Processus de renouvellement

3-602-84
Modèles probabilistes et stochastiques de la gestion

Geneviève Gauthier

HEC Montréal

Automne 2007

Références

Ce texte a été très fortement inspiré de notes prises au cours de Denis Labelle, professeur au département de mathématique de l'Université du Québec à Montréal, des chapitres 4 et 5 de A First Course in Stochastic Processes, deuxième édition de S. Karlin et H. M. Taylor ainsi que de notes de cours écrites par Jean Vaillancourt.

Définition I

- Un processus de renouvellement, aussi noté $\{N(t) : t \geq 0\}$, est un processus stochastique à temps continu et à valeurs entières non négatives dénombrant les occurrences d'un certain phénomène lorsque les temps entre deux occurrences consécutives sont des variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées (mais pas nécessairement de loi exponentielle).
- Imaginons un ensemble d'objets qui se remplaceront successivement au moment où la vie de l'objet précédent prendra fin, chacun des objets ayant une durée de vie aléatoire X_i indépendante de celle des autres objets et caractérisée par la fonction de répartition F_X.

Définition II

- Plus explicitement, un premier objet est mis en place au temps 0. Cet objet a une vie utile de longueur X_1 et est donc renouvelé au temps X_1. Son remplaçant est en place pendant X_2 unités de temps et est substitué par un troisième objet au temps $X_1 + X_2$, etc.

Définition III

- Plus formellement, $\{X_i : i \in \{1, 2, 3, ...\}\}$ est une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées. Leur distribution est caractérisée par la fonction de répartition F_X. Posons

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\ &= \text{moment où le } n+1 \text{ ième objet est mis en place,} \\ S_0 &= 0. \end{aligned}$$

Définition IV

Definition

Alors pour tout nombre réel t positif, nous pouvons définir

$$\begin{aligned} N(t) &= \text{le nombre de renouvellements effectués pendant} \\ & \text{l'intervalle de temps } (0,t] \\ &= \max\{n \in \{0,1,2,\ldots\} : S_n \leq t\}, \\ N(0) &= 0. \end{aligned}$$

Le processus $\{N(t) : t \geq 0\}$ est un **processus de renouvellement**.

Définition V

- **Remarque**. Notons que, lorsque les durées de vie sont de loi exponentielle, le processus de renouvellement est un processus de Poisson.
- **Remarque**. Pour tout entier non négatif k,

$$P\left[N\left(t\right) \geq k\right] = P\left[S_k \leq t\right]. \tag{1}$$

Définition VI

- Il est généralement compliqué de déterminer la loi de $N(t)$ pour un temps t fixé (rappelons que dans le cas d'un processus de Poisson, $N(t)$ est de loi de Poisson). En effet, pour tout entier non négatif k,

$$\begin{aligned} P[N(t)=k] &= P[N(t)\geq k]-P[N(t)\geq k+1] \\ &= P[S_k\leq t]-P[S_{k+1}\leq t] \\ &= F_{S_k}(t)-F_{S_{k+1}}(t). \qquad (2) \end{aligned}$$

- Or, ce sont les fonctions de répartition $F_{S_2}(t)$, $F_{S_3}(t)$, ... qui sont généralement difficiles à déterminer.
- Dans le cas où les durées de vie sont de loi exponentielle d'espérance θ, S_n est de loi $\Gamma(n,\theta)$ et nous pouvons compléter le calcul de la ligne (2).

Propriétés I

Nous pouvons tout de même développer certaines propriétés.

