Simulation des processus de diffusion - les méthodes de discrétisation du temps.

6-601-76 Techniques de simulation

Geneviève Gauthier

HEC Montréal

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Référence

Ces notes de cours sont fortement inspirées de

1. P. Glasserman : *Monte Carlo Methods in Financial Engineering* (2004), chapitre 6.
2. P. Kloeden, E. Platen et H. Schurz, *Numerical solutions of SDE through computer experiments*, chapitres 3 et 4.

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

Introduction

- La valeur d'un actif financier est souvent modélisée à l'aide d'une équation différentielle stochastique.
- Idéalement, cette équation possède une solution analytique que l'on peut simuler avec son exacte distribution.
- Le plus souvent, une telle solution est inconnue. On doit donc recourir à des approximations.
- Notre but est d'examiner quelques approximations numériques et de s'interroger sur leur précision ainsi que sur leur rythme de convergence.

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Les processus de diffusion
Rappel

$$d\mathbf{X}(t) = \underbrace{\underbrace{\mathbf{b}(\mathbf{X}(t), t)}_{d\times 1}}_{\text{dérive}} dt + \underbrace{\underbrace{\mathbf{a}(\mathbf{X}(t), t)}_{d\times m}}_{\text{diffusion}} \underbrace{d\mathbf{W}(t)}_{m\times 1}$$

Il y a des conditions de régularité sur les fonctions $\mathbf{b} : \Re^d \times [0,\infty) \to \Re^d$ et $\mathbf{a} : \Re^d \times [0,\infty) \to \Re^d \times \Re^m$ afin que le système d'équations différentielles stochastiques admette une solution. $\mathbf{W}$ est un mouvement brownien standard en dimension m dont les composantes sont indépendantes.

Sous forme intégrale, le système peut s'écrire sous les formes :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{X}(0) + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(u), u)\, du + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{X}(u), u)\, d\mathbf{W}(u) \\ X_i(t) &= X_i(0) + \int_0^t b_i(\mathbf{X}(u), u)\, du + \sum_{j=1}^m \int_0^t a_{ij}(\mathbf{X}(u), u)\, dW_j(u) \end{aligned}$$

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

L'approximation d'Euler-Maruyama

Justification

Soit $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$.

$$\begin{aligned}
& X_i(t_{k+1}) \\
= \; & X_i(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_i(\mathbf{X}(u), u)\, du + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_{ij}(\mathbf{X}(u), u)\, dW_j(u) \\
\cong \; & X_i(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_i(\mathbf{X}(t_k), t_k)\, du + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_{ij}(\mathbf{X}(t_k), t_k)\, dW_j(u)
\end{aligned}$$

pourvu que $t_{k+1} - t_k$ soit petit. Cela revient à supposer que b_i et a_{ij} varient peu au cours d'un petit intervalle de temps.

$$\begin{aligned}
= \; & X_i(t_k) + b_i(\mathbf{X}(t_k), t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} du + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\mathbf{X}(t_k), t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_j(u) \\
= \; & X_i(t_k) + b_i(\mathbf{X}(t_k), t_k)(t_{k+1} - t_k) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\mathbf{X}(t_k), t_k) \underbrace{\left(W_j(t_{k+1}) - W_j(t_k)\right)}_{\overset{\text{Loi}}{=} \sqrt{t_{k+1} - t_k}\, Z_{k,j}}
\end{aligned}$$

où $\{Z_{k,j} : j \in \{1, 2, ..., m\}, \ k \in \{1, 2, ...\}\}$ sont iid $N(0, 1)$.

L'approximation d'Euler-Maruyama

Définition

Soit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

L'approximation d'Euler du processus

$$
\begin{aligned}
X_i\left(t_{k+1}\right) &= X_i\left(t_k\right) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b_i\left(\mathbf{X}\left(u\right), u\right) du \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_{ij}\left(\mathbf{X}\left(u\right), u\right) dW_j\left(u\right)
\end{aligned}
$$

est

$$
\begin{aligned}
\widehat{X}_i\left(t_{k+1}\right) &= \widehat{X}_i\left(t_k\right) + b_i\left(\widehat{\mathbf{X}}\left(t_k\right), t_k\right)\left(t_{k+1} - t_k\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\left(\widehat{\mathbf{X}}\left(t_k\right), t_k\right)\left(W_j\left(t_{k+1}\right) - W_j\left(t_k\right)\right).
\end{aligned}
$$

Nous utilisons la notation $\widehat{\mathbf{X}}$ pour clairement illustrer que c'est une approximation du processus original.

L'approximation d'Euler-Maruyama

Discrétisation constante

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Dans ce qui suit, nous nous attardons au cas où les pas de temps sont tous de même longueur h.

Ainsi, lorsque $t_n = nh$, alors l'approximation d'Euler devient

$$\begin{aligned}\widehat{X}_i(t_{k+1}) &= \widehat{X}_i(t_k) + b_i\left(\widehat{\mathbf{X}}(t_k), t_k\right)h \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\left(\widehat{\mathbf{X}}(t_k), t_k\right)\underbrace{\left(W_j(t_{k+1}) - W_j(t_k)\right)}_{\overset{\text{Loi}}{=}\sqrt{h}Z_{k,j}}.\end{aligned}$$

où $\{Z_{k,j} : j \in \{1, 2, ..., m\}, k \in \{1, 2, ...\}\}$ sont iid $N(0, 1)$.

L'approximation d'Euler-Maruyama I

Exemple

- Dans un premier temps, nous considérons un exemple simple pour bien comprendre les enjeux de cette discrétisation du temps.
- La longueur du pas de temps est constante, c'est-à-dire que $t_n = nh$.

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

L'approximation d'Euler-Maruyama II

Exemple

- Considérons le mouvement brownien géométrique en dimension 1 :

$$\begin{aligned} X(t_{k+1}) &= X(t_k) \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h + \sigma \left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)\right] \\ &= X(t_k) \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h + \sigma \sqrt{h} Z_k\right]. \end{aligned}$$

  où $Z_1, Z_2, \ldots$ sont des v.a. iid $N(0,1)$.

