Phénomène d'attente

Solutions de l'exercice 6.2

Les modèles probabilistes et stochastiques de la gestion

3-602-84

Geneviève Gauthier

Dernière mise à jour : 29 novembre 2000

Exercice 6.2. *La gestion des prêts de livres et autres documents de la bibliothèque ABC est effectuée à l'aide d'un logiciel résidant sur un serveur. Le serveur est présentement accessible depuis le comptoir de prêt par deux terminaux, un pour chacun des deux préposés travaillant à ce service. Le serveur fait en sorte que le temps requis par un préposé pour compléter les transactions nécessaires au prêt de documents à un client donné est de loi exponentielle d'espérance 3 minutes.*

Une nouvelle année scolaire débute est l'augmentation de la clientèle étudiante fait en sorte qu'un utilisateur de la bibliothèque se présente au comptoir de prêt en moyenne toutes les minutes.

a) *Déterminez les paramètres de ce phénomène d'attente et décrivez l'état du système présentement.*

Le temps est exprimé en minutes.

$$\lambda = 1,\ \frac{1}{\mu} = 3,\ c = 2\ \Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{3}{2} > 1. \tag{1}$$

Le système ne peut pas atteindre un état stationnaire, il n'y a pas assez de comptoirs de service pour accomoder la clientèle.

b) *Le directeur de la bibliothèque souhaite l'amélioration de ce service. Deux solutions s'offrent à lui:*

1) embaucher deux préposées supplémentaires et ajouter deux terminaux au comptoir de prêt (le temps requis pour servir un utilisateur demeure de loi exponentielle d'espérance 3 minutes);

2) changer le serveur de sorte que le temps de service soit de loi exponentielle d'espérance 1,5 minutes, le nombre de préposés restant à deux.

Quelle est, pour chacune de ces deux situations, l'intensité du trafic?

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1,\ \frac{1}{\mu_1} = 3 \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{3},\ c_1 = 4 \text{ et } \rho_1 = \frac{\lambda_1}{c_1\mu_1} = \frac{3}{4} < 1 \qquad (2)\\
\lambda_2 &= 1,\ \frac{1}{\mu_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \mu_2 = \frac{2}{3},\ c_2 = 2 \text{ et } \rho_2 = \frac{\lambda_2}{c_2\mu_2} = \frac{3}{4} < 1. \qquad (3)
\end{aligned}$$

c) *Supposez que le système est à l'état stationnaire. Déterminez, pour chacune des deux solutions proposées, la probabilité qu'à un instant donné, le sytème soit dans une période morte*.

Première situation: soit

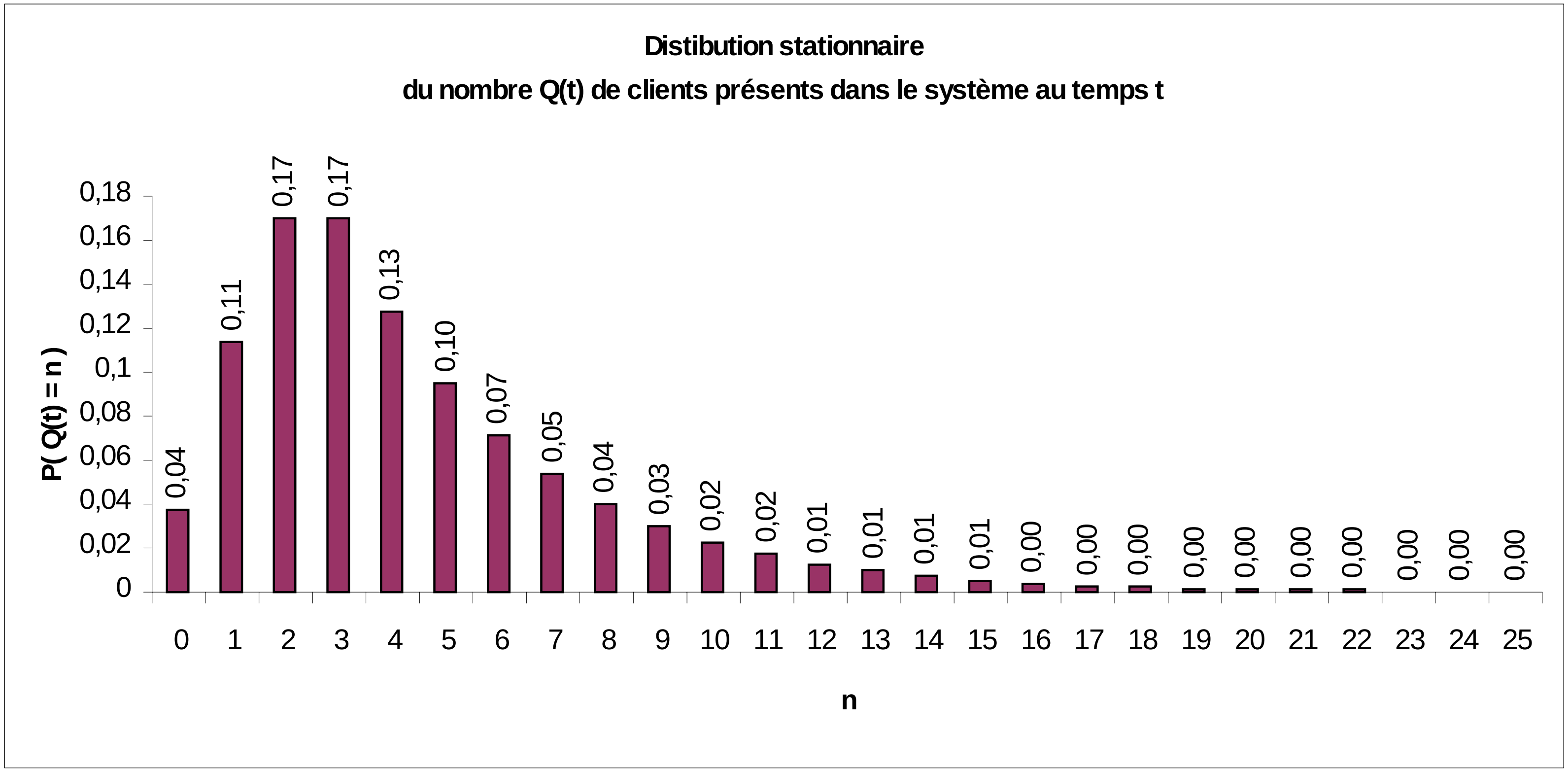
$$Q_1 \;=\; \text{le nombre d'utilisateur présent dans le système (au comptoir de prêt ou en file) à cet instant donné.} \tag{4}$$

