Phénomènes d'attente

3-602-84
Modèles probabilistes et stochastiques de la gestion

Geneviève Gauthier

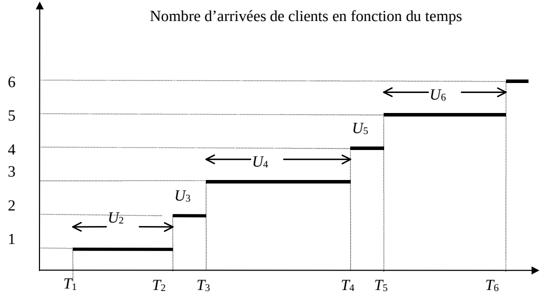
HEC Montréal

Automne 2007

Arrivées des clients I

- Les clients arrivent aux instants T_1, T_2, ... qui sont des variables aléatoires.
- Le temps écoulé entre les arrivées des $n-1$ et n ièmes clients est noté

$$U_n = T_n - T_{n-1}, \; T_0 = 0, \, n \in \mathbb{N}.$$



Arrivées des clients II

Definition

HYPOTHÈSE 1.1 : La suite $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ est composée de variables aléatoires non négatives, indépendantes et identiquement distribuées.

- Cette hypothèse contraint les arrivées à être stationnaires dans le temps, ce qui est parfois abusif car nous savons que pour plusieurs phénomènes d'attente, il y a des périodes de pointes pour lesquelles les arrivées sont plus fréquentes.

Arrivées des clients III

Definition

HYPOTHÈSE 1.2 : La loi de ces variables peut être arbitraire mais on supposera ici qu'elle est exponentielle d'espérance $\frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire que pour tout entier positif n et pour tout nombre réel positif t,

$$P[U_n < t] = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}.$$

- Par conséquent,

$$E[U_n] = \frac{1}{\lambda} \text{ et } Var[U_n] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- Donc, l'arrivée des clients s'effectue selon un processus de Poisson d'intensité λ.

Phénomène d'attente.xls **Poisson**

Traitement dans la file I

- Nous utiliserons la méthode du premier arrivé, premier servi (First In, First Out, d'où l'acronyme FIFO).
- Nous aurions pu utiliser la méthode de la pile (dernier arrivé, premier servi; Last In, First Out (LIFO)) ou encore de choisir aléatoirement une personne dans la file (Service In Random Number (SIRO)).

Le service I

- Nous supposons qu'il y a c comptoirs de service.
- Nous noterons les temps de services des clients successifs par les variables aléatoires V_1, V_2, V_3, etc.

Definition

HYPOTHÈSE 2.1 : La suite $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ est composée de variables aléatoires non négatives, indépendantes et identiquement distribuées et cette suite est indépendante des temps d'arrivées $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de deux clients successifs.

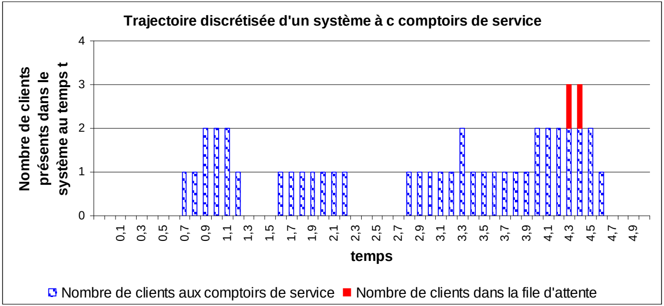
- Cette hypothèse stipule que tous les clients requièrent le même genre de service et exclut donc les situations où certains comptoirs offrent des services spéciaux. Cela exige aussi que le serveur ne modifie pas le service offert selon la longueur de la queue.

Le service II

Definition

HYPOTHÈSE 2.2 : Encore une fois, la loi de ces variables peut être arbitraire, mais on supposera ici qu'elle est exponentielle d'espérance $\frac{1}{\mu}$.

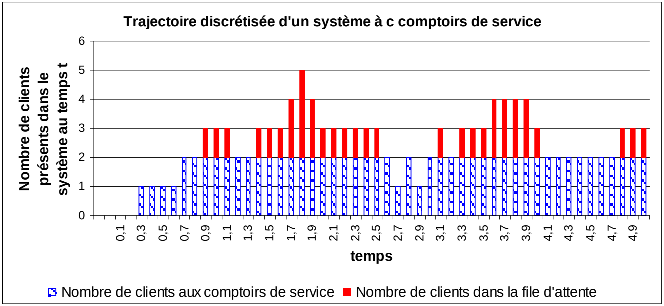
Le service III



$$\lambda = 1,25,\ \mu = 1 \text{ et } c = 2$$

Phénomène d'attente.xls   File d'attente

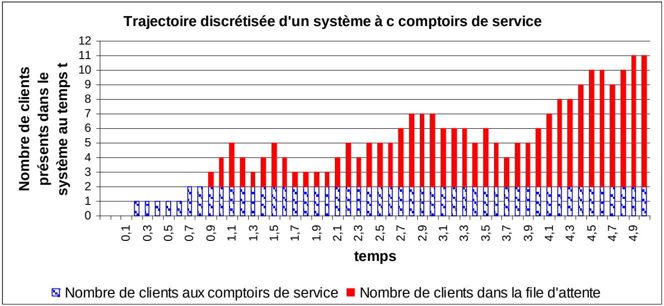
Le service IV



$$\lambda = 2,\ \mu = 1 \text{ et } c = 2$$

Phénomène d'attente.xls File d'attente

Le service V



$$\lambda = 3,\ \mu = 1 \text{ et } c = 2$$

Phénomène d'attente.xls File d'attente

Questions

- Quand est-ce que le système est ou sera débordé?
- Existe-t-il des conditions sur les paramètres nous permettant de déterminer si le système peut ou non desservir la clientèle sans être surchargé?