Propriétés II

(i) Comme $S_0 = 0$,

$$F_{S_0}(x) = P\left[S_0 \leq x\right] = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Propriétés III

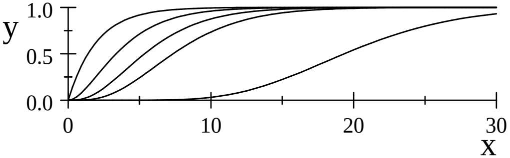
(ii) Utilisant l'équation (2), nous avons

$$0 \leq P\left[N\left(t\right) = k\right] = F_{S_k}\left(t\right) - F_{S_{k+1}}\left(t\right),$$

ce qui implique que, pour tout entier non négatif k et pour tout nombre réel $t > 0$ fixé,

$$F_{S_{k+1}}\left(t\right) \leq F_{S_k}\left(t\right).$$

Graphiquement, cette dernière relation se représente de la façon suivante :



De gauche à droite sont représentées respectivement F_{S_1}, F_{S_2}, F_{S_3}, F_{S_4} et $F_{S_{10}}$.

Propriétés IV

(iii) $E\left[N\left(t\right)\right]=\sum_{k=1}^{\infty}F_{S_k}\left(t\right).$

Propriétés V

En effet,

$$
\begin{aligned}
E\left[N\left(t\right)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} kP\left[N\left(t\right)=k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} kP\left[N\left(t\right)=k\right] \\
&= P\left[N\left(t\right)=1\right] \\
&\quad +P\left[N\left(t\right)=2\right]+P\left[N\left(t\right)=2\right] \\
&\quad +P\left[N\left(t\right)=3\right]+P\left[N\left(t\right)=3\right]+P\left[N\left(t\right)=3\right] \\
&\quad +\ldots \\
&= P\left[N\left(t\right)\geq 1\right]+P\left[N\left(t\right)\geq 2\right]+P\left[N\left(t\right)\geq 3\right]+\ldots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\left[N\left(t\right)\geq k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\left[S_k\leq t\right] \text{ par l'équation (1).} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} F_{S_k}\left(t\right). \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Propriétés VI

(iv) *Lorsque t est grand, $N(t)$ est approximativement de loi Normale$\left(\frac{t}{\mu}, t\frac{\sigma^2}{\mu^3}\right)$ où μ et σ sont respectivement l'espérance et l'écart-type de la durée de vie d'un objet.*

Propriétés VII

- **Idée de la preuve**. Soit $\{X_i : i \in \{1, 2, 3, \ldots\}\}$, une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées d'espérance μ, de variance finie σ^2 et représentant les durées de vie.
- Utilisant le théorème central limite, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est approximativement de loi Normale$\left(n\mu, n\sigma^2\right)$ lorsque n est grand.

Propriétés VIII

Pour tout nombre réel positif t,

$$\begin{aligned}
& P\left[N\left(t\right) \leq n\right] \\
= \quad & P\left[S_n \geq t\right] \text{ par l'équation (1)} \\
\cong \quad & P\left[N\left(n\mu, n\sigma^2\right) \geq t\right] \\
& \text{pourvu que } n \text{ soit suffisamment grand.} \\
= \quad & P\left[N\left(0,1\right) \geq \frac{t - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right].
\end{aligned}$$

Propriétés IX

- Comme nous avons, en moyenne, un renouvellement toutes les μ unités de temps, nous aurons, en moyenne, $\frac{t}{\mu}$ renouvellement au cours de la période $(0, t]$.
- Ainsi, si t est grand, alors $n = \frac{t}{\mu}$ sera aussi un grand nombre et nous utilisons la relation établie ci-dessus dans le prochain raisonnement :

Propriétés X

$$
\begin{aligned}
P\left[N(t) \le n\right] &\cong P\left[N(0,1) \ge \frac{t - n\mu}{\sqrt{\frac{t}{\mu}\sigma^2}}\right] \\
&= P\left[N(0,1) \le \frac{n\mu - t}{\sqrt{\frac{t}{\mu}\sigma^2}}\right] \\
&\quad \text{à cause de la symétrie} \\
&\quad \text{de la distribution normale.} \\
&= P\left[N(0,1) \le \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\mu}} \frac{n\mu - t}{\sqrt{\frac{t}{\mu}\sigma^2}}\right] \\
&= P\left[N(0,1) \le \frac{n - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{t}{\mu^3}\sigma^2}}\right]
\end{aligned}
$$

