Porcessus de Poisson
Exercices solutionnés

Geneviève Gauthier

dernière mise à jour : 16 octobre 2000

Exercice. *Considérons un processus de Poisson* $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ *ayant une intensité de* $\lambda = 2$. *Déterminez la distribution conditionnelle de l'instant* τ_1 *auquel survient le premier événement, étant donné qu'au temps* $t = 1$ *il n'y avait qu'un seul événement survenu* $(N(1) = 1)$, *c'est-à-dire, trouvez, pour tout nombre réel* t,

$$P[\tau_1 \leq t \,|N(1) = 1].$$

Réponse. La distribution conditionnelle de l'instant auquel survient le premier événement, sachant qu'il y a un seul événement qui se produit au cours de la première unité de temps, est de loi uniforme$(0, 1)$.

Solution.

$$P[\tau_1 \leq t \,|N(1) = 1] = \frac{P[\tau_1 \leq t \text{ et } N(1) = 1]}{P[N(1) = 1]}.$$

Puisque $N(1)$ est de loi de Poisson d'espérance $\lambda t = 2 \times 1 = 2$,

$$P[N(1) = 1] = e^{-\lambda t}\frac{\lambda t}{1!} = 2e^{-2}.$$

Afin de déterminer $P[\tau_1 \leq t \text{ et } N(1) = 1]$ nous devons considérer trois cas.

i) Si $t < 0$ alors $P[\tau_1 \leq t \text{ et } N(1) = 1] = 0$ puisque la probabilité que le premier événement survienne à un instant négatif est nulle.

ii) Si $0 \leq t < 1$ alors $P[\tau_1 \leq t \text{ et } N(1) = 1] = t$. En effet, $N(1) = 1$ signifie qu'il y a un seul événement qui s'est produit durant l'intervalle de temps $(0, 1]$. Si $\tau_1 \leq t$ alors le premier événement survient pendant l'intervalle $(0,t] \subset (0,1]$. L'intersection de ces deux situations implique qu'il y a un seul événement durant l'intervalle $(0,t]$, $N(t)=1$, et aucun pendant l'intervalle $(t,1]$, $N(1)-N(t)=0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P[\tau_1 \leq t \text{ et } N(1)=1] &= P[N(t)=1 \text{ et } N(1)-N(t)=0] \\ &= P[N(t)=1]\,P[N(1)-N(t)=0] \text{ par } (PP1) \\ &= 2te^{-2t} \times e^{-2(1-t)} = 2te^{-2} \end{aligned}$$

car le fait que $N(t)$ soit de loi de Poisson d'espérance $\lambda t = 2t$ implique que

$$P[N(t)=1] = e^{-\lambda t}\frac{\lambda t}{1!} = 2te^{-2t}$$

et puisque $N(1)-N(t)$ est de loi de Poisson d'espérance $\lambda(1-t) = 2(1-t)$, alors

$$P[N(1)-N(t)=0] = e^{-\lambda(1-t)}\frac{(\lambda(1-t))^0}{0!} = e^{-2(1-t)}.$$

Enfin,

$$P[\tau_1 \leq t \,|N(1)=1] = \frac{P[\tau_1 \leq t \text{ et } N(1)=1]}{P[N(1)=1]} = \frac{2te^{-2}}{2e^{-2}} = t.$$

iii) Si $t \geq 1$ alors $N(1)=1$ signifie qu'il y a un seul événement qui s'est produit durant l'intervalle de temps $(0,1]$. Si $\tau_1 \leq t$ alors le premier événement est survenu pendant l'intervalle $(0,t]$, ce qui est trivialement satisfait si $N(1)=1$ car $(0,1] \subset (0,t]$. Par conséquent,

$$P[\tau_1 \leq t \text{ et } N(1)=1] = P[N(1)=1]$$

et

$$P[\tau_1 \leq t \,|N(1)=1] = \frac{P[\tau_1 \leq t \text{ et } N(1)=1]}{P[N(1)=1]} = \frac{P[N(1)=1]}{P[N(1)=1]}.$$

En résumé,

$$P[\tau_1 \leq t \,|N(1)=1] = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire que la distribution conditionnelle de l'instant auquel survient le premier événement, sachant qu'il y a un seul événement qui se produit au cours de la première unité de temps, est de loi uniforme$(0,1)$.

Exercice. *Considérons un titre boursier générant des dividendes à des instants que l'on ne saurait prédire. Dans certains cas, il est possible de modéliser cette situation à l'aide d'un processus de Poisson. En effet, si nous définissons un événement comme étant le versement de dividendes et, pour tout nombre réel positif* t,

$$N(t) = \text{le nombre de versements de dividendes durant l'intervalle de temps } (0,t],$$

alors $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ *est possiblement un processus de Poisson d'intensité* λ. *Pour les fins de ce problème, nous définissons l'unité de temps comme étant la journée.*
En supposant que nous recevons un montant de $d_i > 0$ *lors du* i *ième versement, calculez le montant espéré au cours de la première année.*
Pour faciliter la résolution du problème dans un premier temps, supposez que les versements sont tous du même montant, disons $d > 0$.

Solution. Soit

$$X(t) = \text{ le montant de dividendes reçus au cours de la période } (0,t].$$

Alors

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } N(t) = 0 \\ d_1 & \text{si } N(t) = 1 \\ d_1 + d_2 & \text{si } N(t) = 2 \\ \dots & \\ \sum_{i=1}^{n} d_i & \text{si } N(t) = n \\ \dots & \end{cases}.$$

Comme $N(t)$ est de loi de Poisson d'espérance λt,

$$P[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

et

$$E[X(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P[X(t) = x_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} d_i \right) P[N(t) = n] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} d_i \right) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Si les montants des dividendes sont tous égaux à d alors

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} d\right) e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(nd)\, e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= d\lambda t e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= d\lambda t e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n}}{n!} \\
&= d\lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} \\
&= d\lambda t.
\end{aligned}
$$

Ainsi, le montant espéré au cours de la première année est

$$E[X(365)] = 365 d\lambda.$$

Note. Ouverture du problème vers d'autres applications à la finance. Nous aurions pu nous intéresser à la valeur actualisée des versements. Nous pourrions aussi créer le processus stochastique modélisant le prix du titre. À chaque date de versement, le titre subira, en plus des fluctuations du marché qui pourraient être modélisées par un processus markovien, une chute de prix proportionnelle au montant des dividendes versés. À partir de ce nouveau processus, il sera possible de tarifer des options ayant ce titre comme sous-jacent.