L'intensité

Definition

L'**intensité du trafic** est définie par

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}. \tag{1}$$

Cela correspond au nombre moyen d'arrivées de clients dans le système par unité de temps divisé par le nombre moyen de clients servis par unité de temps.

Fréquentation du système

Definition

Le **nombre de clients présents dans le système** sera représenté par le processus stochastique $Q = \{Q(t) : t \geq 0\}$, c'est-à-dire que $Q(t)$ représente le nombre de clients qui sont soit à un comptoir de service, soit dans la file à attendre de recevoir le service au temps t.

Temps d'attente

Definition

Le temps $W(t)$ qu'un client arrivé dans le système au temps t passe dans la file d'attente avant de recevoir le service est appelé le *temps d'attente*.

Definition

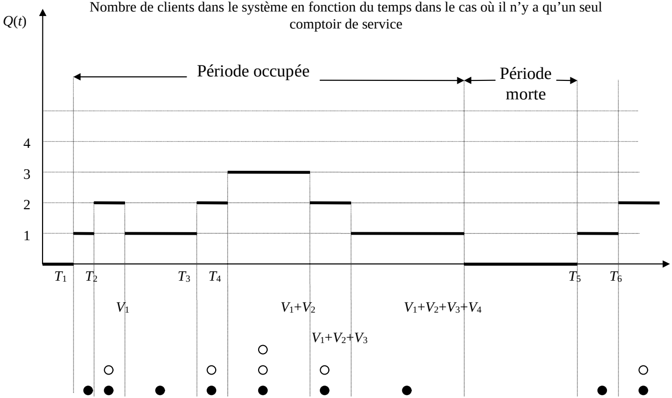
Le *temps total* qu'un client passe dans le système est le temps d'attente plus le temps de service.

Période occupée I

- Supposons qu'un serveur est libre et qu'il n'y a personne dans la file d'attente.
- Le premier client à arriver sera servi immédiatement.
- Pendant le temps où ce client recevra le service, d'autres clients arriveront éventuellement et devront se placer en file.
- Lorsqu'un serveur sera disponible, le deuxième client recevra le service et, pendant ce temps, d'autres clients viendront possiblement se placer dans la file.
- Ce processus se reproduira jusqu'à tant qu'il n'y ait plus personne dans la file d'attente.
- Lorsque cela se produit, nous disons que la **période occupée** vient de se terminer.
- Suivra alors une **période morte** jusqu'à l'arrivée du prochain client.

Période occupée II

Nombre de clients dans le système en fonction du temps dans le cas où il n'y a qu'un seul comptoir de service



Questions I

-
    - Quel est le temps d'attente moyen d'un client ?
- Bien que le temps d'attente moyen puisse être petit, il se peut que la variance du temps d'attente soit grande, ce qui impliquerait qu'il y ait des clients qui aient à attendre très longtemps avant d'être servi.
    - Quelle est la probabilité qu'un client ait à attendre plus d'un certain temps ?
- Du point de vue de l'entreprise offrant le service, il peut être intéressant de réduire au maximum le temps passé dans les périodes mortes (on ne veut pas payer les employés à rien faire).
    - Quelle est la longueur moyenne d'une période morte ?

Questions II

- Certains clients se découragent et quittent le système si la file d'attente est trop longue. Afin de minimiser la perte de ces clients, il est possible de déterminer le nombre de comptoirs de service nécessaires pour que la probabilité qu'il y ait plus de k clients en file soit inférieure à un niveau fixé.

Loi à l'équilibre du nombre de clients présents dans le système I

Definition

HYPOTHÈSE 3.1 : Nous supposerons qu'il existe une loi d'équilibre pour le processus Q représentant le nombre de clients présents dans le système et que le système est à l'équilibre, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \forall s,t &\in [0,\infty) \text{ et } \forall q \in (-\infty,\infty), \\ & P[Q(t) \leq q] = P[Q(s) \leq q]. \end{aligned}$$

En général, s'il existe une loi d'équilibre pour le système, il l'atteindra lorsqu'il y aura suffisamment de temps écoulé depuis l'initialisation du système.

Loi à l'équilibre du nombre de clients présents dans le système II

Theorem

La loi stationnaire du nombre de clients présents dans le système est

$$P\left[Q\left(t\right)=n\right] = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0 = \frac{(c\rho)^n}{n!}P_0 & \text{si } n \in \{1,2,...,c\} \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{c!c^{n-c}}P_0 = \frac{c^c\rho^n}{c!}P_0 & \text{si } n \in \{c+1,c+2,...\} \end{cases} \tag{2}$$

où

$$P_0 = P\left[Q\left(t\right)=0\right] = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{c^c\rho^c}{c!(1-\rho)}}$$

pourvu que $\lambda < c\mu$ c'est à dire si $\rho < 1$.

