Processus de renouvellement

Solution de l'exercice 7.1

Les modèles probabilistes et stochastiques de la gestion

3-602-84

Geneviève Gauthier

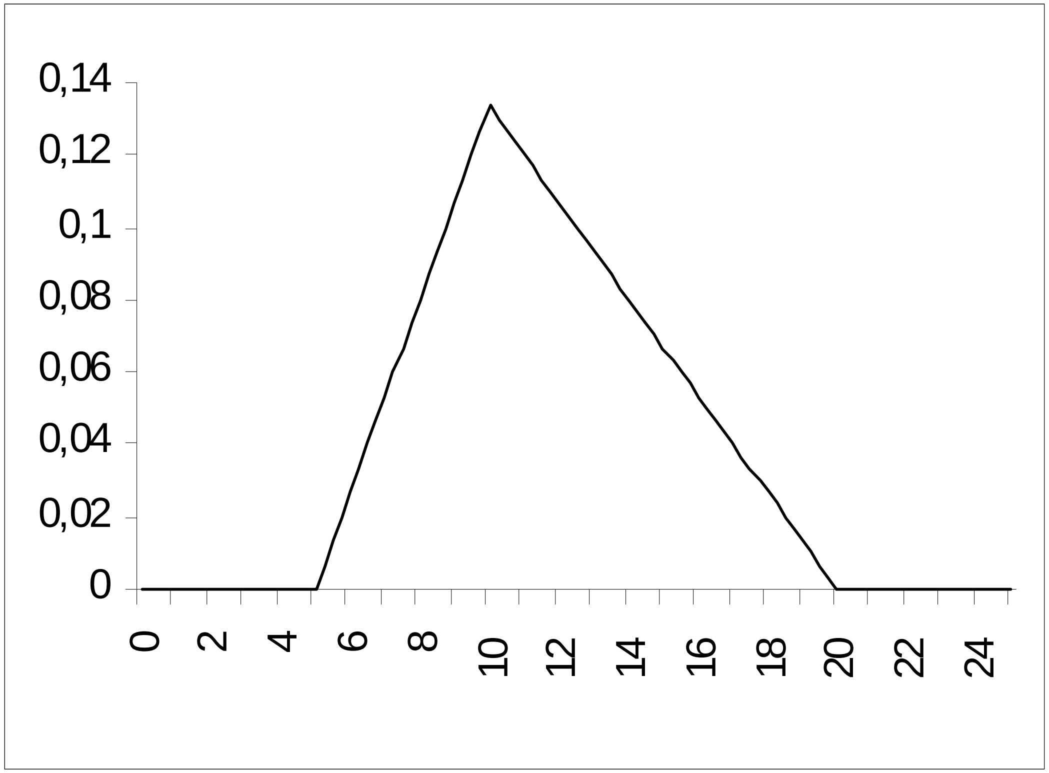
Dernière mise à jour : 15 décembre 2000

Exercice 7.1. *La durée de vie (en jours) X d'une certaine marque de piles suit une loi triangulaire :*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{75}(x-5) & \text{si } 5 < x < 10 \\ \frac{1}{75}(20-x) & \text{si } 10 \leq x < 20 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

a) *Faites le graphe de la fonction de densité de* X.

Fonction de densité f_X de la durée de vie d'une certaine marque de pile



b) *Déterminez la fonction de répartition associée à la distribution de* X *et tracez son graphe.*

Comme

$$\int_5^x \frac{2}{75}(y-5)\,dy = \frac{1}{75}x^2 - \frac{2}{15}x + \frac{1}{3} \tag{2}$$

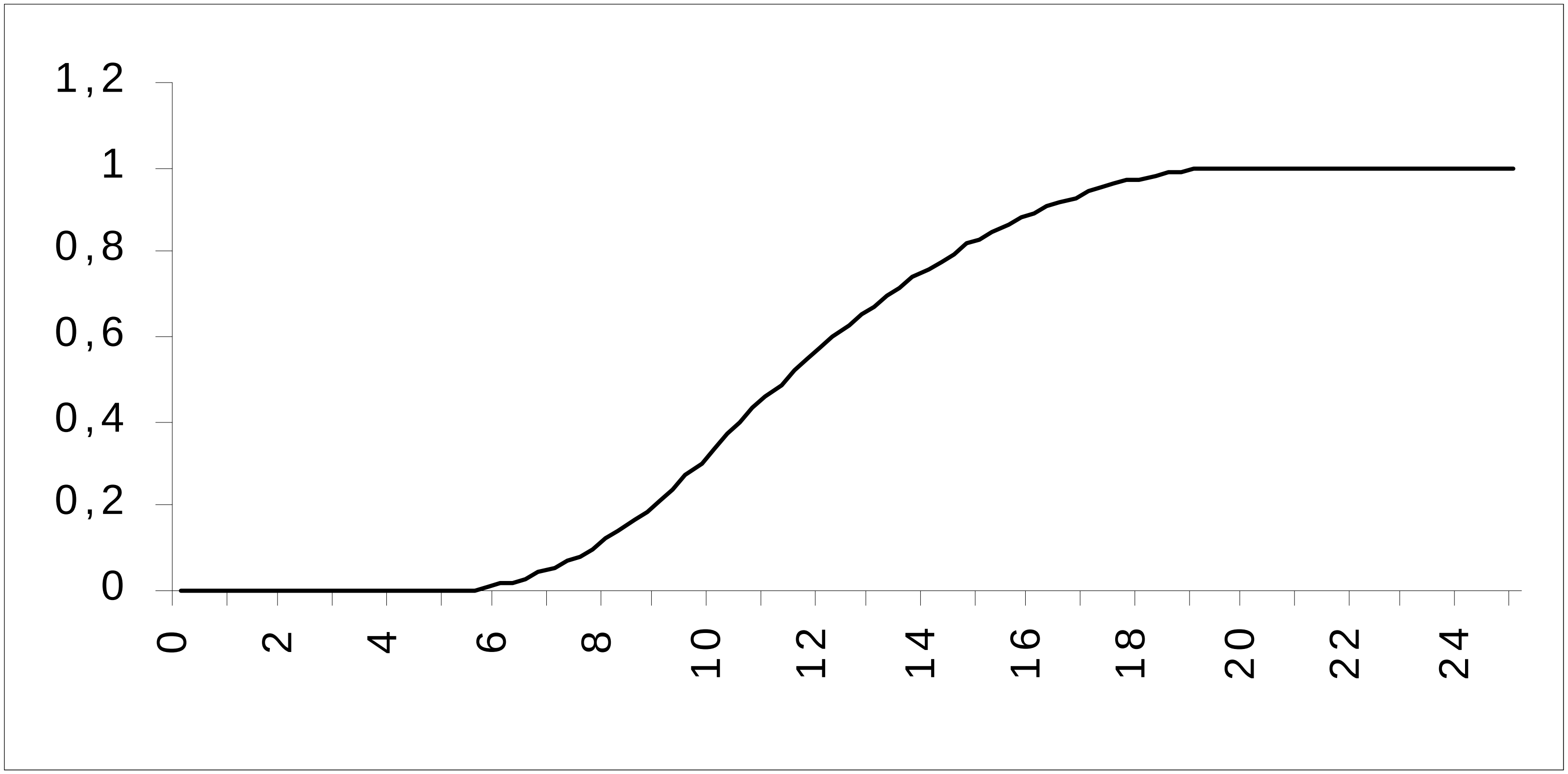
et

$$\int_5^{10} \frac{2}{75}(y-5)\,dy + \int_{10}^x \frac{1}{75}(20-y)\,dy = -\frac{5}{3} + \frac{4}{15}x - \frac{1}{150}x^2 \tag{3}$$

alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5 \\ \frac{1}{75}x^2 - \frac{2}{15}x + \frac{1}{3} & \text{si } 5 < x < 10 \\ -\frac{1}{150}x^2 + \frac{4}{15}x - \frac{5}{3} & \text{si } 10 \leq x < 20 \\ 1 & \text{si } x \geq 20. \end{cases} \tag{4}$$