- La forme intégrale de l'EDS caractérisant le MBG est

$$X(t_{k+1}) = X(t_k) + \mu \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(u)\, du + \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(u)\, dW(u).$$

  L'approximation d'Euler est

$$\begin{aligned} &\widehat{X}(t_{k+1}) \\ =\; &\widehat{X}(t_k) + \mu \widehat{X}(t_k) h + \sigma \widehat{X}(t_k) \left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right) \\ =\; &\widehat{X}(t_k) \left[1 + \mu h + \sigma \sqrt{h} Z_k\right]. \end{aligned}$$

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

L'approximation d'Euler-Maruyama III

Exemple

- **Question** : à quel point cette approximation est-elle proche du processus original?

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

L'approximation d'Euler-Maruyama IV

Exemple

- Notons que le développement en série de MacLaurin-Taylor de $\exp(x)$ autour de $x = 0$ est

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

pour un certain ξ compris entre 0 et x.

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

L'approximation d'Euler-Maruyama V

Exemple

- Ainsi, en appliquant ce développement à la solution forte, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
& X\left(t_{k+1}\right) \\
= \quad & X\left(t_k\right) \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h + \sigma\sqrt{h} Z_k\right] \\
= \quad & X\left(t_k\right) \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h\right] \exp\left[\sigma\sqrt{h} Z_k\right] \\
= \quad & X\left(t_k\right) \left[1 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h + O\left(h^2\right)\right] \left[1 + \sigma\sqrt{h} Z_k + \frac{\sigma^2}{2} h Z_k^2 + O_P\left(h^{\frac{3}{2}}\right)\right] \\
= \quad & X\left(t_k\right) \left[1 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) h + \sigma\sqrt{h} Z_k + \frac{\sigma^2}{2} h Z_k^2 + O_P\left(h^{\frac{3}{2}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

  - Une fonction g est $O\left(h^n\right)$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sup_{|h|<\varepsilon} \frac{g(h)}{h^n} < \infty$.

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

L'approximation d'Euler-Maruyama VI

Exemple

- Ainsi

$$\begin{aligned} & X\left(t_{k+1}\right)-\widehat{X}\left(t_{k+1}\right) \\ = \; & X\left(t_k\right)\left[1+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right) h+\sigma \sqrt{h} Z_k+\frac{\sigma^2}{2} h Z_k^2+O_P\left(h^{\frac{3}{2}}\right)\right] \\ & -\widehat{X}\left(t_k\right)\left[1+\mu h+\sigma \sqrt{h} Z_k\right] \\ = \; & \left(X\left(t_k\right)-\widehat{X}\left(t_k\right)\right)\left[1+\mu h+\sigma \sqrt{h} Z_k\right] \\ & +X\left(t_k\right)\left[\frac{\sigma^2}{2} h\left(Z_k^2-1\right)+O_P\left(h^{\frac{3}{2}}\right)\right] \end{aligned}$$

- Si l'approximation a le même point initial que le processus original, $X\left(t_k\right)=\widehat{X}\left(t_k\right)$, alors l'erreur d'approximation est de l'ordre de h.
  - Il faudra être plus précis concernant ce point une fois que l'on aura choisi les mesures d'erreur.
- Si $X\left(t_k\right) \neq \widehat{X}\left(t_k\right)$ alors, il y aura une deuxième source d'erreur liée aux approximations successives.

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

Mesurer l'erreur de discrétisation

Avant d'aller plus loin, il nous faut définir comment nous allons mesurer les erreurs de discrétisation.
Il y a deux grandes familles de mesures

1. Celles qui considèrent la proximité des trajectoires (convergence forte).
2. Celles qui considèrent la proximité des distributions (convergence faible).

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Mesurer l'erreur de discrétisation

Notation

Supposons que $\widehat{\mathbf{X}}(0)$, $\widehat{\mathbf{X}}(h)$, $\widehat{\mathbf{X}}(2h)$ ..., $\widehat{\mathbf{X}}(nh)$ représente une approximation en temps discret d'un processus en temps continu $\{\mathbf{X}(t) : 0 \leq t \leq T\}$.

Posons $n = \lfloor T/h \rfloor$

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Mesurer l'erreur de discrétisation

Proximité des trajectoires

Notons que pour tout vecteur aléatoire $\mathbf{Y}$, $\mathrm{E}\left[\|\mathbf{Y}\|\right] = 0$ implique que $\|\mathbf{Y}\| = 0$ presque-sûrement, c'est-à-dire que $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ presque sûrement.

Voici quelques critères typiques mesurant la convergence forte :

1. $\mathrm{E}\left[\left\|\widehat{\mathbf{X}}(nh) - \mathbf{X}(T)\right\|\right]$
2. $\mathrm{E}\left[\left\|\widehat{\mathbf{X}}(nh) - \mathbf{X}(T)\right\|^2\right]$
3. $\mathrm{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\widehat{\mathbf{X}}\left(\left\lfloor \frac{t}{h}\right\rfloor h\right) - \mathbf{X}(t)\right\|^2\right]$

où $\|\bullet\|$ est une norme.

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Mesurer l'erreur de discrétisation

Proximité des distributions

Pour s'attaquer à la proximité des distributions, il suffit de s'assurer que

$$\left|\mathrm{E}\left[f\left(\widehat{\mathbf{X}}\left(nh\right)\right)-f\left(\mathbf{X}\left(T\right)\right)\right]\right|$$

est "relativement petit" pour toute une classe de fonctions $f:\Re^d\to\Re$ satisfaisant certaines conditions de régularités.

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Comparer les méthodes de discrétisation

La vitesse convergence

- Même une fois le critère de convergence choisi, il est rarement possible d'affirmer qu'une méthode de discrétisation a des erreurs de discrétisation plus petites qu'une autre.
- Pour cette raison, les diverses méthodes de discrétisation sont comparées selon leur performance asymptotique lorsque la longueur h du pas de temps tend vers zéro.
- Nous allons donc comparer les vitesses de convergence.

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

La vitesse de convergence I

Définitions

- La méthode de discrétisation $\widehat{\mathbf{X}}$ a une vitesse de convergence forte $\beta > 0$ s'il existe une constante c telle que
$$\mathrm{E}\left[\left\|\widehat{\mathbf{X}}(nh) - \mathbf{X}(T)\right\|\right] \leq ch^{\beta}$$
pour tout h suffisamment petit.

