Processus de renouvellement

Exercices solutionés

Exercice. *On suppose que la durée de vie (en heures) d'une ampoule de projecteur suit une loi uniforme*$(6, 10)$. *Pour projeter un film qui durera 2 heures, nous utilisons un projecteur où l'état de l'ampoule est supposé stationnaire. Quelle est la probabilité que nous n'ayons pas à remplacer l'ampoule au cours de la projection?*

Réponse. $\frac{3}{4}$.

Solution. Nous cherchons $P[Y > 2]$ où Y représente l'âge résiduel de l'ampoule en place. Puisque la durée de vie X d'une ampoule est de loi $U(6, 10)$, alors

$$E[X] = 8$$

et

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 6 \\ \frac{x-6}{4} & \text{si } 6 < x \leq 10 \\ 1 & \text{si } x > 10. \end{cases}$$

Déterminons la fonction de masse de Y:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{1}{\mu}(1 - F_X(y)) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{8}(1-0) = \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq y \leq 6 \\ \frac{1}{8}\left(1 - \frac{y-6}{4}\right) = \frac{5}{16} - \frac{1}{32}y & \text{si } 6 < y \leq 10 \\ \frac{1}{8}(1-1) = 0 & \text{si } y > 10 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq y \leq 6 \\ \frac{5}{16} - \frac{1}{32}y & \text{si } 6 < y \leq 10 \\ 0 & \text{si } y > 10 \text{ ou si } y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Enfin,

$$P[Y > 2] = 1 - P[Y \leq 2] = 1 - \int_{-\infty}^{2} f_Y(y)\ dy = 1 - \int_{0}^{2} \frac{1}{8}\ dy = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Exercice. *Considérons un processus de renouvellement où les durées de vie sont de loi $U(a,b)$ où $0 < a < b$.*
Déterminez les fonctions de densité de la vie résiduelle, de la vie courante et de la vie totale de l'objet en place au moment de l'observation du système. Vous pouvez supposer que le système a atteint son état stationnaire. Déterminez les espérances de ces trois variables aléatoires.

Solution. Soit X la durée de vie d'un objet X est de loi $U(a,b)$, ce qui implique que

$$\mu = E[X] = \frac{a+b}{2},$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

La fonction de densité de la durée de vie totale V de l'objet en place au moment de l'observation est

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \begin{cases} \frac{1}{\mu}\ v\ f_X(v) & \text{si } v > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{a+b}\ v\ \frac{1}{b-a} = \frac{2v}{b^2-a^2} & \text{si } a < v \leq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$E[V] = \int_a^b v\ \frac{2v}{b^2 - a^2}\ dv = \frac{2}{3}\frac{a^2 + ba + b^2}{a+b}.$$

La fonction de densité de la durée de vie résiduelle Y de l'objet en place au moment de l'observation est

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{1}{\mu}\left(1 - F_X(y)\right) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{a+b}(1-0) = \frac{2}{a+b} & \text{si } 0 \leq y \leq a \\ \frac{2}{a+b}\left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right) = 2\frac{b-y}{b^2-a^2} & \text{si } a < y \leq b \\ \frac{2}{a+b}(1-1) = 0 & \text{si } y > b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

et

$$E[Y] = \int_0^a y \frac{2}{a+b}\, dy + \int_a^b y\, 2\frac{b-y}{b^2-a^2}\, dy = \frac{1}{3}\frac{a^2+ba+b^2}{a+b}.$$

Enfin, la fonction de densité de la durée de vie courante W de l'objet en place au moment de l'observation est la même que Y d'où

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{2}{a+b} & \text{si } 0 \leq w \leq a \\ 2\frac{b-w}{b^2-a^2} & \text{si } a < w \leq b \\ 0 & \text{si } w > b \text{ ou si } w < 0 \end{cases}$$

et

$$E[W] = \frac{1}{3}\frac{a^2+ba+b^2}{a+b}.$$