Nous cherchons $P\left[Q_1 = 0\right]$. Comme $c_1\rho_1 = 4 \times \frac{3}{4} = 3$,

$$P\left[Q_1 = 0\right] = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)}} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{4-1} \frac{(3)^n}{n!} + \frac{3^4}{4!\left(1-\frac{3}{4}\right)}} \tag{6}$$

$$= \frac{2}{53} \cong 0,037736. \tag{7}$$



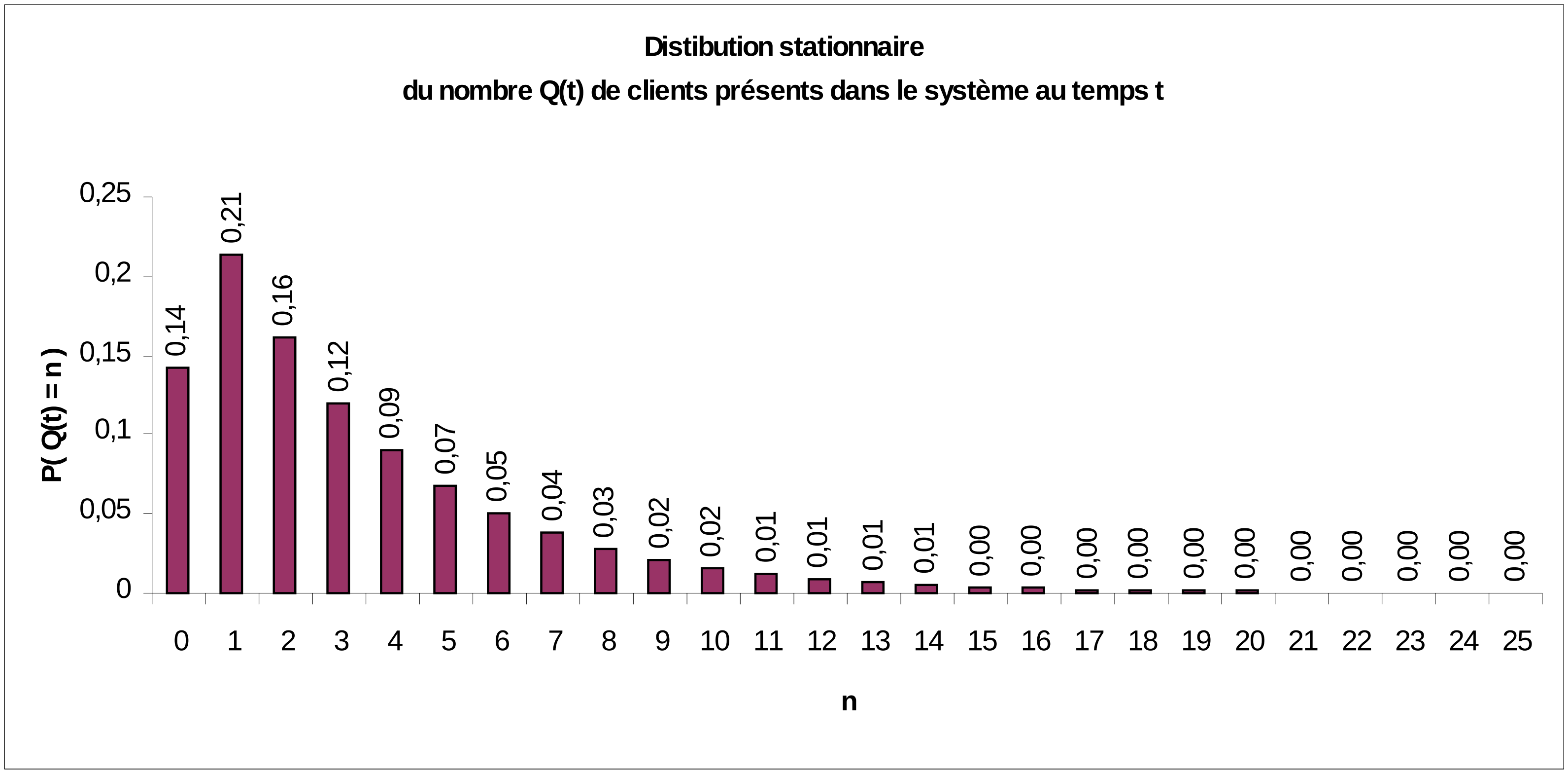
$$E\left[Q_1\right] \cong 4,5283.$$

Deuxième situation: posons

$$Q_2 = \text{le nombre d'utilisateur présent dans le système (au comptoir de prêt ou en file) à cet instant donné.} \quad (8)$$