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

La vitesse de convergence II

Définitions

- La méthode de discrétisation $\widehat{\mathbf{X}}$ a une vitesse de convergence faible $\beta > 0$ si pour toute fonction $f \in C_P^{2\beta+2}$, il existe une constante c_f telle que

$$\left| \mathrm{E}\left[f\left(\widehat{\mathbf{X}}\left(nh \right) \right) - f\left(\mathbf{X}\left(T \right) \right) \right] \right| \leq c_f h^{\beta}$$

pour tout h suffisamment petit.

  - L'ensemble $C_P^{2\beta+2}$ est formé de toutes les fonctions $f : \Re^d \rightarrow \Re$ dont les dérivées d'ordre $0, 1, ..., 2\beta + 2$ sont bornées de façon polynomiale.
  - Une fonction $g : \Re^d \rightarrow \Re$ est bornée de façon polynomiale s'il existe des constantes k et q pour lesquelles

$$\left| g\left(\mathbf{x} \right) \right| \leq k \left(1 + \left\| \mathbf{x} \right\|^q \right) \ \forall \mathbf{x} \in \Re^d.$$

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

La vitesse de convergence III

Définitions

- Dans les deux cas (fort et faible), un β plus élevé implique une vitesse de convergence plus rapide.
- Pour une méthode de discrétisation donnée, la vitesse de convergence forte peut être différente de la vitesse de convergence faible.

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

Critère de convergence

Quel critère choisir?

1. Lorsque l'on veut tarifer une option de type européenne standard, c'est-à-dire que nous voulons estimer $\mathrm{E}^Q\left[g\left(\mathbf{X}_T\right)\right]$ où $g\left(\mathbf{X}_T\right)$ est le paiement actualisé de l'option versé au temps T, alors il nous suffit d'avoir la convergence faible.
2. Lorsque l'option dépend de la trajectoire (comme les options à barrière, par exemple), alors il nous faudra une convergence sur toute la trajectoire (convergence forte).

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Cas univarié

Afin de préciser ces concepts sans trébucher sur la notation, nous allons nous restreindre au cas univarié

$$X\left(t\right)=X\left(0\right)+\int_{0}^{t}b\left(X\left(u\right),u\right)du+\int_{0}^{t}a\left(X\left(u\right),u\right)dW\left(u\right)$$

ainsi qu'à un pas de discrétisation de longueur constante h, c'est-à-dire que $t_n=nh$.

Les concepts qui seront utilisés restent essentiellement les mêmes dans le cas multivarié.

L'approximation d'Euler-Maruyama

Interpolation

Rappelons que lorsque la longueur du pas de temps est h, $t_k = kh$ et

$$\widehat{X}(t_{k+1}) = \widehat{X}(t_k) + b\left(\widehat{X}(t_k), t_k\right) h + a\left(\widehat{X}(t_k), t_k\right) \sqrt{h} Z_k$$

où $Z_1, Z_2, \ldots$ est une suite de v.a. iid $N(0,1)$.

Il faut choisir comment est approximé le processus entre les t_k. Ceci peut être important lors de la tarification de produits dérivés qui dépendent de toute la trajectoire de l'actif sous-jacent. Voici deux choix :

1. Constant par morceau : $\widehat{X}(t) = \widehat{X}(t_k)$ pour tout $t_{k-1} \leq t < t_{k+1}$.
2. Interpolation linéaire : $\widehat{X}(t) = \widehat{X}(t_k) + \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\left(\widehat{X}(t_{k+1}) - \widehat{X}(t_k)\right)$ pour tout $t_{k-1} \leq t < t_{k+1}$.

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

L'approximation d'Euler-Maruyama

Vitesse de convergence

- Il n'est pas aisé de démontrer quelle est la vitesse de convergence d'une méthode de discrétisation lorsque le processus de diffusion original reste sous une forme très générale. Il y a souvent des contraintes imposées sur les coefficients de dérive et de diffusion $b(\bullet,\bullet)$ et $a(\bullet,\bullet)$.
- Sous certaines conditions (énoncées dans Glasserman), l'approximation d'Euler a $\beta_{\text{fort}} = \frac{1}{2}$ et $\beta_{\text{faible}} = 1$.
- **Mise en garde**. La convergence faible est souvent établie en mesurant $\mathrm{E}\left[f\left(\widehat{\mathbf{X}}(nh)\right) - f(\mathbf{X}(T))\right]$ pour des fonctions f "lisses". Selon la classe de fonctions choisies, le taux de convergence peut varier.
  - Les fonctions de paiements de plusieurs options ne sont pas dérivables en certains points...

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Généralisation I

- Dans la discrétisation d'Euler-Maruyama, nous avons supposé que les coefficients de dérive et de diffusion $b(\bullet, \bullet)$ et $a(\bullet, \bullet)$ sont constants sur de courtes périodes de temps de longueur h.
- Nous allons maintenant tenter de les approximer autrement.

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Généralisation II

- En appliquant le lemme d'Itô sur la fonction $f(X_t, t)$ deux fois continûment différentiable, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
& f(X_t, t) \\
= \quad & f(X_{t_k}, t_k) + \int_{t_k}^{t} \frac{\partial f}{\partial X}(X_u, u)\, dX_u + \int_{t_k}^{t} \frac{\partial f}{\partial t}(X_u, u)\, du \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(X_u, u)\, d\langle X \rangle_u \\
= \quad & f(X_{t_k}, t_k) + \int_{t_k}^{t} \mathcal{L}^0 f(X_u, u)\, du + \int_{t_k}^{t} \mathcal{L}^1 f(X_u, u)\, dW_u \\
\cong \quad & f(X_{t_k}, t_k) + \mathcal{L}^0 f(X_{t_k}, t_k)(t - t_k) + \mathcal{L}^1 f(X_{t_k}, t_k)(W_t - W_{t_k})
\end{aligned}
$$

où les opérateurs $\mathcal{L}^0$ et $\mathcal{L}^1$ satisfont

$$
\mathcal{L}^0 f = b\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \text{ et } \mathcal{L}^1 f = a\frac{\partial f}{\partial X}.
$$

