# Estimation et calibration des paramètres

## 6-601-09 Simulation Monte Carlo

Geneviève Gauthier

HEC Montréal



Introduction

Maximum de vraisemblance
- Mouvement brownien arithmétique (MBA)
- Mouvement brownien géométrique (MBG)
- Processus de retour vers la moyenne
  - Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves
- Estimation ponctuelle
- Mouvement brownien
  - Précision
  - Maximum de vraisemblance
- Processus de retour vers la moyenne
  - Méthode des moindres carrés

# Introduction

1. Nous allons discuter des diverses façons de déterminer les paramètres des modèles que nous employons lors de la simulation de Monte Carlo.
2. Plus précisément, nous aborderons
   2.1 les estimateurs du maximum de vraisemblance pour certains processus de diffusion couramment utilisés,
   2.2 et la calibration des modèles à l'aide des prix des produits dérivés.



Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Mise en garde

- Il existe plusieurs méthodes permettant la construction d'estimateurs et ces méthodes peuvent mener à des estimateurs différents. Ils ont chacun leurs forces et leurs faiblesses :
  - sans biais ou asymptotiquement sans biais,
  - petite ou grande variance,
  - distribution connue ou inconnue,
  - nécessite ou non une méthode numérique afin de les évaluer,
  - etc.



Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Introduction à l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance I

## Un exemple simple

1. Estimons $\theta =$probabilité que le rendement d'un titre excède le rendement sans risque au cours d'une journée.
2. Contruisons $X_i = 1$ si le rendement du titre dépasse le rendement sans risque le jour $i$ et 0 sinon.
3. Supposons que les rendements quotidiens sont indépendants entre eux et que la probabilité de dépassement est la même à chaque jour :

$$\theta = P\left(X_i = 1\right).$$

4. Remarquons que $\theta$ doit être compris entre 0 et 1 puisqu'il représente une probabilité.


Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Introduction à l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance II

## Un exemple simple

5. Observons la variable indicatrice $x_1, ..., x_{10}$ au cours des 10 derniers jours.
   5.1 Supposons que nous avons observé
   $1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1$



Introduction

Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Introduction à l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance III

## Un exemple simple

6. La fonction de vraisemblance $f(1,1,0,0,1,1,1,0,1,1;\theta)$ est, dans ce cas, la probabilité d'avoir observé un tel échantillon en supposant que la probabilité de dépassement au cours d'une journée est $\theta$ :

$$\begin{aligned}
& f(1,1,0,0,1,1,1,0,1,1;\theta) \\
= & P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0, \ldots, X_{10} = 1) \\
= & P(X_1 = 1) P(X_2 = 1) \ldots P(X_{10} = 1) \\
& \text{car les } X_i \text{ sont indépendants} \\
= & \theta\theta(1-\theta)(1-\theta)\theta\theta\theta(1-\theta)\theta\theta \\
= & \theta^7 (1-\theta)^3 .
\end{aligned}$$



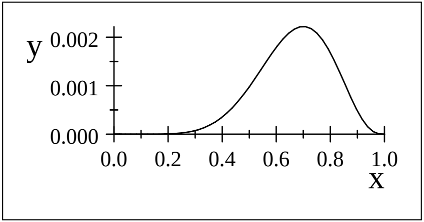
Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Introduction à l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance IV

## Un exemple simple

7. Nous allons choisir comme estimation de maximum de vraisemblance de $\theta$ la valeur $\widehat{\theta}$ qui maximise la fonction de vraisemblance.

Fonction de vraisemblance $\theta^7(1-\theta)^3$




Le maximum est atteint lorsque $\theta = \frac{7}{10}$. Notre estimation du maximum de vraisemblance est donc $\widehat{\theta} = \frac{7}{10}$.

# Introduction à l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance I

## Idées maîtresses

1. Dans le cas où les variables sont de loi discrète, la fonction de vraisemblance $f(x_1, ..., x_n; \theta)$ est la *fonction de masse conjointe* de notre échantillon.
   1.1 Elle peut être interprétée comme la probabilité d'avoir obtenu l'échantillon que l'on a en main en supposant que la valeur du paramètre est $\theta$.
2. Dans le cas où les variables sont de loi continue, la fonction de vraisemblance $f(x_1, ..., x_n; \theta)$ est la *fonction de densité conjointe* de notre échantillon.

# Introduction à l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance II

Idées maîtresses

3. Comme le logarithme est une fonction croissante, trouver la valeur de $\theta$ qui maximise la fonction de vraisemblance $f(x_1, ..., x_n; \theta)$ est équivalent à déterminer la valeur de $\theta$ qui maximise le logarithme de la fonction de vraisemblance $\ln f(x_1, ..., x_n; \theta)$ (nous obtiendrons la même estimation).
   3.1 Cette remarque est importante puisque dans de nombreux cas pratiques, il est plus facile d'optimiser $\ln f(x_1, ..., x_n; \theta)$.



Introduction

Maximum de vraisemblance
- Mouvement brownien arithmétique (MBA)
- Mouvement brownien géométrique (MBG)
- Processus de retour vers la moyenne
- Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves
- Estimation ponctuelle
- Mouvement brownien
- Précision
- Maximum de vraisemblance
- Processus de retour vers la moyenne
- Méthode des moindres carrés

# Pourquoi une estimation par la méthode du maximum de vraisemblance? I

Dans plusieurs cas, cette méthode a les avantages suivants :

1. L'estimateur $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ résout le système
$$\frac{\partial \ln f}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(x_1, \ldots, x_n; \widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \mathbf{0};$$
Sinon, $\ln f\left(x_1, \ldots, x_n; \boldsymbol{\theta}\right)$ peut être optimisée numériquement.
2. L'écart-type de nos estimations peut être estimé lorsque la longueur $n$ de la série chronologique est grande. En effet, la matrice de variances-covariances de $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ est approchée par
$$\widehat{\Sigma} = \left(\frac{-1}{\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\left(x_1, \ldots, x_n; \widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)}\right)$$



Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Pourquoi une estimation par la méthode du maximum de vraisemblance? II

3. Il est possible de calculer des intervalles de confiance et d'exécuter des tests d'hypothèse puisque la loi de $\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$ est approximativement de loi normale d'espérance $\mathbf{0}$ et de variances $\widehat{\Sigma}$ lorsque $n$ est grand.
4. Si la quantité que l'on souhaite estimer est une transformation des paramètres, $\alpha = g(\theta)$, alors $\widehat{\alpha} = g\left(\widehat{\theta}\right)$ et l'estimateur de la variance de l'estimateur $\widehat{\alpha}$ de $\alpha$ est

$$\widehat{\operatorname{Var}(\widehat{\alpha})} = g'\left(\widehat{\theta}\right) \widehat{\operatorname{Var}\left(\widehat{\theta}\right)}.$$



Introduction

Maximum de vraisemblance
- Mouvement brownien arithmétique (MBA)
- Mouvement brownien géométrique (MBG)
- Processus de retour vers la moyenne
- Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves
- Estimation ponctuelle
- Mouvement brownien
- Précision
- Maximum de vraisemblance
- Processus de retour vers la moyenne
- Méthode des moindres carrés

# Mouvement brownien

## Définition

1. Le mouvement brownien à coefficient constant est caractérisé par l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mu \ dt + \sigma \ dW_t.$$

2. Il peut aussi être décrit à partir de la solution de l'équation ci-dessus : si $Z_1, Z_2, \ldots$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $N(0,1)$ alors

$$X_{(i+1)h} = X_{ih} + \mu h + \sigma \sqrt{h} Z_i$$

et est de loi normale d'espérance $\mu h$ et de variance $\sigma^2 h$.

Estimation

G. Gauthier

Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Mouvement brownien I

## La fonction du log-vraisemblance

1. Supposons que nous observons une série chronologique (de rendements)

$$x_0, x_1, ..., x_n$$

   à intervalles réguliers de longueur $h$.