Propriétés XI

$$
\begin{aligned}
&= P\left[\sqrt{\frac{t}{\mu^3}\sigma^2} N(0,1) \leq \sqrt{\frac{t}{\mu^3}\sigma^2}\,\frac{n-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{t}{\mu^3}\sigma^2}}\right] \\
&= P\left[N\left(0, \frac{t\sigma^2}{\mu^3}\right) \leq n - \frac{t}{\mu}\right] \\
&= P\left[N\left(0, \frac{t\sigma^2}{\mu^3}\right) + \frac{t}{\mu} \leq n\right] \\
&= P\left[N\left(\frac{t}{\mu}, \frac{t\sigma^2}{\mu^3}\right) \leq n\right]. \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Autres variables I

Definition

À partir de notre processus de renouvellement, nous pouvons construire trois autres processus stochastiques :

$$\begin{aligned} W_t &= t - S_{N(t)} && (3)\\ &= \text{l'}\textit{âge courant}\text{ de l'objet actif au temps } t, \\ Y_t &= S_{N(t)+1} - t && (4)\\ &= \text{la }\textit{vie résiduelle}\text{ de l'objet actif au temps } t \\ \text{et } V_t &= W_t + Y_t && (5)\\ &= \text{la }\textit{durée de vie}\text{ de l'objet actif au temps } t. \end{aligned}$$

Autres variables II

- L'étude de ces variables est facilitée lorsque le processus de renouvellement N est à l'équilibre.
- Nous définirons rigoureusement ce que nous signifions par "équilibre" ultérieurement.
- Pour l'instant, il nous suffit d'imaginer que le système, amorcé au temps $-\infty$, a eu le temps d'atteindre un "rythme de croisière" régulier au moment $(t = 0)$ où nous commençons l'observation du processus de renouvellement N.

Autres variables III

Definition

À un certain temps, qui est superflu de préciser, nous observons l'état du système. Nous définissons

$$\begin{aligned} W &= \text{l'}\textit{âge courant} \text{ de l'objet actif au temps d'observation,} \\ Y &= \text{la } \textit{vie résiduelle} \text{ de l'objet actif au temps d'observation} \\ \text{et } V &= \text{la } \textit{durée de vie} \text{ de l'objet actif au temps d'observation} \\ &= W + Y. \end{aligned}$$

- Nous voulons déterminer les distributions des variables W, Y et V en fonction de la distribution de la durée de vie X d'un objet.

Autres variables IV

- **Remarque 1**. Imaginons k intervalles successifs de longueurs l_1, l_2, ..., l_k respectivement.
- Mis bout à bout, ces k intervalles recouvrent l'intervalle $\left[0, \sum_{i=1}^{k} l_i\right]$.
- Un point est choisi au hasard, uniformément, dans le grand intervalle $\left[0, \sum_{i=1}^{k} l_i\right]$.
- Posons la variable aléatoire $L =$la longueur de l'intervalle atteint par le point.
- Les valeurs possibles de la variable aléatoire L sont $\mathcal{S}_L = \{l_1, l_2, ..., l_k\}$ et nous conviendrons aisément que

$$P[L = l_j] = \frac{l_j}{\sum_{i=1}^{k} l_i}, j \in \{1, 2, ..., k\}.$$

Autres variables V

- Les valeurs possibles pour la variable aléatoire L ne sont pas équiprobables.
- Les intervalles longs ont plus de chances d'être sélectionnés que les courts, la probabilité qu'un certain intervalle soit sélectionné est proportionnel à sa longueur.

