

Simulation des processus de diffusion

6-601-09 Simulation Monte Carlo

Geneviève Gauthier

HEC Montréal

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes
principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt
stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus
racine-carrée

Processus de
diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

Ces notes de cours sont fortement inspirées du livre de Paul Glasserman : *Monte Carlo Methods in Financial Engineering* (2004), chapitre 3.

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes
principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt
stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus

racine-carrée

Processus de diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

Méthodes exactes ou basées sur une discrétisation du temps

Lorsqu'il s'agit de simuler des processus de diffusion, il y a les méthodes exactes et celles qui sont basées sur la discrétisation.

1. Les méthodes exactes sont employées lorsque l'on connaît la distribution de $\mathbf{X}(t+u)$ conditionnellement à la valeur $\mathbf{X}(t)$ du processus au temps t , $t, u > 0$.
2. Les méthodes basées sur la discrétisation du temps simulent une approximation du processus original. Pour cette raison, la méthode exacte est généralement préférable aux méthodes de discrétisation du temps.

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus racine-carrée

Processus de diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

Plan de cette présentation

1. Rappels théoriques

1.1 Processus de diffusion

1.2 L'approximation d'Euler

2. Les méthodes de simulation dites exactes

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes
principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt
stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus
racine-carrée

Processus de diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

$$d\mathbf{X}(t) = \underbrace{\mathbf{b}(\mathbf{X}(t), t)}_{\substack{d \times 1 \\ \text{dérive}}} dt + \underbrace{\mathbf{a}(\mathbf{X}(t), t)}_{\substack{d \times k \\ \text{diffusion}}} \underbrace{d\mathbf{W}(t)}_{k \times 1}$$

Il y a des conditions de régularité sur les fonctions $\mathbf{b} : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\mathbf{a} : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$ afin que le système d'équations différentielles stochastiques admette une solution.

Sous forme intégrale, le système peut s'écrire sous les formes :

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(0) + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(u), u) du + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{X}(u), u) d\mathbf{W}(u)$$

$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t b_i(\mathbf{X}(u), u) du + \sum_{j=1}^k \int_0^t a_{ij}(\mathbf{X}(u), u) dW_j(u)$$

Approximation d'Euler

Définition

Une façon très intuitive de simuler un processus de diffusion est à l'aide de l'approximation d'Euler.

1. Équation différentielle stochastique originale :

$$dX_i(t) = b_i(\mathbf{X}(t), t) dt + \sum_{j=1}^k a_{ij}(\mathbf{X}(t), t) dW_j(t)$$

2. L'approximation d'Euler : sur une courte période de temps de longueur h ,

$$\begin{aligned} & \hat{X}_i(t+h) - \hat{X}_i(t) \\ &= b_i(\hat{\mathbf{X}}(t), t) h + \sum_{j=1}^k a_{ij}(\hat{\mathbf{X}}(t), t) (W_j(t+h) - W_j(t)) \\ &\stackrel{\text{Loi}}{=} b_i(\hat{\mathbf{X}}(t), t) h + \sum_{j=1}^k a_{ij}(\hat{\mathbf{X}}(t), t) \sqrt{h} Z_j \end{aligned}$$

où Z_1, \dots, Z_k sont iid $N(0, 1)$.

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus racine-carrée

Processus de diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

Approximation d'Euler I

Une autre justification

1. Sous sa forme intégrale l'ÉDS originale est, pour $t, h > 0$:

$$X_i(t+h) = X_i(t) + \int_t^{t+h} b_i(\mathbf{X}(u), u) du + \sum_{j=1}^k \int_t^{t+h} a_{ij}(\mathbf{X}(u), u) dW_j(u)$$

$$\cong X_i(t) + \int_t^{t+h} b_i(\mathbf{X}(t), t) du + \sum_{j=1}^k \int_t^{t+h} a_{ij}(\mathbf{X}(t), t) dW_j(u)$$

si h est suffisamment petit

$$= X_i(t) + b_i(\mathbf{X}(t), t) \int_t^{t+h} du + \sum_{j=1}^k a_{ij}(\mathbf{X}(t), t) \int_t^{t+h} dW_j(u)$$

$$\stackrel{\text{Loi}}{=} X_i(t) + b_i(\mathbf{X}(t), t) h + \sum_{j=1}^k a_{ij}(\mathbf{X}(t), t) \sqrt{h} Z_j$$

où Z_1, \dots, Z_k sont iid $N(0, 1)$.

Approximation d'Euler II

Une autre justification

2. Afin de bien marquer le fait que l'approximation d'Euler est un processus différent de la solution du système d'EDS original, nous la notons différemment :

$$\begin{aligned}\widehat{X}_i(t+h) &= \widehat{X}_i(t) + b_i(\widehat{\mathbf{X}}(t), t)h + \sum_{j=1}^k a_{ij}(\widehat{\mathbf{X}}(t), t)\sqrt{h}Z_j, \\ i &= 1, \dots, d.\end{aligned}$$

3. Nous verrons éventuellement comment mesurer l'erreur causée par cette discrétisation du temps.

Le mouvement brownien (MB)

Les processus de diffusion sont construits à partir du mouvement brownien.

Dans un premier temps, nous allons :

1. définir le mouvement brownien unidimensionnel;
2. apprendre à simuler le mouvement brownien unidimensionnel;
3. expliquer comment simuler le mouvement brownien multidimensionnel de façon efficace;

Le mouvement brownien I

Contexte

Nous cherchons à modéliser ce qui n'a pas été prévu (les termes d'erreur). Nous voulons donc un processus possédant les caractéristiques suivantes :

1. Le présent est observé, c'est donc une certitude. L'erreur devrait donc être nulle;
2. Un processus d'espérance nulle puisqu'une espérance non nulle signifierait une tendance à la hausse ou à la baisse;
3. Puisque le futur rapproché est plus facilement prévisible qu'un futur éloigné, nous voulons un terme d'erreur qui ait tendance à être de plus en plus grand au fur et à mesure que le temps passe. Cela peut se traduire statistiquement par une augmentation de l'écart-type au cours du temps;

Le mouvement brownien II

Contexte

4. Nous voulons que les erreurs futures soient indépendantes de celles observées dans le passé. Techniquement, nous désirons un processus à incréments indépendants;
5. Il est possible de considérer l'erreur commise comme une somme de petites erreurs provenant de diverses sources non modélisées. Par conséquent, l'erreur devrait être de loi normale. Techniquement, la loi normale possède plusieurs propriétés sympathiques qui faciliteront les calculs.

Le mouvement brownien

Définition

Un *mouvement brownien standard* $\{W_t : t \geq 0\}$ est un processus stochastique tel que

1. $W_0 = 0$,
2. $\forall 0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, les variables aléatoires $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont indépendantes (incrémentés indépendants),
3. $\forall s, t \geq 0$ tels que $s < t$, $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$,
4. les trajectoires sont continues.

- ▶ Il ne nous est pas possible de simuler le mouvement brownien en temps continu.
- ▶ Nous le simulons en temps discret, aux instants $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, en nous basant sur la relation

$$W_{t_i} = W_{t_{i-1}} + \underbrace{W_{t_i} - W_{t_{i-1}}}_{N(0, t_i - t_{i-1})}$$

- ▶ Ainsi, $W_{t_i} \stackrel{\text{Loi}}{=} W_{t_{i-1}} + \sqrt{t_i - t_{i-1}} Z_i$ où la suite $\{Z_i : i \in \mathbb{N}\}$ est formée de variables aléatoires indépendantes de loi $N(0, 1)$.
- ▶ Afin d'éviter d'utiliser les boucles, il est possible de simuler les m trajectoires à la fois.

► Algorithme de simulation du mouvement brownien unidimensionnel

1. $\mathbf{W}_{t_0} = \mathbf{0}_{m \times 1}$ où
 - 1.1 $\mathbf{0}_{m \times 1}$ est un vecteur $m \times 1$ rempli de zéros.
 - 1.2 m représente le nombre de trajectoires simulées.
2. $\mathbf{W}_{t_i} \stackrel{\text{Loi}}{=} \mathbf{W}_{t_{i-1}} + \sqrt{t_i - t_{i-1}} \mathbf{Z}_i$ où
 - 2.1 $\{\mathbf{Z}_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ est une suite de vecteurs aléatoires de loi $N(\mathbf{0}_{m \times 1}, \mathbf{I}_m)$,
 - 2.2 \mathbf{I}_m est la matrice identité de dimension m .