Fonction de répartition F_X de la durée de vie d'une certaine marque de piles



c) *Déterminez l'espérance et l'écart-type de la durée de vie de ce type de piles.*

$$
\begin{aligned}
\mu &= E\left[X\right] = \int_5^{10} x\frac{2}{75}\left(x-5\right)dx + \int_{10}^{20} x\frac{1}{75}\left(20-x\right)dx && (5)\\
&= \frac{35}{3} \cong 11,6667 && (6)\\
E\left[X^2\right] &= \int_5^{10} x^2\frac{2}{75}\left(x-5\right)dx + \int_{10}^{20} x^2\frac{1}{75}\left(20-x\right)dx && (7)\\
&= \frac{875}{6} \cong 145,83 && (8)\\
Var\left[X\right] &= E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2 && (9)\\
&= \frac{875}{6} - \left(\frac{35}{3}\right)^2 = \frac{175}{18} \cong 9,7222 && (10)\\
\left(Var\left[X\right]\right)^{1/2} &\cong 3,118 && (11)
\end{aligned}
$$

d) *Supposons qu'une de ces piles est utilisée dans un appareil vidéo disponible pour la location au service de l'équipement. Déterminez les fonctions de densité et de répartition de la vie résiduelle de la pile active au moment de la location de l'appareil. Quelles sont son espérance et sa variance?*

La vie résiduelle Y de la pile active au moment de l'emprunt a la fonction de densité suivante:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}(1 - F_X(y)) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{12}$$

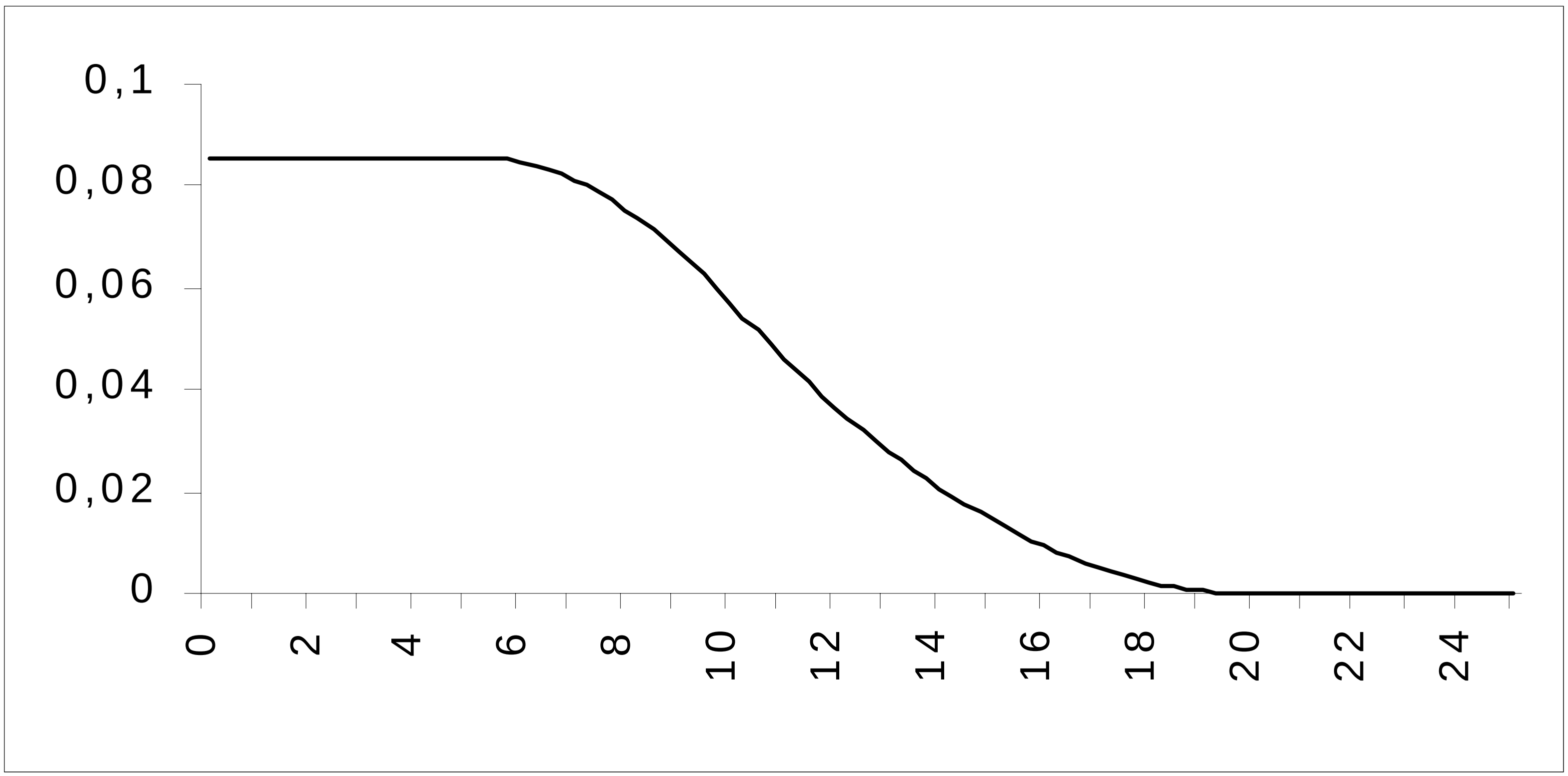
$$= \begin{cases} \frac{1}{\mu}(1 - 0) & \text{si } 0 < y < 5 \\ \\ \frac{1}{\mu}\left(1 - \left(\frac{1}{75}y^2 - \frac{2}{15}y + \frac{1}{3}\right)\right) & \text{si } 5 \leq y < 10 \\ \\ \frac{1}{\mu}\left(1 - \left(-\frac{1}{150}y^2 + \frac{4}{15}y - \frac{5}{3}\right)\right) & \text{si } 10 \leq y < 20 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{13}$$

$$
= \begin{cases} \frac{3}{35} & \text{si } 0 < y < 5 \\ -\frac{1}{875}y^2 + \frac{2}{175}y + \frac{2}{35} & \text{si } 5 \leq y < 10 \\ \frac{1}{1750}y^2 - \frac{4}{175}y + \frac{8}{35} & \text{si } 10 \leq y < 20 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{14}
$$

Vérification: $f_Y(y)$ est bien une fonction de densité car elle est à valeur non négatives et

$$\int_0^5 \frac{3}{35} dy + \int_5^{10} \left(-\frac{1}{875} y^2 + \frac{2}{175} y + \frac{2}{35} \right) dy + \int_{10}^{20} \left(\frac{1}{1750} y^2 - \frac{4}{175} y + \frac{8}{35} \right) dy = 1.$$

Fonction de densité f_Y de la vie résiduelle
de la pile active au moment de l'emprunt

