Processus de Poisson

Solutions de l'exercice 5.1

Les modèles probabilistes et stochastiques de la gestion

3-602-84

Geneviève Gauthier

Dernière mise à jour : 23 novembre 2000

Exercice 5.1. *Une entreprise d'envergure internationale possédant des bureaux sur tous les continents fait l'acquisition d'un nouveau serveur afin d'assurer le service de courrier électronique interne. Le serveur sera en opération 24 heures sur 24. En moyenne, un message toutes les 30 secondes est envoyé d'un employé à un autre.*
Le temps sera exprimé en heure et l'instant $t = 0$ *correspond au moment de la mise en service dudit serveur. Le processus stochastique* $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ *représente l'évolution du nombre de messages qui transiteront par ce serveur.*

a) *Quelles sont les conditions, brièvement, que doivent satisfaire les arrivées de messages pour que* N *soit un processus de Poisson? Quelle est son intensité?*

Essentiellement, il faut que les messages arrivent indépendamment les uns des autres et qu'il n'y ait pas de périodes de pointe.

$$\begin{aligned} \lambda &= 1\frac{\text{message}}{30 \text{ secondes}} \times \frac{60 \text{ secondes}}{1 \text{ minute}} \times \frac{60 \text{ minutes}}{1 \text{ heure}} && (1) \\ &= 120 \text{ messages/heure.} && (2) \end{aligned}$$

b) *Quelle est la probabilité que le serveur ne reçoive aucun message au cours des 2 premières minutes de sa mise en service?*

Deux méthodes peuvent résoudre se problème.

La première:

$$t = 2 \text{ minutes} \times \frac{1 \text{ heure}}{60 \text{ minutes}} = \frac{1}{30}\text{heure} \tag{3}$$

Comme $N\left(\frac{1}{30}\right)$ représente le nombre de messages que seront reçus par le serveur au bout de 2 minutes (un trentième d'heure) et que $N\left(\frac{1}{30}\right)$ est de loi de Poisson d'espérance $\lambda t = 120 \times \frac{1}{30} = 4$,

$$P\left[N\left(\frac{1}{30}\right) = 0\right] = e^{-4}\frac{4^0}{0!} \cong 0,018\ 316. \tag{4}$$

La deuxième: comme le temps d'attente τ_1 avant l'arrivée du premier message est de loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{120}$,

$$P\left[\tau_1 > \frac{1}{30}\right] = e^{-120 \times \frac{1}{30}} \cong 0,018\ 316. \tag{5}$$

En passant, comme nous utiliserons souvent les temps aléatoires entre deux arrivées de messages au cours de ce solutionnaire, établissons dès à présent que τ_k représente le temps aléatoire entre les arrivées des $k-1$ ième et k ième messages, $\tau_0 = 0$.

c) *À quel moment espérez-vous le premier message (le temps moyen de l'arrivée du premier message)?*

Comme le temps d'attente τ_1 avant l'arrivée du premier message est de loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{120}$, nous espérons le premier message au temps $t = \frac{1}{120}$ heure, c'est-à-dire que le premier message arrivera, en moyenne, au bout de 30 secondes. Quelle surprise!

d) *Quelle est la probabilité que le serveur reçoive moins de 3 messages au cours des 5 premières minutes de sa mise en service?*

$$t = 5 \text{ min} \times \frac{1 \text{ heure}}{60 \text{ minutes}} = \frac{1}{12}\text{heure}. \tag{6}$$

Comme $N\left(\frac{1}{12}\right)$ est de loi de Poisson d'espérance $120 \times \frac{1}{12} = 10$,

$$P\left[N\left(\frac{1}{12}\right) < 3\right] = \sum_{k=0}^{2} e^{-10}\frac{10^k}{k!} \cong 0,002\ 769\ 4. \tag{7}$$

Une autre façon de répondre est la suivante: si le serveur reçoit moins de 3 messages au cours des 5 premières minutes, c'est que l'instant $\sum_{k=1}^{3} \tau_k$ auquel lui parviendra le troisième message est supérieur à $\frac{1}{12}$ d'heure. Comme la somme de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de loi exponentielle d'espérance θ est de loi $\Gamma(n, \theta)$, $\sum_{k=1}^{3} \tau_k$ est de loi $\Gamma\left(3, \frac{1}{120}\right)$ et

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{k=1}^{3} \tau_k > \frac{1}{12}\right] &= \int_{\frac{1}{12}}^{\infty} \frac{1}{(3-1)!\frac{1}{120}^3} x^{3-1} \exp\left\{-\frac{x}{\frac{1}{120}}\right\} dx \qquad (8) \\ &\cong 2,7689 \times 10^{-3}. \qquad (9) \end{aligned}$$

e) *Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 150 messages au cours de la première heure?*

Deux solutions sont possibles.