L'avantage avec cette méthode est qu'il est possible de simuler le processus seulement aux dates pertinentes sans avoir à le simuler à des dates intermédiaires.

Simulation d'un vecteur aléatoire gaussien

Introduction

- ▶ Afin de simuler un mouvement brownien multidimensionnel et, plus généralement, les processus de diffusion, il faut d'abord pouvoir simuler un vecteur aléatoire \mathbf{X} de loi $N(\mathbf{0}_{k \times 1}, \Sigma)$ où

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1k} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{2k} & \rho_{2k} & \cdots & \rho_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_k \end{pmatrix}$$

- ▶ Nous présentons deux méthodes :
 1. la décomposition de Choleski;
 2. les composantes principales.

Simulation d'un vecteur aléatoire gaussien

Décomposition de Choleski

1. Nous voulons simuler \mathbf{X} de loi $N(\mathbf{0}_{k \times 1}, \Sigma)$.
2. Puisque Σ est définie-positive, il existe une matrice triangulaire inférieure \mathbf{C} de dimension $k \times k$, appelée la décomposition de Choleski, telle que $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \Sigma$.
 - 2.1 Attention! La fonction de Matlab produit la matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire \mathbf{C}^T .
3. Par conséquent $\mathbf{X} \stackrel{\text{Loi}}{=} \mathbf{C}\mathbf{Z}$ où
 - 3.1 \mathbf{Z} est $N(\mathbf{0}_{k \times 1}, \mathbf{I}_k)$,
 - 3.2 \mathbf{I}_k est la matrice identité de dimension k .
4. **Algorithme de simulation**
 - 4.1 Simuler un vecteur \mathbf{Z} dont les k composantes sont iid $N(0,1)$.
 - 4.2 $\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{Z}$.
 - 4.3 Répéter les deux étapes précédentes m fois afin d'obtenir m scénarios pour \mathbf{X} .

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

CholeskiComposantes
principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt
stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus
racine-carréeProcessus de
diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

Simulation d'un vecteur aléatoire gaussien I

Décomposition en composantes principales

1. Nous voulons simuler \mathbf{X} de loi $N(\mathbf{0}_{k \times 1}, \Sigma)$.
2. L'idée maîtresse est d'utiliser une diagonalisation de la matrice de variances-covariances Σ .
3. Puisque Σ est symétrique et de dimension $k \times k$, alors elle possède k valeurs propres réelles notées $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ et parce que Σ est définie-positive, ces valeurs propres sont positives.
4. Il y a k vecteurs propres (un par valeur propre) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, satisfaisant
 - 4.1 $\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_i = 1$,
 - 4.2 $\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j = 0$ si $i \neq j$ et
 - 4.3 $\Sigma \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$.

Simulation d'un vecteur aléatoire gaussien II

Décomposition en composantes principales

5. Si $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ est la matrice $k \times k$ dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres, et Λ est la matrice diagonale formée à partir des valeurs propres ($\Lambda_{ij} = \lambda_i$ si $i = j$ et 0 sinon), alors :

$$5.1 \quad \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}_k.$$

$$5.2 \quad \Sigma = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T.$$

5.3 Si $\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda^{\frac{1}{2}}$, alors

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{V}\Lambda^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{V}\Lambda^{\frac{1}{2}} \right)^T = \mathbf{V}\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T = \Sigma.$$

5.3.1 Puisque Λ est diagonale, alors $\Lambda_{ij}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda_i}$ si $i = j$ et 0 sinon.

Simulation d'un vecteur aléatoire gaussien III

Décomposition en composantes principales

6. Ainsi, $\mathbf{X} \stackrel{\text{Loi}}{=} \mathbf{AZ} = \sum_{j=1}^k \mathbf{a}_j Z_j$ où

6.1 \mathbf{X} de loi $N(\mathbf{0}_{k \times 1}, \Sigma)$.

6.2 \mathbf{Z} est $N(\mathbf{0}_{k \times 1}, \mathbf{I}_k)$,

6.3 \mathbf{I}_k est la matrice identité de dimension k et

6.4 $\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda^{\frac{1}{2}}$

6.5 $\mathbf{a}_j = \sqrt{\lambda_j} \mathbf{v}_j$ est la j ième colonne de la matrice \mathbf{A} .

7. Algorithme de simulation

7.1 Simuler un vecteur \mathbf{Z} dont les k composantes sont iid $N(0,1)$.

7.2 $\mathbf{X} = \mathbf{AZ}$.

7.3 Répéter les deux étapes précédentes m fois afin d'obtenir m scénarios pour \mathbf{X} .

Simulation d'un vecteur aléatoire gaussien IV

Décomposition en composantes principales

8. Dans l'algorithme précédent, nous avons $\mathbf{X} \stackrel{\text{Loi}}{=} \sum_{j=1}^k \mathbf{a}_j Z_j$ où Z_1, \dots, Z_k sont iid $N(0, 1)$ et \mathbf{a}_j est la j ième colonne de la matrice \mathbf{A} .

8.1 Nous construisons une approximation de \mathbf{X} à partir des $k^* < k$ premières composantes.

8.2 Posons $\mathbf{X}^{(k^*)} = \sum_{j=1}^{k^*} \mathbf{a}_j Z_j$.

8.3 $E \left[\left\| \mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k^*)} \right\| \right] = E \left[\sqrt{\left(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k^*)} \right)^T \left(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k^*)} \right)} \right]$

est minimale, c'est-à-dire que toutes autres approximations $\tilde{\mathbf{X}}^{(k^*)} = \sum_{j=1}^{k^*} \mathbf{b}_j Z_j$ satisfont

$$E \left[\left\| \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}^{(k^*)} \right\| \right] \geq E \left[\left\| \mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k^*)} \right\| \right].$$

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes
principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt

stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus

racine-carrée

Processus de
diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

Simulation d'un vecteur aléatoire gaussien \mathbf{V}

Décomposition en composantes principales

Calculs intermédiaires : puisque $\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k^*)} = \sum_{j=k^*+1}^k \mathbf{a}_j Z_j$, alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k^*)} \right)^\top \left(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k^*)} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{j'=k^*+1}^k \sum_{j=k^*+1}^k \mathbf{a}_{j'}^\top \mathbf{a}_j Z_{j'} Z_j \right] \\ &= \sum_{j=k^*+1}^k \mathbf{a}_j^\top \mathbf{a}_j \text{ car } Z_1, \dots, Z_k \text{ sont iid } N(0, 1). \\ &= \sum_{j=k^*+1}^k \sum_{i=1}^k a_{ij}^2 = \sum_{j=k^*+1}^k \sum_{i=1}^k \lambda_j v_{ij}^2 \text{ car } \mathbf{a}_j = \sqrt{\lambda_j} \mathbf{v}_j \\ &= \sum_{j=k^*+1}^k \lambda_j \sum_{i=1}^k v_{ij}^2 = \sum_{j=k^*+1}^k \lambda_j \text{ car } \mathbf{v}_j^\top \mathbf{v}_j = 1. \end{aligned}$$

Simulation d'un vecteur aléatoire gaussien VI

Décomposition en composantes principales

- ▶ Exemples d'application:
 - ▶ Tarification d'une option asiatique : on peut simuler le sous-jacent aux dates les plus pertinentes plutôt qu'à toutes les dates sur lesquelles porte la moyenne.
 - ▶ Évaluation de la Valeur à Risque : cela permet d'identifier les principaux facteurs qui influencent la valeur du portefeuille plutôt que de simuler toutes les composantes du portefeuille.
 - ▶ Utile lorsque l'on utilise des suites à discrétion faible pour lesquelles la dimension de l'intégrale à résoudre est problématique.

Comparer l'efficacité des algorithmes de simulation basés sur (1) la décomposition de Choleski et (2) la décomposition en composantes principales.

1. Étudiez les dimensions $k \in \{2, 3, 5, 8\}$.
2. Commentez vos résultats.
3. Pour tout i , $\sigma_i = 1$, $\rho_{ii} = 1$ et si $j > i$, $\rho_{ij} = \frac{i}{j}$.

3.1 Mise en garde. Lorsque vous vous définissez des matrices de variances-covariances, assurez-vous quelles sont définies positives.