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Généralisation III

- Par conséquent,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(X_t, t)\, dW_t$$

$$\cong \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\begin{array}{c} f(X_{t_k}, t_k) + \mathcal{L}^0 f(X_{t_k}, t_k)(t - t_k) \\ + \mathcal{L}^1 f(X_{t_k}, t_k)(W_t - W_{t_k}) \end{array} \right] dW_t$$

$$= f(X_{t_k}, t_k)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \mathcal{L}^0 f(X_{t_k}, t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t - t_k)\, dW_t$$

$$+ \mathcal{L}^1 f(X_{t_k}, t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_t - W_{t_k})\, dW_t$$

$$= f(X_{t_k}, t_k)\, \Delta W + \mathcal{L}^0 f(X_{t_k}, t_k)\, \Delta I + \frac{1}{2} \mathcal{L}^1 f(X_{t_k}, t_k) \left((\Delta W)^2 - h \right)$$

puisque

  - $\Delta I = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t - t_k)\, dW_t$ est $N\left(0, \frac{1}{3} h^3\right)$,

Généralisation IV

- Le lemme d'Itô implique que

$$W_{t_{k+1}}^2 - W_{t_k}^2 = 2\int_{t_k}^{t_{k+1}} W_t dW_t + h.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(W_t - W_{t_k}\right) dW_t \\
= & \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_t dW_t - \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_{t_k} dW_t \\
= & \frac{1}{2}\left(W_{t_{k+1}}^2 - W_{t_k}^2 - h\right) - W_{t_k}\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right) \\
= & \frac{1}{2}\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)^2 - \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\left(\left(\Delta W\right)^2 - h\right).
\end{aligned}$$

- Notons que $(\Delta W, \Delta I)$ est de loi normale bivariée d'espérance $\mathbf{0}$ et de matrices de variances-covariances

$$\begin{pmatrix} h & \frac{1}{2}h^2 \\ \frac{1}{2}h^2 & \frac{1}{3}h^3 \end{pmatrix}$$

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

Généralisation V

- En supposant le coefficient de dérive b constant sur un court intervalle et en utilisant les derniers résultats sur le coefficient de diffusion a (qu'il faut maintenant supposé deux fois continûment différentiable), nous trouvons

$$
\begin{aligned}
& X(t_{k+1}) \\
= \quad & X(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(X(u), u)\, du + \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(X(u), u)\, dW(u) \\
\cong \quad & X(t_k) + b(X(t_k), t_k)\, h \\
& + a(X_{t_k}, t_k)\, \Delta W + \mathcal{L}^0 a(X_{t_k}, t_k)\, \Delta I \\
& + \mathcal{L}^1 a(X_{t_k}, t_k)\, \frac{1}{2}\left((\Delta W)^2 - h\right) \\
= \quad & X(t_k) + bh + a\Delta W + \left(b\frac{\partial a}{\partial X} + \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial X^2}\right)\Delta I \\
& + \frac{1}{2} a \frac{\partial a}{\partial X}\left((\Delta W)^2 - h\right)
\end{aligned}
$$

où toutes les fonctions sont évaluées au point $(X(t_k), t_k)$.

Généralisation VI

- La discrétisation proposée est donc

$$\begin{aligned}\widehat{X}\left(t_{k+1}\right) &= \widehat{X}\left(t_k\right) + bh + a\Delta W + \frac{1}{2}a\frac{\partial a}{\partial X}\left(\left(\Delta W\right)^2 - h\right) \\ &+ \left(b\frac{\partial a}{\partial X} + \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial X^2}\right)\Delta I.\end{aligned}$$

- **Milstein** remarque que ΔI peut être considéré négligeable par rapport à $\left(\Delta W\right)^2$ et aux autres termes. Il propose donc

$$\widehat{X}\left(t_{k+1}\right) = \widehat{X}\left(t_k\right) + bh + a\Delta W + \frac{1}{2}a\frac{\partial a}{\partial X}\left(\left(\Delta W\right)^2 - h\right).$$

Généralisation VII

- D'autres généralisations sont proposées en développant aussi le terme de dérive $b(\bullet, \bullet)$ à l'aide du lemme d'Itô.
- Les généralisations ont généralement des ordres de convergence plus élevés que l'approximation d'Euler. Cependant,
  1. elles comportent des conditions sur les coefficients $b(\bullet, \bullet)$ et $a(\bullet, \bullet)$ plus fortes;
  2. bien qu'elles permettent de simuler avec un pas de discrétisation plus grand, il faut à chaque pas de discrétisation évaluer plus de fonctions. Il faut donc bien mesurer l'efficacité de la méthode en comparant la précision au temps de calcul.

Devoir à rendre I

- Nous considérons un modèle qui est peu utilisé puisque sa solution forte, bien qu'existante, n'a pas d'expression analytique.
- Rappelons que lorsque la longueur du pas de temps est h, $t_k = kh$
- L'évolution du prix d'un actif financier est caractérisé par l'EDS

$$dS_t = \kappa \left(\theta - S_t \right) dt + \sigma S_t dW_t^P$$

où les constantes κ, θ et σ sont positives.

  - La solution forte de cette EDS est presque sûrement positive si $S_0 > 0$ en même temps que ce modèle inclut un comportement de retour vers la moyenne.
  - Nous pouvons aussi trouver ses deux premiers moments. (voir l'annexe)

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Devoir à rendre II

- Le but de l'exercice est de comparer l'efficacité de la discrétisation d'Euler et celle de Milstein.
- Posons $S_0 = 100$, $\theta = 110$, $\kappa = 0.8$ et $\sigma = 0.3$.
- Nous allons simuler le processus sur un horizon de cinq ans $(T = 5)$.
- Les longueurs des pas de discrétisation à l'étude sont annuelles $(h = 1)$, mensuelles $\left(h = \frac{1}{12}\right)$, hebdomadaires $\left(h = \frac{1}{50}\right)$ et quotidiennes $\left(h = \frac{1}{250}\right)$.
- Les nombres de trajectoires seront 10 000, 25 000, 50 000 et 100 000.
- Simuler le processus selon les deux méthodes de discrétisation proposée (Euler, $\widehat{X}$, et Milstein, $\widetilde{X}$).
  - Prenez note des temps de calcul.
  - Comparez vos résultats selon les pas de discrétisation et selon les méthodes de discrétisation.
  - Vous pouvez comparer vos moyennes et variances échantillonnales à leur équivalent théorique.