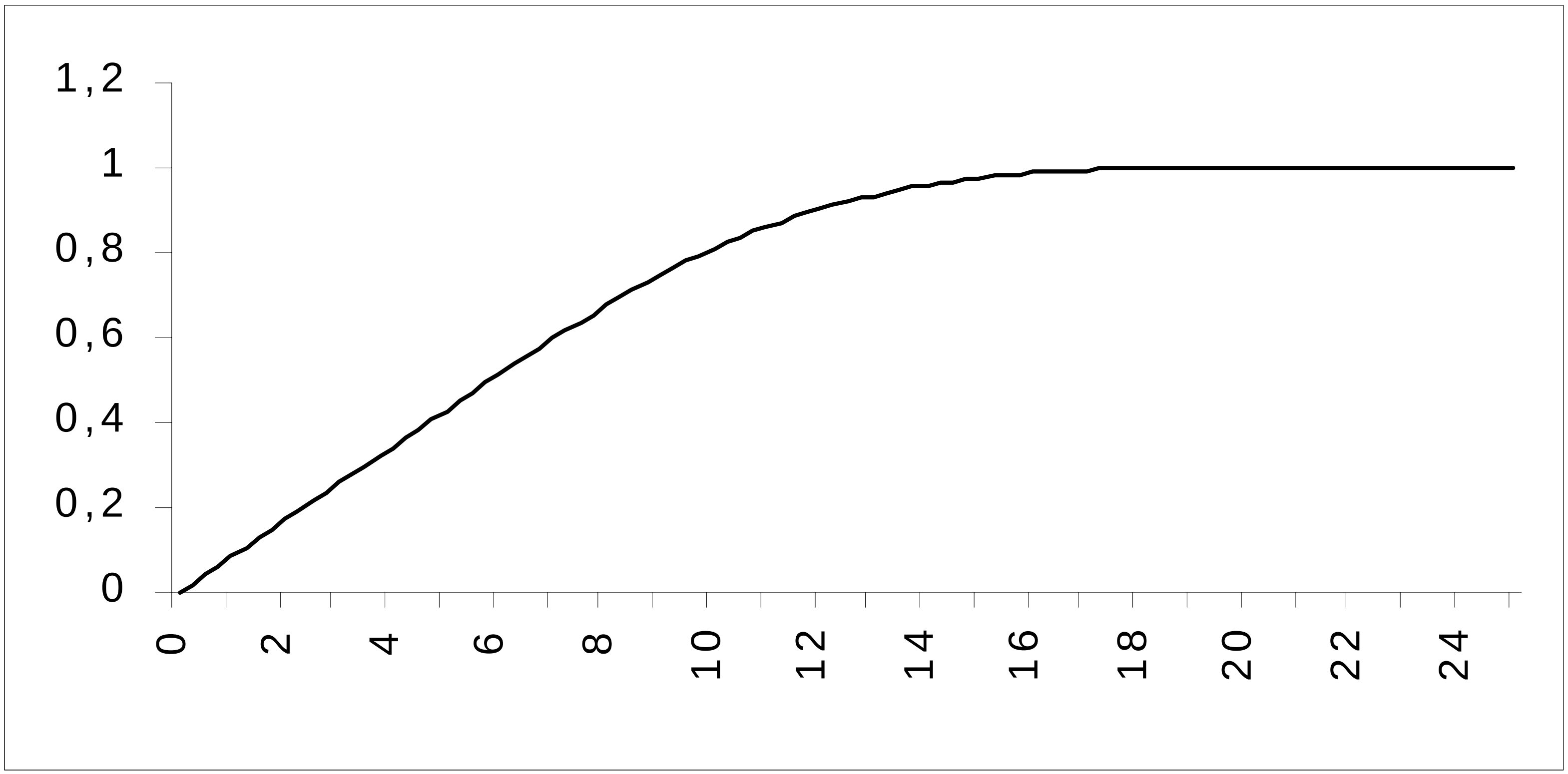


$$\begin{aligned}
E[Y] &= \int_0^5 y\frac{3}{35}dy + \int_5^{10} y\left(-\frac{1}{875}y^2 + \frac{2}{175}y + \frac{2}{35}\right)dy \\
&\quad + \int_{10}^{20} y\left(\frac{1}{1750}y^2 - \frac{4}{175}y + \frac{8}{35}\right)dy && (15) \\
&= \frac{25}{4} = 6,25 && (16) \\
E\left[Y^2\right] &= \int_0^5 y^2\frac{3}{35}dy + \int_5^{10} y^2\left(-\frac{1}{875}y^2 + \frac{2}{175}y + \frac{2}{35}\right)dy \\
&\quad + \int_{10}^{20} y^2\left(\frac{1}{1750}y^2 - \frac{4}{175}y + \frac{8}{35}\right)dy && (17) \\
&= \frac{775}{14} = 55,357 && (18) \\
Var[Y] &= \frac{775}{14} - \left(\frac{25}{4}\right)^2 = \frac{1825}{112} = 16,295 && (19)
\end{aligned}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \int_0^y \frac{3}{35} dy & \text{si } 0 < y < 5 \\ \int_0^5 \frac{3}{35} dy + \int_5^y \left(-\frac{1}{875}x^2 + \frac{2}{175}x + \frac{2}{35}\right) dx & \text{si } 5 < y < 10 \\ \begin{array}{c} \int_0^5 \frac{3}{35} dy + \int_5^{10} \left(-\frac{1}{875}x^2 + \frac{2}{175}x + \frac{2}{35}\right) dx \\ + \int_{10}^y \left(\frac{1}{1750}x^2 - \frac{4}{175}x + \frac{8}{35}\right) dx \end{array} & \text{si } 10 \leq y < 20 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{20}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{3}{35}y & \text{si } 0 < y < 5 \\ \frac{1}{21} + \frac{2}{35}y + \frac{1}{175}y^2 - \frac{1}{2625}y^3 & \text{si } 5 < y < 10 \\ -\frac{11}{21} + \frac{8}{35}y - \frac{2}{175}y^2 + \frac{1}{5250}y^3 & \text{si } 10 \leq y < 20 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{21}$$

Fonction de répartition F_Y de la vie résiduelle
de la pile active au moment de l'emprunt



e) *Supposons, encore une fois, qu'une de ces piles est utilisée dans un appareil vidéo disponible pour la location au service de l'équipement. Vous l'empruntez pour une durée de deux jours. Quelle est la probabilité que la pile soit suffisante pour bien faire fonctionner l'appareil au cours de votre période de location?*

Nous cherchons

$$P[Y > 2] = 1 - P[Y \leq 2] \tag{22}$$

$$= 1 - \int_0^2 f_Y(y)\, dy \tag{23}$$

$$= 1 - \int_0^2 \frac{3}{35} dy \tag{24}$$

$$= \frac{29}{35} \cong 0,82857. \tag{25}$$

f) *Déterminez la fonction de densité de la durée de vie de la pile active au moment de la location de l'appareil. Quelle est son espérance? Commentez.*