Loi à l'équilibre du nombre de clients présents dans le système III

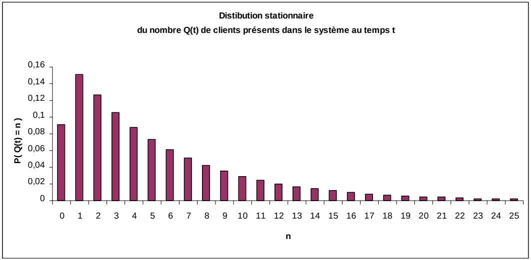
- Intuitivement, si $\rho \geq 1$, alors c'est qu'il y a en moyenne plus de clients qui arrivent dans le système que le système est capable d'en servir et donc que la longueur de la file d'attente ne cessera de s'accroître. Pour cette raison, il n'est pas possible que le système atteigne un équilibre lorsque l'intensité du trafic est supérieure à un.

Definition

HYPOTHÈSE 3.2 : Afin de permettre l'existence d'une loi stationnaire, nous posons

$$0 < \rho < 1.$$

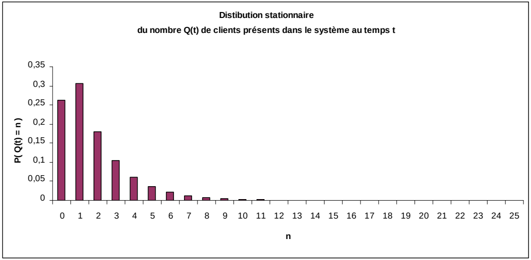
Loi à l'équilibre du nombre de clients présents dans le système IV



$$\lambda = 5,\ \mu = 3,\ \ c = 2 \text{ et } \rho \cong 0,8333$$

Phénomène d'attente.xls Q(t)

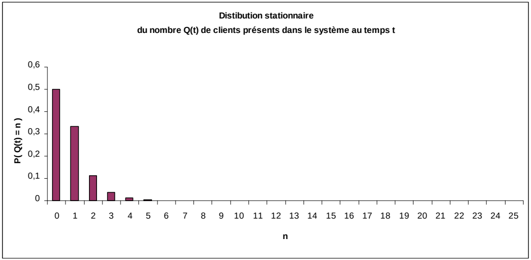
Loi à l'équilibre du nombre de clients présents dans le système V



$$\lambda = 3,5; \ \mu = 3, \ \ c = 2 \text{ et } \rho \cong 0,5833$$

Phénomène d'attente.xls Q(t)

Loi à l'équilibre du nombre de clients présents dans le système VI



$$\lambda = 2,\ \mu = 3,\ \ c = 2 \text{ et } \rho \cong 0,3333$$

Phénomène d'attente.xls Q(t)

Loi à l'équilibre du nombre de clients présents dans le système VII

Theorem

Théorème. Le nombre espéré de clients dans le système, lorsque celui-ci est à l'équilibre, est

$$E\left[Q\left(t\right)\right] = c\rho + P\left[Q\left(t\right) = c\right]\frac{\rho}{\left(1-\rho\right)^2}.$$

Loi à l'équilibre du nombre de clients présents dans le système VIII

Preuve du théorème.

$$\begin{aligned}
E\left[Q(t)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} nP\left[Q(t)=n\right] \\
&= \sum_{n=1}^{c} nP\left[Q(t)=n\right] + \sum_{n=c+1}^{\infty} nP\left[Q(t)=n\right] \\
&= \sum_{n=1}^{c} n\frac{(c\rho)^n}{n!}P_0 + \sum_{n=c+1}^{\infty} n\frac{c^c\rho^n}{c!}P_0 \text{ par l'équation (2)} \\
&= P_0\left(c\rho\sum_{n=1}^{c}\frac{(c\rho)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(c\rho)^c}{c!}\sum_{n=c+1}^{\infty} n\rho^{n-c}\right) \\
&= P_0\left(c\rho\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^{n}}{n!} + \frac{(c\rho)^c}{c!}\sum_{n=1}^{\infty} (n+c)\rho^{n}\right)
\end{aligned}$$

Loi à l'équilibre du nombre de clients présents dans le système IX

$$= P_0\left(c\rho\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^n}{n!}+\frac{(c\rho)^c}{c!}\sum_{n=1}^{\infty}n\rho^n+\frac{(c\rho)^c}{c!}c\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\right)$$

$$= P_0\left(c\rho\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^n}{n!}+\frac{(c\rho)^c}{c!}\frac{\rho}{(1-\rho)^2}+\frac{(c\rho)^c}{c!}c\frac{\rho}{1-\rho}\right)$$

$$= P_0\left(c\rho\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^n}{n!}+\frac{(c\rho)^c}{c!}c\frac{\rho}{1-\rho}\right)+P_0\frac{(c\rho)^c}{c!}\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$= c\rho\underbrace{P_0\left(\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^n}{n!}+\frac{(c\rho)^c}{c!}\frac{1}{1-\rho}\right)}_{=P_0^{-1}}+\underbrace{P_0\frac{(c\rho)^c}{c!}}_{=P[Q(t)=c]}\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

par l'équation (2)

$$= c\rho+P\left[Q(t)=c\right]\frac{\rho}{(1-\rho)^2}\ \blacksquare$$

Loi à l'équilibre du nombre de clients dans la file d'attente I

Definition

$\widehat{Q}(t)$ =nombre de clients dans la file au temps t.