Discrétisation
G. Gauthier
Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Introduction

- Il y a des erreurs de discrétisation qui ne proviennent pas de la discrétisation du processus du titre sous-jacent mais de la nature de la fonction de paiement de l'option.
- Un exemple typique est l'option à barrière
  - La fonction de paiement d'une option d'achat est
    - "Down and out": $\max(S_T - K; 0)\, \mathbf{1}_{\inf_{0\leq t\leq T} S_t > H}$
    - "Down and in": $\max(S_T - K; 0)\, \mathbf{1}_{\inf_{0\leq t\leq T} S_t < H}$.
  - Même si le titre sous-jacent est modélisé avec un mouvement brownien géométrique que l'on sait simuler de façon exacte, la vérification de la barrière sera approximative car on simule en temps discret.
  - L'erreur de discrétisation sous-estimera la probabilité de franchir la barrière.

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Vérification de la barrière

- Supposons que

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right).$$

- Alors $\inf_{0 \leq t \leq T} S_t < H$ si et seulement si

$$\inf_{0 \leq t \leq T} \left(\frac{1}{\sigma}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + W_t\right) < \frac{1}{\sigma} \ln \frac{H}{S_0}.$$

Nous pouvons déterminer analytiquement la probabilité de franchir la barrière en utilisant le principe de réflexion du mouvement brownien.

Principe de réflexion I

Théorème. *Soit W un mouvement brownien standard.*

$$P\left[\sup_{0\le s\le t} W_s \le y\right] = \left(1 - 2N\left(-\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\right)\mathbf{1}_{y\ge 0}$$

où $N(\bullet)$ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée et réduite et $1_{y\ge 0}$ est la fonction indicatrice.

Principe de réflexion II

Preuve. Soit $y \geq x$ et $y \geq 0$.

- Utilisant le principe de réflexion du mouvement brownien par rapport à la droite de niveau y, il vient

$$
\begin{aligned}
& P\left[\sup_{0\leq s\leq t} W_s > y \text{ et } W_t \leq x\right] \\
= \quad & P\left[\sup_{0\leq s\leq t} W_s > y \text{ et } W_t \geq 2y - x\right] \\
= \quad & P\left[\sup_{0\leq s\leq t} W_s > y \text{ et } 2y - W_t \leq x\right].
\end{aligned}
$$

Nous en concluons que la loi jointe de $\sup_{0\leq s\leq t} W_s$ et W_t est la même que celle de $\sup_{0\leq s\leq t} W_s$ et $2y - W_t$ sur le domaine $y \geq x$ et $y \geq 0$.

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

Principe de réflexion III

- De plus, $W_t \geq 2y - x \geq y + (y-x) \geq y$ implique que

$$P\left[\sup_{0\leq s\leq t} W_s > y \text{ et } W_t \geq 2y - x\right] = P\left[W_t \geq 2y - x\right].$$

- Donc si $y \geq 0$, alors

$$\begin{aligned}
P\left[\sup_{0\leq s\leq t} W_s > y\right] &= P\left[\sup_{0\leq s\leq t} W_s > y \text{ et } W_t \leq y\right] \\
&\quad + P\left[\sup_{0\leq s\leq t} W_s > y \text{ et } W_t > y\right] \\
&= P\left[W_t \geq 2y - y\right] + P\left[W_t > y\right] \\
&= 2P\left[W_t > y\right] \\
&= 2N\left(-\frac{y}{\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

Principe de réflexion IV

La fonction de répartition est donc

$$P\left[\sup_{0\leq s\leq t} W_s \leq y\right] = \left(1 - 2N\left(-\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\right)\mathbf{1}_{y\geq 0}$$

et la fonction de densité est

$$f_{\sup_{0\leq s\leq t} W_s}(y) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)\mathbf{1}_{y\geq 0}. \blacksquare$$

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Principe de réflexion I

Généralisation

Théorème. *Pour tout $y \geq x$ et $y \geq 0$,*

$$P\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left(W_s+\alpha s\right)>y \text{ et } W_t+\alpha t\leq x\right]$$
$$= \exp\left(2\alpha y\right) N\left(-\frac{2y-x+t\alpha}{\sqrt{t}}\right).$$

où $N(\bullet)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite.

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

Principe de réflexion II

Généralisation

Preuve. Posons $y \geq x$ et $y \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
& P\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left(W_s+\alpha s\right)>y \text{ et } W_t+\alpha t\leq x\right] \\
= \quad & \mathrm{E}^{P}\left[\mathbf{1}_{\left\{\sup_{0\leq s\leq t}\left(W_s+\alpha s\right)>y\right\}}\mathbf{1}_{\left\{W_t+\alpha t\leq x\right\}}\right] \\
= \quad & \mathrm{E}^{P}\left[\mathbf{1}_{\left\{\sup_{0\leq s\leq t}\widetilde{W}_s>y\right\}}\mathbf{1}_{\left\{\widetilde{W}_t\leq x\right\}}\right] \text{ où } \widetilde{W}_t \equiv W_t+\alpha t \\
= \quad & \mathrm{E}^{\widetilde{P}}\left[\frac{dP}{d\widetilde{P}}1_{\left\{\sup_{0\leq s\leq t}\widetilde{W}_s>y\right\}}\mathbf{1}_{\left\{\widetilde{W}_t\leq x\right\}}\right]
\end{aligned}
$$

où

$$
\frac{dP}{d\widetilde{P}} \equiv \exp\left(\alpha W_t+\frac{\alpha^2 t}{2}\right)=\exp\left(\alpha\widetilde{W}_t-\frac{\alpha^2 t}{2}\right).
$$

Le théorème de Girsanov fait en sorte que $\widetilde{W}$ est un $\widetilde{P}-$mouvement brownien.