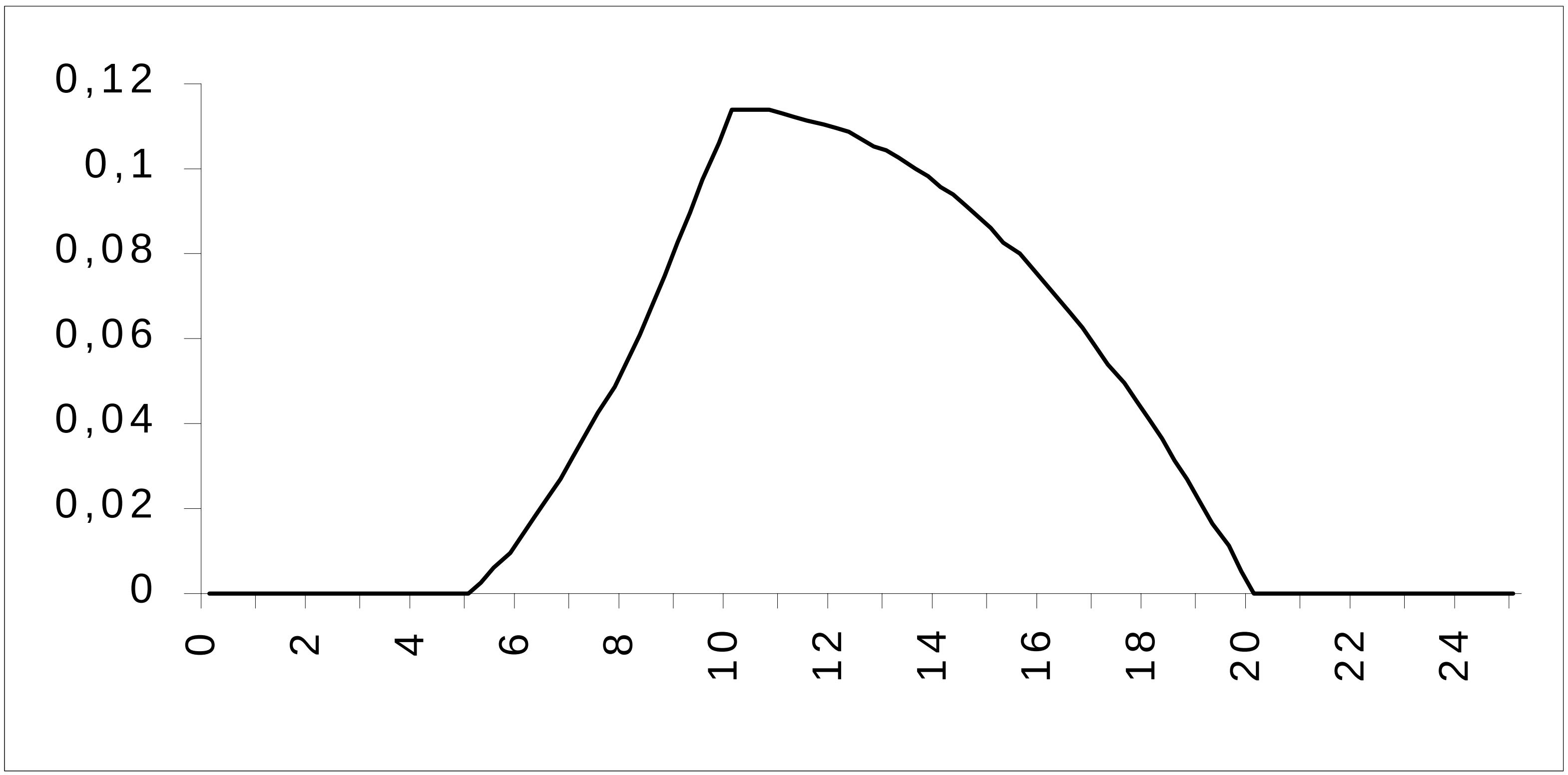
Si V dénote la durée de vie de la pile active au moment de la location de l'appareil alors

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\ v\ f_X(v) & \text{si } v > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{26}$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{35} v \frac{2}{75}(v-5) & \text{si } 5 < v < 10 \\ \frac{3}{35} v \frac{1}{75}(20-v) & \text{si } 10 \leq v < 20 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{27}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{875} v^2 - \frac{2}{175} v & \text{si } 5 < v < 10 \\ -\frac{1}{875} v^2 + \frac{4}{175} v & \text{si } 10 \leq v < 20 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{28}$$

Fonction de densité f_V de la durée de vie de la pile active au moment de l'emprunt



et

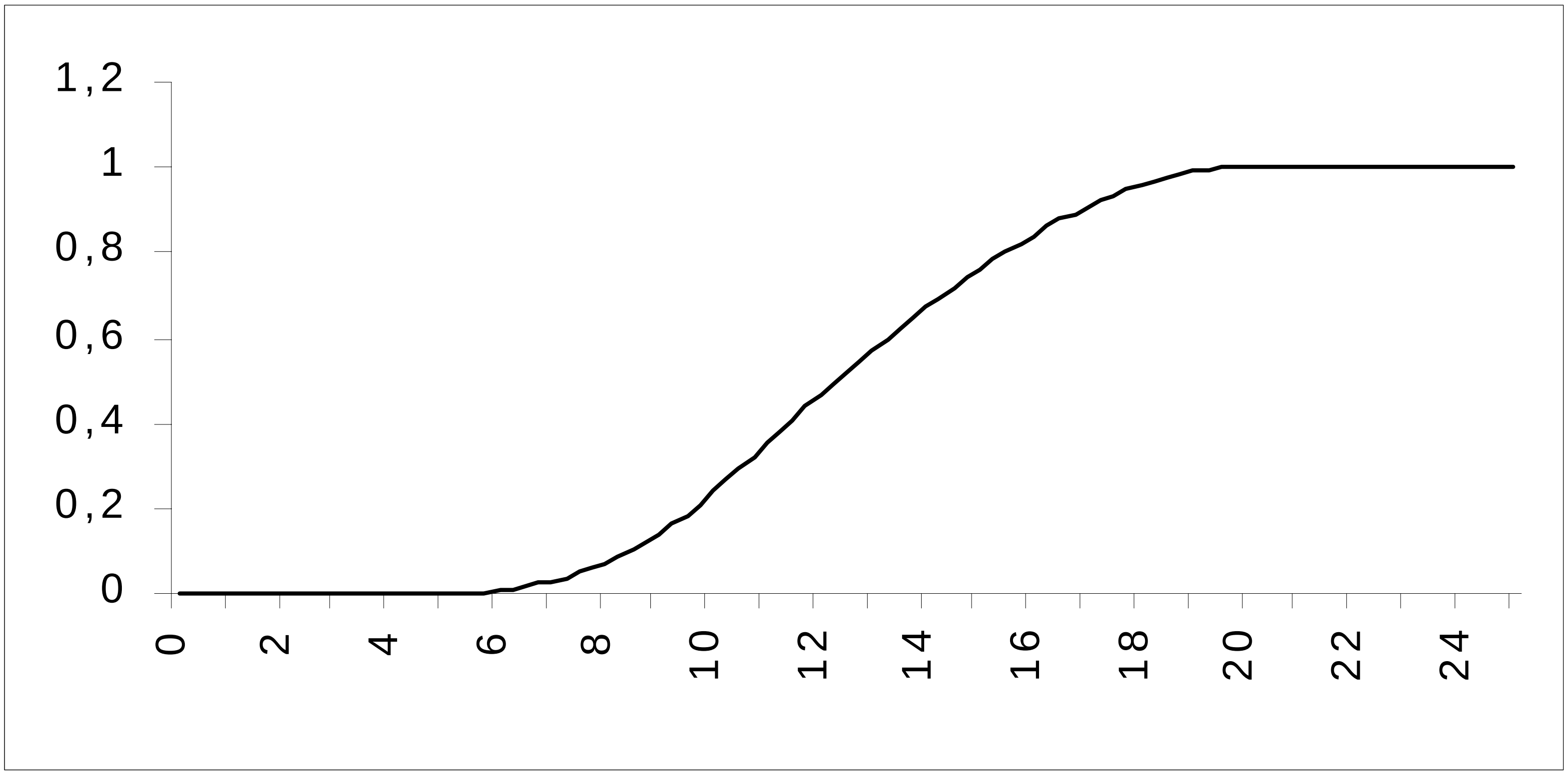
$$E[V] = \int_5^{10} v\frac{3}{35}v\frac{2}{75}(v-5)\,dv + \int_{10}^{20} v\frac{3}{35}v\frac{1}{75}(20-v)\,dv \quad (29)$$