Theorem

La distribution du nombre de clients dans la file d'attente, lorsque le système est à l'équilibre, est

$$P\left[\widehat{Q}(t)=n\right]=\begin{cases}1-P_0\frac{(c\rho)^c}{c!}\frac{\rho}{1-\rho} & si\ n=0\\[2em] P_0\frac{(c\rho)^c}{c!}\rho^n & si\ n\in\{1,2,3,\ldots\}\end{cases}$$

Loi à l'équilibre du nombre de clients dans la file d'attente II

Preuve du théorème. Puisque la file d'attente est vide s'il y a c clients ou moins dans le système et qu'elle contient $Q(t) - c$ clients s'il y a plus de c clients dans le système, le nombre de clients en file satisfait

$$\widehat{Q}(t) = \max(Q(t) - c, 0).$$

Par conséquent,

$$P\left[\widehat{Q}(t) = n\right] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{c} P[Q(t) = n] & \text{si } n = 0 \\ P[Q(t) = n + c] & \text{si } n \in \{1, 2, 3, \ldots\} \end{cases}$$

Or, en utilisant l'équation (2) :

$$P[Q(t) = n] = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 = \frac{(c\rho)^n}{n!} P_0 & \text{si } n \in \{1, 2, \ldots, c\} \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{c!c^{n-c}} P_0 = \frac{c^c \rho^n}{c!} P_0 & \text{si } n \in \{c+1, c+2, \ldots\} \end{cases}$$

Loi à l'équilibre du nombre de clients dans la file d'attente III

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{c} P\left[Q\left(t\right)=n\right] &= P_0 \sum_{n=0}^{c} \frac{(c\rho)^n}{n!} = \frac{\sum_{n=0}^{c} \frac{(c\rho)^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^i}{i!} + \frac{c^c\rho^c}{c!(1-\rho)}} \\
&\text{par définition de } P_0, \\
&= \frac{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{(c\rho)^c}{c!}\frac{1}{1-\rho} - \frac{(c\rho)^c}{c!}\frac{\rho}{1-\rho}}{\sum_{i=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^i}{i!} + \frac{c^c\rho^c}{c!(1-\rho)}} \\
&= 1 - P_0 \frac{(c\rho)^c}{c!}\frac{\rho}{1-\rho}
\end{aligned}$$

et

$$P\left[Q\left(t\right)=n+c\right] = \frac{c^c\rho^{n+c}}{c!}P_0. \blacksquare$$

Loi à l'équilibre du nombre de clients dans la file d'attente IV

Theorem

Le nombre espéré de clients dans la file d'attente, lorsque le système est à l'équilibre, est

$$E\left[\widehat{Q}(t)\right] = P\left[Q(t) = c\right] \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = E\left[Q(t)\right] - c\rho$$

Preuve du théorème. Puisque la file d'attente est vide s'il y a c clients ou moins dans le système et qu'elle contient $Q(t) - c$ clients s'il y a plus de c clients dans le système, le nombre de clients en file satisfait

$$\widehat{Q}(t) = \max\left(Q(t) - c, 0\right).$$

Loi à l'équilibre du nombre de clients dans la file d'attente V

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E\left[\widehat{Q}\left(t\right)\right] &= E\left[\max\left(Q\left(t\right)-c,0\right)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\max\left(n-c,0\right)P\left[Q\left(t\right)=n\right] \\
&= \sum_{n=c+1}^{\infty}\left(n-c\right)P\left[Q\left(t\right)=n\right] \\
&= \sum_{n=c+1}^{\infty}\left(n-c\right)\frac{c^c\rho^n}{c!}P_0 \text{ par l'équation (2)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}n\frac{c^c\rho^{n+c}}{c!}P_0 = \underbrace{\frac{c^c\rho^c}{c!}P_0}_{P[Q(t)=c]}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}n\rho^n}_{=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}} \\
&= P\left[Q\left(t\right)=c\right]\frac{\rho}{\left(1-\rho\right)^2}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Loi à l'équilibre du nombre de comptoirs de service inoccupés I

Theorem

La loi stationnaire de l'évolution $\{C(t) : t \geq 0\}$ *du nombre de comptoirs de service inoccupés est, pour tout nombre réel positif* t,

$$P[C(t) = n] = \begin{cases} \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)} P_0 & si\ n = 0 \\ \frac{(c\rho)^{c-n}}{(c-n)!} P_0 & si\ n \in \{1, 2, ..., c\} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

et

$$E[C(t)] = P_0 c(1-\rho) \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + P_0 \frac{(c\rho)^c}{(c-1)!}$$

Loi à l'équilibre du nombre de comptoirs de service inoccupés II

Preuve du théorème.