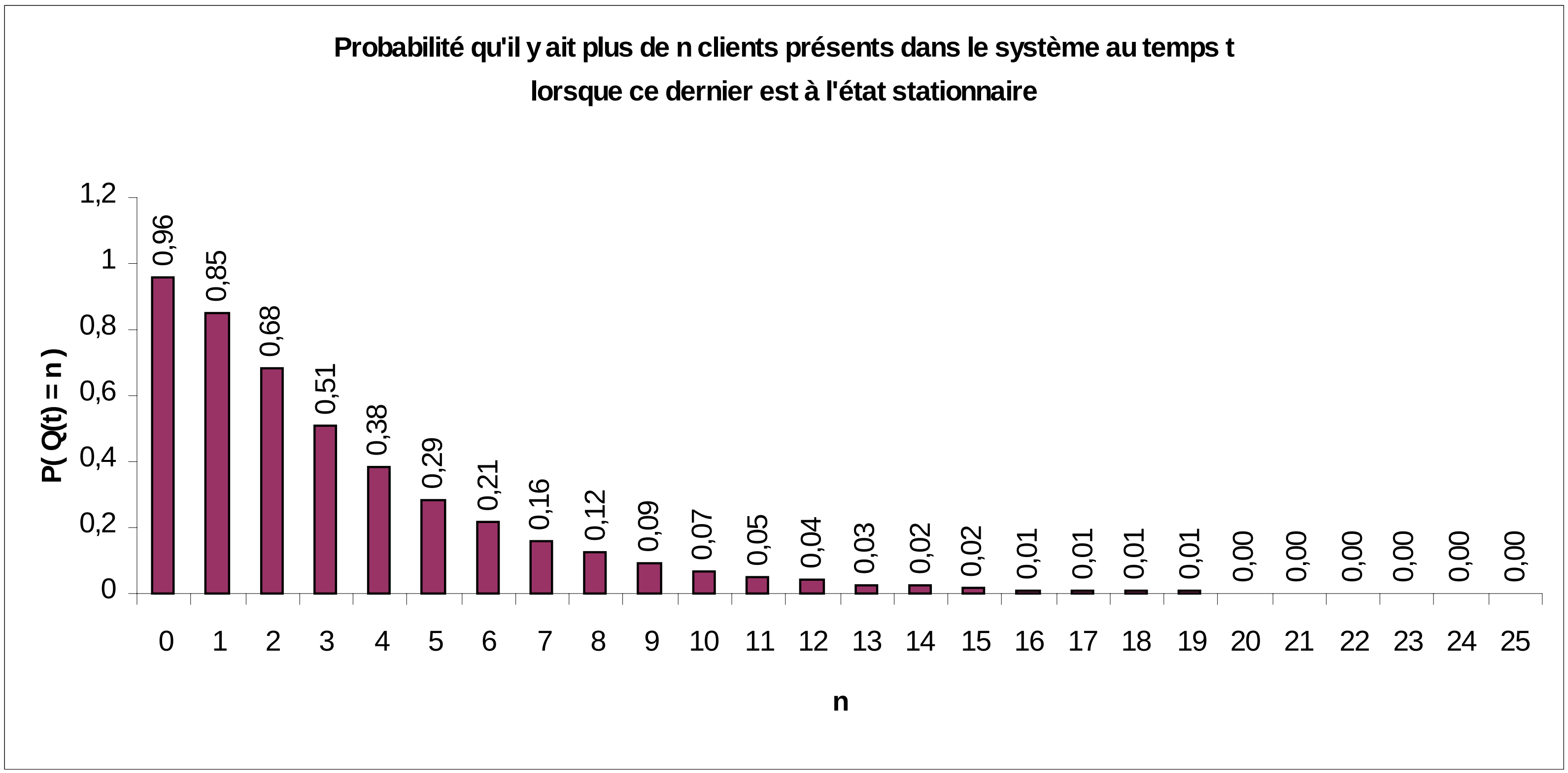
Nous cherchons $P\left[Q_2 = 0\right]$. Comme $c_2\rho_2 = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$,

$$\begin{aligned}
P\left[Q_2 = 0\right] &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)}} && (9)\\
&= \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2!\left(1-\frac{3}{4}\right)}} && (10)\\
&= \frac{1}{7} \cong 0,14286. && (11)
\end{aligned}$$

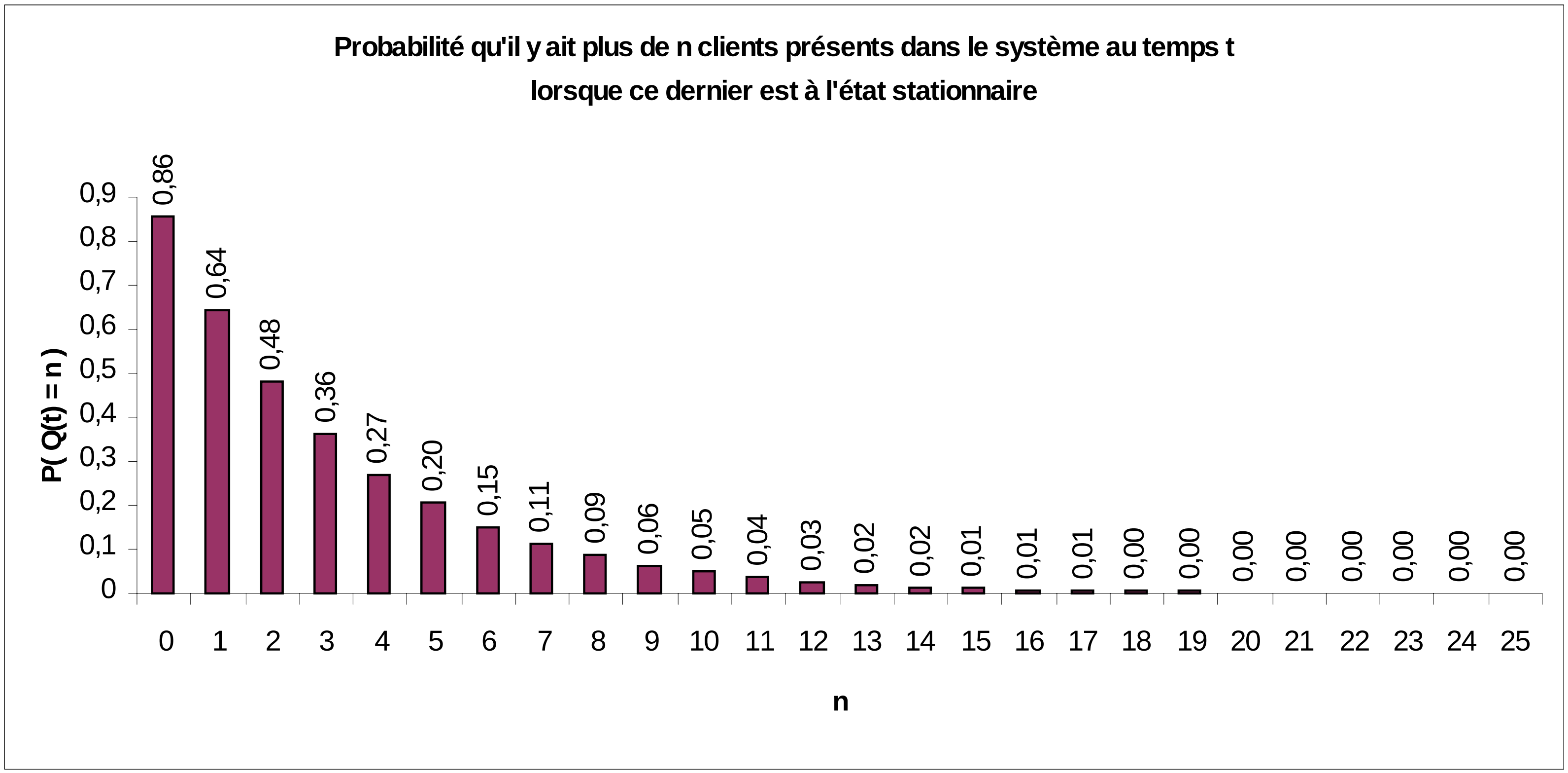


$$E\left[Q_2\right] \cong 3,42857.$$

Première situation: $\lambda_1 = 1$, $\frac{1}{\mu_1} = 3$, $c_1 = 4$ et $\rho_1 = \frac{3}{4}$