$$= \frac{25}{2} = 12,5. \quad (30)$$

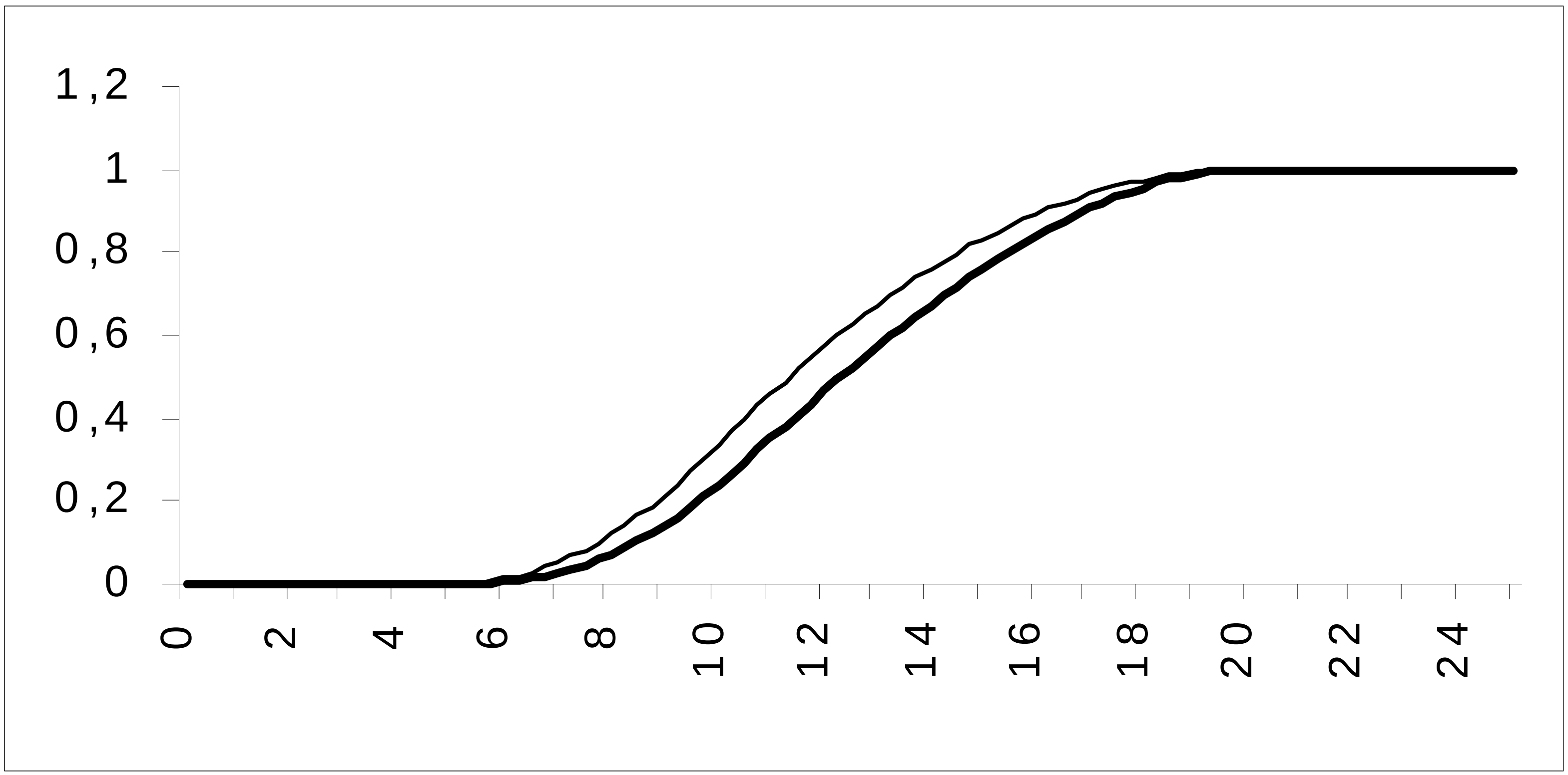
Intuitivement, les piles qui durent plus longtemps ont plus de chances d'être dans l'appareil au moment de la location que celles qui durent peu longtemps. Il semble donc raisonnable que $E[V] \geq E[X]$.

$$
\begin{aligned}
F_V(v) &= \begin{cases}
0 & \text{si } v \leq 5 \\[2ex]
\int_5^v \left(\frac{2}{875}u^2 - \frac{2}{175}u\right) du & \text{si } 5 < v < 10 \\[2ex]
\int_5^{10} \left(\frac{2}{875}u^2 - \frac{2}{175}u\right) du + \int_{10}^v \left(-\frac{1}{875}u^2 + \frac{4}{175}u\right) du & \text{si } 10 \leq v < 20 \\[2ex]
1 & \text{sinon.}
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
0 & \text{si } v \leq 5 \\[2ex]
\frac{1}{21} - \frac{1}{175}v^2 + \frac{2}{2625}v^3 & \text{si } 5 < v < 10 \\[2ex]
-\frac{11}{21} + \frac{2}{175}v^2 - \frac{1}{2625}v^3 & \text{si } 10 \leq v < 20 \\[2ex]
0 & \text{sinon.}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Fonction de répartition F_V de la durée de vie
de la pile active au moment de l'emprunt



Comparaison des fonctions de répartition
de la durée de vie d'une pile (F_X) (tracé fin)
et de la durée de vie de la pile active
au moment de l'emprunt (F_Y) (tracé accentué)



g) *Supposons qu'un autre appareil requiert deux de ces piles et qu'il ne fonctionne plus dès qu'une de ces deux piles est hors d'usage. Calculez les fonctions de répartition et de densité de la variable aléatoire représentant l'instant où une des deux piles cessera de fonctionner ainsi que son espérance.*

Vous pouvez utiliser le résultat suivant : si les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes et identiquement distribuées (avec fonction de répartition F_X), alors pour tout nombre réel x