La première:

$$P\left[N(1) > 150\right] = 1 - P\left[N(1) \leq 150\right] \tag{10}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{150} e^{-120}\frac{120^k}{k!} \cong 0,003\ 552. \tag{11}$$

La deuxième: pour qu'il y ait plus de 150 messages, il faut qu'il y en ait au moins 151. Il faut donc que le temps $\sum_{k=1}^{151} \tau_k$ d'arrivée du 151 ième message soit inférieur à 1. Comme la somme de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de loi exponentielle d'espérance θ est de loi $\Gamma(n, \theta)$, $\sum_{k=1}^{151} \tau_k$ est de loi $\Gamma\left(151, \frac{1}{120}\right)$ et

$$\begin{aligned}
& P\left[\sum_{k=1}^{151} \tau_k \leq 1\right] && (12)\\
= \; & \int_0^1 \frac{1}{(151-1)!\frac{1}{120}^{151}} x^{151-1} \exp\left\{-\frac{x}{\frac{1}{120}}\right\} dx && (13)\\
\cong \; & 0{,}003\ 552. && (14)
\end{aligned}$$

f) *Le gestionnaire du serveur doit effectuer des tests lorsque le millième message sera parvenu au serveur. À quel instant espérez-vous que ce millième message arrive*?

L'instant auquel le millième message arrivera est $\sum_{k=1}^{1000} \tau_k$ qui est de loi $\Gamma\left(1000, \frac{1}{120}\right)$. Son espérance est

$$E\left[\sum_{k=1}^{1000} \tau_k\right] = 1000 \times \frac{1}{120} \cong 8,333\ 333 \tag{15}$$

c'est-à-dire 8 heures et 20 minutes après la mise en service du serveur. De plus,

$$\left(Var\left[\sum_{k=1}^{1000} \tau_k\right]\right)^{1/2} = (1000)^{1/2} \times \frac{1}{120} \cong 0,263\ 52 \tag{16}$$

c'est-à-dire que l'écart-type du temps d'arrivée du millième message est d'environ 16 minutes.

g) *Notre gestionnaire n'a pas envie de perdre son temps à attendre ce millième message. Il décide de vaquer à d'autres occupations et de revenir au serveur peu avant l'événement. À quel moment doit-il revenir s'il veut avoir 95 % des chances d'assister à l'arrivée du millième message?*

Nous cherchons le temps t_0 pour lequel

$$P\left[\sum_{k=1}^{1000} \tau_k \leq t_0\right] = 0,05. \tag{17}$$

Utilisant le théorème limite central, nous avons que

$$\frac{\sum_{k=1}^{1000} \tau_k - E\left[\sum_{k=1}^{1000} \tau_k\right]}{\left(Var\left[\sum_{k=1}^{1000} \tau_k\right]\right)^{1/2}} \tag{18}$$

est approximativement de loi normale centrée et réduite.

Or

$$
\begin{aligned}
0,05 &= P[Z < -1,645] \text{ où } Z \text{ est une v.a. de loi normale(0,1)} && (19) \\
&\cong P\left[\frac{\sum_{k=1}^{1000} \tau_k - E\left[\sum_{k=1}^{1000} \tau_k\right]}{\left(Var\left[\sum_{k=1}^{1000} \tau_k\right]\right)^{1/2}} < -1,645\right] && (20) \\
&= P\left[\sum_{k=1}^{1000} \tau_k < E\left[\sum_{k=1}^{1000} \tau_k\right] - 1,645\left(Var\left[\sum_{k=1}^{1000} \tau_k\right]\right)^{1/2}\right] && (21) \\
&= P\left[\sum_{k=1}^{1000} \tau_k < \frac{1000}{120} - 1,645\frac{(1000)^{1/2}}{120}\right] && (22) \\
&\cong P\left[\sum_{k=1}^{1000} \tau_k < 7,8998\right] && (23)
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que $t_0 \cong 7,8998$ ou 7 heures et 54 minutes après l'installation du serveur. Il est aussi possible de résoudre ce problème directement à l'aide de la fonction LOI.GAMMA.INVERSE(probabilité;alpha;beta) de Excel.

h) *Ayant rendez-vous après le travail, à quelle heure, au plus tard, notre gestionnaire estime-t-il qu'il pourra quitter le site du serveur s'il fixe à 5 % la probabilité que le millième message survienne après son départ? (Vous pouvez supposer que le gestionnaire a démarré le serveur à son arrivée au travail, disons à 8 heures.)*

Nous cherchons le temps t_1 pour lequel

$$P\left[\sum_{k=1}^{1000} \tau_k \geq t_1\right] = 0,05. \tag{24}$$

à l'aide de la fonction LOI.GAMMA.INVERSE(probabilité;alpha;beta) de Excel, nous obtenons $t_1 = 8,771\ 476\ 132$.