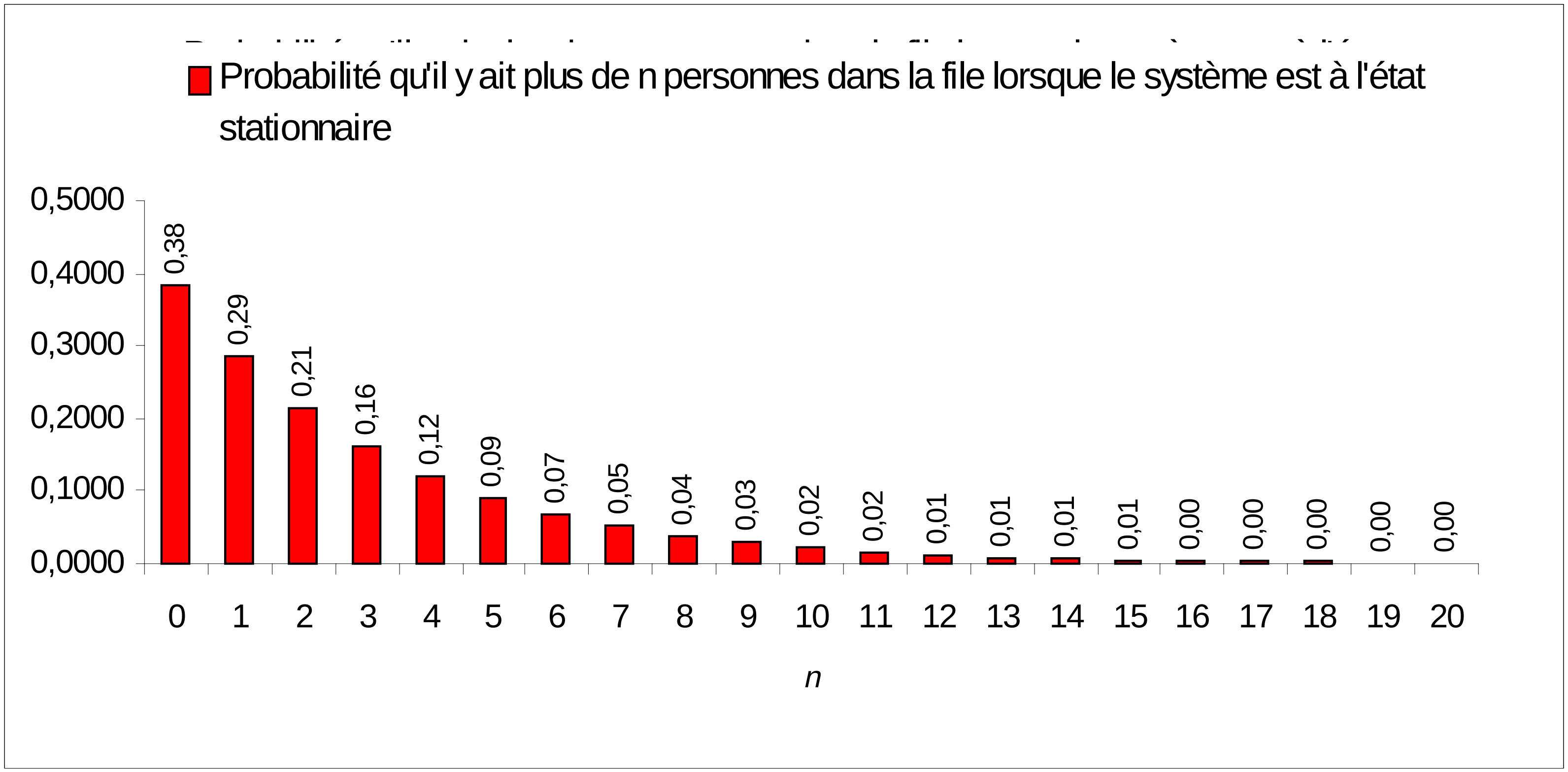
Deuxième situation: $\lambda_2 = 1$, $\frac{1}{\mu_2} = \frac{3}{2}$ $c_2 = 2$ et $\rho_2 = \frac{3}{4}$



d) *Déterminez, pour chacune des deux solutions proposées, la probabilité qu'un utilisateur se présentant au comptoir au moment où le système est à l'état stationnaire n'ait pas à attendre*.

Première situation: l'utilisateur n'a pas à attendre s'il y a trois clients ou moins présents dans le système au moment où il se présente. Nous cherchons donc