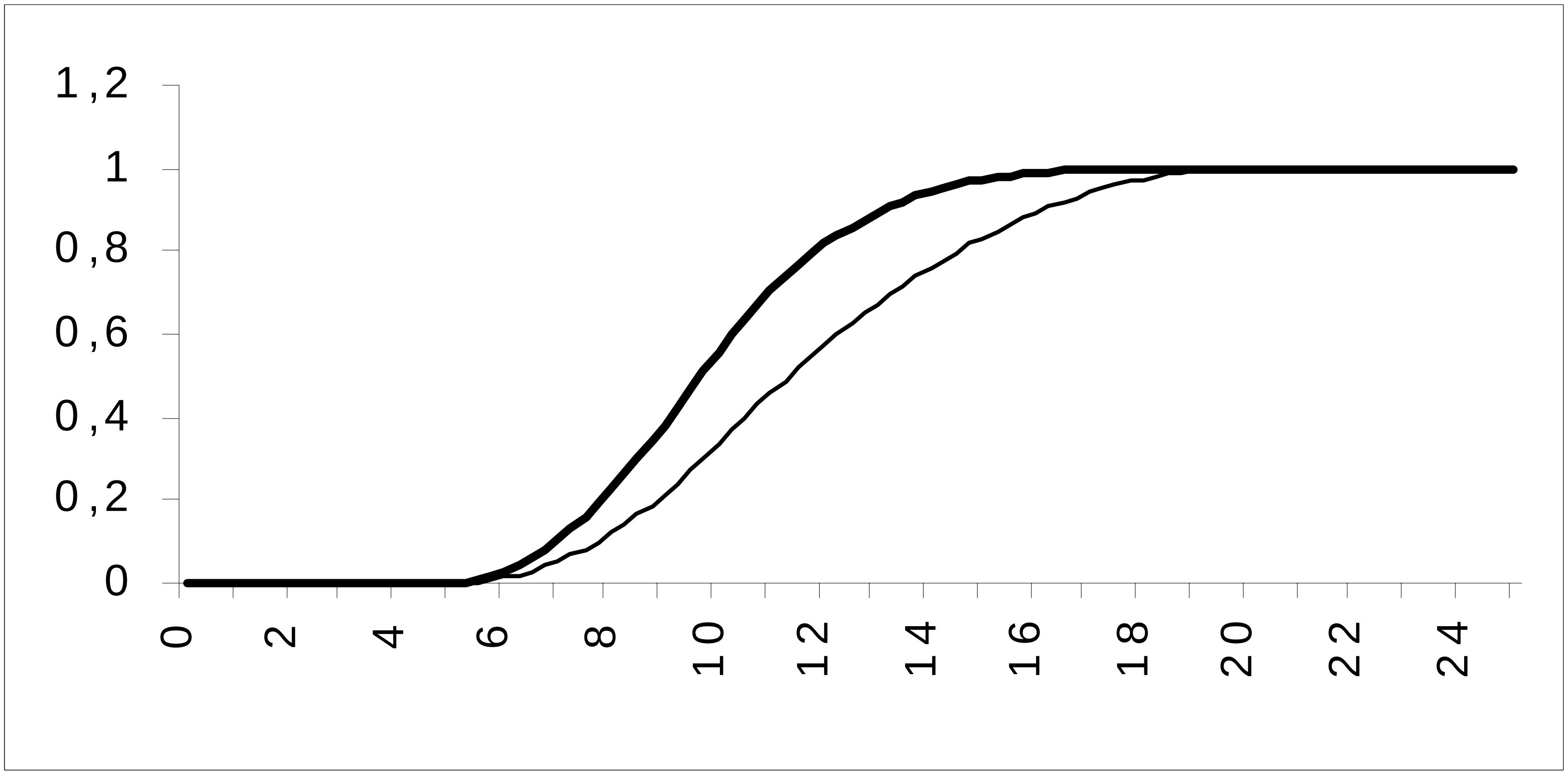
$$
\begin{aligned}
P\left[\min\left(X_1, X_2\right) \leq x\right] &= 1 - P\left[\min\left(X_1, X_2\right) > x\right] && (31) \\
&= 1 - P\left[X_1 > x \text{ et } X_2 > x\right] && (32) \\
&= 1 - P\left[X_1 > x\right] P\left[X_2 > x\right] && (33) \\
&\quad \text{car ces événements sont indépendants} \\
&= 1 - \left(1 - P\left[X_1 \leq x\right]\right)\left(1 - P\left[X_2 \leq x\right]\right) && (34) \\
&= 1 - \left(1 - F_X\left(x\right)\right)\left(1 - F_X\left(x\right)\right) && (35) \\
&= 1 - \left(1 - F_X\left(x\right)\right)^2 . && (36)
\end{aligned}
$$

$$F_{\mathsf{min}(X_1,X_2)}(x) = 1-(1-F_X(x))^2$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5 \\ 1-\left(1-\left(\frac{1}{75}x^2-\frac{2}{15}x+\frac{1}{3}\right)\right)^2 & \text{si } 5 < x < 10 \\ 1-\left(1-\left(-\frac{1}{150}x^2+\frac{4}{15}x-\frac{5}{3}\right)\right)^2 & \text{si } 10 \leq x < 20 \\ 1 & \text{si } x \geq 20. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5 \\ \frac{5}{9} - \frac{8}{45}x + \frac{4}{1125}x^3 - \frac{1}{5625}x^4 & \text{si } 5 < x < 10 \\ -\frac{55}{9} + \frac{64}{45}x - \frac{8}{75}x^2 + \frac{4}{1125}x^3 - \frac{1}{22500}x^4 & \text{si } 10 \leq x < 20 \\ 1 & \text{si } x \geq 20. \end{cases}$$

Fonctions de répartition F_X (tracé fin) et $F_{\min(X_1,X_2)}$ (tracé accentué)



et

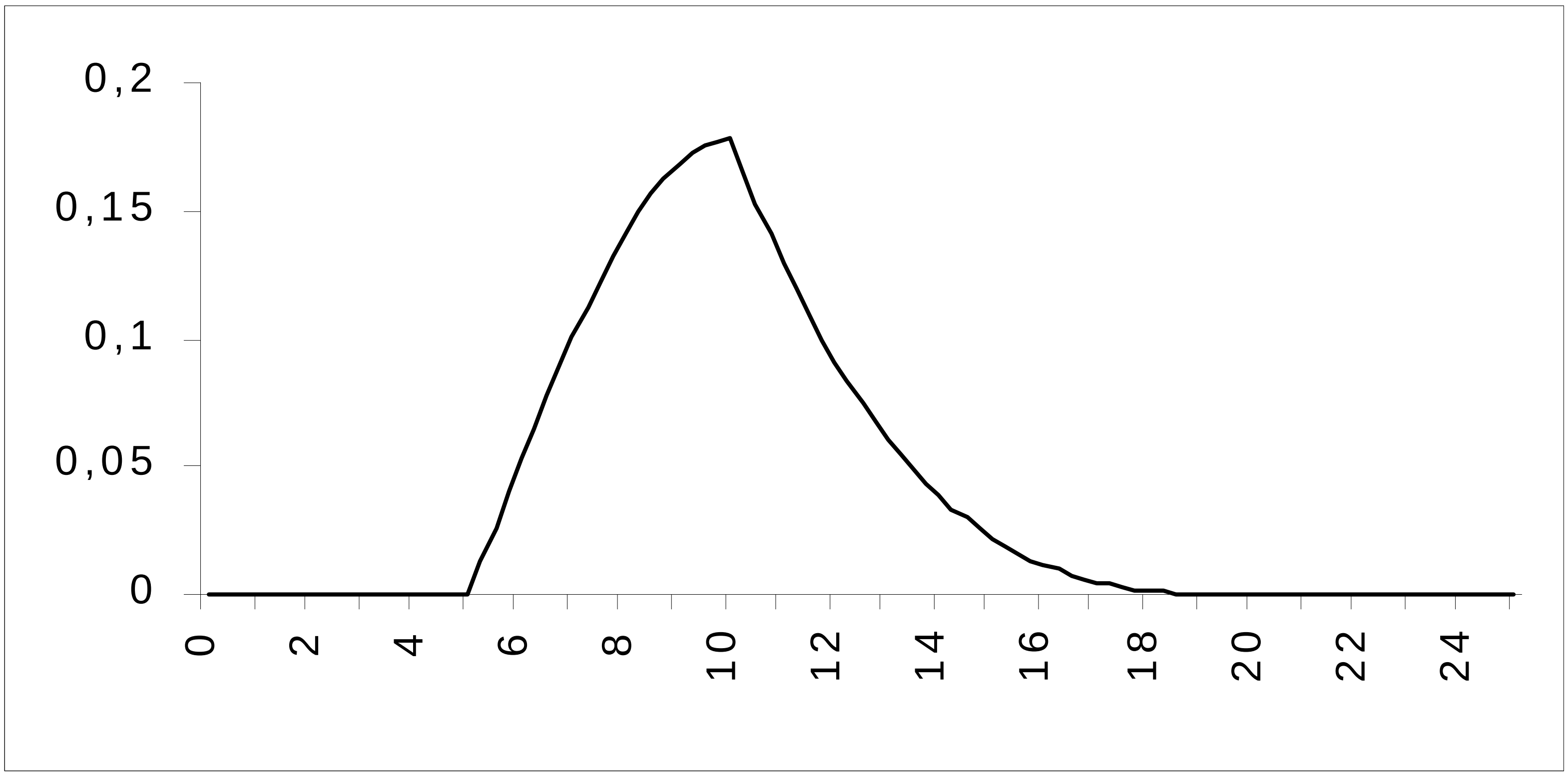
$$f_{\mathsf{min}(X_1,X_2)}(x) \tag{37}$$