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Principe de réflexion III

Généralisation

$$
\begin{aligned}
& P\left[\sup_{0\leq s\leq t}(W_s+\alpha s)>y \text{ et } W_t+\alpha t\leq x\right] \\
= \; & \mathrm{E}^{\widetilde{P}}\left[\frac{dP}{d\widetilde{P}}\mathbf{1}_{\left\{\sup_{0\leq s\leq t}\widetilde{W}_s>y\right\}}\mathbf{1}_{\left\{\widetilde{W}_t\leq x\right\}}\right] \\
= \; & \mathrm{E}^{\widetilde{P}}\left[\exp\left(\alpha\widetilde{W}_t-\frac{\alpha^2 t}{2}\right)1_{\left\{\sup_{0\leq s\leq t}\widetilde{W}_s>y\right\}}1_{\left\{\widetilde{W}_t\leq x\right\}}\right] \\
= \; & \exp\left(-\frac{\alpha^2 t}{2}\right)\mathrm{E}^{\widetilde{P}}\left[\exp\left(\alpha\widetilde{W}_t\right)1_{\left\{\sup_{0\leq s\leq t}\widetilde{W}_s>y\right\}}1_{\left\{\widetilde{W}_t\leq x\right\}}\right] \\
= \; & \exp\left(-\frac{\alpha^2 t}{2}\right)\mathrm{E}^{\widetilde{P}}\left[\exp\left(\alpha\left(2y-\widetilde{W}_t\right)\right)1_{\left\{\sup_{0\leq s\leq t}\widetilde{W}_s>y\right\}}1_{\left\{\widetilde{W}_t\geq 2y-x\right\}}\right]
\end{aligned}
$$

car le principe de réflexion du mouvement brownien implique que si $y\geq x$ et $y\geq 0$ alors $\left(\sup_{0\leq s\leq t}\widetilde{W}_s,\ \widetilde{W}_t\right)$ et $\left(\sup_{0\leq s\leq t}\widetilde{W}_s,\ 2y-\widetilde{W}_t\right)$ ont la même loi sur l'espace $\left(\Omega,\widetilde{P}\right)$.

Discrétisation

G. Gauthier

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

Principe de réflexion IV

Généralisation

Ainsi, puisque $y \geq x$ et $y \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
& P\left[\sup_{0\leq s\leq t}(W_s+\alpha s) > y \text{ et } W_t+\alpha t \leq x\right] \\
= \quad & e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}+2\alpha y}\mathrm{E}^{\widetilde{P}}\left[\exp\left(-\alpha \widetilde{W}_t\right) 1_{\left\{\sup_{0\leq s\leq t}\widetilde{W}_s>y\right\}} 1_{\left\{\widetilde{W}_t\geq 2y-x\right\}}\right] \\
= \quad & e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}+2\alpha y}\mathrm{E}^{\widetilde{P}}\left[\exp\left(-\alpha \widetilde{W}_t\right) 1_{\left\{\widetilde{W}_t\geq 2y-x\right\}}\right] \\
= \quad & e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}+2\alpha y}\mathrm{E}^{P}\left[\frac{d\widetilde{P}}{dP}\exp\left(-\alpha \widetilde{W}_t\right) 1_{\left\{\widetilde{W}_t\geq 2y-x\right\}}\right] \\
= \quad & e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}+2\alpha y}\mathrm{E}^{P}\left[\exp\left(-\alpha W_t-\frac{\alpha^2 t}{2}\right)\exp\left(-\alpha \widetilde{W}_t\right) 1_{\left\{\widetilde{W}_t\geq 2y-x\right\}}\right] \\
= \quad & e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}+2\alpha y}\mathrm{E}^{P}\left[\exp\left(-\alpha W_t-\frac{\alpha^2 t}{2}\right)\exp\left(-\alpha\left(W_t+\alpha t\right)\right) 1_{\left\{W_t+\alpha t\geq 2y-x\right\}}\right] \\
= \quad & \exp\left(-2\alpha^2 t\right)\exp\left(2\alpha y\right)\mathrm{E}^{P}\left[\exp\left(-2\alpha W_t\right) 1_{\left\{W_t+\alpha t\geq 2y-x\right\}}\right].
\end{aligned}
$$

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Principe de réflexion V

Généralisation

Mais

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}^P\left[\exp\left(-2\alpha W_t\right) 1_{\{W_t+\alpha t\geq 2y-x\}}\right] \\
= \; & \int_{2y-x-\alpha t}^{\infty} \exp\left(-2\alpha w\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{w^2}{2t}\right) dw \\
= \; & \exp\left(\frac{4t^2\alpha^2}{2t}\right) \int_{2y-x-\alpha t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{w^2+4t\alpha w+4t^2\alpha^2}{2t}\right) dw \\
= \; & \exp\left(2t\alpha^2\right) \int_{2y-x-\alpha t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{(w+2t\alpha)^2}{2t}\right) dw \\
& \text{posons } z = \frac{w+2t\alpha}{\sqrt{t}} \Rightarrow dw = \sqrt{t} dz \\
= \; & \exp\left(2t\alpha^2\right) \int_{\frac{2y-x-\alpha t+2t\alpha}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\
= \; & \exp\left(2t\alpha^2\right) N\left(-\frac{2y-x+t\alpha}{\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}
$$

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

Principe de réflexion VI

Généralisation

où $N(\bullet)$ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée et réduite. Donc, pour tout $y \geq x$ et $y \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
& P\left[\sup_{0 \leq s \leq t} (W_s + \alpha s) > y \text{ et } W_t + \alpha t \leq x\right] \\
= \quad & \exp\left(-2\alpha^2 t\right) \exp(2\alpha y) E^P\left[\exp(-2\alpha W_t) 1_{\{W_t + \alpha t \geq 2y - x\}}\right] \\
= \quad & \exp\left(-2\alpha^2 t\right) \exp(2\alpha y) \exp\left(2t\alpha^2\right) N\left(-\frac{2y - x + t\alpha}{\sqrt{t}}\right) \\
= \quad & \exp(2\alpha y) N\left(-\frac{2y - x + t\alpha}{\sqrt{t}}\right). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Loi de supremum I

