

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

La tarification des options américaines

6-601-09 Simulation Monte Carlo

Geneviève Gauthier

HEC Montréal

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Ces notes de cours sont fortement inspirées de

1. P. Glasserman : *Monte Carlo Methods in Financial Engineering* (2004), chapitre 8.

La tarification des options américaines en temps continu requiert

1. un processus $\{U(t) : t \geq 0\}$ représentant la valeur actualisée de l'exercice de l'option au temps t et
2. une famille \mathcal{T} de temps d'arrêt admissibles à valeurs sur l'intervalle $[0, T]$.

Sous certaines conditions sur le modèle (absence d'opportunité d'arbitrage, complétude, etc.), le prix de l'option américaine est

$$V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E^Q [U(\tau)].$$

Introduction

Programmation dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de continuation

Tarification

Approximations paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ Nous allons nous restreindre au cas où les flux monétaires engendrés par l'option sont une fonction de d variables sous-jacentes modélisées à l'aide d'un processus markovien $\{\mathbf{X}_t : t \geq 0\}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d .
- ▶ $\{r(t) : t \geq 0\}$ représente l'évolution du taux instantané sans risque.
- ▶ Le prix de l'option américaine est

$$V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E^Q \left[\exp \left(- \int_0^\tau r(u) du \right) g_\tau(\mathbf{X}_\tau) \right]$$

où g_t est la fonction de paiement en cas d'exercice au temps t .

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ Dans le cas d'une option de vente, le prix est

$$V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E^Q \left[\exp \left(- \int_0^{\tau} r(u) du \right) \max(K - S_{\tau}; 0) \right]$$

où K est le prix d'exercice et $S(t)$ est le prix du titre sous-jacent au temps t .

L'option de vente II

Introduction

- ▶ Dans ce cas particulier, l'instant d'exercice optimal est donné par le temps d'arrêt *le premier instant où le prix du titre sous-jacent atteint une certaine frontière* $\{b^*(t) : t \geq 0\}$:

$$\tau^* = \inf \{t \geq 0 : S_t \leq b^*(t)\}.$$

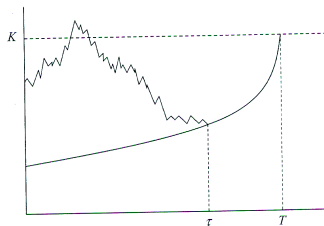


Fig. 8.1. Exercise boundary for American put with payoff $(K - S(t))^+$. The option is exercised at τ , the first time the underlying asset reaches the boundary.

Glasserman, Figure 8.1, p.423

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

La discrétisation du temps

Introduction

Afin d'appliquer la simulation de Monte Carlo à la tarification d'options américaines, il faut se restreindre à un nombre fini de dates d'exercice que nous nommons

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T.$$

- ▶ Dans certains cas, cette restriction fait partie du contrat (ex. options bermudiennes).
- ▶ Dans d'autres cas, il est connu qu'il est optimal d'exercer seulement à certaines dates (ex. dates de versement de dividendes dans le cas des options d'achat, modèle de Black et Scholes).
- ▶ Dans la plupart des cas, cela entraînera une erreur de discrétisation du temps. L'option est alors sous-évaluée car le temps optimal d'exercice ne sera pas correctement simulé.

Introduction

Programmation dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de continuation

Tarification

Approximations paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Parce que

- ▶ nous supposons un nombre fini de dates d'exercice
 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ et
- ▶ parce que le processus \mathbf{X} est markovien,

alors la valeur de l'option peut être évaluée à l'aide d'un programme dynamique.

- ▶ Ceci a été démontré dans le cours de *Méthodes stochastiques*.

Si $\tilde{V}_{t_j}(\mathbf{x})$ dénote la valeur de l'option au temps t_j sous l'hypothèse que $\mathbf{X}_{t_j} = \mathbf{x}$ et que l'option n'a pas encore été exercée, alors

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{t_m}(\mathbf{x}) &= g_{t_m}(\mathbf{x}) \\ \tilde{V}_{t_{j-1}}(\mathbf{x}) &= \max_{j=1,2,\dots,m} \left(g_{t_{j-1}}(\mathbf{x}) ; E^Q \left[D_{t_{j-1},t_j} \tilde{V}_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j}) \mid \mathbf{X}_{t_{j-1}} = \mathbf{x} \right] \right) \quad (1)\end{aligned}$$

où $D_{t_{j-1},t_j} = \exp \left(- \int_{t_{j-1}}^{t_j} r(u) du \right)$ est le facteur d'actualisation pour la période $[t_{j-1}, t_j]$.

Reformulation du problème I

Programmation dynamique

Américain

G. Gauthier

Introduction

**Programmation
dynamique**

Critères d'arrêt

Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques

Arbres aléatoires

Partitionnement

Treillis stochastiques

Régression

Exemple

- ▶ En changeant le numéraire (en travaillant sous la mesure forward neutre, par exemple), il est possible de généraliser le programme dynamique précédent.

Reformulation du problème II

Programmation dynamique

- ▶ Il est possible d'augmenter le vecteur des variables d'états de sorte que le facteur d'actualisation D_{0,t_j} est une fonction déterministe de $\mathbf{X}_{t_j} : D_{0,t_j}(\mathbf{X}_{t_j})$. Il faut que la fonction $D_{\bullet,\bullet}(\mathbf{x})$ satisfasse
 - ▶ $D_{\bullet,\bullet}(\mathbf{x}) \geq 0$
 - ▶ $D_{0,0}(\mathbf{x}) = 1$
 - ▶ $D_{0,t_{j-1}}(\mathbf{X}_{t_{j-1}}) D_{t_{j-1},t_j}(\mathbf{X}_{t_j}) = D_{0,t_j}(\mathbf{X}_{t_j})$
- ▶ $h_{t_j}(\mathbf{x}) = D_{0,t_j}(\mathbf{x}) g_{t_j}(\mathbf{x})$ est la valeur actualisée au temps t_0 de l'exercice au temps t_j .
- ▶ $V_{t_j}(\mathbf{x}) = D_{0,t_j}(\mathbf{x}) \tilde{V}_{t_j}(\mathbf{x})$ dénote la valeur actualisée au temps t_0 de l'option au temps t_j sous l'hypothèse que $\mathbf{X}_{t_j} = \mathbf{x}$ et que l'option n'a pas encore été exercée.