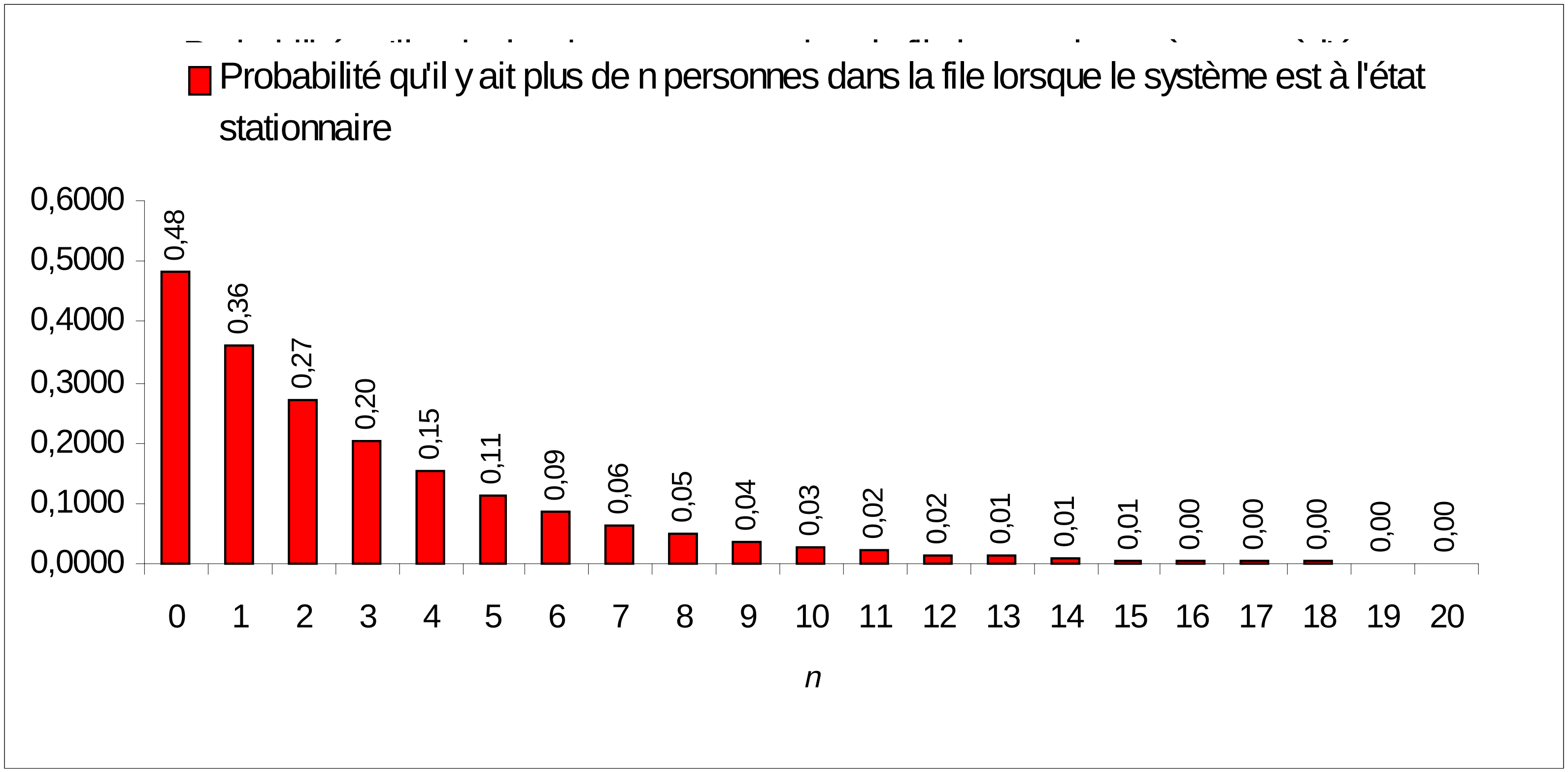
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{3} P\left[Q_1 = n\right] &= P\left[Q_1 = 0\right] + \sum_{n=1}^{3} \frac{(c\rho)^n}{n!} P\left[Q_1 = 0\right] &(12)\\ &= \frac{2}{53} + \sum_{n=1}^{3} \frac{(3)^n}{n!} \frac{2}{53} = \frac{26}{53} \cong 0,49057. &(13)\end{aligned}$$



Probabilité qu'il y ait plus de n personnes dans la file lorsque le système est à l'état stationnaire
0,5000
0,4000
0,3000
0,2000
0,1000
0,0000
0,38
0,29
0,21
0,16
0,12
0,09
0,07
0,05
0,04
0,03
0,02
0,02
0,01
0,01
0,01
0,01
0,00
0,00
0,00
0,00
0,00
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
n

Deuxième situation: l'utilisateur n'a pas à attendre s'il y a zéro ou un client présent dans le système au moment où il se présente. Nous cherchons donc

$$\begin{aligned} P\left[Q_2 = 0\right] + P\left[Q_2 = 1\right] &= P\left[Q_1 = 0\right] + c\rho P\left[Q_1 = 0\right] && (14) \\ &= \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{5}{14} \cong 0,35714. && (15) \end{aligned}$$



Probabilité qu'il y ait plus de n personnes dans la file lorsque le système est à l'état stationnaire
0,6000
0,5000
0,4000
0,3000
0,2000
0,1000
0,0000
0,48
0,36
0,27
0,20
0,15
0,11
0,09
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,02
0,01
0,01
0,01
0,00
0,00
0,00
0,00
0,00
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
n

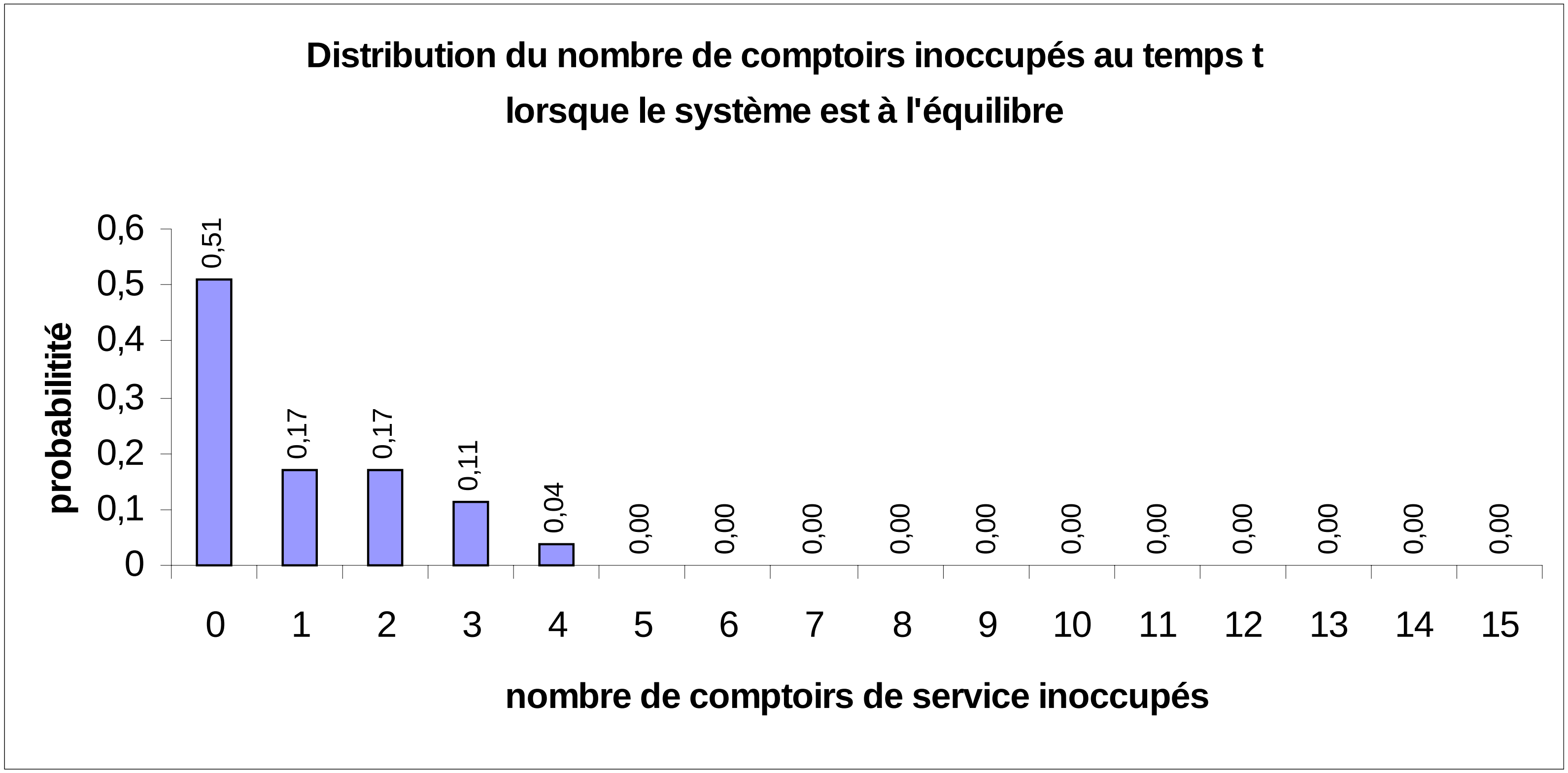
e) *Supposez que le système est à l'état stationnaire. Déterminez, pour chacune des deux situations, la distribution du nombre de préposés inoccupés*.

