)}\right\rceil \end{aligned}$$
- Notons que $\theta = F_X\left(x_\alpha\right)$ n'est pas toujours connu, rendant difficile le calcul de b_* et b^*. Cependant, dans le cas où F_X est une fonction continue, nous avons $\theta = F_X\left(x_\alpha\right) = \alpha$.

Exemple

- Exemple. Supposons que la taille de l'échantillon est 100 000 et que $\theta = 1\%$. Nous voulons un intervalle de confiance de niveau de confiance 95%.

Comme

$$z_{2.5\%} = 1.95996$$

alors

$$\begin{aligned} b_* &= \left\lfloor 10^5 \times 10^{-2} - 1.95996 \times \sqrt{10^5 \times 10^{-2} \left(1 - 10^{-2}\right)} \right\rfloor \\ &= 938 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } b^* &= \left\lceil 10^5 \times 10^{-2} + 1.95996 \times \sqrt{10^5 \times 10^{-2} \left(1 - 10^{-2}\right)} \right\rceil \\ &= 1062 \end{aligned}$$

Travail pratique 2 I

1. Évaluer le quantile d'orde 1% de la valeur dans 10 jours d'un portefeuille de 10 options d'achat (2 pour chaque prix d'exercice $K/S_0 \in \{0,8;\ 0,9\ ;1\ ;1,1\ ;1,2\}$ d'échéance $T = 90$ jours dans le contexte NGARCH présenté précédemment.
2. Donner l'estimation ponctuelle ansi que les intervalles de confiance de niveau 95% pour chaque taille d'échantillon.
3. Attention! Pour les 10 premiers jours, le processus doit être simuler sous la mesure de probabilité "réelle", c'est-à-dire que le prix S_t de l'actif sous-jacent à la t ième journée, sous la mesure P, est, $\forall t \in \{0, 1, 2, ...\}$,

$$\begin{aligned}
\ln \frac{S_{t+1}}{S_t} &= \rho + \lambda\sqrt{h_{t+1}} - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\epsilon^P_{t+1} \\
h_{t+1} &= \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t(\epsilon^P_t - \left(\widetilde{\lambda} - \lambda\right))^2
\end{aligned}$$

Travail pratique 2 II

où $\left\{\epsilon_t^P : t \in \mathbb{N}\right\}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes (d'espérance nulle et de variance unitaire) indépendantes sous la mesure P. $\lambda = 0,006$.

4. Vous devez faire varier le nombre de scénarios utilisés pour l'évaluation de la distribution du portefeuille au jours $t = 10$ mais aussi le nombre de scénarios utilisés pour évaluer les options.
   4.1 Simuler m valeurs pour le couple (S, h) au temps $t = 10$ en utilisant la dynamique sous P.
   4.2 Pour un couple (S, h) donné, évaluer les options à l'aide de n trajectoires. Il faut utiliser la dynamique sous Q avec une échéance de 80 jours.
5. Votre document devra
   5.1 décrire votre procédure de simulation,
   5.2 justifier les choix concernant votre implémentation,
   5.3 présenter vos résultats et les commenter.

Deuxième moment I

Calculons le deuxième moment. Comme $\mathrm{Var}\left[X\right]+\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)^2=\mathrm{E}\left[X^2\right]$,

$$
\begin{aligned}
& \sigma^2+\theta^2 \\
= \; & \mathrm{E}^Q\left[\left(e^{-rT}\max\left(S-K;0\right)\right)^2\right] \\
= \; & \mathrm{E}^Q\left[\max\left(\left[Se^{-rT}-Ke^{-rT}\right]^2;0\right)\right] \\
= \; & \mathrm{E}^Q\left[\max\left(\left[s_0\exp\left(-\frac{\nu^2}{2}T+\nu T^{1/2}Z\right)-Ke^{-rT}\right]^2;0\right)\right]
\end{aligned}
$$

où Z est une variable aléatoire normale centrée et réduite. Le reste du calcul ne fait qu'intervenir des propriétés de la loi normale.
Comme $s_0\exp\left(-\frac{\nu^2}{2}T+\nu T^{1/2}z\right)>Ke^{-rT}$ si et seulement si

$$
z>-\frac{\ln\left(s_0\right)-\ln\left(K\right)+\left(r-\frac{\nu^2}{2}\right)T}{\nu\sqrt{T}}=-d+\nu\sqrt{T},
$$

Deuxième moment II

alors

$$\mathrm{E}^Q\left[\max\left(\left[s_0\exp\left(-\frac{\nu^2}{2}T+\nu\sqrt{T}Z\right)-Ke^{-rT}\right]^2;0\right)\right]$$

$$=\int_{-d+\nu\sqrt{T}}^{\infty}\left[s_0\exp\left(-\frac{\nu^2}{2}T+\nu\sqrt{T}z\right)-Ke^{-rT}\right]^2 f_Z(z)\ dz$$

où $f_Z(z)$ représente une fonction de densité d'une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite.