Introduction

Programmation dynamique

Critères d'arrêt

Valeur de continuation

Tarification

Approximations paramétriques

Arbres aléatoires

Partitionnement

Treillis stochastiques

Régression

Exemple

Reformulation du problème III

Programmation dynamique

Partant du programme dynamique précédent :

$$\tilde{V}_{t_m}(\mathbf{x}) = g_{t_m}(\mathbf{x})$$

$$\tilde{V}_{t_{j-1}}(\mathbf{x}) = \max_{j=1, \dots, m} \left(g_{t_{j-1}}(\mathbf{x}_{t_{j-1}}); \mathbb{E}^Q \left[D_{t_{j-1}, t_j}(\mathbf{x}_{t_j}) \tilde{V}_{t_j}(\mathbf{x}_{t_j}) \mid \mathbf{x}_{t_{j-1}} = \mathbf{x} \right] \right),$$

multipliant par le facteur d'actualisation

$$D_{0, t_m}(\mathbf{x}) \tilde{V}_{t_m}(\mathbf{x}) = D_{0, t_m}(\mathbf{x}) g_{t_m}(\mathbf{x})$$

$$D_{0, t_{j-1}}(\mathbf{x}) \tilde{V}_{t_{j-1}}(\mathbf{x}) = \max_{j=1, \dots, m} \left(D_{0, t_{j-1}}(\mathbf{x}) g_{t_{j-1}}(\mathbf{x}_{t_{j-1}}); \mathbb{E}^Q \left[D_{0, t_{j-1}}(\mathbf{x}) D_{t_{j-1}, t_j}(\mathbf{x}_{t_j}) \tilde{V}_{t_j}(\mathbf{x}_{t_j}) \mid \mathbf{x}_{t_{j-1}} = \mathbf{x} \right] \right),$$

nous trouvons

$$V_{t_m}(\mathbf{x}) = h_{t_m}(\mathbf{x})$$

$$V_{t_{j-1}}(\mathbf{x}) = \max_{j=1, \dots, m} \left(h_{t_{j-1}}(\mathbf{x}_{t_{j-1}}); \mathbb{E}^Q \left[V_{t_j}(\mathbf{x}_{t_j}) \mid \mathbf{x}_{t_{j-1}} = \mathbf{x} \right] \right), \quad (2)$$

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Introduction

Critères d'arrêt (Stopping rules)

- ▶ Nous allons présenter une seconde façon d'aborder le problème de tarification des options américaines.
- ▶ Chaque temps d'arrêt τ (pour la chaîne de Markov $\mathbf{X}_{t_0}, \mathbf{X}_{t_1}, \dots, \mathbf{X}_{t_m}$) permet de déterminer un prix (généralement sous-optimal)

$$V_0^{(\tau)}(\mathbf{X}_{t_0}) = \mathbb{E}^Q [h_\tau(\mathbf{X}_\tau)].$$

- ▶ Inversement, chaque règle assignant une "valeur" $\widehat{V}_{t_j}(\mathbf{x})$ à chaque état $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^d$ ($\widehat{V}_{t_m}(\mathbf{x}) = h_{t_m}(\mathbf{x})$) permet de déterminer une règle d'arrêt :

$$\tau = \min \left\{ t_1, \dots, t_m : h_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j}) \geq \widehat{V}_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j}) \right\}.$$

- ▶ La région d'exercice déterminée par \widehat{V}_{t_j} au temps t_j est l'ensemble

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^d : h_{t_j}(\mathbf{x}) \geq \widehat{V}_{t_j}(\mathbf{x}) \right\}$$

Introduction

Programmation
dynamique

Critères d'arrêt

Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques

Arbres aléatoires

Partitionnement

Treillis stochastiques

Régression

Exemple

Introduction

Valeur de continuation

- ▶ Lorsque le nombre de dates d'exercice est fini, il est possible de définir la valeur de continuation comme étant la valeur de détention de l'option plutôt que sa valeur d'exercice. Actualisée au temps $t_0 = 0$, la valeur de continuation est donc

$$C_{t_j}(\mathbf{x}) = E^Q [V_{t_{j+1}}(\mathbf{X}_{t_{j+1}}) | \mathbf{X}_{t_j} = \mathbf{x}].$$

- ▶ Elle satisfait le programme dynamique

$$\begin{aligned} C_{t_m}(\mathbf{x}) &= 0 \\ C_{t_{j-1}}(\mathbf{x}) &= E^Q [\max(h_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j}); C_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j})) | \mathbf{X}_{t_{j-1}} = \mathbf{x}], \quad (3) \\ & \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

- ▶ La valeur de l'option est $C_{t_0}(\mathbf{X}_{t_0})$, la valeur de continuation en $t_0 = 0$.

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt

Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt

**Valeur de
continuation**

Tarifification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Dans ce qui suit, nous esquisserons différentes approches permettant l'évaluation de ces options à l'aide de la simulation de Monte Carlo.

L'évaluation des options américaines peut se faire

- ▶ soit en résolvant le programme dynamique (1), (2) ou (3),
- ▶ soit en tentant d'estimer la frontière d'exercice.

Introduction

Approximations paramétriques

- ▶ Considérons une famille de critères d'arrêt $\{\tau_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathfrak{R}^M\} \subset \mathcal{T}$.
- ▶ Posons $V_0^\theta = \sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}^Q [h_{\tau_\theta}(\mathbf{X}_{\tau_\theta})]$.
- ▶ Notons que V_0^θ est sous-optimal dans le sens où il sous-estime le bon prix :
$$V_0^\theta \leq V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^Q [h_\tau(\mathbf{X}_\tau)].$$
- ▶ L'objectif est d'estimer V_0^θ .

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

**Approximations
paramétriques**
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Méta-algorithme I

Approximations paramétriques

1. Simuler n_1 trajectoires indépendantes $(\mathbf{x}_{t_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{t_m}^{(1)})$,
 \dots , $(\mathbf{x}_{t_1}^{(n_1)}, \dots, \mathbf{x}_{t_m}^{(n_1)})$ de la chaîne de Markov
 $(\mathbf{X}_{t_1}, \dots, \mathbf{X}_{t_m})$.
2. Trouver $\hat{\theta}$ maximisant

$$\widehat{V}_0^{\hat{\theta}} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} h_{\tau_{\hat{\theta}}^{(i)}} \left(\mathbf{x}_{\tau_{\hat{\theta}}^{(i)}} \right)$$

où $\tau_{\hat{\theta}}^{(i)}$ est l'instant d'exercice lors de la i ième trajectoire.