Théorème. *Soit* $\{W_t : t \geq 0\}$ *un mouvement brownien standard,* α *est une constante.*

$$
\begin{aligned}
& P\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left(W_s+\alpha s\right)>y\right] \\
= \quad & \left(\exp\left(2\alpha y\right)N\left(-\frac{t\alpha+y}{\sqrt{t}}\right)+N\left(\frac{\alpha t-y}{\sqrt{t}}\right)\right)\mathbf{1}_{y>0} \\
& P\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left(W_s+\alpha s\right)\leq y\right] \\
= \quad & \left(N\left(\frac{y-\alpha t}{\sqrt{t}}\right)-\exp\left(2\alpha y\right)N\left(-\frac{t\alpha+y}{\sqrt{t}}\right)\right)\mathbf{1}_{y>0}
\end{aligned}
$$

où $N\left(\bullet\right)$ *est la fonction de répartition d'une loi normale centrée et réduite et* $1_{y>0}$ *est la fonction indicatrice.*

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

Loi de supremum II

Preuve. Pour tout $y \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& P\left[\sup_{0\leq s\leq t}(W_s+\alpha s)>y\right] \\
= \quad & P\left[\sup_{0\leq s\leq t}(W_s+\alpha s)>y \text{ et } W_t+\alpha t\leq y\right] \\
& +P\left[\sup_{0\leq s\leq t}(W_s+\alpha s)>y \text{ et } W_t+\alpha t> y\right] \\
= \quad & \exp(2\alpha y)\,N\left(-\frac{y+t\alpha}{\sqrt{t}}\right)+P\left[W_t+\alpha t>y\right] \\
= \quad & \exp(2\alpha y)\,N\left(-\frac{y+t\alpha}{\sqrt{t}}\right)+P\left[\frac{W_t}{\sqrt{t}}>\frac{y-\alpha t}{\sqrt{t}}\right] \\
= \quad & \exp(2\alpha y)\,N\left(-\frac{y+t\alpha}{\sqrt{t}}\right)+N\left(-\frac{y-\alpha t}{\sqrt{t}}\right) \\
= \quad & \exp(2\alpha y)\,N\left(-\frac{t\alpha+y}{\sqrt{t}}\right)+N\left(\frac{\alpha t-y}{\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}$$

On obtient $P\left[\sup_{0\leq s\leq t}(W_s+\alpha s)\leq y\right]$ en notant que la symétrie de la distribution gaussienne implique que $1-N(x)=N(-x)$. ■

Discrétisation

G. Gauthier

Introduction

Rappel

Discrétisation des processus de diffusion

L'approximation d'Euler-Maruyama

Exemple

Erreur de discrétisation

Méthodes de discrétisation dans le cas univarié

Approximation d'Euler

Discrétisation du second ordre

Devoir

Les options dépendantes de la trajectoire

Principe de réflexion

Généralisation

Loi du sup

Devoir

Annexe

Loi de l'infimum

Notons que

$$
\begin{aligned}
P\left[\inf_{0\leq s\leq t}(W_s+\alpha s)<y\right] &= P\left[-\inf_{0\leq s\leq t}(W_s+\alpha s)>-y\right]\\
&= P\left[\sup_{0\leq s\leq t}(-W_s-\alpha s)>-y\right]\\
&= P\left[\sup_{0\leq s\leq t}(W_s-\alpha s)>-y\right]
\end{aligned}
$$

où la dernière égalité est établie à partir de la symétrie du mouvement brownien.

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Devoir à rendre I

Option à barrière

- Le but est de tarifer une option à barrière.
- Le prix du titre sous-jacent en monde neutre au risque suit un mouvement brownien géométrique $S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t^Q\right)$.
  - $S_0 = 100$, $r = 5\%$, $\sigma \in \{0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5\}$.
- Nous considérons une option "down and out" dont la fonction de paiement est $\max(S_T - K; 0) \mathbf{1}_{\inf_{0 \leq t \leq T} S_t > H}$
  - Les prix d'exercice considérés satisfont $K / S_0 \in \{0.9; 1.0; 1.1\}$.
  - L'échéance de l'option est un an $(T = 1)$.
  - Le niveau de la barrière satisfait $H / S_0 \in \{0.7; 0.8; 0.9\}$

Devoir à rendre II

Option à barrière

Les questions :

1. Déterminer la probabilité que le titre sous-jacent franchisse la barrière au cours de la vie de l'option.
2. Il existe une solution analytique pour le prix de cette d'option. Quelle est-elle?
3. En utilisant une méthode de discrétisation, évaluez à l'aide de la simulation de Monte Carlo la probabilité que le prix du titre sous-jacent franchisse la barrière ainsi que le prix de l'option.
   3.1 Décrivez la façon dont vous vous y prenez.
   3.2 Est-ce que l'estimateur de Monte Carlo est biaisé? Justifiez votre réponse.
   3.3 Discutez des choix des pas de discrétisation en appuyant vos propos par vos résultats.

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Devoir à rendre III

Option à barrière

3.4 Discutez de l'efficacité de la méthode en opposant les temps de calcul à l'erreur (puisque vous avez un étalon) ainsi qu'à la marge d'erreur. Vous pouvez faire varier vos tailles de simulation, c'est-à-dire le nombre de trajectoires.

3.5 Discutez de l'impact des variations de la volatilité σ et de la barrière H sur vos choix des pas de temps.

4. Avec les résultats présentés dans cette section, il est possible d'estimer la probabilité que le prix du titre sous-jacent franchisse la barrière ainsi que le prix de l'option sans avoir d'erreur de discrétisation. En effet, nous avons la loi conjointe de la valeur terminale du mouvement brownien, W_T, et de son infimum $\inf_{0 \leq t \leq T}$.

   4.1 Développez un algorithme qui permet d'estimer la probabilité et le prix.

   4.2 Programmez-le.

Introduction
Rappel
Discrétisation des processus de diffusion
L'approximation d'Euler-Maruyama
Exemple
Erreur de discrétisation
Méthodes de discrétisation dans le cas univarié
Approximation d'Euler
Discrétisation du second ordre
Devoir
Les options dépendantes de la trajectoire
Principe de réflexion
Généralisation
Loi du sup
Devoir
Annexe

Modèle

Dans cette annexe, nous calculons les deux premiers moments du processus caractérisé par l'EDS

$$dS_t = \kappa\left(\theta - S_t\right)dt + \sigma S_t dW_t^P.$$

Espérance I

Théorème. $\mathrm{E}[S_t] = \theta + (S_0 - \theta)\, e^{-\kappa t}$.
Notons que θ est la moyenne à long terme du processus puisque $\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}[S_t] = \theta$.