$$= \frac{d}{dx}F_{\mathsf{min}(X_1,X_2)}(x) \tag{38}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5 \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{9} - \frac{8}{45}x + \frac{4}{1125}x^3 - \frac{1}{5625}x^4\right) & \text{si } 5 < x < 10 \\ \frac{d}{dx}\left(-\frac{55}{9} + \frac{64}{45}x - \frac{8}{75}x^2 + \frac{4}{1125}x^3 - \frac{1}{22500}x^4\right) & \text{si } 10 \leq x < 20 \\ 1 & \text{si } x \geq 20. \end{cases} \tag{39}$$

$$
= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5 \\ -\frac{4}{5625}x^3 + \frac{4}{375}x^2 - \frac{8}{45} & \text{si } 5 < x < 10 \\ -\frac{1}{5625}x^3 + \frac{4}{375}x^2 - \frac{16}{75}x + \frac{64}{45} & \text{si } 10 \leq x < 20 \\ 1 & \text{si } x \geq 20. \end{cases} \tag{40}
$$

Fonction de densité $f_{\min(X_1,X_2)}$ de l'instant
où une des deux piles cessera de fonctionner



$$
\begin{aligned}
\mu^{'} &= E\left[\min\left(X_1, X_2\right)\right] && (41)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\min(X_1,X_2)}\left(x\right)\ dx && (42)\\
&= \int_{5}^{10} x\left(-\frac{4}{5625}x^3+\frac{4}{375}x^2-\frac{8}{45}\right)dx && (43)\\
&\quad +\int_{10}^{20} x\left(-\frac{1}{5625}x^3+\frac{4}{375}x^2-\frac{16}{75}x+\frac{64}{45}\right)dx\\
&= \frac{89}{9}\cong 9,8889 && (44)
\end{aligned}
$$

h) *Si l'appareil contient deux piles et qu'il est hors d'usage dès qu'une des deux piles est morte, calculez la probabilité que l'appareil est utilisable tout au cours de votre location de deux jours. Notez que lorsque l'appareil est hors d'usage, les deux piles sont changées.*

La vie résiduelle Y' de l'appareil au moment de l'emprunt a la fonction de densité suivante:

$$f_{Y'}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\left(1 - F_{\min(X_1,X_2)}(y)\right) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4$$

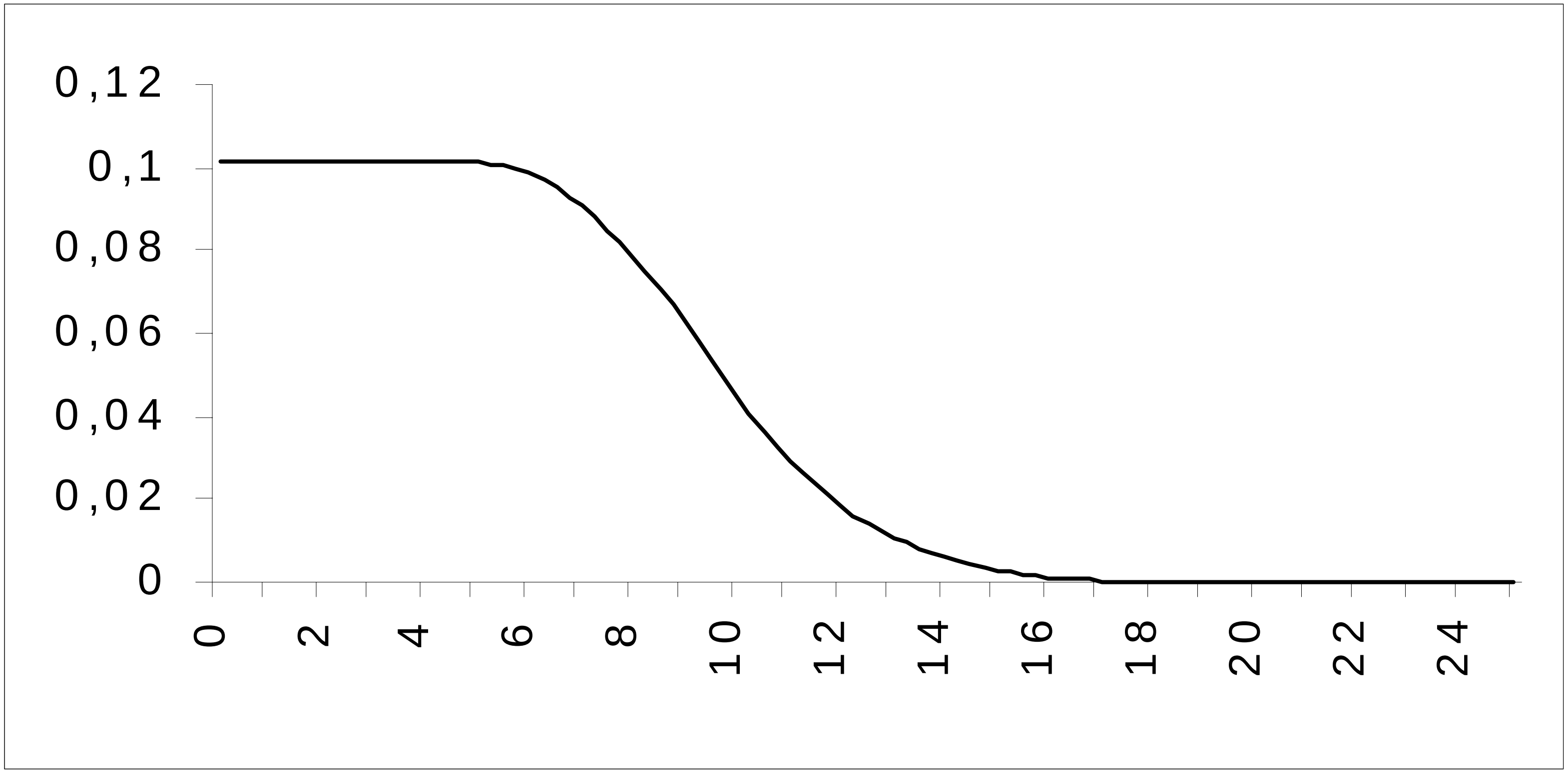
$$= \begin{cases} \frac{9}{89}(1-0) & \text{si } 0 < y < 5 \\ \frac{9}{89}\left(1 - \left(\frac{5}{9} - \frac{8}{45}y + \frac{4}{1125}y^3 - \frac{1}{5625}y^4\right)\right) & \text{si } 5 < y < 10 \\ \frac{9}{89}\left(1 - \left(-\frac{55}{9} + \frac{64}{45}y - \frac{8}{75}y^2 + \frac{4}{1125}y^3 - \frac{1}{22500}y^4\right)\right) & \text{si } 10 \leq y < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{9}{89} & \text{si } 0 < y < 5 \\ \frac{4}{89} + \frac{8}{445}y - \frac{4}{11125}y^3 + \frac{1}{55625}y^4 & \text{si } 5 < y < 10 \\ \frac{64}{89} - \frac{64}{445}y + \frac{24}{2225}y^2 - \frac{4}{11125}y^3 + \frac{1}{222500}y^4 & \text{si } 10 \leq y < 20 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (4$$