Résolution de l'intégrale I

La dernière expression est égale à

$$
\begin{aligned}
= \quad & s_0^2 \int_{-d+\nu\sqrt{T}}^{\infty} \exp\left(-\nu^2 T + 2\nu\sqrt{T}z\right) f_Z(z) \; dz \\
& -2s_0 K \int_{-d+\nu\sqrt{T}}^{\infty} \exp\left(-\left(r+\frac{\nu^2}{2}\right) T + \nu\sqrt{T}z\right) f_Z(z) \; dz \\
& +K^2 e^{-2rT} \int_{-d+\nu\sqrt{T}}^{\infty} f_Z(z) \; dz \\
= \quad & s_0^2 \int_{-d+\nu\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2 - 4\nu\sqrt{T}z + 2\nu^2 T}{2}\right) \; dz \\
& -2s_0 K \int_{-d+\nu\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2 - 2\nu\sqrt{T}z + 2\left(r+\frac{\nu^2}{2}\right)T}{2}\right) \; dz \\
& +K^2 e^{-2rT} \int_{-d+\nu\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \; dz
\end{aligned}
$$

Résolution de l'intégrale II

Complétons les carrés :

$$
\begin{aligned}
= \quad & s_0^2 \exp\left(\nu^2 T\right) \int_{-d+\nu\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z-2\nu\sqrt{T}\right)^2\right) dz \\
& -2s_0 K \exp\left(-rT\right) \int_{-d+\nu\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(z^2-\nu\sqrt{T}\right)^2\right) dz \\
& +K^2 \exp\left(-2rT\right) \int_{-d+\nu\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\
= \quad & s_0^2 e^{\nu^2 T} \int_{-d-\nu\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw - 2s_0 K e^{-rT} \int_{-d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw \\
& +K^2 e^{-2rT} \int_{-d+\nu\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\
= \quad & s_0^2 e^{\nu^2 T} \left(1-N\left(-d-\nu\sqrt{T}\right)\right) - 2s_0 K e^{-rT} \left(1-N\left(-d\right)\right) \\
& +K^2 e^{-2rT} \left(1-N\left(-d+\nu\sqrt{T}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Résolution de l'intégrale III

Mais la symétrie de f_Z implique que la fonction de répartition d'une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite satisfait $1 - N(x) = N(-x)$. Alors

$$\begin{aligned}\sigma^2 + \theta^2 &= s_0^2 e^{\nu^2 T} N\left(d + \nu\sqrt{T}\right) - 2s_0 K e^{-rT} N(d) \\ &\quad + K^2 e^{-2rT} N\left(d - \nu\sqrt{T}\right).\end{aligned}$$

Calcul de la variance I

Comme $\theta = s_0 N(d) - Ke^{-rT} N\left(d - \nu\sqrt{T}\right)$, alors

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sigma^2 + \theta^2 - \theta^2 \\
&= s_0^2 e^{\nu^2 T} N\left(d + \nu\sqrt{T}\right) - 2s_0 Ke^{-rT} N(d) \\
&\quad + K^2 e^{-2rT} N\left(d - \nu T^{1/2}\right) \\
&\quad - s_0^2 [N(d)]^2 + 2s_0 Ke^{-rT} N(d) N\left(d - \nu\sqrt{T}\right) \\
&\quad - K^2 e^{-2rT} \left[N\left(d - \nu\sqrt{T}\right)\right]^2 \\
&= s_0^2 \left[e^{\nu^2 T} N\left(d + \nu\sqrt{T}\right) - (N(d))^2\right] \\
&\quad - 2s_0 Ke^{-rT} N(d) \left(1 - N\left(d - \nu\sqrt{T}\right)\right) \\
&\quad + K^2 e^{-2rT} N\left(d - \nu\sqrt{T}\right) \left(1 - N\left(d - \nu\sqrt{T}\right)\right).
\end{aligned}
$$