3.2 Rappel.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1k} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{2k} & \rho_{2k} & \cdots & \rho_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_k \end{pmatrix}$$

[Introduction](#)[Proc. de diffusion](#)[Le MB](#)[Méthodes exactes](#)[MB unidimensionnel](#)[MB multidimensionnel](#)[Choleski](#)[Composantes](#)[principales](#)[Travail pratique](#)[Définition](#)[MB géométrique](#)[Taux d'intérêt](#)[stochastique](#)[Ornstein-Uhlenbeck](#)[Travail pratique 1](#)[Processus](#)[racine-carrée](#)[Processus de diffusion avec sauts](#)[Définition](#)[Simulation](#)[Travail pratique 2](#)

Le mouvement brownien multidimensionnel I

Définition

1. Soit $\{\mathbf{W}(t) : t \geq 0\}$ où $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_k(t))$ est formé de k mouvements browniens indépendants.
2. Soit $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(0) + \int_0^t \boldsymbol{\mu}(u) du + \int_0^t \mathbf{A}(u) d\mathbf{W}(u)$ où
 - 2.1 les composantes de \mathbf{W} sont indépendantes,
 - 2.2 $\boldsymbol{\mu}(u)$ est un vecteur déterministe de dimension $d \times 1$,
 - 2.3 $\mathbf{A}(u)$ est une matrice déterministe de dimension $d \times k$.
3. $\{\mathbf{X}(t) : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien de dimension $d \times 1$ satisfaisant :
 - 3.1 Trajectoires continues.
 - 3.2 Pour tout $0 \leq s < t$, $\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(s)$ est de loi $N\left(\int_s^t \boldsymbol{\mu}(u) du, \int_s^t \boldsymbol{\Sigma}(u) du\right)$ où $\boldsymbol{\Sigma}(u) = \mathbf{A}(u) \mathbf{A}^\top(u)$.
 - 3.3 Incréments indépendants : $\forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$,

$$\text{Cov}[\mathbf{X}(t_4) - \mathbf{X}(t_3), \mathbf{X}(t_2) - \mathbf{X}(t_1)] = \mathbf{0}_{d \times d}.$$

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes
principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt

stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus

racine-carrée

Processus de
diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

4. En pratique, il faut estimer $\boldsymbol{\mu}(t)$ et $\mathbf{A}(t)$ pour tout t . Par conséquent, le cas particulier suivant est souvent utilisé.

$$4.1 \quad \boldsymbol{\mu}(u) = \boldsymbol{\mu}_{k \times 1}$$

4.2 $\mathbf{A}(u) = \mathbf{A}$ est une matrice déterministe de dimension $k \times k$ (pas nécessairement triangulaire).

$$4.3 \quad \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(s) = \boldsymbol{\mu}(t - s) + \mathbf{A}(\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(s)).$$

4.4 $\{\mathbf{X}(t) : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien dont les composantes sont corrélées entre elles.

$$4.4.1 \quad \Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^\top.$$

$$4.4.2 \quad \text{Corr}[X_i(t), X_j(t)] = \Sigma_{ij}.$$

$$4.4.3 \quad \text{Cov}[X_i(t), X_j(t)] = t\Sigma_{ij}.$$

Le mouvement brownien multidimensionnel I

Simulation à l'aide de la décomposition de Choleski

1. Puisque Σ est définie-positive, il existe une matrice triangulaire inférieure \mathbf{C} de dimension $k \times k$, appelée la décomposition de Choleski, telle que $\mathbf{C}\mathbf{C}^\top = \Sigma$.
2. Si \mathbf{Z} est $N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k)$ et \mathbf{I}_k est la matrice identité de dimension n , alors $\mathbf{C}\mathbf{Z}$ est de loi $N(\mathbf{0}, \Sigma)$.
3. **Algorithme de simulation**
 - 3.1 $\mathbf{X}_{t_0} = \mathbf{0}_{k \times 1}$
 - 3.2 $\mathbf{X}_{t_i} = \mathbf{X}_{t_{i-1}} + \boldsymbol{\mu}(t_i - t_{i-1}) + \sqrt{t_i - t_{i-1}}\mathbf{C}\mathbf{Z}_i$ où $\{\mathbf{Z}_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ est une suite de vecteurs aléatoires indépendants, tous de loi $N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k)$.
 - 3.3 Répéter les deux étapes précédentes m fois afin d'obtenir m trajectoires.

Le mouvement brownien géométrique (MBG)

Définition

1. Le processus $\{\mathbf{S}(t) : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien géométrique (MBG) de dimension d si $\{\ln \mathbf{S}(t) : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien de dimension d .
2. Par conséquent, il suffit de simuler le mouvement brownien avec les algorithmes que nous avons présentés et de prendre l'exponentielle par la suite.

Le mouvement brownien géométrique (MBG)

Propriétés du processus de dimension 1

1. $dS(t) = \mu(t) S(t) dt + \sigma(t) S(t) dW(t)$

1.1 $\mu(t)$ et $\sigma(t)$ étant des fonctions déterministes du temps.

2. $S(t_2) = S(t_1) \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} (\mu(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)) du + \int_{t_1}^{t_2} \sigma(u) dW(u)\right)$

3. Ne peut pas prendre de valeurs négatives en autant que $S(0) \geq 0$.

4. $E_{t_1}[S(t_2)] = S(t_1) \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} \mu(u) du\right)$.

5. Si $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les rendements $\frac{S(t_2)-S(t_1)}{S(t_1)}$, $\frac{S(t_3)-S(t_2)}{S(t_2)}$, ..., $\frac{S(t_n)-S(t_{n-1})}{S(t_{n-1})}$ sont indépendants.

6. Un cas fréquemment utilisé est $\mu(t) = \mu$ et $\sigma(t) = \sigma$.

Le mouvement brownien géométrique (MBG) I

En monde neutre au risque

1. Lors de la tarification de produits dérivés, les prix des titres sous-jacents doivent être simulés en monde neutre au risque.
2. $dS_i(t) = r(t) S_i(t) dt + \sigma_i(t) S_i(t) dB_i^Q(t)$ où
 - 2.1 $\mathbf{B}^Q(t) = (B_1^Q(t), \dots, B_d^Q(t))^T$ et
 - 2.2 $\{\mathbf{B}^Q(t) : t \geq 0\}$ est une Q -MB sans dérive dont les composantes sont corrélées
 - 2.3 $r(t)$ est le taux spot sans risque au temps t . Pour l'instant, nous supposons $r(t)$ déterministe.

Le mouvement brownien géométrique (MBG) II

En monde neutre au risque

3. Si le droit contingent (produit dérivé) est accessible (c'est-à-dire qu'il existe une stratégie d'investissement autofinancée répliquant les flux monétaires du droit contingent), alors sa valeur au temps $t < t_1$ est

$$\sum_{j=1}^n E^Q [\beta(t, t_j) f_j(\mathbf{S}, t_j)]$$

où $\beta(t, t_j) = \exp\left(-\int_t^{t_j} r(u)\right)$ est le facteur d'actualisation sans risque pour la période $(t, t_j]$ et $f_j(\mathbf{S}, t_j)$ est le flux monétaire versé à la date t_j .

Le mouvement brownien géométrique (MBG) III

En monde neutre au risque

Diffusion

G. Gauthier

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus

racine-carrée

Processus de diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

4. Exemples

4.1 Option d'achat asiatique sur le premier titre :

$E^Q \left[\beta(t, T) \max \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_1(t_j) - K, 0 \right) \right]$ où T est la date d'échéance du contrat et K est le prix d'exercice.

4.2 Obligation payant coupon :

$\sum_{j=1}^n CE^Q [\beta(t, t_j)] + F\beta(t, t_n)$ où C est le coupon, F est la valeur faciale et les t_j sont les dates de coupon.

4.3 Option panier :

$E^Q \left[\beta(t, T) \max \left(\sum_{i=1}^d w_i S_i(T) - K, 0 \right) \right]$ où T est l'échéance du contrat, K est le prix d'exercice et les w_i sont les poids accordés à chacun des titres du panier.

Le mouvement brownien géométrique (MBG) I

Inclure les prix des contrats à terme - taux d'intérêt déterministe.

1. Dans bien des cas, particulièrement pour les matières premières, nous n'observons pas seulement le prix initial $S(0)$ du titre mais aussi une collection de prix de contrats à terme.
2. Soit $F(0, T)$ le prix spécifié par le contrat initié au temps 0 à être payé à la date T .
3. Par convention, ce prix est tel que la valeur initiale du contrat est nulle :

$$\begin{aligned} 0 &= E_0^Q [\beta(0, T) (F(0, T) - S(T))] \\ &= F(0, T) E_0^Q [\beta(0, T)] - E_0^Q [\beta(0, T) S(T)]. \end{aligned}$$

4. Si le taux spot est déterministe, le facteur d'actualisation le sera aussi et $F(0, T) = E_0^Q [S(T)]$.

Le mouvement brownien géométrique (MBG) II

Inclure les prix des contrats à terme - taux d'intérêt déterministe.

