Processus de renouvellement

Exercices 7

Exercice 7.1. La durée de vie (en jours) X d'une certaine marque de piles suit une loi triangulaire :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{75}(x-5) & \text{si } 5 < x < 10 \\ \frac{1}{75}(20-x) & \text{si } 10 \leq x < 20 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Faites le graphe de la fonction de densité de X.
b) Déterminez la fonction de répartition associée à la distribution de X et tracez son graphe.
c) Déterminez l'espérance et l'écart-type de la durée de vie de ce type de piles.
d) Supposons qu'une de ces piles est utilisée dans un appareil vidéo disponible pour la location au service de l'équipement. Déterminez les fonctions de densité et de répartition de la vie résiduelle de la pile active au moment de la location de l'appareil. Quelles sont son espérance et sa variance?
e) Supposons, encore une fois, qu'une de ces piles est utilisée dans un appareil vidéo disponible pour la location au service de l'équipement. Vous l'empruntez pour une durée de deux jours. Quelle est la probabilité que la pile soit suffisante pour bien faire fonctionner l'appareil au cours de votre période de location?
f) Déterminez la fonction de densité de la durée de vie de la pile active au moment de la location de l'appareil. Quelle est son espérance? Commentez.
g) Supposons qu'un autre appareil requiert deux de ces piles et qu'il ne fonctionne plus dès qu'une de ces deux piles est hors d'usage. Calculez les fonctions de répartition et de densité de la variable aléatoire représentant l'instant où une des deux piles cessera de fonctionner ainsi que son espérance.

Vous pouvez utiliser le résultat suivant : si les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes et identiquement distribuées (avec fonction de répartition F_X), alors pour tout nombre réel x

$$\begin{aligned}
P\left[\min\left(X_1, X_2\right) \leq x\right] &= 1 - P\left[\min\left(X_1, X_2\right) > x\right] \\
&= 1 - P\left[X_1 > x \text{ et } X_2 > x\right] \\
&= 1 - P\left[X_1 > x\right] P\left[X_2 > x\right] \\
&\quad \text{car ces événements sont indépendants} \\
&= 1 - \left(1 - P\left[X_1 \leq x\right]\right)\left(1 - P\left[X_2 \leq x\right]\right) \\
&= 1 - \left(1 - F_X(x)\right)\left(1 - F_X(x)\right) \\
&= 1 - \left(1 - F_X(x)\right)^2.
\end{aligned}$$

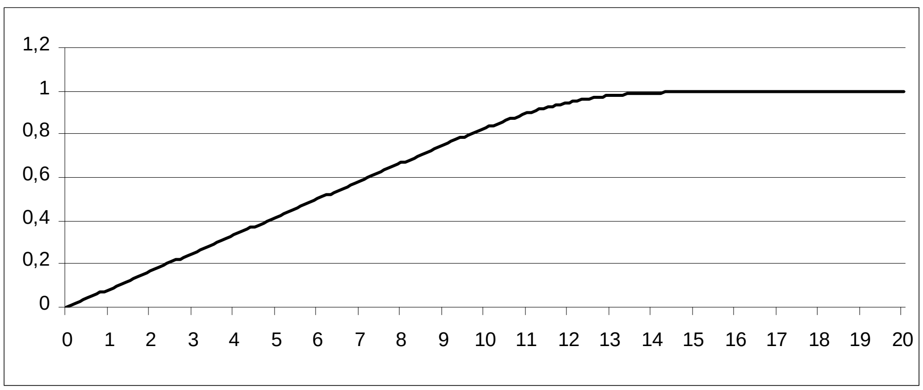
h) Si l'appareil contient deux piles et qu'il est hors d'usage dès qu'une des deux piles est morte, calculez la probabilité que l'appareil est utilisable tout au cours de votre location de deux jours. Notez que lorsque l'appareil est hors d'usage, les deux piles sont changées.

Exercice 7.2. Le temps, en minutes, requis pour effectuer une certaine tâche est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire de loi normale d'espérance 12 et d'écart-type 1,5. Un employé aura à répéter cette tâche à répétition (par exemple, le travail sur les chaînes de montage).

a) Si X est de loi normale, alors la probabilité que X prenne des valeurs négatives est non nulle. Or, le temps requis pour effectuer une tâche devrait être modélisé par une variable aléatoire ne pouvant prendre que des valeurs positives. Justifiez, en calculant la probabilité que notre modèle assigne des valeurs négatives au temps d'accomplissement de la tâche, pourquoi il est tout de même raisonnable d'utiliser la loi normale dans ce cas-ci.
b) Soit X_i, le temps requis pour effectuer la i ième tâche. En supposant que les temps requis pour effectuer chacune des tâches sont indépendants les uns des autres, donnez la distribution du temps requis pour compléter k tâches, k étant un entier positif.
c) Évaluez l'espérance du nombre $N(30)$ de tâches complétées en 30 minutes.
d) Le contremaître surgit à l'improviste vers la fin de la journée. Déterminez la fonction de densité du temps que mettra l'employé à terminer la tâche qu'il accomplissait au moment de l'arrivée du contremaître (il ne vous sera sans doute pas possible d'obtenir une expression analytique pour cette densité, mais vous pouvez tout de même l'exprimer en fonction de la fonction de

répartition d'une variable aléatoire normale centrée et réduite). Tracez-en le graphe (vous pouvez utiliser un logiciel tel Excel).
e) Le graphe suivant représente la fonction de répartition F_Y du temps requis par l'employé pour terminer la tâche qu'il accomplissait au moment de l'arrivée du contremaître.

La fonction de répartition F_Y du temps requis par l'employé
pour terminer la tâche qu'il accomplissait
au moment de l'arrivée du contremaître



On y constate, par exemple, que la probabilité que l'employé mette moins de cinq minutes à accomplir la tâche entreprise au moment de l'arrivée du contremaître est d'environ 40 %. Plus exactement,

$$F_Y(5) = \int_0^5 \frac{1}{12}\left(1 - \int_{-\infty}^{\frac{y-12}{1.5}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz\right) dy \cong 0,41667.$$

Or, au cours des deux derniers mois, le contremaître a effectué 24 inspections surprises et, dans cinq cas, l'employé a mis moins de cinq minutes pour terminer la tâche entreprise. Que peut en conclure le contremaître quant à la distribution de X?
f*) Déterminez la distribution (fonction de densité) de la durée totale de la tâche entreprise au moment de l'arrivée du contremaître et son espérance.