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Méta-algorithme II

Approximations paramétriques

- ▶ Sous l'hypothèse que l'étape 2 puisse être exécutée, nous obtiendrons un estimateur surestimant V_0^θ dans le sens où $E[\widehat{V}_0^{\widehat{\theta}}] \geq V_0^\theta$.
 - ▶ Cela signifie simplement que l'espérance du supremum sur θ est au moins aussi grande que le maximum sur θ des espérances.
 - ▶ Ceci est une application directe de l'inégalité de Jensen.
- ▶ C'est aussi une conséquence du fait que l'estimateur $\widehat{\theta}$ utilise implicitement de l'information provenant de l'évolution future des sous-jacents lors de la détermination du critère d'arrêt.
- ▶ La combinaison de la sous-optimalité $V_0^\theta \leq V_0$ et de la surestimation $E[\widehat{V}_0^{\widehat{\theta}}] \geq V_0^\theta$ produira un biais non prévisible pour V_0 .

Introduction

Programmation dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de continuation

Tarification

Approximations paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ Afin de contrôler le problème causé par l'incertitude sur le signe du biais, il est possible d'ajouter une troisième étape à l'algorithme :
- 3 Fixer $\hat{\theta}$ obtenu à l'étape 2. Simuler n_2 nouvelles trajectoires indépendantes des premières et utiliser l'estimateur

$$\widehat{V}_0^{\hat{\theta}} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} h_{\tau_{\hat{\theta}}^{(i)}} \left(\mathbf{x}_{\tau_{\hat{\theta}}^{(i)}} \right)$$

- ▶ Parce que les nouvelles trajectoires sont indépendantes des premières, $\mathbb{E} \left[\widehat{V}_0^{\hat{\theta}} \mid \hat{\theta} \right] = V_0^{\hat{\theta}} \leq V_0$. Par conséquent, $\mathbb{E} \left[\widehat{V}_0^{\hat{\theta}} \right] \leq V_0$.

Difficultés d'implémentation

Approximations paramétriques

- ▶ Le choix de la forme paramétrique.
- ▶ L'optimisation requise à l'étape 2.

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

**Approximations
paramétriques**
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Valeurs de continuation

Approximations paramétriques

- ▶ Au lieu de paramétriser le critère d'arrêt, il est possible de paramétriser la valeur de continuation.
- ▶ Supposons qu'il existe des vecteurs de paramètres $\theta_1, \dots, \theta_m$ tels que

$$C_{t_j}(\mathbf{x}) \cong C_{t_j}(\mathbf{x}, \theta_j) = \sum_{k=1}^M \theta_{j,k} \psi_k(\mathbf{x})$$

où ψ_1, \dots, ψ_M forment un ensemble de fonctions de base.

- ▶ L'objectif est de choisir les vecteurs de paramètres $\theta_1, \dots, \theta_m$ afin d'approximer la récursion

$$C_{t_{j-1}}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}^Q [\max(h_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j}); C_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j})) | \mathbf{X}_{t_{j-1}} = \mathbf{x}]$$

du programme dynamique (3).

- ▶ L'espérance conditionnelle pourra être estimée à l'aide de la simulation de Monte Carlo.

Introduction

Programmation dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de continuation

Tarifcation

Approximations paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Difficultés d'implémentation

Approximations paramétriques

- ▶ Le choix de la forme paramétrique.
- ▶ Trouver les paramètres optimaux est un défi, du moins numériquement.

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

**Approximations
paramétriques**
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

▶ Avantages

- ▶ Contrairement aux méthodes paramétriques, ne requiert pas d'intuition concernant la forme de la barrière d'exercice, du critère d'arrêt ou de la valeur de continuation.
- ▶ La méthode produit deux estimateurs asymptotiquement sans biais, un biaisé à la hausse et l'autre à la baisse.

▶ Désavantages

- ▶ Le temps de calcul augmente exponentiellement avec le nombre de dates d'exercice.
- ▶ En pratique, plus de $m = 5$ dates est numériquement lourd (Glasserman, p.431).
- ▶ Potentiellement valable pour une option bermudienne mais pas pour les options américaines.

Création d'un estimateur sans biais

Arbres aléatoires

- ▶ Supposons que \hat{v}_n et \hat{V}_n soient des estimateurs biaisés (le premier à la baisse, le second à la hausse) de V_0 .
 - ▶ $E[\hat{v}_n] \leq V_0 \leq E[\hat{V}_n]$.
- ▶ Supposons que chacun des deux estimateurs permette la construction d'un intervalle de confiance symétrique de niveau $1 - \alpha$.
 - ▶ $P[\hat{v}_n - L_n \leq E[\hat{v}_n] \leq \hat{v}_n + L_n] = 1 - \alpha$ et
 - ▶ $P[\hat{V}_n - H_n \leq E[\hat{V}_n] \leq \hat{V}_n + H_n] = 1 - \alpha$.
- ▶ $P[\hat{v}_n - L_n \leq V_0 \leq \hat{V}_n + H_n] \geq 1 - \alpha$ puisque
 - ▶ $P[V_0 > \hat{V}_n + H_n] \leq P[E[\hat{V}_n] > \hat{V}_n + H_n] = \frac{\alpha}{2}$ et
 - ▶ $P[V_0 < \hat{v}_n - L_n] \leq P[E[\hat{v}_n] < \hat{v}_n - L_n] = \frac{\alpha}{2}$.
- ▶ **Conclusion.** $[\hat{v}_n - L_n; \hat{V}_n + H_n]$ est un intervalle de confiance (conservateur) d'un niveau de confiance au moins égal à $1 - \alpha$.

Introduction

Programmation dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de continuation

Tarification

Approximations paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ $b =$ le nombre de branches.
- ▶ **Algorithme itératif** initié à t_0 .
 - ▶ À la j ième étape, simuler b valeur de \mathbf{X}_{t_j} à partir de la distribution conditionnelle de \mathbf{X}_{t_j} sachant $\mathbf{X}_{t_{j-1}}$.

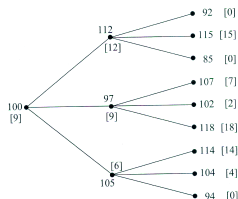


Fig. 8.3. Illustration of random tree and high estimator for a call option with a single underlying asset and a strike price of 100. Labels at each node show the level of the underlying asset and (in brackets) the value of the high estimator.

Glasserman, Figure 8.3, page 433.