5. Supposons que nous observons les prix $F(0, t_1), \dots, F(0, t_n)$ de n contrats à terme de maturité $t_1 < \dots < t_n$.
6. Puisque $dS(t) = r(t)S(t)dt + \sigma S(t)dW^Q(t)$, alors

$$\begin{aligned} & S(t_j) \\ = & S(t_{j-1}) e^{\int_{t_{j-1}}^{t_j} r(u)du - \frac{\sigma^2}{2}(t_j - t_{j-1}) + \sigma(W^Q(t_j) - W^Q(t_{j-1}))} \\ = & \frac{S(t_{j-1}) \beta(0, t_{j-1})}{\beta(0, t_j)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t_j - t_{j-1}) + \sigma(W^Q(t_j) - W^Q(t_{j-1}))} \end{aligned}$$

Le mouvement brownien géométrique (MBG) III

Inclure les prix des contrats à terme - taux d'intérêt déterministe.

7. Par conséquent,

$$7.1 \quad F(0, t_j) = \frac{S(0)}{\beta(0, t_j)} \mathbb{E}_0^Q \left[e^{-\frac{\sigma^2}{2} t_j + \sigma W^Q(t_j)} \right] = \frac{S(0)}{\beta(0, t_j)},$$

$$7.2 \quad \beta(0, t_j) = \frac{S(0)}{F(0, t_j)},$$

$$7.3 \quad S(t_j) = \frac{S(t_{j-1})F(0, t_j) e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t_j - t_{j-1}) + \sigma(W^Q(t_j) - W^Q(t_{j-1}))}}{F(0, t_{j-1})}.$$

7.4 La simulation du processus à partir de l'équation précédente permet d'être cohérent avec le prix des contrats à terme observés.

Dans ce qui suit,

- ▶ r_t désigne le taux d'intérêt spot sans risque au temps t .
- ▶ $\beta(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r_u du\right)$ est le facteur d'actualisation sans risque pour la période $(t, T]$.
- ▶ $P(t, T) = E_t^Q[\beta(t, T)]$ est le prix au temps t d'une obligation zéro-coupon payant un dollar à la date T .

1. Dans le modèle de Vasicek, le taux sans risque est modélisé par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr_t = \kappa (\theta - r_t) dt + \sigma dW_t^Q.$$

où κ , θ et σ sont des constantes positives.

2. L'extension proposée par Ho et Lee permet de reproduire la structure par terme initiale des prix des obligations zéro-coupon observés $P_{obs}(0, T)$, $T \geq 0$:

$$dr_t = \kappa(\theta_t - r_t) dt + \sigma dW_t^Q.$$

où la constante θ est remplacée par une fonction déterministe du temps.

- 2.1 En pratique, nous n'observons que très peu de prix d'obligations zéro-coupon.
- 2.2 La courbe des rendements zéro-coupon peut être déduite à partir des prix observés des acceptations bancaires, des swaps et des obligations avec coupon.
- 2.3 La fonction déterministe $\{\theta_t : t \geq 0\}$ est choisie de sorte que

$$P_{obs}(0, T) = E_0^Q[\beta(0, T)] = E_0^Q\left[e^{-\int_0^T r(u) du}\right].$$

Dans les deux cas, il s'agit d'un modèle gaussien, c'est-à-dire que $(r_{t_1}, \dots, r_{t_n})^\top$ est de loi normale multivariée.

La solution forte du modèle de Ho et Lee est, pour $t_{j-1} < t_j$,

$$r_{t_j} = e^{-\kappa(t_j - t_{j-1})} r(t_{j-1}) + \underbrace{\kappa \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\kappa(t_j - u)} \theta_u du}_{=\mu_r(t_{j-1}, t_j)} + \sigma \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\kappa(t_j - u)} dW_u^Q$$

(preuve page suivante).

Preuve. Posons $Y_t = \int_0^t e^{\kappa u} dW_u^Q$ et notons que

$$r_t = e^{-\kappa t} \left(r_0 + \kappa \int_0^t e^{\kappa u} \theta_u du + \sigma Y_t \right)$$

est une fonction du temps t et de Y . Ainsi, en appliquant le lemme d'Itô sur $r(t) = f(t, Y_t)$, il vient

$$\begin{aligned} & dr(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial Y} dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} d\langle Y \rangle_t \\ &= \left(-\kappa e^{-\kappa t} \frac{r_t}{e^{-\kappa t}} + e^{-\kappa t} \kappa e^{\kappa t} \theta_t \right) dt + \sigma e^{-\kappa t} e^{\kappa t} dW_t^Q \\ &= \kappa (\theta_t - r_t) dt + \sigma dW_t^Q \end{aligned}$$

Rappel :

$$r_{t_j} = e^{-\kappa(t_j - t_{j-1})} r_{t_{j-1}} + \mu_r(t_{j-1}, t_j) + \sigma \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\kappa(t_j - u)} dW_u^Q.$$

1. L'espérance conditionnelle.

$$E_{t_{j-1}}^Q [r_{t_j}] = e^{-\kappa(t_j - t_{j-1})} r_{t_{j-1}} + \mu_r(t_{j-1}, t_j).$$

2. La variance conditionnelle.

$$\begin{aligned} \text{Var}_{t_{j-1}}^Q [r_{t_j}] &= E_{t_{j-1}}^Q \left[\left(\sigma \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\kappa(t_j - u)} dW_u^Q \right)^2 \right] \\ &= \sigma^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-2\kappa(t_j - u)} du \\ &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left(1 - e^{-2\kappa(t_j - t_{j-1})} \right). \end{aligned}$$

Comme r est un processus gaussien, alors si Z est $N(0, 1)$

$$r_{t_j} \stackrel{\text{Loi}}{=} E_{t_{j-1}}^Q [r_{t_j}] + \sqrt{\text{Var}_{t_{j-1}}^Q [r_{t_j}]} Z$$

1. **Algorithme de simulation.** Si $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, alors

$$r_{t_j} \stackrel{\text{Loi}}{=} e^{-\kappa(t_j - t_{j-1})} r_{t_{j-1}} + \mu_r(t_{j-1}, t_j) + \sigma_r(t_{j-1}, t_j) Z_j.$$

1.1 où $\mu_r(t_{j-1}, t_j) = \kappa \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\kappa(t_j - u)} \theta_u du,$

1.2 $\sigma_r(t_{j-1}, t_j) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t_j - t_{j-1})})}$

1.3 et Z_1, \dots, Z_n sont iid $N(0, 1)$.

Contrairement à l'approximation d'Euler, cette façon de faire ne comporte pas d'erreur de discrétisation.

$$dr_t = \kappa(\theta_t - r_t) dt + \sigma dW_t^Q$$

1. Algorithme de simulation - approximation d'Euler

$$\hat{r}_{t+h} = \hat{r}_t + \kappa(\theta_t - \hat{r}_t)h + \sigma\sqrt{h}Z.$$

1.1 où la longueur de la période de temps h doit être petite

1.2 et Z est $N(0, 1)$.

L'échéance d'une obligation peut être éloignée, nous obligeant à simuler beaucoup de points.

1. Dans plusieurs cas, nous avons besoin non seulement du taux d'intérêt à certaines dates mais aussi du facteur d'actualisation $\beta(t_{j-1}, t_j) = \exp\left(-\int_{t_{j-1}}^{t_j} r_u du\right)$.
2. Dans le cadre de ce modèle, $R(t_{j-1}, t_j) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} r_u du$ est de loi normale.