$$P\left[C\left(t\right)=n\right]=\begin{cases} P\left[Q\left(t\right)\geq c\right] & \text{si } n=0 \\ P\left[Q\left(t\right)=c-n\right]= & \text{si } n\in\{1,2,\dots,c\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Loi à l'équilibre du nombre de comptoirs de service inoccupés III

or

$$\begin{aligned}
P\left[Q\left(t\right) \geq c\right] &= \sum_{n=c}^{\infty} P\left[Q\left(t\right) = n\right] \\
&= \sum_{n=c}^{\infty} \frac{c^c \rho^n}{c!} P_0 \\
&= \frac{\left(c\rho\right)^c}{c!} P_0 \sum_{n=c}^{\infty} \rho^{n-c} \\
&= \frac{\left(c\rho\right)^c}{c!} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n} \\
&= \frac{\left(c\rho\right)^c}{c!} P_0 \frac{1}{1-\rho}
\end{aligned}$$

car $0 < \rho < 1$.

Loi à l'équilibre du nombre de comptoirs de service inoccupés IV

Par ailleurs, si n est un entier non négatif inférieur à c,

$$\begin{aligned} P\left[C(t) = n\right] &= P\left[Q(t) = c - n\right] \\ &= \frac{(c\rho)^{c-n}}{(c-n)!} P_0 \end{aligned}$$

et si $n = c$ alors

$$\begin{aligned} P\left[C(t) = c\right] &= P\left[Q(t) = 0\right] \\ &= P_0. \end{aligned}$$

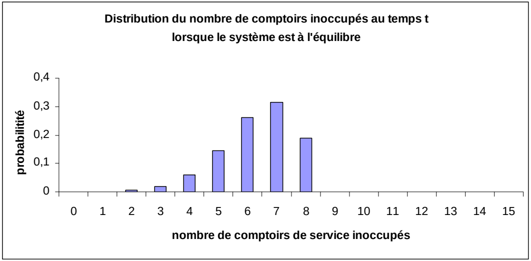
Loi à l'équilibre du nombre de comptoirs de service inoccupés V

$$
\begin{aligned}
E\left[C\left(t\right)\right] &= \sum_{n=0}^{c} nP\left[C\left(t\right)=n\right] \\
&= \sum_{n=1}^{c} nP\left[C\left(t\right)=n\right] \\
&= \sum_{n=1}^{c} n\frac{\left(c\rho\right)^{c-n}}{\left(c-n\right)!}P_0 = \sum_{m=0}^{c-1}\left(c-m\right)\frac{\left(c\rho\right)^{m}}{m!}P_0 \\
&= \left(c\sum_{m=0}^{c-1}\frac{\left(c\rho\right)^{m}}{m!} - \sum_{m=0}^{c-1} m\frac{\left(c\rho\right)^{m}}{m!}\right)P_0
\end{aligned}
$$

Loi à l'équilibre du nombre de comptoirs de service inoccupés VI

$$
\begin{aligned}
&= \left(c \sum_{m=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^m}{m!} - \sum_{m=1}^{c-1} m \frac{(c\rho)^m}{m!} \right) P_0 \\
&= \left(c \sum_{m=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^m}{m!} - c\rho \sum_{m=1}^{c-1} \frac{(c\rho)^{m-1}}{(m-1)!} \right) P_0 \\
&= \left(c \sum_{m=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^m}{m!} - c\rho \sum_{n=0}^{c-2} \frac{(c\rho)^n}{n!} \right) P_0 \\
&= \left(c \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} - c\rho \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + c\rho \frac{(c\rho)^{c-1}}{(c-1)!} \right) P_0 \\
&= \left(c\,(1-\rho) \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{(c\rho)^c}{(c-1)!} \right) P_0. \blacksquare
\end{aligned}
$$

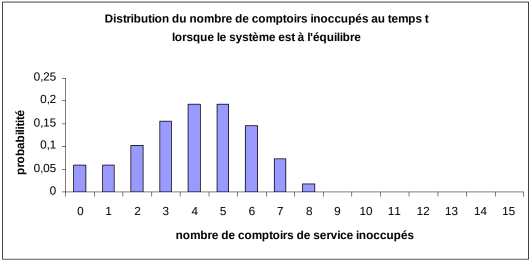
Loi à l'équilibre du nombre de comptoirs de service inoccupés VII



$$\lambda = 5,\ \mu = 3,\ c = 8 \text{ et } \rho \cong 0,2083$$
$$E\left[C\left(t\right)\right] \cong 6,33333 \text{ et } Var\left[C\left(t\right)\right] \cong 1,66608$$

Phénomène d'attente.xls C(t)

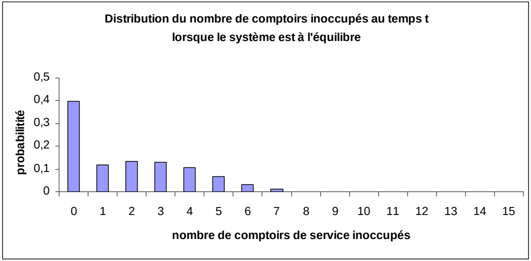
Loi à l'équilibre du nombre de comptoirs de service inoccupés VIII



$$\lambda = 12,\ \mu = 3,\ c = 8 \text{ et } \rho = 0,5$$
$$E\left[C\left(t\right)\right] \cong 4 \text{ et } Var\left[C\left(t\right)\right] \cong 3,76382$$