Simulation d'un arbre II

Arbres aléatoires

Américain

G. Gauthier

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ Caractéristiques de l'arbre simulé.
 - ▶ C'est un arbre qui ne se recombine pas.
 - ▶ À une date donnée, les valeurs de \mathbf{X}_{t_j} ne sont pas ordonnées et elles sont choisies aléatoirement (par opposition aux arbres classiques pour lesquels les noeuds sont déterministes).
 - ▶ Au temps t_m , il y a b^m noeuds.
 - ▶ C'est cette caractéristique qui est responsable de la croissance exponentielle du temps de calcul en fonction du nombre de dates d'exercice.

Estimateur biaisé à la hausse I

Arbres aléatoires

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ L'estimateur est basé sur le programme dynamique (2).

$$V_{t_m}(\mathbf{x}) = h_{t_m}(\mathbf{x})$$

$$V_{t_{j-1}}(\mathbf{x}) = \max \left(h_{t_{j-1}}(\mathbf{x}_{t_{j-1}}); E^Q [V_{t_j}(\mathbf{x}_{t_j}) | \mathbf{x}_{t_{j-1}} = \mathbf{x}] \right), \\ j = 1, \dots, m$$

- ▶ $\widehat{V}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j}$ est la valeur de l'estimateur au noeud $\mathbf{x}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j}$.

1. À la date d'échéance, nous avons

$$\widehat{V}_{t_m}^{i_1, \dots, i_m} = h_{t_m}(\mathbf{x}_{t_m}^{i_1, \dots, i_m}).$$

Estimateur biaisé à la hausse II

Arbres aléatoires

2. Récursivement, nous définissons

$$\widehat{V}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} = \max \left(h_{t_j} \left(\mathbf{x}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right); \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \widehat{V}_{t_{j+1}}^{i_1, \dots, i_j, i} \right).$$

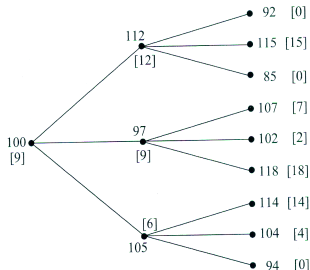


Fig. 8.3. Illustration of random tree and high estimator for a call option with a single underlying asset and a strike price of 100. Labels at each node show the level of the underlying asset and (in brackets) the value of the high estimator.

Glasserman, Figure 8.3, page 433.

Introduction

Programmation dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de continuation

Tarification

Approximations paramétriques

Arbres aléatoires

Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Estimateur biaisé à la hausse III

Arbres aléatoires

Américain

G. Gauthier

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Calculs:

▶ Au temps $t = 1$:

▶ 1ere branche : $\max\left(12; \frac{0+15+0}{3}\right) = \max(12; 5) = 12$

▶ 2e branche : $\max\left(0; \frac{7+2+18}{3}\right) = \max(0; 9) = 9$

▶ 3e branche : $\max\left(5; \frac{14+4+0}{3}\right) = \max(5; 6) = 6$

▶ Au temps $t = 0$:

▶ $\max\left(0; \frac{12+9+6}{3}\right) = \max(0; 9) = 9$

Estimateur biaisé à la hausse IV

Arbres aléatoires

- Cet estimateur est biaisé puisque

$$\mathbb{E} \left[\widehat{V}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \mid \mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right] \geq V_{t_j} \left(\mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right).$$

Preuve. En t_m , nous avons l'égalité. Procédons maintenant par induction.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\widehat{V}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \mid \mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right] \\ = & \mathbb{E} \left[\max \left(h_{t_j} \left(\mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right); \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \widehat{V}_{t_{j+1}}^{i_1, \dots, i_j, i} \right) \mid \mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right] \\ \geq & \max \left(h_{t_j} \left(\mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right); \mathbb{E} \left[\frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \widehat{V}_{t_{j+1}}^{i_1, \dots, i_j, i} \mid \mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right] \right) \quad (\text{inégalité de Jensen}) \\ = & \max \left(h_{t_j} \left(\mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right); \mathbb{E} \left[\widehat{V}_{t_{j+1}}^{i_1, \dots, i_j, 1} \mid \mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right] \right) \\ \geq & \max \left(h_{t_j} \left(\mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right); \mathbb{E} \left[V_{t_{j+1}} \left(\mathbf{X}_{t_{j+1}}^{i_1, \dots, i_j, 1} \right) \mid \mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right] \right) \quad (\text{par hyp. d'induction}) \\ = & V_{t_j} \left(\mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right). \blacksquare \end{aligned}$$

Introduction

Programmation dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de continuation

Tarification

Approximations paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Estimateur biaisé à la hausse V

Arbres aléatoires

Américain

G. Gauthier

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ Il est possible de montrer que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\widehat{V}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \mid \mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right] = V_{t_j} \left(\mathbf{X}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right).$$

- ▶ Cependant, il reste un biais lié au nombre fini de dates d'exercices.

Estimateur biaisé à la baisse I

Arbres aléatoires

- ▶ Le biais à la hausse du précédent estimateur peut être attribué au fait que la décision d'exercice se base sur de l'information future.
 - ▶ En effet, la valeur de continuation est estimée par $\frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \widehat{V}_{t_{j+1}}^{i_1, \dots, i_j, i}$ qui utilise les noeuds simulés dans le futur.
- ▶ Pour enlever cette source de biais, il faut séparer la décision d'exercice du calcul de la valeur de continuation.
 - ▶ L'idée maîtresse est alors d'utiliser une partie des branches de l'arbre pour estimer le critère d'arrêt et l'autre partie pour estimer la valeur de continuation.

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Estimateur biaisé à la baisse II

Arbres aléatoires

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ L'estimateur est basé sur le programme dynamique (2).
- ▶ $\widehat{v}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j}$ est la valeur de l'estimateur au noeud $\mathbf{x}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j}$.

1. À la date d'échéance, nous avons

$$\widehat{v}_{t_m}^{i_1, \dots, i_m} = h_{t_m} \left(\mathbf{x}_{t_m}^{i_1, \dots, i_m} \right).$$

2. Récursivement, nous définissons pour tout $k \in \{1, 2, \dots, b\}$,

$$\widehat{v}_{t_j, k}^{i_1, \dots, i_j} = \begin{cases} h_{t_j} \left(\mathbf{x}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right) & \text{si } \frac{1}{b-1} \sum_{i=1, i \neq k}^b \widehat{v}_{t_{j+1}}^{i_1, \dots, i_j, i} \leq h_{t_j} \left(\mathbf{x}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} \right) \\ \widehat{v}_{t_{j+1}}^{i_1, \dots, i_j, k} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Estimateur biaisé à la baisse III

Arbres aléatoires

$$3. \hat{v}_{t_j}^{i_1, \dots, i_j} = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \hat{v}_{t_{j+1}}^{i_1, \dots, i_j, k}.$$

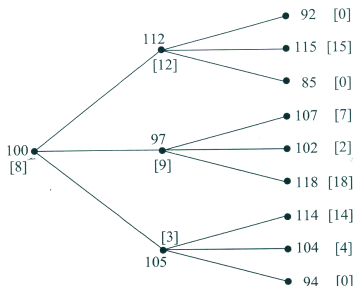


Fig. 8.4. Labels at each node show the level of the underlying asset and the value of the low estimator in brackets.