Autres variables VI

- **Remarque 2 (généralisation)**. Si nous sommes en présence de n_1 intervalles de longueur l_1, n_2 intervalles de longueur l_2, ..., n_k intervalles de longueur l_k, alors la longueur L de l'intervalle atteint par le point mobile (sélectionné aléatoirement et uniformément sur l'intervalle $\left[0, \sum_{i=1}^{k} n_i l_i\right]$) a comme support $\mathcal{S}_L = \{l_1, l_2, ..., l_k\}$ et sa fonction de masse est construite à partir des probabilités

$$P\left[L = l_j\right] = \frac{n_j l_j}{\sum_{i=1}^{k} n_i l_i}, \, j \in \{1, 2, ..., k\}.$$

Autres variables VII

- **Remarque 3** (généralisation au cas continu avec $k = \infty$).
- Imaginons maintenant une infinité d'intervalles successifs, de longueurs indépendantes et aléatoires, chaque longueur étant une variable aléatoire continue possédant la fonction de densité f_X.
- Soit L, la longueur de l'intervalle atteint par un point "choisi aléatoirement dans $\mathbb{R}$".
  - Il faut être prudent ici. La loi uniforme$(-\infty, \infty)$ n'est pas définie. Toutefois, comme nous voulons éviter certains détails techniques liés au passage à la limite, nous vous proposons une approche intuitive.

Autres variables VIII

- Par la transcription au cas continu du résultat de la remarque 2, la fonction de densité $f_L(l)$ de L doit être proportionnelle à la fois à l (la longueur de l'intervalle) et à $f_X(l)$ (l'équivalent, mais pas tout à fait, de la probabilité d'obtenir un intervalle de longueur l), c'est-à-dire qu'il existe une constante c telle que

$$f_L(l) = \begin{cases} c \; l \; f_X(l) & \text{si } l > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La loi de la durée de vie totale de l'objet actif au temps d'observation I

- Revenons au problème initial et déterminons la densité f_V de la durée de vie totale V de l'objet actif au temps d'observation.
- Cette variable aléatoire V se comporte exactement comme la variable aléatoire L de la remarque 3. Nous avons donc que

$$f_V(v) = \begin{cases} c\ v\ f_X(v) & \text{si } v > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La loi de la durée de vie totale de l'objet actif au temps d'observation II

- Il nous faut trouver c qui fera en sorte que f_V est une densité, c'est-à-dire que f_V doit être une fonction non négative telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_V\left(v\right)\ dv = 1.$$

La loi de la durée de vie totale de l'objet actif au temps d'observation III

- Pour que la première condition soit satisfaite, il suffit que $c \geq 0$.
- Maintenant, la deuxième condition implique que $c = \frac{1}{\mu}$ où μ représente la durée de vie espérée d'un objet puisque

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)\ dv \\ &= \int_0^{\infty} c\ v\ f_X(v)\ dv \\ &= c \int_0^{\infty} v\ f_X(v)\ dv \\ &= cE[X] \\ &= c\mu. \end{aligned}$$

La loi de la durée de vie totale de l'objet actif au temps d'observation IV

Ainsi,

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \; v \; f_X(v) & \text{si } v > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{9}$$

La loi de la durée de vie totale de l'objet actif au temps d'observation V

Exemple de calcul. Si les durées de vie X des objets sont de loi uniforme$(0, \theta)$ alors

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } 0 < x < \theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

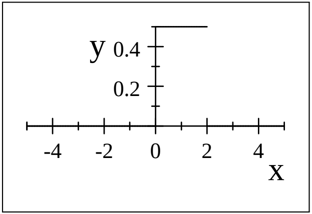
et $\mu = E[X] = \frac{\theta}{2}$. La durée de vie de l'objet actif au temps d'observation admet la fonction de densité

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{2v}{\theta^2} & \text{si } 0 < v < \theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

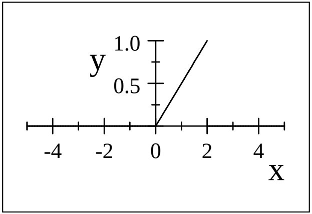
La loi de la durée de vie totale de l'objet actif au temps d'observation VI

$$\theta = 2$$

$f_X(v)$



$f_V(v)$



$$\mathrm{E}[X] = \frac{\theta}{2} = 1 \qquad \mathrm{E}[V] = \int_0^\theta v\frac{2v}{\theta^2}dv = 1.333\,3$$