Phénomène d'attente.xls C(t)

Loi à l'équilibre du nombre de comptoirs de service inoccupés IX



$$\lambda = 18,5,\ \mu = 3,\ c = 8 \text{ et } \rho \cong 0,7708$$
$$E\left[C\left(t\right)\right] \cong 1,83333 \text{ et } Var\left[C\left(t\right)\right] \cong 3,71736$$

Phénomène d'attente.xls C(t)

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre I

Theorem

Soit $W(t)$, le temps que le client arrivé dans le système au temps t passe dans la file d'attente. Alors, si le système est à l'équilibre,

$$F_W(w) = P\left[W(t) \leq w\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } w < 0 \\ P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} & \text{si } w = 0 \\ P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} \\ +P\left[Q(t) = c\right] \frac{1-\exp[-(c\mu-\lambda)w]}{1-\rho} & \text{si } w > 0. \end{cases}$$

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre II

- La variable aléatoire $W(t)$ est de loi mixte : elle n'est ni de loi discrète, ni de loi continue mais a une probabilité non nulle d'être égale à zéro et est continue sur l'intervalle $(0, \infty)$.

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre III

- Si $w > 0$, alors la fonction de densité de W est

$$\begin{aligned} & f_W(w) \\ = \; & \frac{d}{dw} F_W(w) \\ = \; & \frac{d}{dw} \left(\begin{array}{c} P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} \\ +P\left[Q(t)=c\right] \frac{1-\exp[-(c\mu-\lambda)w]}{1-\rho} \end{array} \right) \\ = \; & P\left[Q(t)=c\right] \frac{c\mu-\lambda}{1-\rho} \exp\left[-(c\mu-\lambda)w\right] \\ = \; & P\left[Q(t)=c\right] c\mu \exp\left[-(c\mu-\lambda)w\right]. \end{aligned}$$

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre IV

Preuve du théorème. S'il y a moins de c clients dans le système, le temps d'attente est nul. Sinon, le client doit attendre que $Q(t) - c + 1$ services soient complétés, c'est-à-dire que les comptoirs de service doivent se libérer en $Q(t) - c + 1$ occasions avant qu'il puisse être servi.

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre V

Donc, la probabilité que le client n'ait pas à attendre est

$$\begin{aligned} P\left[W(t)=0\right] &= P\left[Q(t)<c\right] \\ &= \sum_{n=0}^{c-1} P\left[Q(t)=n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} P_0 \\ &= P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre VI

- Si tous les comptoirs de service sont occupés, alors le temps d'attente X_1 avant que le prochain comptoir se libère est

$$X_1 = \min_{i \in \{1,2,\ldots,c\}} S_i$$

où S_i représente le temps d'attente avant que le i ième comptoir se libère.

- Comme le temps de service au i ième comptoir est de loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\mu}$ et puisque la loi exponentielle n'a pas de mémoire, S_i est aussi de loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\mu}$.

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre VII

- En effet, s'il y a un client, disons monsieur A, au i ième comptoir au moment ou monsieur B entre dans le système, alors la distribution du temps restant avant que le service de monsieur A soit complété est la même que si monsieur B était entré dans le système au moment même ou monsieur A se présentait au i ième comptoir de service.
- Notons que ce raisonnement serait probablement faux si les temps de service étaient distribués selon une loi différente de la loi exponentielle.

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre VIII

Ainsi, pour tout nombre réel positif x,

$$
\begin{aligned}
P\left[X_1 \leq x\right] &= P\left[\min_{i\in\{1,2,\ldots,c\}} S_i \leq x\right] \\
&= 1 - P\left[\min_{i\in\{1,2,\ldots,c\}} S_i > x\right] \\
&= 1 - P\left[S_1 > x \text{ et } S_2 > x \text{ et } \ldots \text{ et } S_c > x\right] \\
&= 1 - P\left[S_1 > x\right] P\left[S_2 > x\right] \ldots P\left[S_c > x\right] \\
&\quad \text{car les temps de service sont indépendants.} \\
&= 1 - e^{-\mu x} e^{-\mu x} \ldots e^{-\mu x} = 1 - e^{-c\mu x} \\
&\quad \text{car, } \forall i \in \{1, \ldots, c\}, \ S_i \text{ est de loi exponentielle d'espérance } \frac{1}{\mu}.
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que X_1 est de loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{c\mu}$.

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre IX

- Puisque la loi exponentielle n'a pas de mémoire, les intervalles de temps $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ entre les libérations de comptoirs sont des variables aléatoires indépendantes, toutes de loi exponentielle de moyenne $\frac{1}{c\mu}$.