Preuve.

- $S_t = S_0 + \int_0^t \kappa(\theta - S_u)\, du + \sigma \int_0^t S_u dW_u^P$
- Prenons l'espérance de part et d'autre de l'égalité. En utilisant le théorème de Fubini pour interchanger l'intégrale et l'espérance et parce que l'intégrale stochastique est une martingale d'espérance nulle, il vient

$$\mathrm{E}[S_t] = \mathrm{E}[S_0] + \int_0^t \kappa(\theta - \mathrm{E}[S_u])\, du.$$

- La forme différentielle est $\frac{d}{dt}\mathrm{E}[S_t] = \kappa(\theta - \mathrm{E}[S_t])$ avec la condition initiale $\mathrm{E}[S_0] = S_0$.
- L'unique solution de cette équation différentielle ordinaire est $\mathrm{E}[S_t] = \theta + (S_0 - \theta)\, e^{-\kappa t}$.

Deuxième moment I

Théorème.

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[S_t] &= \theta^2 \frac{\sigma^2}{2\kappa-\sigma^2} + 2\theta\sigma^2 \frac{S_0-\theta}{\kappa-\sigma^2} e^{-t\kappa} - (S_0-\theta)^2 e^{-2\kappa t} \\ &\quad + \left(S_0^2 + 2\theta\kappa \frac{\theta\kappa - 2\kappa S_0 + \sigma^2 S_0}{(\kappa-\sigma^2)(2\kappa-\sigma^2)}\right) e^{-t\left(2\kappa-\sigma^2\right)}.\end{aligned}$$

Notons que

- si $2\kappa - \sigma^2 > 0$, alors $\lim_{t\to\infty} \operatorname{Var}[S_t] = \theta^2 \frac{\sigma^2}{2\kappa-\sigma^2}$,
- si $2\kappa - \sigma^2 = 0$, alors $\lim_{t\to\infty} \operatorname{Var}[S_t] = S_0^2 + \frac{\theta}{\kappa-\sigma^2}\left(\theta\kappa - 2\kappa S_0 + \theta\sigma^2\right)$
- si $2\kappa - \sigma^2 < 0$, alors $\lim_{t\to\infty} \operatorname{Var}[S_t] = \infty$

Preuve.

Deuxième moment II

- Appliquons le lemme d'Itô :

$$
\begin{aligned}
S_t^2 &= S_0^2 + 2\int_0^t S_u dS_u + \int_0^t d\langle S\rangle_u \\
&= S_0^2 + 2\kappa\int_0^t S_u(\theta - S_u)\,du + 2\sigma\int_0^t S_u^2 dW_u + \sigma^2\int_0^t S_u^2 du \\
&= S_0^2 + \int_0^t \left(2\kappa\theta S_u + \left(\sigma^2 - 2\kappa\right)S_u^2\right)du + 2\sigma\int_0^t S_u^2 dW_u.
\end{aligned}
$$

- Prenons l'espérance de part et d'autre de l'égalité. En utilisant le théorème de Fubini pour interchanger l'intégrale et l'espérance et parce que l'intégrale stochastique est une martingale d'espérance nulle, il vient

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}\left[S_t^2\right] \\
= {}& \mathrm{E}\left[S_0^2\right] + \int_0^t \left(2\kappa\theta\mathrm{E}\left[S_u\right] + \left(\sigma^2 - 2\kappa\right)\mathrm{E}\left[S_u^2\right]\right)du \\
= {}& \mathrm{E}\left[S_0^2\right] + \int_0^t \left(2\kappa\theta\left(\theta + (S_0 - \theta)e^{-\kappa u}\right) + \left(\sigma^2 - 2\kappa\right)\mathrm{E}\left[S_u^2\right]\right)du \\
= {}& \mathrm{E}\left[S_0^2\right] + 2\kappa\theta^2 t + 2\theta(S_0 - \theta)\left(1 - e^{-\kappa t}\right) + \left(\sigma^2 - 2\kappa\right)\int_0^t \mathrm{E}\left[S_u^2\right]du.
\end{aligned}
$$

Deuxième moment III

- La forme différentielle est

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathrm{E}\left[S_t^2\right] &= 2\kappa\theta^2 + 2\kappa\theta\left(S_0-\theta\right)e^{-\kappa t} + \left(\sigma^2 - 2\kappa\right)\mathrm{E}\left[S_t^2\right],\\ \mathrm{E}\left[S_0^2\right] &= S_0^2.\end{aligned}$$

- L'unique solution est

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[S_t^2\right] &= 2\theta^2\frac{\kappa}{2\kappa-\sigma^2} + 2\theta\kappa\frac{S_0-\theta}{\kappa-\sigma^2}e^{-t\kappa}\\ &\quad + \left(S_0^2 + 2\theta\kappa\frac{\theta\kappa - 2\kappa S_0 + \sigma^2 S_0}{\left(\kappa-\sigma^2\right)\left(2\kappa-\sigma^2\right)}\right)e^{-t\left(2\kappa-\sigma^2\right)}.\end{aligned}$$

- La variance est

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}\left[S_t\right]\\ = \;& \mathrm{E}\left[S_t^2\right] - \mathrm{E}^2\left[S_t\right]\\ = \;& \theta^2\frac{\sigma^2}{2\kappa-\sigma^2} + 2\theta\sigma^2\frac{S_0-\theta}{\kappa-\sigma^2}e^{-t\kappa} - \left(S_0-\theta\right)^2e^{-2\kappa t}\\ &+ \left(S_0^2 + 2\theta\kappa\frac{\theta\kappa - 2\kappa S_0 + \sigma^2 S_0}{\left(\kappa-\sigma^2\right)\left(2\kappa-\sigma^2\right)}\right)e^{-t\left(2\kappa-\sigma^2\right)}.\end{aligned}$$