Glasserman, Figure 8.4, page 436.

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Estimateur biaisé à la baisse IV

Arbres aléatoires

Calculs

- ▶ Au temps $t = 1$
 - ▶ 1ere branche : $\frac{12+12+12}{3} = 12$ puisque
 - ▶ $\max(12; \frac{0+15}{2}) = 12 \Rightarrow$ Exercice $\Rightarrow 12$
 - ▶ $\max(12; \frac{0+0}{2}) = 12 \Rightarrow$ Exercice $\Rightarrow 12$
 - ▶ $\max(12; \frac{15+0}{2}) = 12 \Rightarrow$ Exercice $\Rightarrow 12$
 - ▶ 2e branche : $\frac{18+2+7}{3} = 9$ puisque
 - ▶ $\max(0; \frac{7+2}{2}) = 4.5 \Rightarrow$ Détention $\Rightarrow 18$
 - ▶ $\max(0; \frac{7+18}{2}) = 12.5 \Rightarrow$ Détention $\Rightarrow 2$
 - ▶ $\max(0; \frac{2+18}{2}) = 10 \Rightarrow$ Détention $\Rightarrow 7$
 - ▶ 3e branche : $\frac{0+5+4}{3} = 3$ puisque
 - ▶ $\max(5; \frac{14+4}{2}) = 9 \Rightarrow$ Détention $\Rightarrow 0$
 - ▶ $\max(5; \frac{14+0}{2}) = 7 \Rightarrow$ Détention $\Rightarrow 4$
 - ▶ $\max(5; \frac{4+0}{2}) = 5 \Rightarrow$ Exercice $\Rightarrow 5$

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ Utilisant n répliques indépendantes de l'arbre simulé, il est possible, à l'aide de la variance échantillonnale et du théorème central limite, d'obtenir des intervalles de confiance autour des deux estimateurs.
 - ▶ C'est d'ailleurs l'avantage de simuler les arbres.
 - ▶ Il n'y a pas de calcul de marges d'erreur dans le cas des arbres classiques.
- ▶ Glasserman (section 8.3.3) explique comment implémenter cette méthode efficacement.

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires

Partitionnement

Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ Encore une fois, il s'agit d'évaluer numériquement le programme dynamique (2).

$$V_{t_m}(\mathbf{x}) = h_{t_m}(\mathbf{x})$$

$$V_{t_{j-1}}(\mathbf{x}) = \max_{j=1, \dots, m} \left(h_{t_{j-1}}(\mathbf{X}_{t_{j-1}}); E^Q [V_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j}) | \mathbf{X}_{t_{j-1}} = \mathbf{x}] \right),$$

- ▶ L'idée est de discrétiser le support des variables \mathbf{X}_{t_j} afin de pouvoir estimer l'espérance conditionnelle.

Le partitionnement

Partitionnement de l'espace d'états

- ▶ $A_{j,1}, \dots, A_{j,b_j}$ représente une partition du support de \mathbf{X}_{t_j} .
 - ▶ $b_0 = 1$ afin de trouver un seul prix à la date initiale.
- ▶ $p_{i,k}^j = P[\mathbf{X}_{t_{j+1}} \in A_{j+1,k} \mid \mathbf{X}_{t_j} \in A_{j,i}]$,
 - ▶ $i \in \{1, \dots, b_j\}$, $k \in \{1, \dots, b_{j+1}\}$, $j \in \{0, \dots, m-1\}$.
- ▶ Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, la valeur espérée de l'exercice si $\mathbf{X}_{t_j} \in A_{j,k}$ est $h_{j,k} = \mathbb{E}[h_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j}) \mid \mathbf{X}_{t_j} \in A_{j,k}]$.
- ▶ La méthode propose d'approcher le programme dynamique (2) par le programme dynamique

$$V_{m,k} = h_{m,k}$$

$$V_{j,k} = \max \left(h_{j,k}; \sum_{i=1}^{b_{j+1}} p_{k,i}^j V_{j+1,i} \right),$$

$$j \in \{0, \dots, m-1\}, k \in \{1, \dots, b_j\}$$

- ▶ Cette méthode estime la valeur de l'option par la quantité $V_{0,1}$.

Introduction

Programmation dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de continuation

Tarification

Approximations paramétriques
Arbres aléatoires

Partitionnement

Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Estimation

Partitionnement de l'espace d'états

- ▶ $p_{i,k}^j = P [\mathbf{X}_{t_{j+1}} \in A_{j+1,k} \mid \mathbf{X}_{t_j} \in A_{j,i}]$, $i \in \{1, \dots, b_j\}$,
 $k \in \{1, \dots, b_{j+1}\}$, $j \in \{0, \dots, m-1\}$.
 - ▶ En pratique, $p_{i,k}^j$ est estimé à l'aide de la simulation de Monte Carlo.
 - ▶ Simuler n trajectoires du processus markovien \mathbf{X} .
 - ▶ $N_{i,k}^j$ est le nombre de trajectoires passant de $A_{j,i}$ à $A_{j+1,k}$.
 - ▶ $N_i^j = \sum_{k=1}^{b_{j+1}} N_{i,k}^j$ est le nombre de trajectoires passant par $A_{j,i}$
 - ▶ $\hat{p}_{i,k}^j = N_{i,k}^j / (N_i^j)$.
- ▶ $h_{j,k} = E [h_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j}) \mid \mathbf{X}_{t_j} \in A_{j,k}]$
 - ▶ $\hat{h}_{j,k} = \frac{1}{N_i^j} \sum_{i=1}^n h_{t_j}(\mathbf{x}_{t_j}^{(i)}) 1_{\mathbf{x}_{t_j}^{(i)} \in A_{j,k}}$

Introduction

Programmation dynamique
 Critères d'arrêt
 Valeur de continuation

Tarification

Approximations paramétriques
 Arbres aléatoires

Partitionnement

Treillis stochastiques
 Régression
 Exemple

En pratique...