3. Conditionnellement à $r_{t_{j-1}}$, le couple $(r_{t_j}, R(t_{j-1}, t_j))$ est de loi normale bivariable :

$$N \left(\begin{pmatrix} \mu_r(t_{j-1}, t_j) \\ \mu_R(t_{j-1}, t_j) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_r^2(t_{j-1}, t_j) & \sigma_{r,R}^2(t_{j-1}, t_j) \\ \sigma_{r,R}^2(t_{j-1}, t_j) & \sigma_R^2(t_{j-1}, t_j) \end{pmatrix} \right)$$

(Justifications aux pages suivantes)

$$3.1 \quad \mu_r(t_{j-1}, t_j) = e^{-\kappa(t_j - t_{j-1})} r(t_{j-1}) + \kappa \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\kappa(t_j - u)} \theta_u du$$

$$3.2 \quad \mu_R(t_{j-1}, t_j) = \frac{r(t_{j-1})}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa(t_j - t_{j-1})} \right) + \kappa \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\int_{t_{j-1}}^u e^{-\kappa(u-v)} \theta_v dv \right) du,$$

$$3.3 \quad \sigma_r^2(t_{j-1}, t_j) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} \left(1 - e^{-2\kappa(t_j - t_{j-1})} \right),$$

$$3.4 \quad \sigma_R^2(t_{j-1}, t_j) = \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \left(t_j - t_{j-1} - \frac{2}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa(t_j - t_{j-1})} \right) + \frac{1}{2\kappa} \left(1 - e^{-2\kappa(t_j - t_{j-1})} \right) \right),$$

$$3.5 \quad \sigma_{r,R}^2(t_{j-1}, t_j) = \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \left(1 - 2e^{-\kappa(t_j - t_{j-1})} + e^{-2\kappa(t_j - t_{j-1})} \right).$$

$$\begin{aligned} & \mu_R(t_{j-1}, t_j) \\ = & \mathbb{E}_{t_{j-1}}^Q \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} r_u du \right] \\ = & \mathbb{E}_{t_{j-1}}^Q \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(e^{-\kappa(u-t_{j-1})} r(t_{j-1}) + \kappa \int_{t_{j-1}}^u e^{-\kappa(u-v)} \theta_v dv + \sigma \int_{t_{j-1}}^u e^{-\kappa(u-v)} dW_v^Q \right) du \right] \\ = & \frac{r(t_{j-1})}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa(t_j-t_{j-1})} \right) + \kappa \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\int_{t_{j-1}}^u e^{-\kappa(u-v)} \theta_v dv \right) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_R^2(t_{j-1}, t_j) \\ = & \text{Var}_{t_{j-1}}^Q \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} r_u du \right] \\ = & \text{Var}_{t_{j-1}}^Q \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(e^{-\kappa(u-t_{j-1})} r(t_{j-1}) + \kappa \int_{t_{j-1}}^u e^{-\kappa(u-v)} \theta_v dv + \sigma \int_{t_{j-1}}^u e^{-\kappa(u-v)} dW_v^Q \right) du \right] \\ = & \sigma^2 \text{Var}_{t_{j-1}}^Q \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\int_{t_{j-1}}^u e^{-\kappa(u-v)} dW_v^Q \right) du \right] \\ = & \sigma^2 \text{Var}_{t_{j-1}}^Q \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\int_v^{t_j} e^{-\kappa(u-v)} du \right) dW_v^Q \right] \\ = & \sigma^2 \text{E}_{t_{j-1}}^Q \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{1 - e^{-\kappa(t_j-v)}}{\kappa} \right)^2 dv \right] \\ = & \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \left(t_j - t_{j-1} - \frac{2}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa(t_j-t_{j-1})} \right) + \frac{1}{2\kappa} \left(1 - e^{-2\kappa(t_j-t_{j-1})} \right) \right) \end{aligned}$$

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes
principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt
stochastique**Ornstein-Uhlenbeck**

Travail pratique 1

Processus
racine-carréeProcessus de
diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

$$\begin{aligned} & \sigma_{r,R}^2(t_{j-1}, t_j) \\ = & \text{Cov}_{t_{j-1}}^Q \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} r_u du, r_{t_j} \right] \\ = & \text{Cov}_{t_{j-1}}^Q \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\sigma \int_{t_{j-1}}^u e^{-\kappa(u-v)} dW_v^Q \right) du, \sigma \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\kappa(t_j-v)} dW_v^Q \right] \\ = & \sigma^2 \text{Cov}_{t_{j-1}}^Q \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\int_v^{t_j} e^{-\kappa(u-v)} du \right) dW_v^Q, \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\kappa(t_j-v)} dW_v^Q \right] \\ = & \sigma^2 \mathbb{E}_{t_{j-1}}^Q \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\int_v^{t_j} e^{-\kappa(u-v)} du \right) e^{-\kappa(t_j-v)} dv \right] \\ = & \frac{\sigma^2}{\kappa} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(1 - e^{-\kappa(t_j-v)} \right) e^{-\kappa(t_j-v)} dv \\ = & \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \left(1 - 2e^{-\kappa(t_j-t_{j-1})} + e^{-2\kappa(t_j-t_{j-1})} \right). \end{aligned}$$

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes

principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt

stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus

racine-carrée

Processus de
diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

But de l'exercice. Comparer l'efficacité de la méthode de simulation exacte par rapport à l'approximation d'Euler.

- ▶ Considérons un prêt d'un montant $F = 10^4$ d'une durée de $T = 3$ années.
- ▶ Pour la première année, le taux d'intérêt est r_0 . Il y aura donc un paiement de Fr_0 à effectuer au temps $t = 1$.
- ▶ Pour les deux autres années, nous avons l'option d'échanger le taux courant par la moyenne des taux au cours de l'année précédente, c'est-à-dire qu'aux temps $t \in \{2, 3\}$, les paiements d'intérêt seront $F \min \left(r_{t-1}, \int_{t-2}^{t-1} r_u du \right)$.

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes
principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt
stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus

racine-carrée

Processus de
diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

1. Donnez l'équation théorique permettant d'évaluer l'option.
 2. Pour l'approximation d'Euler, expliquez comment vous calculez le facteur d'actualisation.
 3. Évaluez la valeur de cette option par simulation en utilisant la méthode exacte et l'approximation d'Euler.
 4. Commentez la précision de vos estimations ainsi que les temps de calcul. Faites l'exercice avec différentes tailles de simulation.
- $r_0 = 0.06$, $\kappa = 0.5$, $\theta = 0.07$, et $\sigma = 0.05$.

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes
principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt
stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus

racine-carrée

Processus de
diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

1. Cox, Ingersoll et Ross utilisent le processus racine-carrée étudié par Feller comme modèle de taux :

$$dr_t = \kappa (\theta - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t^Q.$$

où κ , θ et σ sont des constantes positives.

2. En remplaçant la constante θ par une fonction déterministe du temps, il est possible que le prix d'obligation donné par le modèle corresponde aux prix $P_{obs}(0, T)$, $T \geq 0$ observés sur les marchés :

$$dr_t = \kappa (\theta_t - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t^Q.$$

Processus racine-carrée

Propriétés

1. Un avantage est que l'unique solution forte nous donne des taux d'intérêt positifs.
2. Malheureusement, nous ne pouvons pas écrire explicitement ce qu'est cette solution forte.
 - 2.1 Analogie : la fonction de répartition de la loi normale; elle existe mais nous n'avons pas de "formule".
3. Cependant, nous connaissons la fonction de densité de r_{t_j} sachant $r_{t_{j-1}}$, $0 \leq t_{j-1} < t_j$ à une constante près, il s'agit de celle d'une khi-deux non centrale.

Processus racine-carrée

Khi-deux non centrale

1. $\chi_{\nu, \lambda}^2$ est une variable aléatoire de loi khi-carré avec ν degrés de liberté et un paramètre de non-centralité λ si sa fonction de répartition est

$$\begin{aligned} F_{\chi_{\nu, \lambda}^2}(y) &= P(\chi_{\nu, \lambda}^2 \leq y) \mathbf{1}_{y>0} \\ &= e^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^j}{j! 2^{\frac{\nu}{2}+j} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+j\right)} \int_0^y z^{\frac{\nu}{2}+j-1} e^{-\frac{z}{2}} dz \right) \mathbf{1}_{y>0} \end{aligned}$$

2. Pour tout $0 \leq t_{j-1} < t_j$,

$$r_{t_j} = \frac{\sigma^2 \left(1 - e^{-\kappa(t_j - t_{j-1})}\right)}{4\kappa} \chi_{\nu, \lambda_{t_{j-1}}}^2$$

$$\text{où } \nu = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2} \text{ et } \lambda_{t_{j-1}} = \frac{4\kappa e^{-\kappa(t_j - t_{j-1})}}{\sigma^2 \left(1 - e^{-\kappa(t_j - t_{j-1})}\right)} r_{t_{j-1}}.$$

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes

principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt

stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

**Processus
racine-carrée**

Processus de
diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

Processus racine-carrée I

Simuler une v.a. khi-deux non centrale (nb degrés liberté ≥ 1)

1. $X_{\nu,0} = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$ est de loi du khi-deux à ν degrés de liberté
 - 1.1 où ν est un entier ≥ 1
 - 1.2 et Z_1, \dots, Z_{ν} sont iid $N(0, 1)$
2. $X_{\nu,\lambda} = \sum_{i=1}^{\nu} (Z_i + a_i)^2$ est de loi du khi-deux à ν degrés de liberté et de paramètre de non-centralité $\lambda = \sum_{i=1}^{\nu} a_i^2$
 - 2.1 où ν est un entier positif,
 - 2.2 a_1, \dots, a_{ν} sont des constantes,
 - 2.3 Z_1, \dots, Z_{ν} sont iid $N(0, 1)$.