2. Dans le cas des processus markoviens (le MBA en est un), la fonction de densité conjointe de l'échantillon est

$$f_{X_0,...,X_n}(x_0, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i|X_{i-1}}(x_i | x_{i-1}).$$




Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Mouvement brownien II

## La fonction du log-vraisemblance

3. La fonction de log-vraisemblance est

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}\left(\mu,\sigma^2\right) \\
= \quad & \ln f_{X_0,\ldots,X_n}\left(\mu,\sigma^2;x_0,\ldots,x_n\right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} \ln f_{X_i|X_{i-1}}\left(x_i\,|x_{i-1}\right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 h}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_i-x_{i-1}-\mu h\right)^2}{\sigma^2 h}\right)\right) \\
= \quad & -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2 h\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{\left(x_i-x_{i-1}-\mu h\right)^2}{\sigma^2 h}.
\end{aligned}
$$

puisque $X_{ih}=X_{(i-1)h}+\mu h+\sigma\sqrt{h}Z_{i-1}$ implique que $f_{X_i|X_{i-1}}\left(x_i\,|x_{i-1}\right)$ est gaussienne.


Estimation

G. Gauthier

Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Mouvement brownien

## Estimateur ponctuel

**Résultat**. Les estimateurs du maximum de vraisemblance pour $\mu$ et $\sigma$ sont respectivement

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \frac{x_n - x_0}{nh}$$

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2 - \widehat{\mu}^2 h}.$$

La preuve est donnée en annexe.

# Mouvement brownien

## Exemple

$$\widehat{\mu} = \frac{x_n - x_0}{nh} = 0,619905093$$

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 - \widehat{\mu}^2 h} = 0,099658184.$$

# Mouvement brownien I

## Mesure de la précision de nos estimations

1. Une des façons de vérifier si les estimations obtenues ont la précision désirée est d'estimer l'écart-type de l'estimateur.
   1.1 Plus l'écart-type est grand, plus il est probable d'obtenir une estimation qui est éloignée de la vraie valeur du paramètre.



Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Mouvement brownien II

## Mesure de la précision de nos estimations

**Résultat**. Dans de nombreux cas dont celui de l'estimation des paramètres d'un MBA, la distribution asymptotique des estimateurs est gaussienne, c'est-à-dire que

$$\widehat{\mu} \text{ est approximativement de loi } N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{nh}\right)$$

$$\widehat{\sigma} \text{ est approximativement de loi } N\left(\sigma; \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

pourvu que le nombre $n$ de données contenues dans la série chronologique servant à l'estimation soit assez grand.
Il y a une justification de certains résultats en annexe.



Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Mouvement brownien

## Mesure de la précision de nos estimations

**Rappel** :

$$\widehat{\mu} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{nh}\right) \text{ et } \widehat{\sigma} \sim N\left(\sigma; \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

1. la variance de $\widehat{\mu}$ diminue non pas avec le nombre $n$ d'observations mais plutôt avec la longueur $nh$ de la période d'observation.
2. la variance de $\widehat{\sigma}$ diminue avec le nombre $n$ d'observations, peu importe la longueur de la période d'estimation.
3. plus la volatilité $\sigma$ sera faible, plus précises seront nos estimations $\widehat{\mu}$ et $\widehat{\sigma}$.

# Mouvement brownien

## Exemple

Avec les données précédentes, nous estimons l'écart-type de $\widehat{\mu}$ par

$$\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{\mu}\right)} = \sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^2}{nh}} = \sqrt{\frac{0,099658184^2}{500 \times \frac{1}{250}}} = 0,070468978$$

et celui de $\widehat{\sigma}$ par

$$\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{\sigma}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\widehat{\sigma}^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{0,099658184^2}{500}} = 0,003151468.$$

# Mouvement brownien I

## Estimation par intervalle de confiance

1. La connaissance de la distribution (asymptotique) des estimateurs permet d'estimer les paramètres $\mu$ et $\sigma$ par des intervalles de confiance.
2. Le niveau de confiance[1] $1-\alpha$ d'un intervalle peut s'interpréter de la façon suivante : il y a une proportion de $1-\alpha$ des échantillons (dans notre cas, ce sont les séries chronologiques observées) qui produiront un intervalle de confiance qui contient le paramètre que l'on souhaite estimer et il y a une proportion de $\alpha$ des échantillons qui nous mèneront à construire un "mauvais" intervalle de confiance dans le sens où ce dernier ne contiendra pas le paramètre que l'on tente d'estimer.

Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Mouvement brownien II

## Estimation par intervalle de confiance

3. En pratique, $\alpha$ est souvent choisi égal à 5 %.
4. Malheureusement, nous n'avons qu'un seul échantillon et il ne nous sera pas possible de déterminer s'il appartient à l'ensemble des bons intervalles ou aux mauvais intervalles de confiance.
5. L'intervalle de confiance de niveau de confiance $1-\alpha$ pour $\mu$ est

$$\left[\widehat{\mu} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\mu}\right)}}; \qquad \widehat{\mu} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\mu}\right)}}\right]$$

où $z_\beta$ est le quantile d'ordre $1-\beta$ de la distribution normale centrée et réduite.


Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Mouvement brownien III

## Estimation par intervalle de confiance

6. L'intervalle de confiance de niveau de confiance $1-\alpha$ pour $\sigma$ est

$$\left[\widehat{\sigma} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\sigma}\right)}};\widehat{\sigma} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\sigma}\right)}}\right]$$

[1] $0 < \alpha < 1$.



Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Mouvement brownien

## Exemple

L'intervalle de confiance de niveau de confiance 95 % pour $\mu$ est

$$\left[\widehat{\mu} - z_{2,5\ \%}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\mu}\right)}}; \qquad \widehat{\mu} + z_{2,5\ \%}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\mu}\right)}}\right]$$
$$= \quad [0,6199 - 1,96 \times 0,0705; \qquad 0,6199 + 1,96 \times 0,0705]$$
$$= \quad [0,4818; \qquad 0,7580]\,.$$

L'intervalle de confiance de niveau de confiance 95 % pour $\sigma^2$ est

$$\left[\widehat{\sigma} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\sigma}\right)}}; \qquad \widehat{\sigma} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\sigma}\right)}}\right]$$
$$= \quad [0,0997 - 1,96 \times 0,0032; \qquad 0,0997 + 1,96 \times 0,0032]$$
$$= \quad [0,0935; \qquad 0,1058]\,.$$

# Mouvement brownien géométrique

Le MBG est caractérisé par l'EDS

$$dS_t = \mu S_t \; dt + \sigma S_t \; dW_t. \tag{1}$$

Puisque

$$d \ln S_t = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \; dW_t, \tag{2}$$

il est possible d'estimer les paramètres du MBG à partir du logarithme de nos observations et des estimateurs du MBA.



Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne

## Une version en temps discret

1. Nous considérons une version en temps discret d'un processus de retour vers la moyenne.

$$r_{(i+1)h} = r_{ih} + \kappa\left(\theta - r_{ih}\right)\ h + \sigma\sqrt{h}Z_i$$

   où $Z_1, Z_2, \ldots$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes de distribution normale centrée et réduite.

2. Ainsi $r_{(i+1)h}$ est de loi normale d'espérance conditionnelle $r_{ih} + \kappa\left(\theta - r_{ih}\right)\ h$ et d'écart-type conditionnel $\sigma\sqrt{h}$.
   2.1 La fonction de vraisemblance que nous obtiendrons est celle de l'approximation d'Euler stochastique du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.
   2.2 Il est possible d'utiliser la solution exacte afin d'estimer les paramètres d'un processus OU.
   2.3 La fonction de vraisemblance résultante est un peu plus lourde à maximiser analytiquement.


Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne

## Exemple d'une trajectoire



Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne

## Estimateurs ponctuels

Les estimateurs du maximum de vraisemblance pour les paramètres $\theta$, $\kappa$ et $\sigma^2$ du modèle sont respectivement

$$\widehat{\theta} = \frac{S_r V_r - C_r D_r}{n V_r - S_r D_r}$$

$$\widehat{\kappa} = \frac{1}{h} \frac{D_r}{n\widehat{\theta} - S_r}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} \left( r_{ih} - r_{(i-1)h} - \widehat{\kappa} \left( \widehat{\theta} - r_{(i-1)h} \right) h \right)^2$$

où

$$S_r = \sum_{i=1}^n r_{(i-1)h} \qquad D_r = \sum_{i=1}^n \left( r_{ih} - r_{(i-1)h} \right)$$

$$C_r = \sum_{i=1}^n r_{(i-1)h}^2 \qquad V_r = \sum_{i=1}^n r_{(i-1)h} \left( r_{ih} - r_{(i-1)h} \right)$$


Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne

## Exemple

Les estimateurs du maximum de vraisemblance pour les paramètres $\theta$, $\kappa$ et $\sigma$ du modèle sont respectivement

$$
\begin{aligned}
\widehat{\theta} &= \frac{S_r V_r - C_r D_r}{nV_r - S_r D_r} \\
&= \frac{34.54680977 \times (-0.008244855) - 2.503121219 \times (-0.005657487)}{500 \times (-0.008244855) - 34.54680977 \times (-0.005657487)} \\
&= 0,068926275
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\kappa} &= \frac{1}{h} \frac{D_r}{n\widehat{\theta} - S_r} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{12}} \frac{(-0.005657487)}{500 \times 0.068926275 - 34.54680977} \\
&= 0,811379683
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} \left( r_{ih} - r_{(i-1)h} - \widehat{\kappa} \left( \widehat{\theta} - r_{(i-1)h} \right) h \right)^2} \\
&= 0,01909883 \,.
\end{aligned}
$$




Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne I

## La précision

1. Les variances de nos estimateurs $\widehat{\theta}, \widehat{\kappa}$ et $\widehat{\sigma}$ sont estimées par

$$\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\theta}\right)} = \frac{\widehat{\sigma}^2}{nh\widehat{\kappa}^2},$$

$$\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\kappa}\right)} = \frac{1}{nh}\frac{\widehat{\sigma}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{\theta} - r_{(i-1)h}\right)^2},$$

$$\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\sigma}\right)} = \frac{1}{n}\frac{1}{2}\frac{\widehat{\sigma}^2}{2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r_{ih}-r_{(i-1)h}-\widehat{\kappa}\left(\widehat{\theta}-r_{(i-1)h}\right)h}{\widehat{\sigma}\sqrt{h}}\right)^2 - 1}.$$

# Processus de retour vers la moyenne II

## La précision

2. $\widehat{\theta} \sim N\left(\theta; \frac{1}{nh} \frac{\sigma^2}{\kappa^2}\right)$,

$$\widehat{\kappa} \sim N\left(\kappa; \frac{1}{nh} \frac{\sigma^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\theta - r_{(i-1)h}\right)^2}\right)$$

et $$\widehat{\sigma} \sim N\left(\sigma; \frac{1}{n} \; \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r_{ih} - r_{(i-1)h} - \kappa\left(\theta - r_{(i-1)h}\right)h}{\widehat{\sigma}\sqrt{h}}\right)^2 - 1}\right)$$

   2.1 La précision des estimations de $\theta$ et $\kappa$ dépendent de la longueur $nh$ de la période d'échantillonnage plutôt que du nombre d'observations.
   2.2 La précision des estimations de $\sigma$ dépend du nombre $n$ d'observations.
   2.3 Plus $\sigma$ sera petit, meilleure sera la précision de nos estimés.


Estimation

G. Gauthier

Introduction

Maximum de vraisemblance
- Mouvement brownien arithmétique (MBA)
- Mouvement brownien géométrique (MBG)
- Processus de retour vers la moyenne
  - Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves
- Estimation ponctuelle
- Mouvement brownien
  - Précision
  - Maximum de vraisemblance
- Processus de retour vers la moyenne
  - Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne

## Exemple

Les estimations des écarts-types de nos estimateurs du maximum de vraisemblance pour les paramètres $\theta$, $\kappa$ et $\sigma^2$ sont

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta} &= 0,0689 \qquad \left(\widehat{\operatorname{Var}\left(\widehat{\theta}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,0036, \\
\widehat{\kappa} &= 0,8114 \qquad \left(\widehat{\operatorname{Var}\left(\widehat{\kappa}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,1941, \\
\widehat{\sigma} &= 0,0191 \qquad \left(\widehat{\operatorname{Var}\left(\widehat{\sigma}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,0006.
\end{aligned}$$



Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne I

## Estimateurs des moindres carrés

1. En isolant les $Z_i$ dans le processus original, il vient

$$Z_i = \frac{r_{(i+1)h} - r_{ih} - \kappa\left(\theta - r_{ih}\right)h}{\sigma h^{\frac{1}{2}}}.$$

2. La somme des erreurs au carré est une fonction des paramètres du modèle

$$Q\left(\kappa,\theta\right) = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r_{(i+1)h} - r_{ih} - \kappa\left(\theta - r_{ih}\right)h}{\sigma h^{\frac{1}{2}}}\right)^2.$$

3. Dans le cas de ce processus de retour vers la moyenne, les estimateurs des moindres carrés sont les mêmes que les estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance.


Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne I

## Caractéristiques des estimateurs

1. **En théorie,**
   1.1 Plus le nombre $n$ d'observations[2] contenues dans la série chronologique et plus la longueur $nh$ de la période d'estimation sont grands, meilleures seront nos estimations.
   1.2 Plus la volatilité $\sigma$ est petite, meilleures seront nos estimations.
   1.3 Les estimateurs sont asymptotiquement gaussiens, ce qui permet la construction d'intervalle de confiance et de tests d'hypothèses lorsque $n$ est grand.
2. **En pratique,**
   2.1 Il faut de très longues séries chronologiques pour bien capturer l'effet du retour vers la moyenne.
   2.2 Dans les applications classiques en finance, on remarque que l'estimation du $\kappa$ est généralement moins précise.

[2] $n + 1$ si on compte l'observation numéro 0.



Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Exemple

Là où l'art de la statistique compte autant que la théorie!



Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

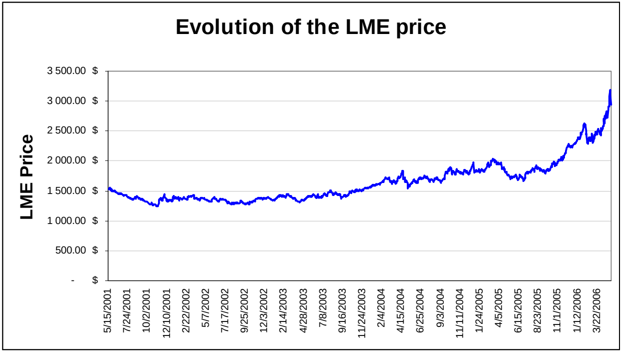
Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Exemple

## Les données

Consider the LME from May 15, 2001, to May 15, 2006.




Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Exemple

## Statistiques descriptives

Descriptive Statistics

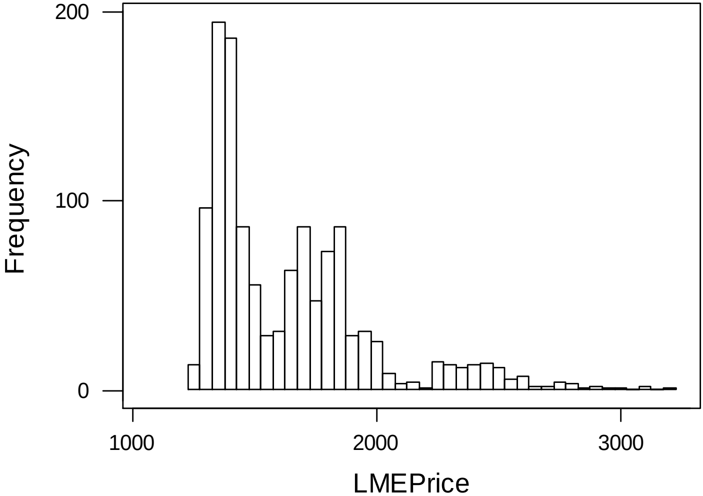
| Variable | N | Mean | Median | StDev | SE Mean |
|---|---|---|---|---|---|
| LMEPrice | 1261 | 1640.0 | 1520.5 | 339.4 | 9.6 |

| Variable | Minimum | Maximum | Q1 | Q3 |
|---|---|---|---|---|
| LMEPrice | 1242.5 | 3186.8 | 1377.1 | 1818.5 |


Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Exemple

## Distribution échantillonnale



# Exemple

## La modélisation

1. Nous voulons modéliser le prix dans un an ($T = 1$).
2. Nous allons estimer trois modèles sur cet échantillon de prix :
   2.1 **Modèle statique**. Le prix $S_1$ est supposé être distribué selon une loi log-normale
   2.2 **Mouvement brownien géométrique**. La dynamique du prix est modélisé par un MBG.
   $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$
   2.3 **Ornstein-Uhlenbeck.** La dynamique du logarithme du prix (rendement) est modélisé par un processus OU.
   $d \ln S_t = \kappa (\mu - \ln S_t) dt + \sigma dW_t$



Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

Introduction

Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

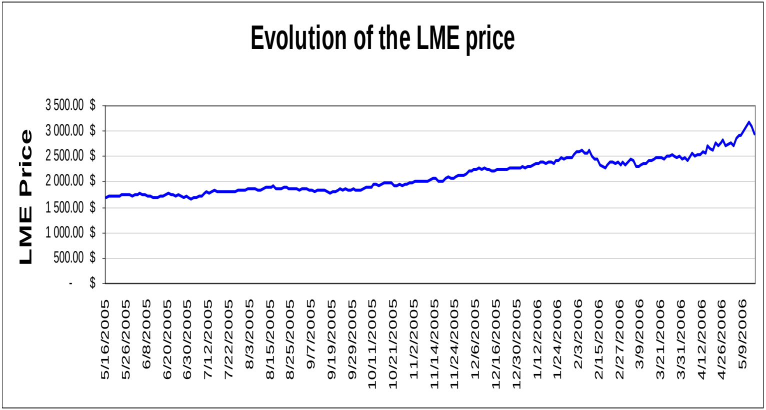
# Exemple

## Le modèle statique

- Supposons que la distribution de $S_T$ est de loi lognormale :
  - $S_T = S_0 \exp(\alpha_T + \beta_T Z)$ où $Z$ est de loi $N(0,1)$.
  - $\mathrm{E}[S_T] = S_0 \exp\left(\alpha_T + \frac{\beta_T^2}{2}\right)$ et
  - $\mathrm{Var}[S_T] = S_0^2 \exp\left(2\alpha_T + \beta_T^2\right)\left(\exp\left(\beta_T^2\right) - 1\right)$.
- Partant des équations précédentes, il vient
  - $\beta_T^2 = \ln \frac{\mathrm{Var}[S_T] + (\mathrm{E}[S_T])^2}{(\mathrm{E}[S_T])^2}$ et
  - $\alpha_T = \ln \frac{\mathrm{E}[S_T]}{S_0} - \frac{1}{2} \ln \frac{\mathrm{Var}[S_T] + (\mathrm{E}[S_T])^2}{(\mathrm{E}[S_T])^2}$.
- **Question**. Comment estime-t-on les $\alpha_T$ et $\beta_T$ ?
- Une pratique est d'utiliser la moyenne et la variance de l'échantillon de la dernière année.
  - Nous verrons pourquoi cela n'est pas toujours la bonne chose à faire

# Exemple

## Le modèle statique




Sample mean (May 17, 2005, to May 15, 2006) : 2 131.49 \$
Sample st. dev. (May 17, 2005, to May 15, 2006) : 345.01 \$
Sample variance (May 17, 2005, to May 15, 2006) : 119 032.4653

# Exemple

## Le modèle statique

$$\begin{aligned}
\beta_1^2 &= \ln \frac{\mathrm{Var}[S_1] + (\mathrm{E}[S_1])^2}{(\mathrm{E}[S_1])^2} \\
&\overset{?}{\cong} \ln \frac{119032.4653 + (2131.49)^2}{(2131.49)^2} = 0.0259
\end{aligned}$$

$$\beta_1 \overset{?}{\cong} \sqrt{\ln \frac{119032.4653 + (2131.49)^2}{(2131.49)^2}} = 0.1608$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \ln \frac{\mathrm{E}[S_1]}{S_0} - \frac{1}{2} \ln \frac{\mathrm{Var}[S_1] + (\mathrm{E}[S_1])^2}{(\mathrm{E}[S_1])^2} \\
&\overset{?}{\cong} \ln \frac{2131.49}{1722.25} - \frac{1}{2} \ln \frac{119032.4653 + (2131.49)^2}{(2131.49)^2} = 0.2003
\end{aligned}$$


Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Exemple

## Les modèles dynamiques

- Les modèles dynamique ont été estimés avec la méthode du maximum de vraisemblance.
- Notons que pour tous les modèles choisis, le prix au temps $T$ sera de loi log-normale. Ce sont les espérances et la variances qui varient.
  - Lorsque la dynamique choisie est $d\ln S_t = \kappa(\mu - \ln S_t)\,dt + \sigma dW_t$, le prix au temps $T$ satisfait l'équation

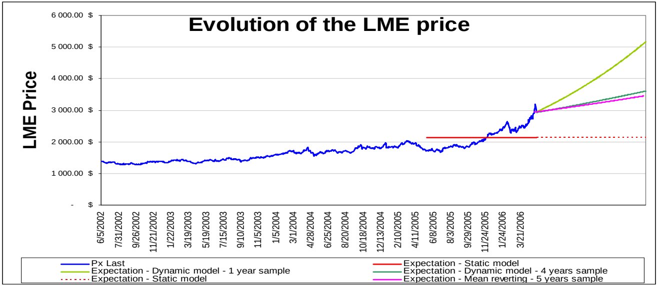
$$S_T = S_0 e^{\underbrace{(\ln S_0 - \mu)\left(e^{-\kappa T} - 1\right)}_{\alpha_T^*} + \underbrace{\sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\kappa T}}{2\kappa}}}_{\beta_T^*} Z}$$

# Exemple

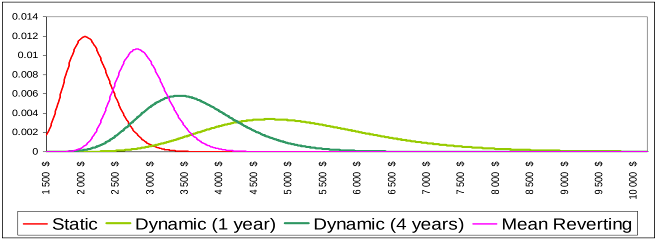
| | | |
|---|---|---|
| Static | $S_1 = S_0 e^{\alpha_1 + \beta_1 Z}$ | $\widehat{\alpha}_1 = 0.2003$<br>$\widehat{\beta}_1 = 0.1608$ |
| Dynamic<br>Sample: 1 year | $S_1 = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma Z}$ | $\widehat{\mu} - \frac{\widehat{\sigma}^2}{2} = 0.5330$<br>$\widehat{\sigma} = 0.2425$ |
| Dynamic<br>Sample: 4 years | $S_1 = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma Z}$ | $\widehat{\mu} - \frac{\widehat{\sigma}^2}{2} = 0.1882$<br>$\widehat{\sigma} = 0.1969$ |
| Dynamic<br>Mean-reverting | $S_1 = S_0 e^{\alpha_1^* + \beta_1^* Z}$ | $\alpha_1^* = -0.0216$<br>$\beta_1^* = 0.1325$ |


Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Exemple



Evolution of the LME price
LME Price
6 000.00 $
5 000.00 $
4 000.00 $
3 000.00 $
2 000.00 $
1 000.00 $
- $
6/5/2002
7/31/2002
9/26/2002
11/21/2002
1/22/2003
3/19/2003
5/19/2003
7/15/2003
9/10/2003
11/5/2003
1/5/2004
3/1/2004
4/28/2004
6/25/2004
8/20/2004
10/18/2004
12/13/2004
2/10/2005
4/11/2005
6/8/2005
8/3/2005
9/29/2005
11/24/2005
1/24/2006
3/21/2006
Px Last
Expectation - Dynamic model - 1 year sample
Expectation - Static model
Expectation - Static model
Expectation - Dynamic model - 4 years sample
Expectation - Mean reverting - 5 years sample

0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
1 500 $
2 000 $
2 500 $
3 000 $
3 500 $
4 000 $
4 500 $
5 000 $
5 500 $
6 000 $
6 500 $
7 000 $
7 500 $
8 000 $
8 500 $
9 000 $
9 500 $
10 000 $
Static
Dynamic (1 year)
Dynamic (4 years)
Mean Reverting

# Exemple

## Conclusion

- Même en ayant choisi une bonne distribution, le choix des paramètres produit des prévisions très différentes les unes des autres.
  - Le choix de la dynamique du modèle est important.
  - Le choix de la période d'échantillonnage est important.
  - Le choix des variables à modéliser (prix?, log prix?) est important.
- **Quel est le meilleur modèle?**
  - Cela dépend des données
  - L'art du statisticien est justement la construction des modèles et leur estimation. Attention aux apprentis sorciers!



Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# La calibration

1. Les données financières diffèrent des données usuelles en statistique du fait qu'il est possible d'observer d'autres données en rapport avec le modèle choisi.
2. Par exemple, nous n'observons pas seulement les rendements des actions d'une compagnie mais nous avons aussi des prix pour ses options.
3. Il est possible d'utiliser ces prix afin
   3.1 d'estimer certains des paramètres du modèle et
   3.2 de vérifier si le modèle est adéquat.

# La calibration I

## Un exemple

1. Dans le contexte de Black et Scholes, le titre sous-jacent est modélisé par un MBG :

$$dS_t = \mu S_t \ dt + \sigma S_t \ dW_t^P.$$

2. Avec le passage en monde neutre au risque,

$$dS_t = rS_t \ dt + \sigma S_t \ dW_t^Q$$

où $r$ est le taux sans risque.

3. Le prix au temps $t = 0$ d'une option d'achat d'échéance $T$ et de prix d'exercice $K$ est

$$P_0^{\text{modèle}} (T, K; \sigma, r) = S_0 N(d) - Ke^{-rT} N\left(d - \sigma\sqrt{T}\right)$$

où $d = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln S_0 - \ln K + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right)$ et $N(\bullet)$ est la fonction de répartition d'une $N(0,1)$.



Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# La calibration II

## Un exemple

4. On pourrait estimer $\sigma$ et $r$ en minimisant la distance entre les prix donnés par le modèle et les prix observés

$$D(\sigma, r) = \sum_i \left\| P_0^{\text{modèle}}(T_i, K_i; \sigma, r) - P_0^{\text{observés}}(T_i, K_i) \right\|$$


Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# La calibration III

## Un exemple

5. Il y a plusieurs façons de déterminer la distance entre les prix observés et théoriques.
   5.1 L'erreur absolue :
   $$\left| P_0^{\text{modèle}}\left(T_i, K_i; \sigma, r\right) - P_0^{\text{observés}}\left(T_i, K_i\right) \right|,$$
   5.2 L'erreur relative :
   $$\frac{\left| P_0^{\text{modèle}}\left(T_i, K_i; \sigma, r\right) - P_0^{\text{observés}}\left(T_i, K_i\right) \right|}{P_0^{\text{observés}}\left(T_i, K_i\right)},$$
   5.3 L'erreur au carré :
   $$\left( P_0^{\text{modèle}}\left(T_i, K_i; \sigma, r\right) - P_0^{\text{observés}}\left(T_i, K_i\right) \right)^2.$$
   5.4 etc.

Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# La calibration IV

## Un exemple

6. La volatilité implicite associée au modèle de Black et Scholes est un exemple de calibrage. Il faut chercher le $\sigma_{K,T}$ qui fait en sorte que le prix donné par le modèle et le prix observé concordent

$$P_0^{\text{modèle}}\left(T,K;\sigma_{K,T},r\right)=P_0^{\text{observé}}\left(T,K\right)$$

et est obtenu en résolvant l'équation

$$P_0^{\text{observé}}\left(T,K\right)=S_0N\left(d_{r,\sigma_{K,T}}\right)-Ke^{-rT}N\left(d_{r,\sigma_{K,T}}-\sigma_{K,T}\sqrt{T}\right).$$

où $d_{r,\sigma_{K,T}}=\dfrac{\ln S_0-\ln K+\left(r+\frac{\sigma_{K,T}^2}{2}\right)T}{\sigma_{K,T}\sqrt{T}}$.


Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

Introduction

Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# La calibration V

## Un exemple

7. Le prix d'une option d'achat à la monnaie et venant à échéance dans 3 mois est de 4.58 \$. Sachant que $S_0 = 100$, $r = 5\%$

$$
\begin{aligned}
4.58 &= 100\int_{-\infty}^{\frac{\ln 100 - \ln 100 + \left(0.05 + \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{4}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{4}}}} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&\quad -100e^{-0.05\times\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln 100 - \ln 100 + \left(0.05 + \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{4}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{4}}} - \sigma\sqrt{\frac{1}{4}}} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz.
\end{aligned}
$$

Solution: $\sigma = 0.198\,22$.

# La calibration VI

## Un exemple

8. Le prix d'une option d'achat à la monnaie et venant à échéance dans 6 mois est de 5.53 \$. Sachant que $S_0 = 100$, $r = 5\%$

$$
\begin{aligned}
5.53 &= 100 \int_{-\infty}^{\frac{\ln 100 - \ln 100 + \left(0.05 + \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{2}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{2}}}} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&\quad - 100 e^{-0.05 \times \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln 100 - \ln 100 + \left(0.05 + \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{2}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{2}}} - \sigma\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz.
\end{aligned}
$$

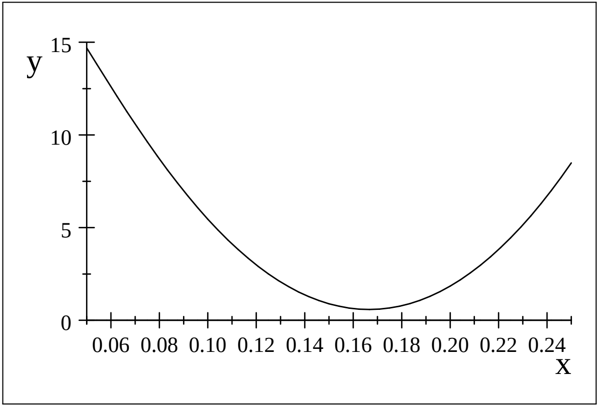
Solution: 0.150 11.

# La calibration VII

## Un exemple

9. Si nous avons plusieurs prix d'options,

$$\left(P_0^{\text{modèle}}\left(\frac{1}{2}, 100; \sigma, 5\%\right) - 5.53\right)^2 + \left(P_0^{\text{modèle}}\left(\frac{1}{4}, 100; \sigma, 5\%\right) - 4.58\right)^2$$






Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# La calibration I

## Avantages et inconvénients

1. Nous ne connaissons pas la distribution des estimés obtenus par la calibration. Il n'est donc pas possible de faire de l'inférence.
2. En utilisant les prix des produits dérivés, nous pouvons estimer les paramètres du modèle en monde neutre au risque mais il ne nous est pas possible d'estimer les paramètres qui sont seulement liés au modèle en probabilité objective.
3. En utilisant une série historique et une méthode d'estimation, nous allons chercher de l'information concernant le comportement passé de la variable. Par contre, l'information contenue dans les prix des produits dérivés reflètent les anticipations qu'ont les intervenants du comportement futur du titre sous-jacent.


Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# La calibration II

## Avantages et inconvénients

4. La fonction distance $D(\bullet)$ permet de mesurer (en partie) l'adéquation du modèle.
5. Dans l'exemple précédent, nous avons une solution analytique pour les prix des produits dérivés donnés par le modèle.
   - 5.1 Ceci n'est pas une condition nécessaire à l'utilisation du calibrage.
   - 5.2 Nous pouvons obtenir ces prix par la simulation de Monte Carlo et optimiser la fonction de distance $D(\bullet)$ numériquement.

Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Les corrélations I

## Le contexte

1. En pratique, nous sommes souvent en présence de modèles multivariés (plusieurs variables comme des prix, des taux de change, des taux d'intérêt, etc.).
2. Selon les modèles retenus, il est possible de déterminer la fonction de vraisemblance associée à la version multivariée du modèle.
3. Les difficultés rencontrées sont les suivantes :
   3.1 Les séries chronologiques constituant notre échantillon n'ont pas toute la même longueur ou la même fréquence.
   3.2 Il y a de nombreux paramètres et l'optimisation numérique devient complexe.

3.2.1 Une solution envisageable est une optimisation en plusieurs temps : (1) estimation des paramètres de chaque processus de façon univariée (à l'aide de la fonction de vraisemblance univariée) et (2) estimation des corrélations à l'aide de la fonction de vraisemblance multivariée en supposant les autres paramètres connus.

3.2.2 Cette façon de procéder ne maximise vraisemblablement pas la fonction de vraisemblance multivariée mais il est fort possible que la solution obtenue soit proche de l'optimum.

3.2.3 Il faut alors faire une étude par simulation afin de vérifier si l'algorithme proposé donne de bons estimés des paramètres.

3.2.4 Les estimations des écarts-types des estimateurs seront faussées (basées sur les dérivées secondes de la fonction de vraisemblance) car toute l'incertitude n'est pas prise en compte dans chacune des deux étapes.

# Les corrélations III

## Le contexte

3.3 La fonction de vraisemblance globale est possiblement non-convexe, impliquant que des algorithmes d'optimisation basés sur les gradients peuvent restés captifs d'un optimum local. Il faut donc envisager des méthodes d'optimisation plus sophistiquées.



Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Estimation des corrélations I

## Estimation sur les prix ou sur les rendements?

1. Une question souvent posée en pratique est de savoir si l'on doit estimer les corrélations entre deux actifs à partir des séries chronologiques des prix ou des rendements.
   1.1 Si le but visé est simplement une analyse descriptive des événements passés, l'utilisation des moyennes, des écarts-types et des corrélations échantillonnaux décrivent de façon raisonnable les niveaux, les dispersions ainsi que les corrélations entre les variables.
   1.2 Par contre, si le but visé est de prévoir le comportement futur des variables, il vaut mieux travailler avec des séries stationnaires ou, sinon, utiliser des modèles dynamiques qui prennent en compte l'autocorrélation des séries de données.

# Estimation des corrélations II

## Estimation sur les prix ou sur les rendements?

2. **Un exemple simple**.
   - 2.1 Supposons que nous observions une trajectoire $W_{t_t}, ..., W_{t_n}$ d'un mouvement brownien où $t_k = kh$.
   - 2.2 Qu'est-ce que la variance échantillonnale $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_{t_i}^2 - \overline{W}^2$ où $\overline{W} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_{t_i}$ permet d'estimer?
     - 2.2.1 La réponse est rien de ce qui peut ressembler à la variance d'un mouvement brownien puisque cette dernière varie au cours du temps.
     - 2.2.2 La variance échantillonnale permet d'estimer $\mathrm{Var}[X]$ lorsque l'échantillon est constitué de variables **indépendantes et identiquement distribuées** à $X$.

# Estimation des corrélations III

## Estimation sur les prix ou sur les rendements?

2.2.3 Dans notre exemple, il n'y a ni indépendance, ni conservation de la distribution :

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}\left[\overline{W}^2\right] \\
= \quad & \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}\left[W_{t_i}W_{t_j}\right] \\
= \quad & \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left[W_{t_i}^2\right]+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\mathrm{E}\left[W_{t_i}W_{t_j}\right] \\
= \quad & \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}t_i+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}t_i \\
= \quad & \frac{h}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{2h}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}i \\
= \quad & \frac{h}{2}\frac{n+1}{n}+\frac{h}{3}\frac{(n-1)(n+1)}{n}
\end{aligned}
$$

2.2.4 $\mathrm{E}\left[S^2\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left[W_{t_i}^2\right]-\mathrm{E}\left[\overline{W}^2\right]=\frac{5}{6}h\frac{(n-1)(n+1)}{n}$

# Estimation des corrélations IV

## Estimation sur les prix ou sur les rendements?

3. Il en va de même pour la covariance. Comme la corrélation échantillonnale est fonction de la covariance échantillonnale et des écarts-type échantillonnaux, cette dernière a un pouvoir prévisionnel que si l'échantillon est constitué de vecteurs aléatoires iid.
4. Or, dans plusieurs modèles couramment utilisés, le processus de rendement est formé de v.a. iid.
   4.1 Cela permet d'utiliser les séries de rendements pour estimer une corrélation (supposée constante au cours du temps) entre les rendements de deux titres.
   4.2 Il faut alors simuler les rendements avec la corrélation estimée et transformer les rendements simulés en prix.



Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Estimation des corrélations V

## Estimation sur les prix ou sur les rendements?

5. Il en va de même pour la covariance. Comme la corrélation échantillonnale est fonction de la covariance échantillonnale et des écarts-types échantillonnaux, cette dernière a un sens que si l'échantillon est constitué de v.a. iid .
6. Or, dans plusieurs modèles couramment utilisés, le processus de rendement est formé de v.a. iid.
   6.1 Cela permet d'utiliser les séries de rendements pour estimer une corrélation (supposée constante au cours du temps) entre les rendements de deux titres.
   6.2 Il faut alors simuler les rendements avec la corrélation estimée et transformer les rendements simulés en prix.



Introduction

Maximum de vraisemblance
- Mouvement brownien arithmétique (MBA)
- Mouvement brownien géométrique (MBG)
- Processus de retour vers la moyenne
- Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves
- Estimation ponctuelle
- Mouvement brownien
- Précision
- Maximum de vraisemblance
- Processus de retour vers la moyenne
- Méthode des moindres carrés

# NGARCH

## Le processus

Rappelons que

$$
\begin{aligned}
\ln S_t &= \ln S_{t-1} + r + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \sqrt{h_t}Z_t \\
h_{t+1} &= \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t \left(Z_t - \theta\right)^2 .
\end{aligned}
$$



Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# NGARCH

En isolant $Z_t$ dans l'équation

$$\ln S_t = \ln S_{t-1} + r + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \sqrt{h_t}Z_t,$$

nous trouvons

$$Z_t = \frac{\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} - r - \lambda\sqrt{h_t} + \frac{1}{2}h_t}{\sqrt{h_t}},$$

et

$$\begin{aligned}
h_{t+1} &= \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t \left( \frac{\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} - r - \lambda\sqrt{h_t} + \frac{1}{2}h_t}{\sqrt{h_t}} - \theta \right)^2 \\
&= \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 \left( \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} - r - \lambda\sqrt{h_t} + \frac{1}{2}h_t - \theta\sqrt{h_t} \right)^2 \\
&= \text{fonction}\left(\ln S_t, \ln S_{t-1}, h_t\right).
\end{aligned}$$

# NGARCH

## Fonction de densité conditionnelle

Puisque $\ln S_t = \ln S_{t-1} + r + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \sqrt{h_t}Z_t$, alors

$$\begin{aligned} & f_{\ln S_t | \ln S_{t-1}, h_t}\left(s_t, s_{t-1}\right) \\ = \quad & \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(\ln \frac{s_t}{s_{t-1}} - r - \lambda\sqrt{h_t} + \frac{1}{2}h_t\right)^2}{h_t}\right) \end{aligned}$$

et $h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2\left(\ln \frac{s_t}{s_{t-1}} - r - \lambda\sqrt{h_t} + \frac{1}{2}h_t - \theta\sqrt{h_t}\right)^2$



Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# NGARCH

## La fonction de vraisemblance

Utilisant le fait que $\{(S_t, h_{t+1}) : t \in \mathbb{N}\}$ est markovien,

$$\begin{aligned}
& f_{\ln S_0,\ldots,\ln S_t} \\
= & \prod_{i=1}^{n} f_{\ln S_i|\ln S_{i-1},h_i}\left(s_i, s_{i-1}\right) \\
= & \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi h_i}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(\ln \frac{s_i}{s_{i-1}} - r - \lambda\sqrt{h_i} + \frac{1}{2}h_i\right)^2}{h_i}\right)
\end{aligned}$$

où $h_{i+1} = \beta_0 + \beta_1 h_i + \beta_2 \left(\ln \frac{s_i}{s_{i-1}} - r - \lambda\sqrt{h_i} + \frac{1}{2}h_i - \theta\sqrt{h_i}\right)^2$.




Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Mouvement brownien I

## Estimateur ponctuel

**Résultat**. Les estimateurs du maximum de vraisemblance pour $\mu$ et $\sigma$ sont respectivement

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \frac{x_n - x_0}{nh}$$

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2 - \widehat{\mu}^2 h}.$$

**Preuve**. Puisque

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln f}{\partial \mu}\left(x_0, \ldots, x_n; \mu, \sigma^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - x_{i-1} - \mu h}{\sigma^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - x_{i-1}}{\sigma^2} - n\frac{\mu h}{\sigma^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \sigma^2}\left(x_0, \ldots, x_n; \mu, \sigma^2\right) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{(x_i - x_{i-1} - \mu h)^2}{(\sigma^2)^2 h}.$$

# Mouvement brownien II

## Estimateur ponctuel

alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial \mu}\left(x_0,\ldots,x_n;\widehat{\mu},\widehat{\sigma}^2\right) &= 0 \\ \frac{\partial \ln f_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial \sigma^2}\left(x_0,\ldots,x_n;\widehat{\mu},\widehat{\sigma}^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} \widehat{\mu} &= \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\ \widehat{\sigma}^2 &= \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1} - \widehat{\mu}h)^2 \\ &= \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2 - \widehat{\mu}^2 h \end{aligned}$$

# Mouvement brownien I

## Mesure de la précision de nos estimations

**Résultat**.

$$\widehat{\mu} \text{ est approximativement de loi } N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{nh}\right)$$

$$\widehat{\sigma} \text{ est approximativement de loi } N\left(\sigma; \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

pourvu que le nombre $n$ de données contenues dans la série chronologique servant à l'estimation soit assez grand.

**Preuve**.

1. Sous certaines hypothèses de régularité, l'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement gaussien.
2. La matrice de variances-covariances des estimateurs est elle-même estimée par $\widehat{\Sigma} = \left( \frac{-1}{\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \ln f(x_1,\ldots,x_n;\boldsymbol{\theta})\big|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}}} \right)$.
3. Nous devons donc calculer les dérivées secondes :

Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Mouvement brownien II

## Mesure de la précision de nos estimations

3.1 $\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \mu^2}\left(x_0, \ldots, x_n; \mu, \sigma^2\right) = -\frac{nh}{\sigma^2}$

3.2 $\frac{\partial^2 \ln f}{(\partial \sigma^2)^2}\left(x_0, \ldots, x_n; \mu, \sigma^2\right) =$

$\frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1} - \mu h)^2}{(\sigma^2)^3 h} =$

$-\frac{n}{2(\sigma^2)^2} + n\frac{\sigma^2 - \widehat{\sigma}^2}{(\sigma^2)^3} - \frac{nh}{(\sigma^2)^3}(\mu - \widehat{\mu})^2$



Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Mouvement brownien III

## Mesure de la précision de nos estimations

4. Ainsi, les estimateurs des variances de nos estimateurs sont

   4.1 $$\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{\mu}) = \frac{1}{-\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \mu^2}(x_0,\ldots,x_n;\mu,\sigma^2)\Big|_{\substack{\mu=\widehat{\mu}\\ \sigma^2=\widehat{\sigma}^2}}} = \frac{\widehat{\sigma}^2}{nh}$$

   4.2 $$\widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{\sigma}^2\right) = \frac{1}{-\frac{\partial^2 \ln f}{(\partial \sigma^2)^2}(x_0,\ldots,x_n;\mu,\sigma^2)\Big|_{\substack{\mu=\widehat{\mu}\\ \sigma^2=\widehat{\sigma}^2}}} = \frac{2\widehat{\sigma}^2}{n}.$$

5. Puisque $\alpha = g(\theta)$ implique que l'estimation de la variance de l'estimateur $\widehat{\alpha}$ de $\alpha$ est $\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{\alpha}) = g'\left(\widehat{\theta}\right) \widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{\theta}\right)$, la variance de $\widehat{\sigma}$ est estimée par $$\frac{\left(\frac{\partial}{\partial \sigma^2}\sqrt{\sigma^2}\right)^2}{-\frac{\partial^2 \ln f_{X_1,\ldots,X_n}}{(\partial \sigma^2)^2}(x_0,\ldots,x_n;\mu,\sigma^2)\Big|_{\substack{\mu=\widehat{\mu}\\ \sigma^2=\widehat{\sigma}^2}}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\widehat{\sigma}^2}\right)^2}{\frac{n}{2(\widehat{\sigma}^2)^2}} = \frac{1}{2}\frac{\widehat{\sigma}^2}{n}.$$


Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne I

## Preuve

La fonction de densité conjointe ainsi que son logarithme sont respectivement

$$
\begin{aligned}
& f\left(r_0, \ldots, r_{nh}; \kappa, \theta, \sigma^2\right) \\
= \quad & \prod_{i=1}^{n} f\left(r_{ih} \middle| r_{(i-1)h}\right) \\
= \quad & \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2 h\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(r_{ih} - r_{(i-1)h} - \kappa\left(\theta - r_{(i-1)h}\right)h\right)^2}{\sigma^2 h}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \ln f\left(r_0, \ldots, r_{nh}; \kappa, \theta, \sigma^2\right) \\
= \quad & -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2 h\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\left(r_{ih} - r_{(i-1)h} - \kappa\left(\theta - r_{(i-1)h}\right)h\right)^2}{\sigma^2 h}
\end{aligned}
$$

# Processus de retour vers la moyenne II

## Preuve

Les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\left(r_0, ..., r_{nh}; \kappa, \theta, \sigma^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\kappa\left(r_{ih} - r_{(i-1)h} - \kappa\left(\theta - r_{(i-1)h}\right)h\right)}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \kappa}\left(r_0, ..., r_{nh}; \kappa, \theta, \sigma^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\theta - r_{(i-1)h}\right)\left(r_{ih} - r_{(i-1)h} - \kappa\left(\theta - r_{(i-1)h}\right)h\right)}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \sigma^2}\left(r_0, ..., r_{nh}; \kappa, \theta, \sigma^2\right) = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\left(r_{ih} - r_{(i-1)h} - \kappa\left(\theta - r_{(i-1)h}\right)h\right)^2}{\left(\sigma^2\right)^2 h}$$



Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne III

## Preuve

En posant

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\left(r_0, \dots, r_{nh}; \widehat{\kappa}, \widehat{\theta}, \widehat{\sigma}^2\right) &= 0 \\
\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\left(r_0, \dots, r_{nh}; \widehat{\kappa}, \widehat{\theta}, \widehat{\sigma}^2\right) &= 0 \\
\frac{\partial \ln f}{\partial \sigma^2}\left(r_0, \dots, r_{nh}; \widehat{\kappa}, \widehat{\theta}, \widehat{\sigma}^2\right) &= 0
\end{aligned}$$

nous trouverons les estimateurs $\widehat{\kappa}, \widehat{\theta}$ et $\widehat{\sigma}^2$.