En utilisant le théorème limite central, nous avons

$$
\begin{aligned}
0,05 &= P\left[Z > 1,645\right] \text{ où } Z \text{ est une v.a. de loi normale(0,1)} && (25)\\
&\cong P\left[\frac{\sum_{k=1}^{1000}\tau_k - E\left[\sum_{k=1}^{1000}\tau_k\right]}{\left(Var\left[\sum_{k=1}^{1000}\tau_k\right]\right)^{1/2}} > 1,645\right] && (26)\\
&= P\left[\sum_{k=1}^{1000}\tau_k > E\left[\sum_{k=1}^{1000}\tau_k\right] + 1,645\left(Var\left[\sum_{k=1}^{1000}\tau_k\right]\right)^{1/2}\right] && (27)\\
&= P\left[\sum_{k=1}^{1000}\tau_k > \frac{1000}{120} + 1,645\frac{(1000)^{1/2}}{120}\right] && (28)\\
&\cong P\left[\sum_{k=1}^{1000}\tau_k > 8,7668\right] && (29)
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que $t_1 \cong 8,7668$ soit 8 heures et 46 minutes après l'installation du serveur. Il estime donc qu'il pourra quitter le site du serveur au plus tard à 16h46.

i) *Le serveur est débordé lorsqu'il reçoit* 10 *messages ou plus au cours d'une minute. Quelle est la probabilité que cet événement survienne à un instant donné?*

Cela surviendra si la somme des temps écoulés entre les arrivées de 10 messages consécutifs est inférieure à 1 minute ($\frac{1}{60}$ d'heure). Soit t_0 l'instant choisit. Comme la loi exponentielle n'a pas de mémoire, le temps d'attente avant que le prochain message parvienne au serveur est de loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire que le système ne se souvient pas qu'il attendait déjà l'arrivée de ce prochain message. Les temps d'attentes entre les 9 autres arrivées de messages sont indépendants (et indépendants du premier temps d'attente) et identiquement distribués, tous de loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\lambda}$. Ainsi, le système sera surchargé si $\sum_{k=1}^{10} \tau_{k_0+k} < \frac{1}{60}$. Comme le temps aléatoire $\sum_{k=1}^{10} \tau_{k_0+k}$ est de loi $\Gamma\left(10, \frac{1}{120}\right)$, cette probabilité est

$$\begin{aligned} P\left[\sum_{k=1}^{10} \tau_{k_0+k} < \frac{1}{60}\right] &= \int_0^{\frac{1}{60}} \frac{1}{(10-1)!\frac{1}{120}^{10}} x^{10-1} \exp\left\{-\frac{x}{\frac{1}{120}}\right\} dx \quad (30) \\ &\cong 4,6498 \times 10^{-5}. \quad (31) \end{aligned}$$

Autre facçon d'effectuer le calcul :

$$P\left[N\left(t_0+\frac{1}{60}\right)-N\left(t_0\right)\geq 10\right] = P\left[N\left(\frac{1}{60}\right)\geq 10\right] \tag{32}$$

$$= 1-\sum_{i=0}^{9} e^{-2}\frac{2^i}{i!} \tag{33}$$

$$= 4,649\,8\times 10^{-5} \tag{34}$$

j) *Supposons que l'entreprise possède un deuxième serveur, complètement indépendant du premier, recevant, en moyenne, un message toutes les 10 secondes et que ce serveur tombe en panne. Notre premier serveur doit donc traiter tous les messages, c'est-à-dire ceux qu'il reçoit d'habitude et les messages généralement destinés au deuxième serveur. Quelle est la probabilité, qu'à un instant donné, il soit surchargé?*

Soit $\widetilde{N}$, le processus stochastique modélisant le nombre de messages parvenant au deuxième serveur. Supposons $\widetilde{N} = \left\{ \widetilde{N}(t) : t \geq 0 \right\}$ est un processus de Poisson. Son intensité est

$$\widetilde{\lambda} = 1 \frac{\text{message}}{10 \text{ secondes}} \times \frac{60 \text{ secondes}}{1 \text{ minute}} \times \frac{60 \text{ minutes}}{1 \text{ heure}} = 360 \text{ messages/heure.}$$

$\widehat{N} = N + \widetilde{N}$ représente l'évolution du nombre de message reçu par notre serveur lorsque le deuxième serveur est en panne. Comme nous avons émis l'hypothèse que N et $\widetilde{N}$ sont indépendants (les serveurs fonctionnent indépendammment l'un de l'autre), $\widehat{N}$ est un processus de Poisson d'intensité $\widehat{\lambda} = \lambda + \widetilde{\lambda} = 120 + 360 = 480$.

Imitons maintenant le raisonnement effectué à la question précédente. $\sum_{k=1}^{10} \tau_{k_0+k}$ est de loi $\Gamma\left(10, \frac{1}{480}\right)$ et la probabilité d'une surcharge est

$$\begin{aligned} & P\left[\sum_{k=1}^{10} \tau_{k_0+k} < \frac{1}{60}\right] && (35) \\ = & \int_0^{\frac{1}{60}} \frac{1}{(10-1)!\frac{1}{480}^{10}} x^{10-1} \exp\left\{-\frac{x}{\frac{1}{480}}\right\} dx && (36) \\ \cong & \ 0,283\ 38. && (37) \end{aligned}$$

Autre facçon d'effectuer le calcul :

$$\begin{aligned} & P\left[N\left(t_0+\frac{1}{60}\right) - N(t_0) \geq 10\right] && (38) \\ = & \ P\left[N\left(\frac{1}{60}\right) \geq 10\right] && (39) \\ = & \ 1 - \sum_{i=0}^{9} e^{-8}\frac{8^i}{i!} = 0,283\,38 && (40) \end{aligned}$$