Processus racine-carrée II

Simuler une v.a. khi-deux non centrale (nb degrés liberté ≥ 1)

- Si ν est un entier > 1 alors par récursion, nous avons $X_{\nu,\lambda} = X_{1,\lambda} + X_{\nu-1,0}$ pourvu que $X_{1,\lambda}$ et $X_{\nu-1,0}$ soient indépendantes.
- La relation précédente est aussi valide si $\nu > 1$ est non-entier (Glasserman, p.123).
- Algorithme de simulation** ($\nu \geq 1$).

$$X_{\nu,\lambda} \stackrel{\text{Loi}}{=} \left(Z + \sqrt{\lambda} \right)^2 + X_{\nu-1,0}$$

- où Z et $X_{\nu-1,0}$ sont indépendantes,
- Z de loi $N(0, 1)$
- et $X_{\nu-1,0}$ de loi khi-deux à $\nu - 1$ degrés de liberté.

Processus racine-carrée I

Simuler une v.a. khi-deux non centrale (nb degrés liberté > 0)

1. N est de loi de Poisson d'espérance $\lambda/2$
2. Nous considérons une distribution du khi-carré avec un nombre aléatoire de degrés de liberté : $X_{\nu+2N}$.
3. Pour tout $y > 0$,

$$P(X_{\nu+2N} \leq y | N = j) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}+j} \Gamma(\frac{\nu}{2} + j)} \int_0^y z^{\frac{\nu}{2}+j-1} e^{-\frac{z}{2}} dz.$$

4. Pour tout $y > 0$, $P(X_{\nu+2N} \leq y)$ est la fct. de rép. d'une v. a. de loi $\chi_{\nu, \lambda}^2$ puisque

$$\begin{aligned} & P(X_{\nu+2N} \leq y) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{\nu+2N} \leq y | N = j) P(N = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}+j} \Gamma(\frac{\nu}{2} + j)} \left(\int_0^y z^{\frac{\nu}{2}+j-1} e^{-\frac{z}{2}} dz \right) e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes

principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt

stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus
racine-carréeProcessus de
diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

Processus racine-carrée II

Simuler une v.a. khi-deux non centrale (nb degrés liberté > 0)

5. Algorithme de simulation ($\nu > 0$) :

- 5.1 Simuler une variable aléatoire N de loi de Poisson d'espérance $\lambda/2$.
- 5.2 Simuler une variable de loi du khi-deux à $\nu + 2N$ degrés de liberté.

1. Particularités de Matlab

- 1.1 Matlab possède un générateur de nombres pseudo-aléatoires pour la distribution gamma et pour la distribution de Poisson.
- 1.2 La loi du khi-deux (avec paramètre de non-centralité nul) est un cas particulier de cette distribution.

Simulation d'une loi de Gamma

(Glasserman,p.126)

- ▶ On peut simuler une distribution du khi-carré (cas particulier de la loi gamma) en se basant sur la méthode du ratio d'uniformes.

Simulation d'une loi de Poisson

Méthode lente

- ▶ Si N est de loi de Poisson d'espérance λ , alors
$$P[N = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$
- ▶ N représente le nombre d'événements se produisant durant une période de temps donnée.
- ▶ Le temps écoulé entre deux événements est de loi exponentielle d'espérance $\theta = 1/\lambda$.

Algorithme de simulation (plus lent si $\theta = 1/\lambda$ est petit)

1. Générer $X_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(U_i)$ à partir de variables uniformes U_i indépendantes
2. N est le plus grand entier tel que $\sum_{i=1}^N X_i \leq 1$.

Simulation d'une loi de Poisson

Méthode plus efficace (Glasserman, p.128)

- ▶ Si N est de loi de Poisson d'espérance λ , alors

$$P[N = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$
- ▶ Algorithme basé sur la relation

$$P[N = k] = \frac{\lambda}{k} P[N = k - 1].$$

Algorithme de simulation

1. Initialisation: $p = e^{-\lambda}$; $F = p$; $N = 0$.
2. U est uniforme(0,1)
3. tant que $U > F$,
 - 3.1 $N = N + 1$
 - 3.2 $p = p\lambda / N$
 - 3.3 $F = F + p$

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes
principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt
stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus
racine-carréeProcessus de
diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

Processus de diffusion avec sauts

Cas unidimensionnel

Un des premiers processus de ce type employés en finance est celui de Merton :

$$dS(t) = \mu S(t^-) dt + \sigma S(t^-) dW(t) + S(t^-) dJ(t)$$

1. où μ et σ sont des constantes,
2. W est un mouvement brownien,
3. J est un processus indépendant de W dont les trajectoires sont constantes par morceaux,
4. $S(t) = \lim_{u \downarrow t} S(u)$ est la valeur du processus au temps t , après le saut
5. et $S(t^-) = \lim_{u \uparrow t} S(u)$ est la valeur du processus juste avant le saut.
 - 5.1 Notons qu'en absence de saut un temps t ,
 $S(t^-) = S(t)$.

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes
principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt
stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus
racine-carréeProcessus de
diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

$$J(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (Y_i - 1)$$

- où Y_1, Y_2, \dots sont des variables aléatoires,
- $\{N(t) : t \geq 0\}$ est un processus de comptage.
 - C'est-à-dire qu'il existe des temps d'arrivée aléatoires $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ tels que $N(t) = \sup \{n : \tau_n \leq t\}$.
 - Ainsi, $N(t)$ représente le nombre d'événements survenus au cours de la période de temps $[0, t]$.
- $dJ(t)$ représente le saut du processus J au temps t .
 - L'ampleur du saut est $Y_i - 1$ si $t = \tau_i$ et 0 si t ne coïncide avec aucun τ_i .

4. L'ampleur du i ième saut du processus S est

$$\begin{aligned} S(\tau_i) - S(\tau_i^-) &= S(\tau_i^-) [J(\tau_i) - J(\tau_i^-)] \\ &= S(\tau_i^-) [Y_i - 1] \end{aligned}$$

4.1 Par conséquent, $S(\tau_i) = S(\tau_i^-) Y_i$, c'est-à-dire que les Y_i sont les ratios des prix des titres avant et après les sauts.

4.2 Les sauts sont "multiplicatifs"

4.3 Si $Y_i \geq 0 \forall i$, alors le processus S sera positif.

4.4 $\ln S(\tau_i) = \ln S(\tau_i^-) + \ln Y_i$: les sauts sont "additifs" lorsqu'il est question des rendements.

5. La solution de

$$dS(t) = \mu S(t^-) dt + \sigma S(t^-) dW(t) + S(t^-) dJ(t)$$

est

$$S(t) = S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)} \prod_{i=1}^{N(t)} Y_i.$$

6. Cas particulier choisi par Merton :

6.1 $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ ,
c'est-à-dire que $P(N(t) = j) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^j / j!$.

6.1.1 Les temps entre les arrivées sont de loi Exponentielle
d'espérance $1/\lambda$: $P(\tau_i - \tau_{i-1} \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

6.2 La suite de v.a. Y_1, Y_2, \dots iid de loi Lognormale,
indépendantes du processus N .

6.2.1 $\ln Y_i$ est de loi Normale d'espérance a et de variance
 b^2 .

6.2.2 $\sum_{i=1}^n \ln Y_i$ est $N(na, nb^2)$.

6.2.3 $\prod_{i=1}^n Y_i$ est de loi Lognormale.

6.2.4 Conditionnellement à $N(t)$,

$$S(t) = S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)} \prod_{i=1}^{N(t)} Y_i \text{ est le produit de}$$

v.a. de loi Lognormale. Par conséquent, conditionnellement à $N(t)$, $S(t)$ est aussi de distribution Lognormale.

1. Nous considérons le modèle

$$S(t) = S(0) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)} \prod_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

en supposant que :

- 1.1 N est un processus de Poisson d'intensité λ ,
- 1.2 Y_1, Y_2, \dots sont des variables aléatoires iid (pas nécessairement de loi Lognormale).