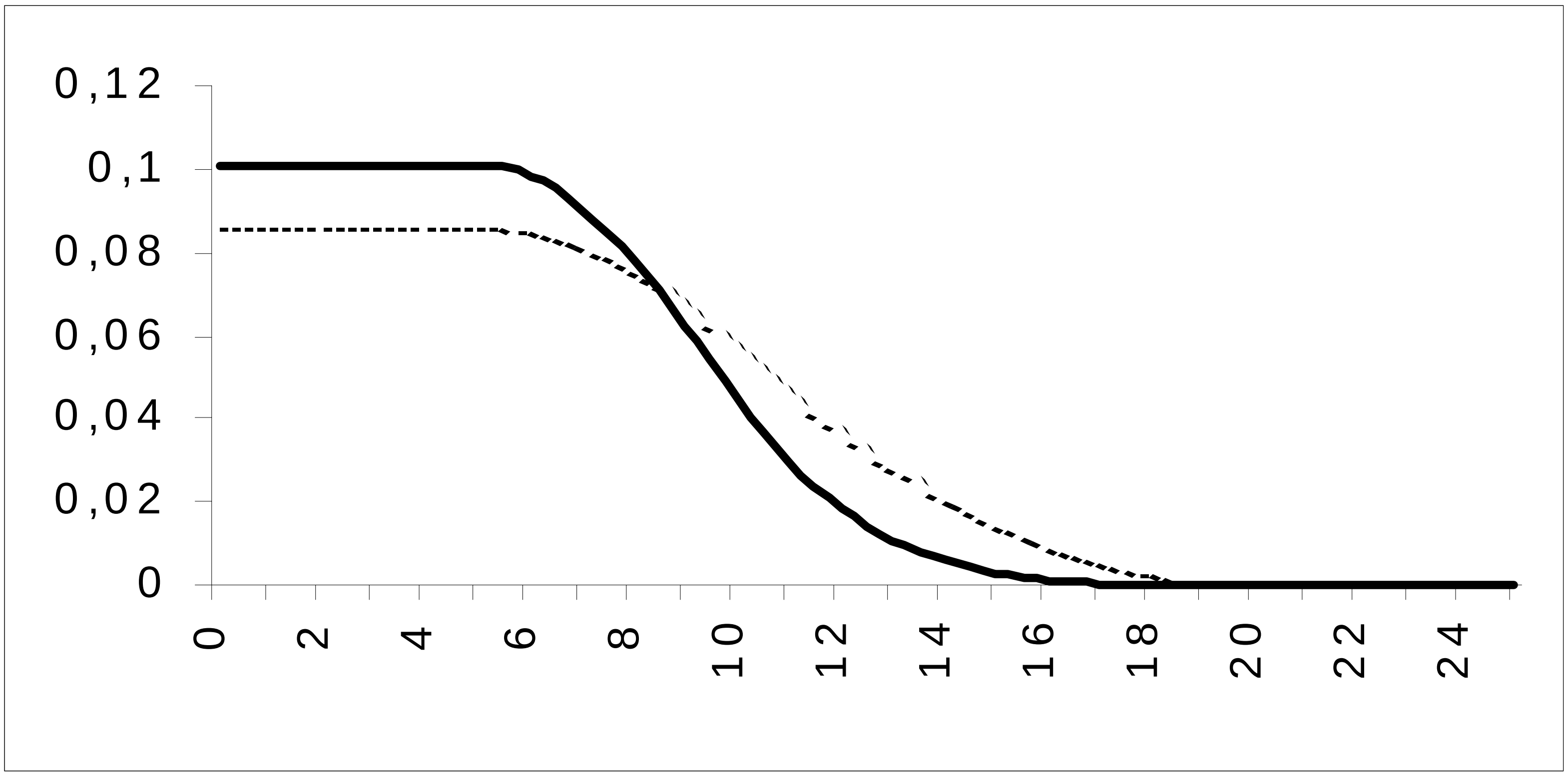
Vérification:

$$\int_0^5 \frac{9}{89}dy + \int_5^{10} \left(\frac{4}{89} + \frac{8}{445}y - \frac{4}{11125}y^3 + \frac{1}{55625}y^4\right) dy$$
$$+ \int_{10}^{20} \left(\frac{64}{89} - \frac{64}{445}y + \frac{24}{2225}y^2 - \frac{4}{11125}y^3 + \frac{1}{222500}y^4\right) dy$$
$$= \quad 1.$$

Fonction de densité $f_{Y'}$ de la vie résiduelle l'appareil



Comparaison de f_Y et $f_{Y'}$



Nous cherchons

$$P\left[Y^{'} > 2\right] = 1 - P\left[Y^{'} \leq 2\right] \quad (47)$$

$$= 1 - \int_{0}^{2} f_{Y'}(y)\, dy \quad (48)$$

$$= 1 - \int_{0}^{2} \frac{9}{89} dy = \frac{71}{89} \cong 0,79775. \quad (49)$$

$$
F_{Y'}(y) = \begin{cases}
0 & \text{si } y \leq 0 \\
\int_0^y \frac{9}{89} du & \text{si } 0 < y < 5 \\
\int_0^5 \frac{9}{89} du + \int_5^y \left(\frac{4}{89} + \frac{8}{445}u - \frac{4}{11125}u^3 + \frac{1}{55625}u^4\right) du & \text{si } 5 < y < 10 \\
\begin{array}{c} \int_0^5 \frac{9}{89} du + \int_5^{10} \left(\frac{4}{89} + \frac{8}{445}u - \frac{4}{11125}u^3 + \frac{1}{55625}u^4\right) du \\ + \int_{10}^y \left(\frac{64}{89} - \frac{64}{445}u + \frac{24}{2225}u^2 - \frac{4}{11125}u^3 + \frac{1}{222500}u^4\right) du \end{array} & \text{si } 10 \leq y < 20 \\
1 & \text{sinon}
\end{cases}
$$

$$
= \begin{cases}
0 & \text{si } y \leq 0 \\
\frac{9}{89}y & \text{si } 0 < y < 5 \\
\frac{9}{89} + \frac{4}{89}y + \frac{4}{445}y^2 - \frac{1}{11125}y^4 + \frac{1}{278125}y^5 & \text{si } 5 < y < 10 \\
-\frac{167}{89} + \frac{64}{89}y - \frac{32}{445}y^2 + \frac{8}{2225}y^3 - \frac{1}{11125}y^4 + \frac{1}{1112500}y^5 & \text{si } 10 \leq y < 20 \\
1 & \text{sinon}
\end{cases}
$$

Fonctions de répartition F_Y (tracé fin) et $F_{Y'}$ (tracé accentué)