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre X

Pour tout nombre réel positif w,

$$\begin{aligned}
& P\left[W(t) \leq w \text{ et le client arrivant à l'instant } t \text{ doit attendre dar}\right. \\
= \quad & P\left[W(t) \leq w \text{ et } Q(t) \geq c\right] \\
= \quad & \sum_{n=0}^{\infty} P\left[W(t) \leq w \,|\, Q(t) = n + c\right] P\left[Q(t) = n + c\right] \\
= \quad & \sum_{n=0}^{\infty} P\left[\sum_{i=1}^{n+1} X_i \leq w\right] P\left[Q(t) = n + c\right]
\end{aligned}$$

car le client doit attendre que $Q(t) - c + 1$ comptoirs se libèrent. Or $Q(t) = n + c$ et $\sum_{i=1}^{n+1} X_i$ est le temps requis pour la libération de $n + 1$ comptoirs.

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre XI

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^w \frac{(c\mu)^{n+1}}{n!}x^n e^{-c\mu x}dx\right) P\left[Q\left(t\right) = n+c\right]$$

car $\sum_{i=1}^{n+1} X_i$ est de loi $\Gamma\left(n+1, \frac{1}{c\mu}\right)$

$$= c\mu \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^w \frac{(c\mu x)^{n}}{n!} e^{-c\mu x}dx\right) P\left[Q\left(t\right) = n+c\right]$$

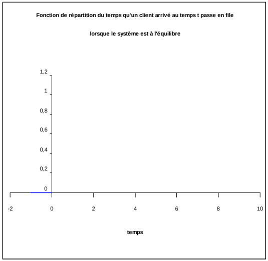
$$= c\mu \int_0^w e^{-c\mu x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c\mu x)^{n}}{n!} P\left[Q\left(t\right) = n+c\right]\right) dx$$

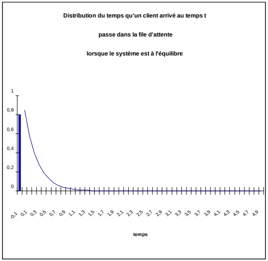
$$= c\mu \int_0^w e^{-c\mu x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c\mu x)^{n}}{n!} \frac{(c\rho)^c\rho^n}{c!}P_0\right) dx$$

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre XII

$$
\begin{aligned}
&= P_0 c\mu \frac{(c\rho)^c}{c!} \int_0^w e^{-c\mu x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \right) dx \\
&= P_0 c\mu \frac{(c\rho)^c}{c!} \int_0^w e^{-c\mu x} e^{\lambda x} dx \\
&= P_0 c\mu \frac{(c\rho)^c}{c!} \int_0^w e^{(\lambda - c\mu)x} dx \\
&= P_0 c\mu \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{\lambda - c\mu} \left(e^{(\lambda - c\mu)w} - 1 \right) \\
&= P_0 \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} \left(1 - e^{(\lambda - c\mu)w} \right) \\
&= P\left[Q(t) = c\right] \frac{1}{1-\rho} \left(1 - e^{(\lambda - c\mu)w} \right). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre XIII

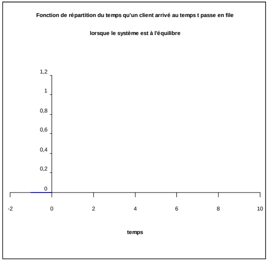


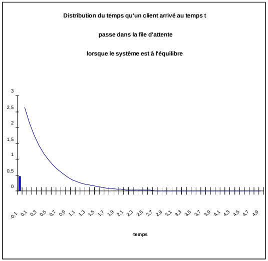


$$\lambda = 2,25,\ \mu = 3,\ c = 2 \text{ et } \rho \cong 0,6667$$
$$E\left[W\left(t\right)\right] \cong 0,0545 \text{ et } Var\left[W\left(t\right)\right] \cong 0,0116$$

Phénomène d'attente.xls W(t) Rép

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre XIV

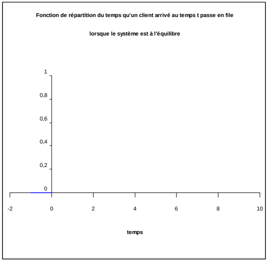


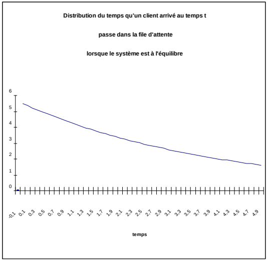


$$\lambda = 4,\ \mu = 3,\ c = 2 \text{ et } \rho \cong 0,6667$$
$$E\left[W\left(t\right)\right] \cong 0,2667 \text{ et } Var\left[W\left(t\right)\right] \cong 0,0622$$

Phénomène d'attente.xls W(t) Rép

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre XV





$$\lambda = 5,75,\ \mu = 3,\ c = 2 \text{ et } \rho \cong 0,6667$$
$$E\left[W\left(t\right)\right] \cong 3,7518 \text{ et } Var\left[W\left(t\right)\right] \cong 0,9313$$

Phénomène d'attente.xls W(t) Rép

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre XVI

Theorem

Si le système est à l'équilibre, alors

$$E\left[W\left(t\right)\right] = \frac{1}{c\mu\left(1-\rho\right)^2} P\left[Q\left(t\right)=c\right]$$

et

$$\begin{aligned} & Var\left[W\left(t\right)\right] \\ = \quad & \frac{1}{\left(c\mu\right)^2\left(1-\rho\right)^3}\left(2-\frac{P\left[Q\left(t\right)=c\right]}{1-\rho}\right)P\left[Q\left(t\right)=c\right]. \end{aligned}$$