Processus de diffusion avec sauts II

Simulation à dates fixes

2. Nous voulons simuler le processus S aux dates

$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ en se basant sur la relation

$$S(t_j) =$$

$$S(t_{j-1}) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_j - t_{j-1}) + \sigma(W(t_j) - W(t_{j-1}))} \prod_{i=N(t_{j-1})+1}^{N(t_j)} Y_i$$

2.1 Notons que, par définition, $\prod_{i=N(t_{j-1})+1}^{N(t_j)} Y_i = 1$ si

$$N(t_j) = N(t_{j-1}).$$

Processus de diffusion avec sauts III

Simulation à dates fixes

3. Il est plus efficace de simuler $X(t_j) = \ln S(t_j)$ car les multiplications sont remplacées par des additions :

$$X(t_j) = X(t_{j-1}) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_j - t_{j-1}) + \sigma (W(t_j) - W(t_{j-1})) + \sum_{i=N(t_{j-1})+1}^{N(t_j)} \ln Y_i$$

- 3.1 Notons que $\sum_{i=N(t_{j-1})+1}^{N(t_j)} \ln Y_i = 0$ si

$$N(t_j) = N(t_{j-1}).$$

- 3.2 En autant que simuler $\ln Y_i$ n'est pas plus long que de simuler Y_i .

4. Algorithme de simulation.

4.1 Générer Z de loi $N(0, 1)$.

4.2 Générer N de loi de Poisson d'espérance $\lambda(t_j - t_{j-1})$.

4.2.1 Si $N = 0$, alors posons $M = 0$ et passer à l'étape 4.

4.3 Si $N > 0$, alors simuler $M = \sum_{i=1}^N \ln Y_i$

4.4 $X(t_j) =$
 $X(t_{j-1}) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_j - t_{j-1}) + \sigma\sqrt{t_j - t_{j-1}}Z + M.$

Notons qu'avec cet algorithme, les temps des sauts ne sont pas simulés explicitement.

But : Évaluation d'une option d'achat en utilisant le modèle de Merton avec sauts.

1. Donnez la formule d'évaluation théorique.
2. Estimez le prix des options à l'aide de la simulation.
 - 2.1 Commentez la précision et l'efficacité de votre méthode.
 - 2.2 Commentez vos résultats.
3. Paramètres :
 - 3.1 $S_0 = 100$, $r = 5\%$, $\sigma = 20\%$,
 - 3.2 $\lambda = 4$. $\ln Y_i$ de loi $N(0.005; 0.05^2)$.
 - 3.3 $K/S_0 \in \{0.8, 0.9, 1, 1.1, 1.2\}$, $T = 1$ où K est le prix d'exercice et T est la date d'échéance.

Introduction

Proc. de diffusion

Le MB

Méthodes exactes

MB unidimensionnel

MB multidimensionnel

Choleski

Composantes
principales

Travail pratique

Définition

MB géométrique

Taux d'intérêt
stochastique

Ornstein-Uhlenbeck

Travail pratique 1

Processus

racine-carrée

Processus de
diffusion avec sauts

Définition

Simulation

Travail pratique 2

Imaginons que des événements se produisent à divers moments ponctuels dans le temps $[0, \infty)$. Pour tout nombre réel $t > 0$, nous définissons $N(t)$ = le nombre d'événements qui se sont produits au cours de la période de temps $(0, t]$.

Définition. Le processus stochastique à temps continu $\{N(t) : t \in [0, \infty)\}$ est un *processus de Poisson d'intensité* λ ($\lambda > 0$) si les trois conditions suivantes sont satisfaites.

Processus de Poisson

Première condition

Pour tout choix de nombres réels $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_3) - N(t_2)$, ..., $N(t_n) - N(t_{n-1})$ sont mutuellement indépendantes.

Autrement dit, les nombres d'événements qui surviennent dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants. Lorsqu'un processus stochastique satisfait la condition (PP1), il est dit à *accroissements indépendants*.

Pour tous nombres réels positifs t et h , le nombre $N(t+h) - N(t)$ d'événements qui se produisent pendant l'intervalle de temps $(t, t+h]$ est insensible à la valeur de t et ne dépend que de la longueur de l'intervalle h .

Dans ce cas, le processus stochastique N est dit *stationnaire*.

Processus de Poisson

Troisième condition

$$P [N(t+h) - N(t) \geq 2] = o(h)$$

$$P [N(t+h) - N(t) \geq 1] = \lambda h + o(h)$$

où $o(h)$ désigne une fonction petit ordre de h , c'est-à-dire qui tend vers 0 infiniment plus rapidement que h : une fonction $f(h)$ est $o(h)$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Par exemple, la fonction h^2 est petit ordre de h tandis que la fonction \sqrt{h} ne l'est pas.

La troisième condition signifie que si la longueur h de l'intervalle de temps sur lequel nous dénombrons les événements est petite, la probabilité d'observer plus d'un événement est quasiment nulle.

Processus de Poisson

Remarque

Puisque nous débutons l'observation du processus au temps $t = 0$, $N(0) = 0$, c'est-à-dire que nous n'avons dénombré aucun événement.

Remarque. La condition (PP3) implique que

$$\begin{aligned} & P[N(t+h) - N(t) = 0] \\ &= 1 - P[N(t+h) - N(t) \geq 1] \\ &= 1 - \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P[N(t+h) - N(t) = 1] \\ &= P[N(t+h) - N(t) \geq 1] - P[N(t+h) - N(t) \geq 2] \\ &= \lambda h + o(h). \end{aligned}$$

Processus de Poisson I

Loi du processus

Théorème. *Pour tout nombre réel $t > 0$, la variable aléatoire $N(t)$ est de loi de Poisson de paramètre λt , c'est-à-dire que pour tout entier n non négatif,*

$$P[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Preuve du théorème. Dans un premier temps, nous supposons que $n = 0$. Puisque les variables aléatoires $N(t+h) - N(t)$ et $N(t) - N(0)$ sont indépendantes,

$$\begin{aligned} & P[N(t+h) = 0] \\ &= P[N(t) - N(0) = 0 \text{ et } N(t+h) - N(t) = 0] \\ &= P[N(t) - N(0) = 0] P[N(t+h) - N(t) = 0] \\ &= P[N(t) = 0] (1 - \lambda h + o(h)) \end{aligned}$$

Processus de Poisson II

Loi du processus

ce qui implique que

$$P[N(t+h) = 0] - P[N(t) = 0] = P[N(t) = 0](-\lambda h + o(h))$$

et, par conséquent, que

$$\frac{P[N(t+h) = 0] - P[N(t) = 0]}{h} = P[N(t) = 0] \frac{(-\lambda h + o(h))}{h}.$$

En prenant la limite lorsque h tend vers 0 de part et d'autre de l'égalité, nous obtenons

$$\frac{d}{dt} P[N(t) = 0] = -\lambda P[N(t) = 0].$$

Puisque $P[N(0) = 0] = 1$, alors la solution de cette équation différentielle est

$$P[N(t) = 0] = e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

Maintenant, pour tout entier positif n ,

$$\begin{aligned} & P [N(t+h) = n] \\ = & \sum_{k=0}^n P [N(t) - N(0) = n - k \text{ et } N(t+h) - N(t) = k] \\ = & \sum_{k=0}^n P [N(t) = n - k] P [N(t+h) - N(t) = k] \\ = & P [N(t) = n] P [N(t+h) - N(t) = 0] \\ & + P [N(t) = n - 1] P [N(t+h) - N(t) = 1] \\ & + P [N(t) \leq n - 2] P [N(t+h) - N(t) \geq 2] \\ = & P [N(t) = n] (1 - \lambda h + o(h)) \\ & + P [N(t) = n - 1] (\lambda h + o(h)) \\ & + P [N(t) \leq n - 2] o(h) \end{aligned}$$

Processus de Poisson IV

Loi du processus
d'où

$$\begin{aligned}
 & P[N(t+h) = n] - P[N(t) = n] \\
 = & P[N(t) = n] (-\lambda h + o(h)) \\
 & + P[N(t) = n-1] (\lambda h + o(h)) \\
 & + P[N(t) \leq n-2] o(h).
 \end{aligned}$$

Divisons par h de part et d'autre de l'égalité :

$$\begin{aligned}
 & \frac{P[N(t+h) = n] - P[N(t) = n]}{h} \\
 = & P[N(t) = n] \frac{(-\lambda h + o(h))}{h} \\
 & + P[N(t) = n-1] \frac{(\lambda h + o(h))}{h} \\
 & + P[N(t) \leq n-2] \frac{o(h)}{h}.
 \end{aligned}$$

Processus de Poisson V

Loi du processus

En prenant la limite lorsque h tend vers 0, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}P[N(t) = n] = \lambda (P[N(t) = n-1] - P[N(t) = n]), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Il nous faut maintenant solutionner ce système d'équations différentielles.