Partitionnement de l'espace d'états

En pratique, c'est donc le programme dynamique suivant qui est implémenté.

$$\begin{aligned}\widehat{V}_{m,k} &= \widehat{h}_{m,k} \\ \widehat{V}_{j,k} &= \max \left(\widehat{h}_{jk}; \sum_{i=1}^{b_{j+1}} \widehat{p}_{k,i}^j \widehat{V}_{j+1,i} \right), \\ j &\in \{0, \dots, m-1\}, k \in \{1, \dots, b_j\}\end{aligned}$$

- ▶ Encore une fois, nous avons un estimateur biaisé.
 - ▶ Il est possible de montrer que $E \left[\widehat{V}_{0,1} \right] \geq V_{0,1}$.
 - ▶ Quel est le lien entre $V_{0,1}$ et $V_0(\mathbf{X}_0)$?
 - ▶ En général, $V_0(\mathbf{X}_0)$ sous-estime le prix de l'option américaine à cause du nombre fini de dates d'exercices.

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires

Partitionnement

Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Survol I

Treillis stochastiques

Américain

G. Gauthier

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Glasserman, Figure 8.7

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ Ressemble aux arbres stochastiques avec les différences suivantes :
 - ▶ À partir d'un noeud à la date t_j , il est possible de rejoindre tous les noeuds de la date t_{j+1} .
 - ▶ Le nombre de noeuds ne change pas d'une date à l'autre (pas de problème d'explosion du nombre de noeuds).
 - ▶ Il faut cependant un mécanisme pour estimer les probabilités de passer d'un noeud à l'autre (les poids)

- ▶ L'idée est d'estimer la valeur de continuation à partir des trajectoires simulées.
 - ▶ La valeur de continuation $C_{t_j}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}^Q [V_{t_{j+1}}(\mathbf{X}_{t_{j+1}}) | \mathbf{X}_{t_j} = \mathbf{x}]$ est la régression de la valeur de l'option $V_{t_{j+1}}(\mathbf{X}_{t_{j+1}})$ sur l'état actuel \mathbf{x} .
 - ▶ Ceci suggère d'estimer $C_{t_j}(\mathbf{x})$ à partir d'une combinaison linéaire de différentes fonctions de l'état actuel \mathbf{x} .
 - ▶ Estimer les coefficients de cette combinaison linéaire par régression (généralement les moindres carrés).

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques

Régression

Exemple

- Supposons que la valeur de continuation puisse s'exprimer sous la forme

$$C_{t_j}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}^Q [V_{t_{j+1}}(\mathbf{X}_{t_{j+1}}) | \mathbf{X}_{t_j} = \mathbf{x}] = \sum_{r=1}^M \beta_{j,r} \psi_r(\mathbf{x})$$

pour un ensemble de fonctions de base $\psi_r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$,
 $r \in \{1, \dots, M\}$ et des constantes $\beta_{j,r}$,
 $j \in \{0, \dots, m-1\}$.

- ▶ En posant

$$\beta_j = (\beta_{j,1}, \dots, \beta_{j,M})^\top$$

et $\psi(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_M(\mathbf{x}))^\top,$

nous pouvons écrire

$$C_{t_j}(\mathbf{x}) = \psi^\top(\mathbf{x}) \beta_j.$$

Introduction

- Programmation dynamique
- Critères d'arrêt
- Valeur de continuation

Tarifcation

- Approximations paramétriques
- Arbres aléatoires
- Partitionnement
- Treillis stochastiques

Régression

- Exemple

La notation III

Régression

► Par conséquent¹,

$$\beta_j = \left(E \left[\psi(\mathbf{X}_{t_j}) \psi(\mathbf{X}_{t_j})^\top \right] \right)^{-1} E \left[\psi(\mathbf{X}_{t_j}) V_{t_{j+1}} (\mathbf{X}_{t_{j+1}})^\top \right]$$

Afin d'alléger la notation, nous posons

$$\mathbf{B}_\psi = E \left[\psi(\mathbf{X}_{t_j}) \psi(\mathbf{X}_{t_j})^\top \right] \quad (\text{matrice } M \times M),$$

$$\mathbf{B}_{\psi V} = E \left[\psi(\mathbf{X}_{t_j}) V_{t_{j+1}} (\mathbf{X}_{t_{j+1}})^\top \right] \quad (\text{vecteur } M \times 1).$$

Attention! Malgré la notation, \mathbf{B}_ψ et $\mathbf{B}_{\psi V}$ changent au cours du temps. Alors

$$\beta_j = \mathbf{B}_\psi^{-1} \mathbf{B}_{\psi V}.$$

1

$$\psi^\top(\mathbf{x}) \beta_j = E^Q [V_{t_{j+1}} (\mathbf{X}_{t_{j+1}}) | \mathbf{X}_{t_j} = \mathbf{x}]$$

$$\iff \psi(\mathbf{x}) \psi^\top(\mathbf{x}) \beta_j = E^Q [\psi(\mathbf{x}) V_{t_{j+1}} (\mathbf{X}_{t_{j+1}}) | \mathbf{X}_{t_j} = \mathbf{x}]$$

$$\iff \beta_j = \left(\psi(\mathbf{x}) \psi^\top(\mathbf{x}) \right)^{-1} E^Q [\psi(\mathbf{x}) V_{t_{j+1}}^\top (\mathbf{X}_{t_{j+1}}) | \mathbf{X}_{t_j} = \mathbf{x}]$$

Introduction

Programmation dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de continuation

Tarification

Approximations paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Détermination des coefficients I

Régression

- ▶ Considérons n trajectoires indépendantes du processus markovien sous-jacent: $\mathbf{X}_{t_0}^{(i)}, \dots, \mathbf{X}_{t_m}^{(i)}, i \in \{1, \dots, n\}$.
- ▶ Les coefficients $\beta_{j,r}$ peuvent être estimés à l'aide d'un échantillon des paires $\left(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}, V_{t_{j+1}}\left(\mathbf{X}_{t_{j+1}}^{(i)}\right)\right)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, chacune d'elles constituée de l'observation du sous-jacent \mathbf{X}_{t_j} au temps t_j et de la valeur de l'option $V_{t_{j+1}}\left(\mathbf{X}_{t_{j+1}}\right)$ une période plus tard. Plus spécifiquement,

- ▶ $\left(\widehat{\mathbf{B}}_{\psi}\right)_{k,\ell} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_k\left(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}\right) \psi_{\ell}\left(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}\right)$,
- ▶ $\left(\widehat{\mathbf{B}}_{\psi V}\right)_{k,1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_k\left(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}\right) V_{t_{j+1}}\left(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}\right)$.

