

Processus de Poisson

Dernière mise à jour : 16 octobre 2000

Exercices 5

Exercice 5.1. Une entreprise d'envergure internationale possédant des bureaux sur tous les continents fait l'acquisition d'un nouveau serveur afin d'assurer le service de courrier électronique interne. Le serveur sera en opération 24 heures sur 24. En moyenne, un message toutes les 30 secondes est envoyé d'un employé à un autre.

Le temps sera exprimé en heure et l'instant $t = 0$ correspond au moment de la mise en service dudit serveur. Le processus stochastique $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ représente l'évolution du nombre de messages qui transiteront par ce serveur.

- a) Quelles sont les conditions, brièvement, que doivent satisfaire les arrivées de messages pour que N soit un processus de Poisson? Quelle est son intensité?
- b) Quelle est la probabilité que le serveur ne reçoive aucun message au cours des 2 premières minutes de sa mise en service?
- c) À quel moment espérez-vous le premier message (le temps moyen de l'arrivée du premier message)?
- d) Quelle est la probabilité que le serveur reçoive moins de 3 messages au cours des 5 premières minutes de sa mise en service?
- e) Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de 150 messages au cours de la première heure?
- f) Le gestionnaire du serveur doit effectuer des tests lorsque le millièm message sera parvenu au serveur. À quel instant espérez-vous que ce millièm message arrive?
- g) Notre gestionnaire n'a pas envie de perdre son temps à attendre ce millièm message. Il décide de vaquer à d'autres occupations et de revenir au serveur peu avant l'événement. À quel moment doit-il revenir s'il veut avoir 95 % des chances d'assister à l'arrivée du millièm message?
- h) Ayant rendez-vous après le travail, à quelle heure, au plus tard, notre

gestionnaire estime-t-il qu'il pourra quitter le site du serveur s'il fixe à 5 % la probabilité que le n ième message survienne après son départ? (Vous pouvez supposer que le gestionnaire a démarré le serveur à son arrivée au travail, disons à 8 heures.)

i) Le serveur est débordé lorsqu'il reçoit 10 messages ou plus au cours d'une minute. Quelle est la probabilité que cet événement survienne à un instant donné?

j) Supposons que l'entreprise possède un deuxième serveur, complètement indépendant du premier, recevant, en moyenne, un message toutes les 10 secondes et que ce serveur tombe en panne. Notre premier serveur doit donc traiter tous les messages, c'est-à-dire ceux qu'il reçoit d'habitude et les messages généralement destinés au deuxième serveur. Quelle est la probabilité, qu'à un instant donné, il soit surchargé?

Exercice 5.2. Il y a plus de 20 ans que le centre de service et de réparation «sans rendez-vous» d'un important concessionnaire d'automobiles dessert sa clientèle. Il se présente, en moyenne, 130 clients par jour (le centre est ouvert de 9 heures à 17 heures) qui demanderont à ce que leur voiture soit inspectée ou réparée. Hier soir, à la fermeture du service, 999 877 voitures avaient séjourné au service depuis l'inauguration du garage.

Le processus stochastique $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ représente l'évolution du nombre de voitures qui se présenteront au centre de service aujourd'hui. Le temps est exprimé en heures et $t = 0$ correspond à l'ouverture du centre, aujourd'hui.

a) Quelles hypothèses doivent satisfaire les arrivées des clients pour que N puisse être modélisé à l'aide d'un processus de Poisson?

b) Quelle est l'intensité du processus de Poisson N ?

L'entreprise aimerait souligner l'arrivée de la millionième voiture se présentant au garage.

c) Quelle est la probabilité que la millionième voiture se présente au centre aujourd'hui?

d) À quelle heure espérez-vous la millionième voiture? (En moyenne, vers quelle heure arrivera la millionième voiture?)

e) Quel est l'écart-type de la variable aléatoire modélisant le moment de l'arrivée de la millionième voiture.

f) Si la direction de l'entreprise est présente entre 16 heures et 17 heures, quelle est la probabilité qu'elle assiste à l'arrivée de la millionième voiture?

g) Le centre possède 10 sites permettant l'inspection et la réparation des

voitures. Comme les mécaniciens mettent environ une demi-heure de travail par voiture, le centre est débordé s'il y a plus de 20 voitures. Calculez la probabilité que le centre soit surchargé au cours de sa première heure d'ouverture.