$$P\left[C=n\right]=\begin{cases}\frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}P\left[Q=0\right] & \text{si } n=0\\[2em] \frac{(c\rho)^{c-n}}{(c-n)!}P\left[Q=0\right] & \text{si } n\in\{1,2,...,c\}\\[2em] 0 & \text{sinon}\end{cases}\qquad(16)$$

Première situation:

$$C_1 \;=\; \text{nombre de préposés inoccupés}$$
$$\text{lorsque le système est à l'état stationnaire.}$$

$$P\left[C_1 = n\right] = \begin{cases} \frac{(3)^4}{4!\left(1-\frac{3}{4}\right)}\frac{2}{53} = \frac{27}{53} \cong 0,50943 & \text{si } n = 0 \\ \frac{(3)^{4-n}}{(4-n)!}\frac{2}{53} & \text{si } n \in \{1,2,3,4\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{17}$$

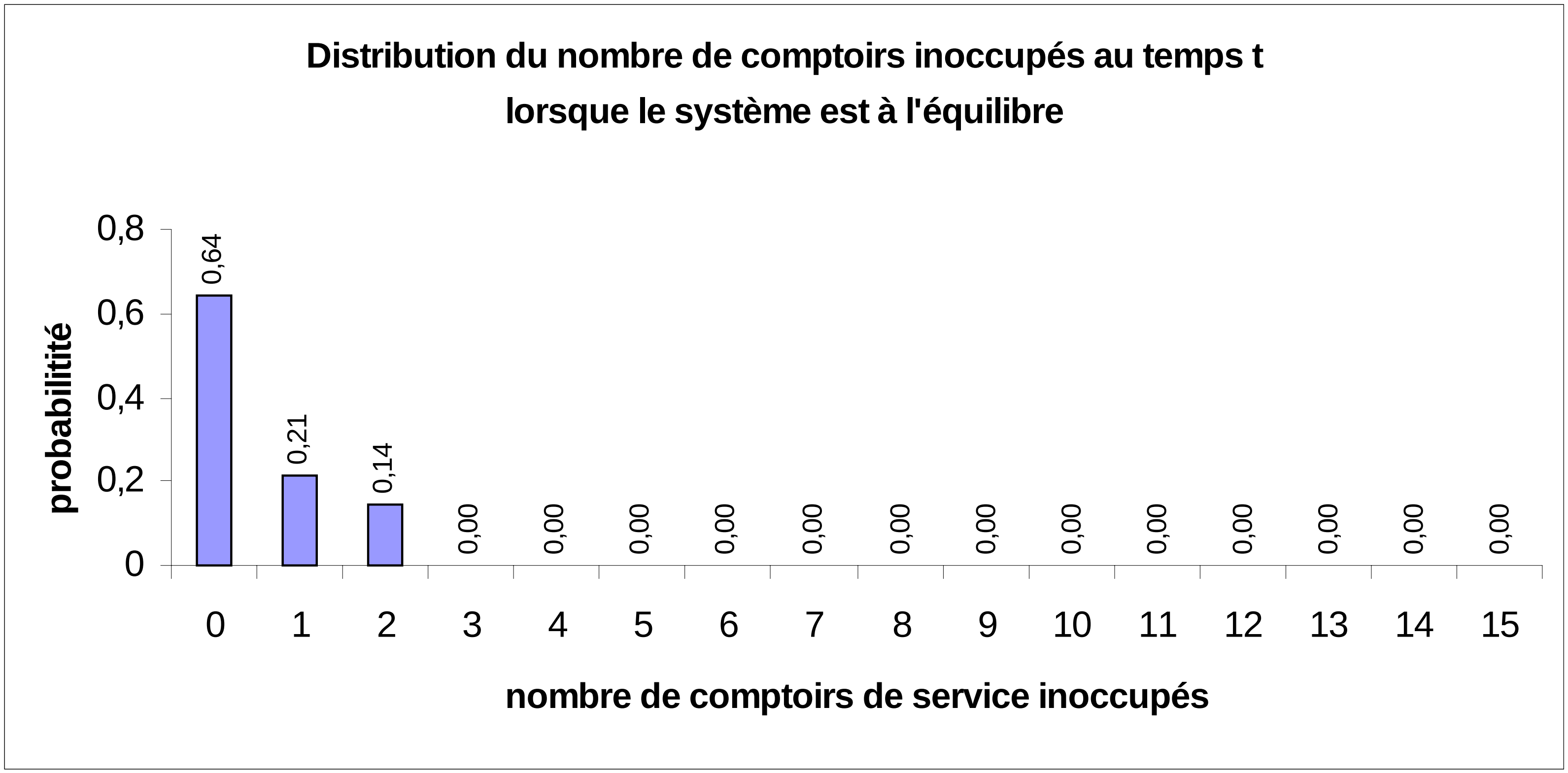


$$E\left[C_1\right] = 1.$$

Deuxième situation:

$$C_2 \;=\; \text{nombre de préposés inoccupés lorsque le système est à l'état stationnaire.}$$

$$P\left[C_2 = n\right] = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2!\left(1-\frac{3}{4}\right)}\dfrac{1}{7} = \dfrac{9}{14} \cong 0,64286 & \text{si } n = 0 \\[2ex] \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{2-n}}{(2-n)!}\dfrac{1}{7} & \text{si } n \in \{1,2\} \\[2ex] 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{18}$$



$$E\left[C_2\right] = \frac{1}{2}.$$

f) *Déterminez, pour les deux situations, la distribution stationnaire du temps qu'un utilisateur passe dans la file d'attente. Représentez-les graphiquement et calculez leur espérance*.