La loi de l'âge courant de l'objet actif au temps d'observation I

- Pour déterminer la fonction de densité f_W de l'âge courant de l'objet actif au temps d'observation, il suffit de remarquer que si la durée de vie totale de l'objet actif est v alors W est de loi uniforme$(0, v)$, c'est-à-dire que pour tout $v \in \mathcal{S}_V$,

$$f_{W|V}(w, v) = \begin{cases} \frac{1}{v} & \text{si } 0 < w < v, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10}$$

La loi de l'âge courant de l'objet actif au temps d'observation II

- D'autre part, utilisant la définition de fonction de densité conditionnelle, nous avons que

$$f_{W|V}(w,v) = \frac{f_{W,V}(w,v)}{f_V(v)}$$

d'où

$$f_{W,V}(w,v) = f_{W|V}(w,v)\, f_V(v).$$

La loi de l'âge courant de l'objet actif au temps d'observation III

- Substituant les expressions (10) et (9) dans cette dernière équation, nous obtenons

$$f_{W,V}(w,v) = \begin{cases} \frac{1}{v}\frac{1}{\mu}\ v\ f_X(v) = \frac{1}{\mu}\ f_X(v) & \text{si } 0 < w < v, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La loi de l'âge courant de l'objet actif au temps d'observation IV

- Il ne nous reste plus qu'à trouver la fonction de densité marginale de W : si $w > 0$ alors

$$
\begin{aligned}
f_W(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{W,V}(w,v)\,dv \\
&= \frac{1}{\mu}\int_{w}^{\infty} f_X(v)\,dv \\
&= \frac{1}{\mu}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(v)\,dv - \int_{-\infty}^{w} f_X(v)\,dv\right) \\
&= \frac{1}{\mu}\left(1 - F_X(w)\right).
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\left(1 - F_X(w)\right) & \text{si } w > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{11}
$$

La loi de l'âge courant de l'objet actif au temps d'observation V

- **Exemple de calcul (suite).** Si les durées de vie X des objets sont de loi uniforme$(0, \theta)$ alors

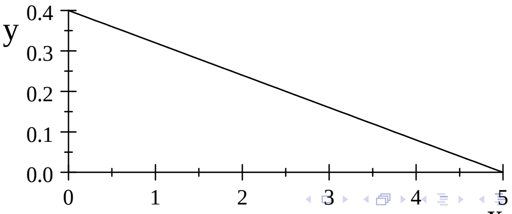
$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } 0 < x < \theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, \\
F_X(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } 0 < x < \theta, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \\
\text{et } \mu &= E[X] = \frac{\theta}{2}.
\end{aligned}
$$

La loi de l'âge courant de l'objet actif au temps d'observation VI

- Ainsi, la fonction de densité de l'âge courant de l'objet actif au temps d'observation est

$$
\begin{aligned}
f_W(w) &= \begin{cases} \frac{1}{\mu}\left(1 - F_X(w)\right) & \text{si } w > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{\theta}\left(1 - \frac{w}{\theta}\right) & \text{si } 0 < w < \theta, \\ \frac{2}{\theta}(1-1) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}
.
$$

Fonction de densité f_W
évaluée avec le paramètre $\theta = 5$.



La loi de l'âge courant de l'objet actif au temps d'observation VII

- Nous pouvons alors calculer

$$
\begin{aligned}
E\left[W\right] &= \int_0^\theta w\frac{2}{\theta}\left(1-\frac{w}{\theta}\right)dw = \frac{\theta}{3} \\
E\left[W^2\right] &= \int_0^\theta w^2\frac{2}{\theta}\left(1-\frac{w}{\theta}\right)dw = \frac{\theta^2}{6} \\
Var\left[W\right] &= E\left[W^2\right]-\left(E\left[W\right]\right)^2 = \frac{\theta^2}{6}-\frac{\theta^2}{9} = \frac{\theta^2}{18}.
\end{aligned}
$$

La loi de l'âge résiduel de l'objet actif au temps d'observation I

- Le raisonnement nous permettant de déterminer la fonction de densité f_Y de l'âge résiduel de l'objet actif est absolument le même que celui qui nous a permis d'établir f_W. Par conséquent,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\left(1 - F_X(y)\right) & \text{si } y > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12}$$

- **Remarque**. Les variables aléatoires W et Y sont généralement dépendantes.
- Elles sont toutefois indépendantes si les durées de vie des objets, X, sont de loi exponentielle, c'est d'ailleurs là une élégante propriété des processus de Poisson et cela provient du fait que la loi exponentielle n'a pas de mémoire.