Posons

$$f_n(t) = e^{\lambda t} P[N(t) = n]. \quad (3)$$

Il est bon de remarquer qu'il découle de l'équation (1) que

$$f_0(t) = e^{\lambda t} P[N(t) = 0] = e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = 1 \quad (4)$$

et que pour tout entier positif n ,

$$f_n(0) = e^{\lambda \cdot 0} P[N(0) = n] = P[N(0) = n] = 0. \quad (5)$$

Processus de Poisson VI

Loi du processus

Ainsi, utilisant le système d'équations différentielles (2) et la définition (3), nous pouvons écrire, pour tout entier $n > 0$,

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} f_n(t) \\
 = & \lambda e^{\lambda t} P[N(t) = n] + e^{\lambda t} \frac{d}{dt} P[N(t) = n] \\
 = & \lambda e^{\lambda t} P[N(t) = n] + e^{\lambda t} \lambda (P[N(t) = n-1] - P[N(t) = n]) \\
 = & \lambda e^{\lambda t} P[N(t) = n-1] \\
 = & \lambda f_{n-1}(t).
 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$f_n(t) = f_n(0) + \lambda \int_0^t f_{n-1}(s) ds = \lambda \int_0^t f_{n-1}(s) ds$$

Processus de Poisson VII

Loi du processus

où la dernière égalité provient de la condition de frontières (5). En ajoutant la condition (4), nous obtenons successivement

$$f_0(t) = 1,$$

$$f_1(t) = \lambda \int_0^t f_0(s) ds = \lambda \int_0^t 1 ds = \lambda t,$$

$$f_2(t) = \lambda \int_0^t f_1(s) ds = \lambda \int_0^t \lambda s ds = \lambda^2 \frac{t^2}{2},$$

$$f_3(t) = \lambda \int_0^t f_2(s) ds = \lambda \int_0^t \lambda^2 \frac{s^2}{2} ds = \frac{\lambda^3}{2} \frac{t^3}{3}, \dots$$

Nous pouvons montrer par induction sur n que, pour tout entier non négatif n ,

$$f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \quad (6)$$

Processus de Poisson VIII

Loi du processus

En effet, lorsque $n = 0$ nous avons déjà établi que $f_0(t) = 1$. Supposons que l'égalité (6) est vérifiée pour un certain entier n non négatif et démontrons alors qu'elle l'est aussi pour l'entier $n + 1$ suivant.

$$\begin{aligned}
 f_{n+1}(t) &= \lambda \int_0^t f_n(s) ds \\
 &= \lambda \int_0^t \frac{(\lambda s)^n}{n!} ds \text{ par hypothèse d'induction} \\
 &= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \frac{s^{n+1}}{n+1} \\
 &= \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}
 \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de l'équation (6).

Par conséquent, comme

$$f_n(t) = e^{\lambda t} P[N(t) = n]$$

alors

$$P[N(t) = n] = e^{-\lambda t} f_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \blacksquare$$

Processus de Poisson

Distribution du temps d'attente

Théorème. *Le temps d'attente entre deux événements successifs suit une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire que si les variables aléatoires*

$$\begin{aligned}T_n &= \text{l'instant auquel se produit le } n \text{ ième événement, } n \in \{1, 2, \dots\} \\T_0 &= 0,\end{aligned}$$

alors pour tout entier positif n et pour tout nombre réel positif t ,

$$P[T_n - T_{n-1} \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Processus de Poisson

Démonstration

Preuve du théorème. Soit X , le temps d'attente avant que le premier événement survienne. Pour tout nombre réel positif x ,

$$\begin{aligned} P[X \leq x] &= 1 - P[X > x] \\ &= 1 - P[N(x) = 0] \\ &= 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Plus généralement,

$$\begin{aligned} &P[T_n - T_{n-1} \leq t] \\ &= 1 - P[T_n - T_{n-1} > t] \\ &= 1 - P[N(T_{n-1} + t) - N(T_{n-1}) = 0] \\ &= 1 - P[N(t) = 0] \text{ par (PP2)} \\ &= 1 - e^{-\lambda t}. \blacksquare \end{aligned}$$

Processus de Poisson I

Exemple

Exemple. Les admissions à l'urgence d'un hôpital se font selon un processus de Poisson (ici, l'événement est l'arrivée d'un patient). Nous savons qu'en moyenne un patient se présente à l'urgence à toutes les 12 minutes.

Modélisons cette situation : nous commençons l'observation du processus disons au début du quart de travail de 7 heures du matin, aujourd'hui. Le temps sera exprimé en heures.

$N(t)$ = le nombre de patients s'étant présentés à l'urgence au temps t depuis le moment où nous avons commencé l'observation du processus.

Question. Quelle est l'intensité du processus de Poisson impliquée dans la modélisation?

Réponse. Si, en moyenne, il y a une arrivée de patient toutes les douze minutes, alors il y a, en moyenne, cinq arrivées par heure, c'est-à-dire cinq arrivées par unité de temps. Par conséquent, l'intensité est $\lambda = 5$.

Question. Si le préposé aux admissions prend 3 minutes pour remplir le dossier d'un patient, quelle est la probabilité qu'il ait le temps de se reposer entre l'arrivée de deux patients sachant qu'il était inoccupé lors de l'arrivée du premier des deux?

Réponse. Nous savons que le temps d'attente entre deux arrivées suit une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}$. Or, puisque

$$3 \text{ minutes} = 3 \times \frac{1 \text{ heure}}{60 \text{ minutes}} = \frac{1}{20} \text{ heure},$$

Processus de Poisson IV

Exemple

$$\begin{aligned} & P \left[\begin{array}{c} \text{le préposé a le temps de se reposer} \\ \text{entre l'arrivée de deux patients} \\ \text{sachant qu'il était inoccupé lors de} \\ \text{l'arrivée du premier des deux} \end{array} \right] \\ &= P \left[\underbrace{T_n - T_{n-1}}_{\text{de loi exp}(0,2)} > \frac{1}{20} \right] \\ &= e^{-5 \times \frac{1}{20}} \\ &\approx 0,7788 \end{aligned}$$

Processus de Poisson V

Exemple

Question. Supposons que le préposé aux admissions commence sa journée de travail à 7 heures du matin, qu'il la termine à 15 heures et qu'il va dîner de midi à 13 heures. Quelles sont l'espérance et la variance du temps que le préposé passe, au cours de la journée, à remplir des demandes d'admission?

Réponse. Le nombre X de patients se présentant à l'urgence au cours de la période de travail du préposé est

$$X = \underbrace{N(5) - N(0)}_{\substack{\text{nombre de patients} \\ \text{se présentant au cours} \\ \text{de l'avant-midi.} \\ \text{Poisson}(5 \times 5)}} + \underbrace{N(8) - N(6)}_{\substack{\text{nombre de patients} \\ \text{se présentant au cours} \\ \text{de l'après-midi.} \\ \text{Poisson}(5 \times 2)}} .$$

Le nombre Y de minutes passées à remplir des formulaires d'admission est

$$Y = 3X.$$

Processus de Poisson VI

Exemple

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 E[Y] &= E[3X] = 3E[X] \\
 &= 3E[N(5) - N(0) + N(8) - N(6)] \\
 &= 3(E[N(5) - N(0)] + E[N(8) - N(6)]) \\
 &= 3(25 + 10) = 105
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[Y] &= \text{Var}[3X] = 9\text{Var}[X] \\
 &= 9\text{Var}[N(5) - N(0) + N(8) - N(6)] \\
 &= 9(\text{Var}[N(5) - N(0)] + \text{Var}[N(8) - N(6)]) \text{ par (PP1)} \\
 &= 9(25 + 10) = 315.
 \end{aligned}$$

L'espérance du temps que le préposé passe, au cours de la journée, à remplir des demandes d'admission est de 105 minutes (1 heure et 45 minutes) tandis que son écart-type est de $\sqrt{315} \cong 17,748$ minutes. Bref, nous espérons qu'il a autre chose à faire pour s'occuper au cours de la journée.