$$P\left[W \leq w\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } w < 0 \\ P\left[Q = 0\right] \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} & \text{si } w = 0 \\ P\left[Q = 0\right] \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + P\left[Q = c\right] \frac{1 - \exp[-(c\mu - \lambda) w]}{1 - \rho} & \text{si } w > 0 \end{cases}$$

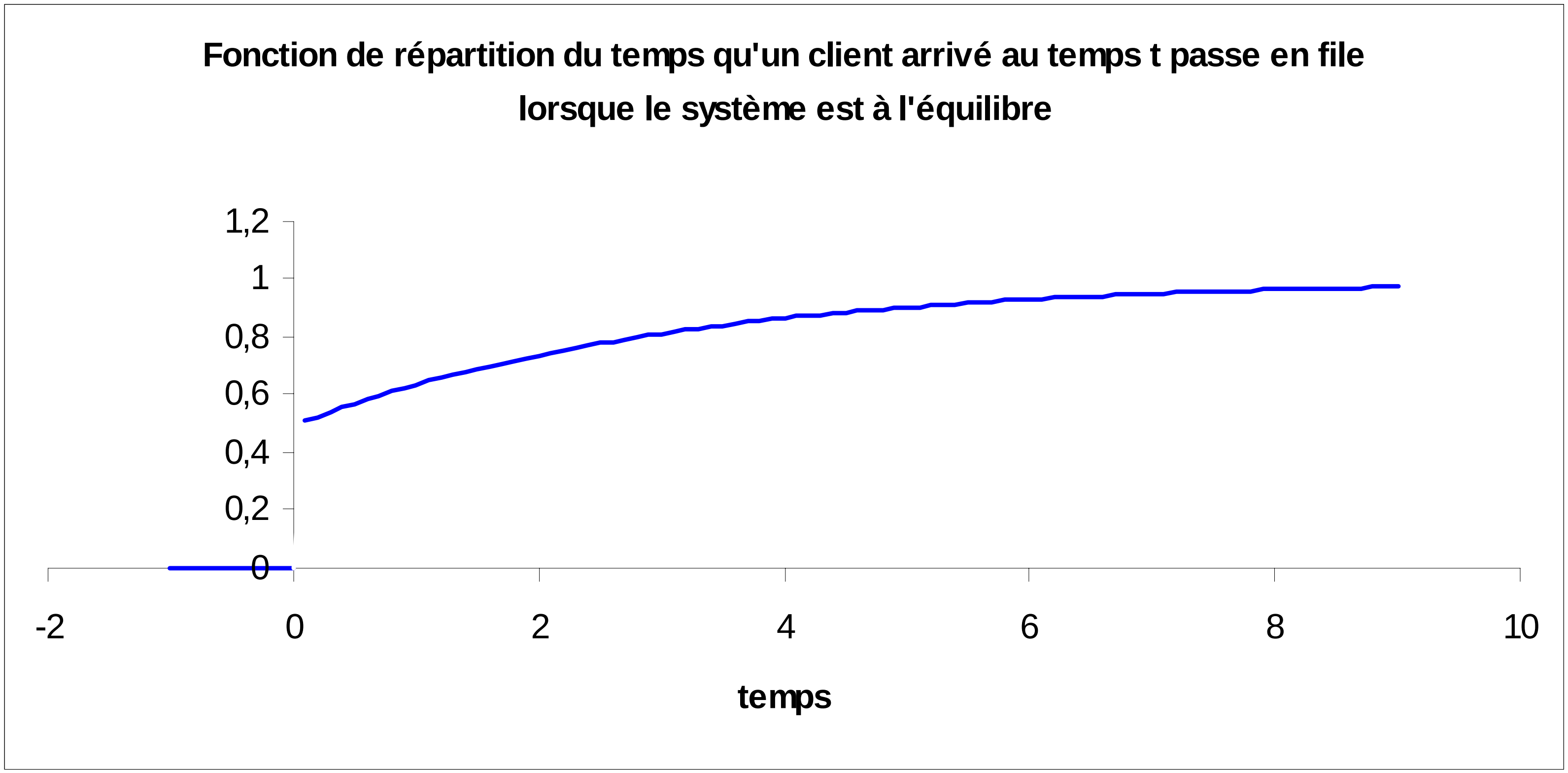
Première situation:

$$W_1 = \text{temps qu'un client, arrivé lorsque le système est à l'état stationnaire, passe dans la file}$$

$$P\left[Q_1 = c_1\right] = P\left[Q_1 = 0\right] \frac{(c_1 \rho_1)^{c_1}}{c_1!} \tag{19}$$

$$= \frac{2}{53} \frac{3^4}{4!} = \frac{27}{212} \cong 0,12736. \tag{20}$$

$$P\left[W_1 \leq w\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } w < 0 \\ \frac{2}{53}\sum_{n=0}^{4-1}\frac{(3)^n}{n!} = \frac{26}{53} \cong 0,49057 & \text{si } w = 0 \\ \frac{2}{53}\sum_{n=0}^{4-1}\frac{(3)^n}{n!} + \frac{27}{212}\frac{1-\exp\left[-\left(\frac{4}{3}-1\right)w\right]}{1-\frac{3}{4}} = 1 - \frac{27}{53}e^{-\frac{1}{3}w} & \text{si } w > 0 \end{cases}$$