La loi de l'âge résiduel de l'objet actif au temps d'observation II

- **Exemple**. Dans une machine industrielle, une certaine pièce, soumise à l'usure, doit parfois être remplacée.
- Supposons que la durée de vie X (en heures) d'une pièce neuve admet la fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{25}(5-x) & \text{si } 0 < x < 5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Nous devons utiliser cette machine durant une heure et nous l'empruntons dans l'état où elle se trouve actuellement.
- Quelle est la probabilité que la pièce fragile ne flanche pas durant notre temps d'utilisation de cette machine?

La loi de l'âge résiduel de l'objet actif au temps d'observation III

- Nous cherchons $P\left[Y > 1\right]$. Or, la donnée de f_X nous permet de trouver que

$$\begin{aligned}\mu &= E\left[X\right]\\ &= \int_0^5 x\frac{2}{25}\left(5-x\right)\ dx\\ &= \frac{2}{5}\ \frac{x^2}{2}\bigg|_{x=0}^{5} - \frac{2}{25}\ \frac{x^3}{3}\bigg|_{x=0}^{5}\\ &= 5-\frac{10}{3}\\ &= \frac{5}{3},\end{aligned}$$

et

La loi de l'âge résiduel de l'objet actif au temps d'observation IV

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{2}{25}\left(5x - \frac{x^2}{2}\right) & \text{si } 0 < x < 5, \\ 1 & \text{si } x \geq 5. \end{cases}$$

La loi de l'âge résiduel de l'objet actif au temps d'observation V

- Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{1}{\mu}\left(1 - F_X(y)\right) & \text{si } y > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0, \\ \frac{3}{5}\left(1 - \frac{2}{25}\left(5y - \frac{y^2}{2}\right)\right) & \text{si } 0 < y < 5, \\ 0 & \text{si } y \geq 5. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{3}{5} - \frac{6}{25}y + \frac{3}{125}y^2 & \text{si } 0 < y < 5, \\ 0 & \text{si } y \geq 5. \end{cases}
\end{aligned}
$$

La loi de l'âge résiduel de l'objet actif au temps d'observation VI

- Enfin,

$$
\begin{aligned}
P[Y > 1] &= 1 - P[Y \leq 1] \\
&= 1 - \int_0^1 \left(\frac{3}{5} - \frac{6}{25} y + \frac{3}{125} y^2 \right) \; dy \\
&= 1 - \frac{61}{125} \\
&= \frac{64}{125} \\
&= 0,512 \; \blacksquare
\end{aligned}
$$

Stationnarité I

- Pour que le processus de renouvellement N, obtenu des durées de vie aléatoires, indépendantes et identiquement distribuées X_1, X_2, ... sous la forme

$$N(t) = \max \left\{ n : \sum_{i=1}^{n} X_i \leq t \right\}$$

soit stationnarisé (à l'équilibre), il suffit de retoucher X_1 en la remplaçant par une variable aléatoire de loi F_Y.

- Ainsi amorcé par une vie résiduelle conforme à l'état stationnaire, le processus de renouvellement se comporte comme s'il avait commencé au temps $-\infty$.
- Pour tout $t > 0$, les variables aléatoires Y_t, W_t, et V_t, définies aux lignes (4), (3) et (5), auront alors exactement la même distribution stationnaire que Y, W et V respectivement.

Stationnarité II

- Remarquons que W_t et V_t ne pourront, en toute rigueur, être observées qu'à partir de $t > X_1$.