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques

Régression

Exemple

- ▶ En pratique, la valeur de l'option $V_{t_{j+1}}(\mathbf{x}_{t_j}^{(i)})$ est inconnue et doit être remplacée par son estimation $\widehat{V}_{t_{j+1}}(\mathbf{x}_{t_j}^{(i)})$.
 - ▶ Il faut donc travailler rétroactivement au temps, débutant par la fin des trajectoires.
- ▶ La valeur de continuation peut alors être estimée :
$$\widehat{C}_{t_j}(\mathbf{x}) = \psi^\top(\mathbf{x}) \widehat{\beta}_j.$$

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

1. Simuler n trajectoires indépendantes du processus markovien sous-jacent: $\mathbf{X}_{t_0}^{(i)}, \dots, \mathbf{X}_{t_m}^{(i)}, i \in \{1, \dots, n\}$.
2. À la date terminale t_m , poser la valeur de l'option égale à sa valeur d'exercice : $\widehat{V}_{t_m}^{(i)} = \widehat{V}_{t_m}(\mathbf{X}_{t_m}^{(i)}) = h(\mathbf{X}_{t_m}^{(i)})$.
3. Par récursion, pour $j \in \{m-1, \dots, 1\}$,
 - 3.1 Estimer $(\widehat{\mathbf{B}}_\psi)_{k,\ell} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_k(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}) \psi_\ell(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)})$
 - 3.2 Estimer $(\widehat{\mathbf{B}}_{\psi V})_{k,1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_k(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}) \widehat{V}_{t_{j+1}}^{(i)}$
 - 3.3 Estimer les coefficients $\widehat{\beta}_j = \widehat{\mathbf{B}}_\psi^{-1} \widehat{\mathbf{B}}_{\psi V}$
 - 3.4 Calculer la valeur de continuation $\widehat{C}_{t_j}^{(i)} = \psi^\top(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}) \widehat{\beta}_j$
 - 3.5 Poser $\widehat{V}_{t_j}^{(i)} = \max(h_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}), \widehat{C}_{t_j}^{(i)})$

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques

Régression

Exemple

$$4. \widehat{V}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \widehat{V}_{t_1}^{(i)} \text{ puisque}$$

$$\widehat{V}_{t_0} = \max(0, \widehat{C}_{t_0})$$

$$= \psi^\top(\mathbf{x}_0) \widehat{\beta}_0$$

$$= \psi^\top(\mathbf{x}_0) \left[(\psi(\mathbf{x}_0) \psi^\top(\mathbf{x}_0))^{-1} \left(\psi(\mathbf{x}_0) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \widehat{V}_{t_1}^{(i)} \right) \right]$$

$$= \psi^\top(\mathbf{x}_0) (\psi^\top(\mathbf{x}_0))^{-1} \psi^{-1}(\mathbf{x}_0) \psi(\mathbf{x}_0) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \widehat{V}_{t_1}^{(i)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \widehat{V}_{t_1}^{(i)}$$

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ Le succès de cette méthode dépend de la base $\psi(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_M(\mathbf{x}))^\top$ choisie.
 - ▶ Les polynômes (parfois tempérés par des fonctions qui tendent vers zéro à l'infini) sont des choix populaires.
 - ▶ Ceci se justifie par le développement en série de Taylor des fonctions plusieurs fois différentiables.
 - ▶ Par contre, le nombre de monômes à utiliser croît exponentiellement avec le nombre d de variables sous-jacentes.

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ Ils recommandent de ne pas tenir compte des $\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}$ pour lesquels $h_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}) = 0$ dans le calcul des bêtas.
- ▶ Dans l'algorithme, l'étape 3.5:

$$\widehat{V}_{t_j}^{(i)} = \max \left(h_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}), \widehat{C}_{t_j}^{(i)} \right)$$

est remplacée par

$$\widehat{V}_{t_j}^{(i)} = \max \left(h_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}), \widehat{V}_{t_{j+1}}^{(i)} \right).$$

- ▶ Cette étape est utilisée seulement pour **approximer le critère d'arrêt**

$$\widehat{\tau} = \min \left\{ t_j : h_{t_j}(\mathbf{X}_{t_j}^{(i)}) \geq \widehat{V}_{t_{j+1}}^{(i)} \right\}.$$

- ▶ Une fois ce dernier déterminé, le prix de l'option est évalué selon

$$\begin{aligned} V &= E^Q \left[\exp \left(- \int_0^{\tau^*} r_s ds \right) h_{\tau^*}(\mathbf{X}_{\tau^*}) \right] \\ &\cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp \left(- \int_0^{\hat{\tau}^{(i)}} r_s^{(i)} ds \right) h_{\hat{\tau}^{(i)}}(\mathbf{X}_{\hat{\tau}^{(i)}}^{(i)}) \end{aligned}$$

où τ^* est un temps d'arrêt optimal.

- ▶ Clément, Lamberton et Protter ont démontré que la procédure de Longstaff-Schwartz converge vers le bon prix lorsque le nombre n de trajectoires $\rightarrow \infty$ si la relation $C_{t_j}(\mathbf{x}) = \psi^\top(\mathbf{x}) \beta_j$ est exacte (en supposant qu'il n'y ait qu'un nombre fini de dates d'exercice).
 - ▶ Sinon, l'algorithme sous-estime le prix de l'option puisque le moment d'exercice est sous-optimal.

Exemple 1

Longstaff-Schwartz (Tiré des notes de cours de Jean-Guy Simonato)

- Put américain avec $S_0 = 1$, $K = 1.1$, $T = 3$, $r = 0.06$

Trajectoires de prix d'actions

Trajectoire	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	0.93	0.97	0.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	0.76	0.77	0.90
7	1.00	0.92	0.84	1.01
8	1.00	0.88	1.22	1.34

Exemple II

Longstaff-Schwartz (Tiré des notes de cours de Jean-Guy Simonato)

- ▶ Avec les trajectoires *en jeu* à $t = 2$:

Trajectoire	V.A. à $t = 2$ du FM de l'option à $t = 3$ Y	Valeur de l'action à $t = 2$ X
1	$0.00 \times \exp(-r \times 1) = 0.0000$	1.08
2	—	—
3	$0.07 \times \exp(-r \times 1) = 0.0659$	1.07
4	$0.18 \times \exp(-r \times 1) = 0.1695$	0.97
5	—	—
6	$0.20 \times \exp(-r \times 1) = 0.1883$	0.77
7	$0.09 \times \exp(-r \times 1) = 0.0847$	0.84
8	—	—

- ▶ Y pas définie pour trajectoires 2, 5 et 8 car elles sont hors jeu à la date $t = 2$.