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre XVII

Preuve du théorème.

$$
\begin{aligned}
E\left[W\left(t\right)\right] &= 0P\left[W\left(t\right)=0\right]+\int_0^\infty wf_W\left(w\right)\ dw \\
&= \int_0^\infty wP\left[Q\left(t\right)=c\right]c\mu\exp\left[-\left(c\mu-\lambda\right)w\right]\ dw \\
&= P\left[Q\left(t\right)=c\right]c\mu\int_0^\infty w\exp\left[-\left(c\mu-\lambda\right)w\right]\ dw \\
&= P\left[Q\left(t\right)=c\right]c\mu\frac{1}{\left(c\mu-\lambda\right)^2} \\
&= P\left[Q\left(t\right)=c\right]\frac{1}{c\mu\left(1-\rho\right)^2}
\end{aligned}
$$

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre XVIII

$$
\begin{aligned}
& E\left[(W(t))^2\right] \\
= \; & 0^2 P[W(t)=0] + \int_0^\infty w^2 f_W(w)\; dw \\
= \; & \int_0^\infty w^2 P[Q(t)=c]\, c\mu \exp\left[-(c\mu-\lambda)\, w\right]\; dw \\
= \; & P[Q(t)=c]\, c\mu \int_0^\infty w^2 \exp\left[-(c\mu-\lambda)\, w\right]\; dw \\
= \; & P[Q(t)=c]\, c\mu \frac{2}{(c\mu-\lambda)^3} \\
= \; & P[Q(t)=c] \frac{2}{(c\mu)^2(1-\rho)^3}
\end{aligned}
$$

Distribution du temps d'attente d'un client dans la file lorsque le système est à l'équilibre XIX

$$
\begin{aligned}
& Var\left[W(t)\right] \\
= \;& E\left[\left(W(t)\right)^2\right] - \left(E\left[W(t)\right]\right)^2 \\
= \;& P\left[Q(t) = c\right] \frac{2}{(c\mu)^2 (1-\rho)^3} \\
& - \left(P\left[Q(t) = c\right] \frac{1}{c\mu (1-\rho)^2}\right)^2 \\
= \;& \frac{1}{(c\mu)^2 (1-\rho)^3} P\left[Q(t) = c\right] \left(2 - \frac{P\left[Q(t) = c\right]}{1-\rho}\right). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Le processus d'entrée dans le système I

- Nous avons supposé que les clients arrivent dans le système selon un processus de Poisson d'intensité λ.
- Cette hypothèse implique que les temps aléatoires entre les arrivées des clients sont indépendants et identiquement distribués de loi exponentielle.
- Cela exclut aussi la modélisation des périodes de grand achalandage et les arrivées en groupes.
- Il serait possible de permettre à l'intensité λ du processus de Poisson de dépendre du temps (λ_t) , permettant ainsi d'augmenter le nombre moyen d'arrivées lors des périodes de pointe.

Le processus d'entrée dans le système II

- Il se peut que le processus de Poisson ne soit pas du tout adapté à la modélisation d'un système en particulier.
- Par exemple, si nous savons que les clients arrivent en groupes ou encore à intervalle non aléatoire.
- Il faudrait alors abandonner les hypothèses d'indépendance des temps aléatoires entre les arrivées et leur distribution exponentielle.
- Il arrive aussi que la capacité de la file d'attente soit limitée.
- Par exemple, certains systèmes téléphoniques placent le client en attente lorsque les téléphonistes sont tous occupés.

Le processus d'entrée dans le système III

- Cependant, s'il y a disons k clients déjà en attente, alors la ligne sera occupée pour tous les prochains appels, et ce, jusqu'à temps qu'une place soit disponible dans la file.
- Le système perdra ces clients qui ne pourront accéder au système.

La discipline d'attente

- Nous avons utilisé la méthode du premier arrivé, premier servi (First In, First Out, d'où l'acronyme FIFO).
- Nous aurions pu utiliser la méthode de la pile (dernier arrivé, premier servi; Last In, First Out (LIFO)) ou encore de choisir aléatoirement une personne dans la file (Service In Random Number (SIRO)).

Le mécanisme de service I

- Nous devons déterminer le nombre de comptoirs de service et leur configuration: sont-ils en parallèle (une file par comptoir de service, comme dans plusieurs épiceries) ou regroupés (une seule file desservant tous les comptoirs, comme dans la plupart des banques).
- Y a-t-il des comptoirs offrant des services spéciaux (par exemple, les caisses pour les clients achetant moins de 12 articles dans les épiceries, les guichets commerciaux dans les banques, etc.) pour lesquels les temps de service seraient différents de ceux des autres guichets?
- Dans le cas que nous avons étudié, le temps de service était indépendant de la longueur de la file.
- Or, il semble raisonnable de croire que, dans certain système, le temps de service sera plus court lorsque la file d'attente est longue.

Le mécanisme de service II

- Il est aussi possible que la loi exponentielle ne soit pas appropriée pour modéliser les temps de service de certains systèmes.
- Les temps peuvent aussi être corrélés entre eux.