$$E\left[W_1\right] \cong 1,5283$$

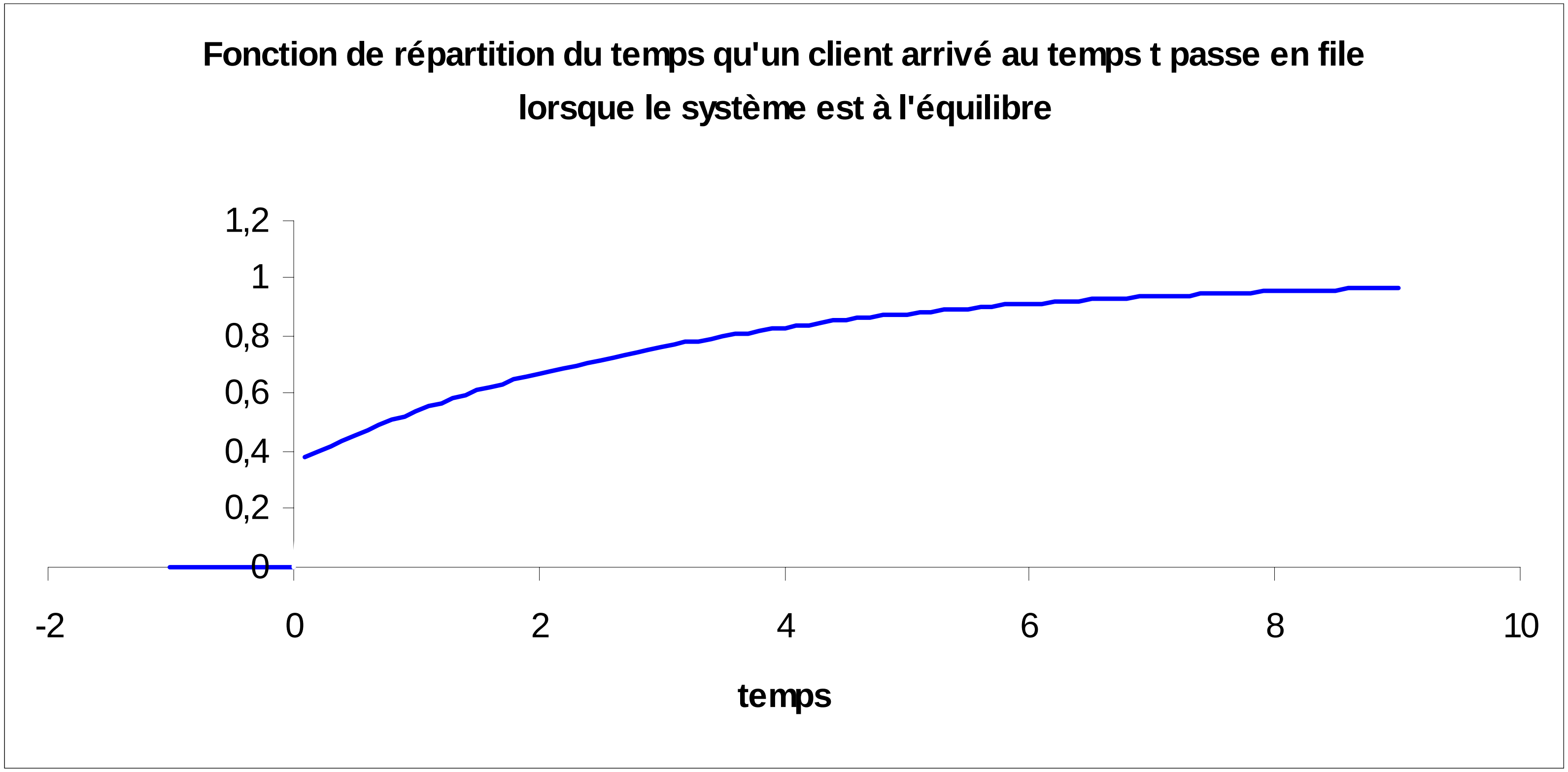
Deuxième situation:

W_2 = temps qu'un client, arrivé lorsque le système est à l'état stationnaire, passe dans la file

$$P\left[Q_2 = c_2\right] = P\left[Q_2 = 0\right] \frac{(c_2\rho_2)^{c_2}}{c_2!} \tag{21}$$

$$= \frac{1}{7}\frac{\frac{3}{2}^2}{2!} = \frac{9}{56} \cong 0,16071. \tag{22}$$

$$P\left[W_2 \leq w\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } w < 0 \\ \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{2-1}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n!} = \frac{5}{14} \cong 0,35714 & \text{si } w = 0 \\ \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{2-1}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n!} + \frac{9}{56}\frac{1-\exp\left[-\left(\frac{4}{3}-1\right)w\right]}{1-\frac{3}{4}} = 1 - \frac{9}{14}e^{-\frac{1}{3}w} & \text{si } w > 0 \end{cases}$$



$$E\left[W_2\right] \cong 1,9286$$

g) *Analysez vos résultats.*

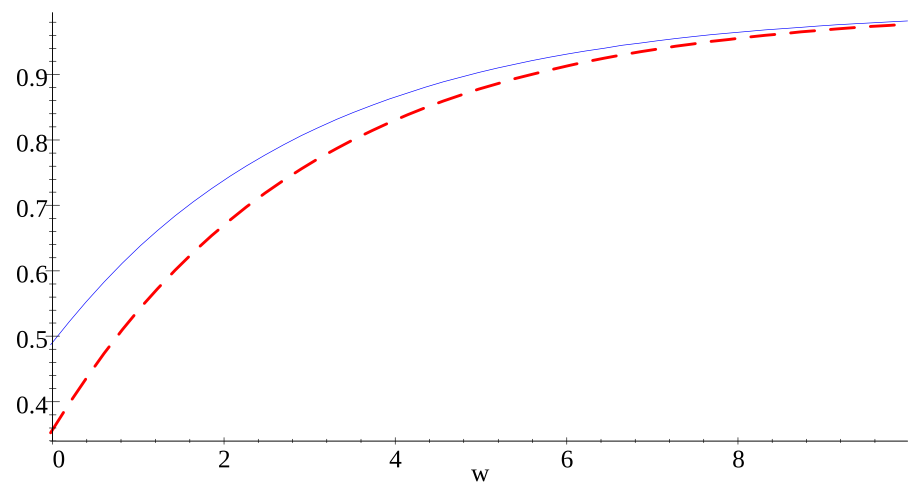
Supposons que le système est à l'état stationnaire.

Premièrement, à la question d), nous avons établi que la probabilité que le client n'ait pas à attendre est de 45% dans la première situation et de 36% dans la seconde. Du point de vue de l'utilisateur, la première situation semble donc préférable.

Cette préférence est renforcée par le fait que la probabilité de trouver plus de n personnes dans la file au moment de l'arrivée de l'utilisateur est plus petite dans la première situation que dans la deuxième et ce, quelque soit n (question d).

De plus, à la question f, nous montrons que la probabilité d'attendre longtemps est plus forte dans la deuxième situation que dans la première:

fonctions de répartition des temps d'attente
d'un client dans la file pour les situations 1 et 2 respectivement
lorsque le client arrive à un moment où le système est à l'équilibre



La ligne fine (bleue) correspond à la première situation et la ligne épaisse (rouge) est associée à la deuxième situation. Il semble donc que la probabilité qu'un client ait à attendre moins de w minutes est plus grand dans la première situation que dans la deuxième. Le client préfèrera donc la première.

Du point de vue du gestionnaire, le nombre moyen de préposés inocupés est inférieur dans la deuxième situation que dans la première $\Big(E\left[C_2\right] = \frac{1}{2} < 1 = E\left[C_1\right.$
Il faudrait étudier les coûts associés à chacune des situations (changement de serveur versus embauche de deux nouveaux employés).