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
asymétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Exemple III

Longstaff-Schwartz (Tiré des notes de cours de Jean-Guy Simonato)

- ▶ En supposant que $\beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2$ soit une bonne approximation de l'espérance conditionnelle $E[Y_i|X_i]$ à $t = 2$, nous avons

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \varepsilon_i \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } 5,$$

$$E[Y_i|X_i] = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2.$$

- ▶ Résultats de l'estimation :

$$\hat{Y}_i = -1.070 + 2.983X_i - 1.813X_i^2,$$

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} -1.070 + 2.983 \times 1.08 - 1.813 \times 1.08^2 \\ -1.070 + 2.983 \times 1.07 - 1.813 \times 1.07^2 \\ -1.070 + 2.983 \times 0.97 - 1.813 \times 0.97^2 \\ -1.070 + 2.983 \times 0.77 - 1.813 \times 0.77^2 \\ -1.070 + 2.983 \times 0.84 - 1.813 \times 0.84^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0369 \\ 0.0461 \\ 0.1176 \\ 0.1520 \\ 0.1565 \end{bmatrix}$$

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Exemple IV

Longstaff-Schwartz (Tiré des notes de cours de Jean-Guy Simonato)

- ▶ À $t = 2$, déterminer la décision d'exercice avant échéance :

Trajectoire	Valeur d'exercice $\max(K - S_{2,1}, 0)$	Estimé de valeur espérée \hat{Y}	Décision d'exercer
1	0.02	0.0369	non
2	-	-	
3	0.03	0.0461	non
4	0.13	0.1176	oui
5	-	-	
6	0.33	0.1520	oui
7	0.26	0.1565	oui
8	-	-	

Introduction

Programmation dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de continuation

Tarification

Approximations paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Exemple V

Longstaff-Schwartz (Tiré des notes de cours de Jean-Guy Simonato)

- ▶ Matrice des flux-monétaires de l'option à $t = 2$:

Trajectoire	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1		-	0.00
2		-	0.00
3		-	0.07
4		0.13	-
5		-	0.00
6		0.33	-
7		0.26	-
8		-	0.00

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression

Exemple

Exemple VI

Longstaff-Schwartz (Tiré des notes de cours de Jean-Guy Simonato)

- ▶ Avec les trajectoires *en jeu* à la date $t = 1$:

Trajectoire	V.A. à $t = 1$ du FM de l'option à $t = 2$	Valeur de l'action à $t = 1$
	Y	X
1	$0.00 \times \exp(-r \times 1) = 0.0000$	1.09
2	—	—
3	—	—
4	$0.13 \times \exp(-r \times 1) = 0.1224$	0.93
5	—	—
6	$0.33 \times \exp(-r \times 1) = 0.3108$	0.76
7	$0.26 \times \exp(-r \times 1) = 0.2448$	0.92
8	$0.00 \times \exp(-r \times 1) = 0.0000$	0.88

- ▶ Y pas défini pour les trajectoires 2, 3 et 5 elles sont hors jeu à la date $t = 1$.

Introduction

Programmation

dynamique

Critères d'arrêt

Valeur de

continuation

Tarification

Approximations

paramétriques

Arbres aléatoires

Partitionnement

Treillis stochastiques

Régression

Exemple

Exemple VII

Longstaff-Schwartz (Tiré des notes de cours de Jean-Guy Simonato)

- Détermination à $t = 1$ de la décision d'exercice avec estimé de la régression c.-à.d.

$$\hat{Y}_i = 2.038 - 3.335X_i + 1.356X_i^2.$$

Trajectoire	Valeur d'exercice $\max(K - S_{2,1}, 0)$	Estimé de valeur espérée \hat{Y}	Décision d'exercer
1	0.01	0.0139	non
2	-	-	
3	-	-	
4	0.17	0.1092	oui
5	-	-	
6	0.34	0.2866	oui
7	0.18	0.1175	oui
8	0.22	0.1533	oui

Introduction

Programmation dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de continuation

Tarification

Approximations paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

Exemple VIII

Longstaff-Schwartz (Tiré des notes de cours de Jean-Guy Simonato)

- Matrice des flux-monétaires de l'option à $t = 1$:

Trajectoire	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	-	-	0.00
2	-	-	0.00
3	-	-	0.07
4	0.17	-	-
5	-	-	0.00
6	0.34	-	-
7	0.18	-	-
8	0.22	-	-

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarification

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression

Exemple

Exemple IX

Longstaff-Schwartz (Tiré des notes de cours de Jean-Guy Simonato)

- ▶ Matrice de décisions d'arrêts :

Trajectoire	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1
4	1	0	0
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques

Régression

Exemple

Exemple X

Longstaff-Schwartz (Tiré des notes de cours de Jean-Guy Simonato)

- Calcul des valeurs espérées :

Trajectoire	Valeur actuelle du FM	Flux monétaires		
		$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0.00	—	—	0.00
2	0.00	—	—	0.00
3	$\exp(-0.06 \times 3) \times 0.07 = 0.0584$	—	—	0.07
4	$\exp(-0.06 \times 1) \times 0.17 = 0.1601$	0.17	—	—
5	0.00	—	—	0.00
6	$\exp(-0.06 \times 1) \times 0.34 = 0.3202$	0.34	—	—
7	$\exp(-0.06 \times 1) \times 0.18 = 0.1695$	0.18	—	—
8	$\exp(-0.06 \times 1) \times 0.22 = 0.2072$	0.22	—	—

Introduction

Programmation

dynamique

Critères d'arrêt

Valeur de

continuation

Optimisation

Approximations

Stochastiques

Arbres aléatoires

Partitionnement

Treillis stochastiques

Régression

Exemple

Exemple XI

Longstaff-Schwartz (Tiré des notes de cours de Jean-Guy Simonato)

Introduction

Programmation
dynamique
Critères d'arrêt
Valeur de
continuation

Tarifcation

Approximations
paramétriques
Arbres aléatoires
Partitionnement
Treillis stochastiques
Régression
Exemple

- ▶ Calcul de la valeur de l'option :

$$\hat{V} = \frac{0.0584 + 0.1601 + 0.3202 + 0.1695 + 0.2072}{8}$$
$$= 0.1144$$