# Processus de retour vers la moyenne IV

## Preuve

En effet, posons

$$S_r = \sum_{i=1}^n r_{(i-1)h} \qquad D_r = \sum_{i=1}^n \left( r_{ih} - r_{(i-1)h} \right)$$

$$C_r = \sum_{i=1}^n r_{(i-1)h}^2 \qquad V_r = \sum_{i=1}^n r_{(i-1)h} \left( r_{ih} - r_{(i-1)h} \right)$$

De la première équation, nous déduisons que

$$\sum_{i=1}^{n} \left( r_{ih} - r_{(i-1)h} - \widehat{\kappa} \left( \widehat{\theta} - r_{(i-1)h} \right) h \right) = 0.$$


Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne V

## Preuve

En isolant $\widehat{\kappa}$ dans les deux premières équations (utilisant la dernière équation pour la deuxième expression) et $\widehat{\sigma}^2$ dans la troisième, nous obtenons

$$\widehat{\kappa} = \frac{1}{h} \frac{\sum_{i=1}^{n} \left( r_{ih} - r_{(i-1)h} \right)}{n\widehat{\theta} - \sum_{i=1}^{n} r_{(i-1)h}} = \frac{1}{h} \frac{D_r}{n\widehat{\theta} - S_r}$$

$$\widehat{\kappa} = \frac{1}{h} \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{(i-1)h} \left( r_{ih} - r_{(i-1)h} \right)}{\widehat{\theta} \sum_{i=1}^{n} r_{(i-1)h} - \sum_{i=1}^{n} r_{(i-1)h}^2} = \frac{1}{h} \frac{V_r}{\widehat{\theta} S_r - C_r}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} \left( r_{ih} - r_{(i-1)h} - \widehat{\kappa} \left( \widehat{\theta} - r_{(i-1)h} \right) h \right)^2 .$$

Parce que les membres de droite des deux premières équations sont égaux, nous trouvons

$$\widehat{\theta} = \frac{S_r V_r - C_r D_r}{n V_r - S_r D_r}.$$




Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne VI

## Preuve

**Les dérivées secondes nécessaires à l'estimation de la variance :**

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\left(r_0, \ldots, r_{nh}; \kappa, \theta, \sigma^2\right) = -\frac{nh\kappa^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \kappa^2}\left(r_0, \ldots, r_{nh}; \kappa, \theta, \sigma^2\right) = -\frac{h}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\theta - r_{(i-1)h}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \left(\sigma^2\right)^2}\left(r_0, \ldots, r_{nh}; \kappa, \theta, \sigma^2\right) = \frac{n}{2}\frac{1}{\left(\sigma^2\right)^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(r_{ih} - r_{(i-1)h} - \kappa\left(\theta - r_{(i-1)h}\right)h\right)^2}{\left(\sigma^2\right)^3 h}$$

Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne VII

## Preuve

Les variances de nos estimateurs $\widehat{\theta}, \widehat{\kappa}, \widehat{\sigma}^2$ et $\widehat{\sigma}$ sont estimées respectivement par

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\theta}\right)} &= \frac{\widehat{\sigma}^2}{nh\widehat{\kappa}^2}, \\
\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\kappa}\right)} &= \frac{\widehat{\sigma}^2}{h\sum_{i=1}^n \left(\widehat{\theta} - r_{(i-1)h}\right)^2}, \\
\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\sigma}^2\right)} &= \frac{2h\left(\widehat{\sigma}^2\right)^3}{2\sum_{i=1}^n \left(r_{ih} - r_{(i-1)h} - \widehat{\kappa}\left(\widehat{\theta} - r_{(i-1)h}\right)h\right)^2 - nh\widehat{\sigma}^2}, \\
\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\sigma}\right)} &= \frac{1}{4}\frac{1}{\widehat{\sigma}^2}\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\sigma}^2\right)}.
\end{aligned}
$$



Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne I

## Estimateurs des moindres carrés

1. En isolant les $Z_i$ dans le processus original, il vient

$$Z_i = \frac{r_{(i+1)h} - r_{ih} - \kappa\left(\theta - r_{ih}\right)h}{\sigma h^{\frac{1}{2}}}.$$

2. La somme des erreurs au carré est une fonction des paramètres du modèle

$$Q\left(\kappa, \theta\right) = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r_{(i+1)h} - r_{ih} - \kappa\left(\theta - r_{ih}\right)h}{\sigma h^{\frac{1}{2}}}\right)^2.$$

# Processus de retour vers la moyenne II

## Estimateurs des moindres carrés

3. Minimisons la fonction $Q(\kappa, \theta)$ :

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = -2\frac{\kappa}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{(i+1)h} - r_{ih} - \kappa\left(\theta - r_{ih}\right)h\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \kappa} = -2\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{(i+1)h} - r_{ih} - \kappa\left(\theta - r_{ih}\right)h\right)\left(\theta - r_{ih}\right)$$

# Processus de retour vers la moyenne III

## Estimateurs des moindres carrés

4. Solutionnons le système

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta}\left(\widetilde{\kappa},\widetilde{\theta}\right)=0 \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial \kappa}\left(\widetilde{\kappa},\widetilde{\theta}\right)=0$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{(i+1)h}-r_{ih}-\widetilde{\kappa}\left(\widetilde{\theta}-r_{ih}\right)h\right) &= 0,\\ \sum_{i=1}^{n}\left(r_{(i+1)h}-r_{ih}-\widetilde{\kappa}\left(\widetilde{\theta}-r_{ih}\right)h\right)\left(\widetilde{\theta}-r_{ih}\right) &= 0.\end{aligned}$$

# Processus de retour vers la moyenne IV

## Estimateurs des moindres carrés

4.1 Ainsi, de la première équation, nous obtenons

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_{(i+1)h}-r_{ih}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\widetilde{\theta}-r_{ih}\right)}=\widetilde{\kappa}h.$$

4.2 En substituant la première équation dans la deuxième, nous avons

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_{(i+1)h}-r_{ih}\right)r_{ih}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\widetilde{\theta}-r_{ih}\right)r_{ih}}=\widetilde{\kappa}h.$$


Estimation

G. Gauthier

Introduction

Maximum de vraisemblance

Mouvement brownien arithmétique (MBA)

Mouvement brownien géométrique (MBG)

Processus de retour vers la moyenne

Estimateur des moindres carrés

Un exemple

La calibration

L'estimation des corrélations

Processus GARCH

Preuves

Estimation ponctuelle

Mouvement brownien

Précision

Maximum de vraisemblance

Processus de retour vers la moyenne

Méthode des moindres carrés

# Processus de retour vers la moyenne V

## Estimateurs des moindres carrés

4.3 Mais,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_{(i+1)h}-r_{ih}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\widetilde{\theta}-r_{ih}\right)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_{(i+1)h}-r_{ih}\right)r_{ih}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\widetilde{\theta}-r_{ih}\right)r_{ih}}$$

si et seulement si

$$\widetilde{\theta}=\frac{C_r D_r - S_r V_r}{S_r D_r - n V_r}$$

4.4 Finalement,

$$\widetilde{\kappa}=\frac{1}{h}\frac{D_r}{n\widetilde{\theta}-S_r}.$$

5. Il faudrait montrer que les résultats obtenus minimisent bien la fonction $Q$ (calcul des dérivées secondes)
6. Ces estimateurs des moindres carrés sont les mêmes que les estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance.



Introduction
Maximum de vraisemblance
Mouvement brownien arithmétique (MBA)
Mouvement brownien géométrique (MBG)
Processus de retour vers la moyenne
Estimateur des moindres carrés
Un exemple
La calibration
L'estimation des corrélations
Processus GARCH
Preuves
Estimation ponctuelle
Mouvement brownien
Précision
Maximum de vraisemblance
Processus de retour vers la moyenne
Méthode des moindres carrés