Définition
Loi de Poisson
Temps d'attente
Exemple
Intensité variable

Processus de Poisson

3-602-84
Modèles probabilistes et stochastiques de la gestion

Geneviève Gauthier

HEC Montréal

Automne 2007

Références

Ce texte a été librement inspiré de notes prises au cours de Denis Labelle, professeur au département de mathématique de l'Université du Québec à Montréal, des chapitres 4 et 5 de A First Course in Stochastic Processes, deuxième édition de S. Karlin et H. M. Taylor ainsi que des notes de cours écrites par Jean Vaillancourt.

Définition I

Imaginons que des événements se produisent à divers moments ponctuels dans le temps $[0, \infty)$. Pour tout nombre réel $t > 0$, nous définissons

$$N(t) = \begin{array}{c} \text{le nombre d'événements qui se sont produits} \\ \text{au cours de la période de temps } (0, t] \,. \end{array}$$

Définition II

Definition

Le processus stochastique à temps continu $\{N(t) : t \in [0, \infty)\}$ est un **processus de Poisson d'intensité** λ $(\lambda > 0)$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites.

(PP1) Pour tout choix de nombres réels $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, les variables aléatoires $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_3) - N(t_2)$, ..., $N(t_n) - N(t_{n-1})$ sont mutuellement indépendantes, c'est-à-dire qu'elles le sont deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, ...

Autrement dit, les nombres d'événements qui surviennent dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants. Lorsqu'un processus stochastique satisfait la condition $(PP1)$, il est dit à *accroissements indépendants*.

Définition III

(PP2) Pour tous nombres réels positifs t et h, le nombre $N(t+h) - N(t)$ d'événements qui se produisent pendant l'intervalle de temps $(t, t+h]$ est insensible à la valeur de t et ne dépend que de la longueur de l'intervalle h.

Dans ce cas, le processus stochastique N est dit *stationnaire*.

Définition
Loi de Poisson
Temps d'attente
Exemple
Intensité variable

Définition IV

(PP3) $P\left[N\left(t+h\right)-N\left(t\right)\geq 2\right]=o\left(h\right)$ et
$P\left[N\left(t+h\right)-N\left(t\right)\geq 1\right]=\lambda h+o\left(h\right).$

où $o(h)$ désigne une *fonction petit ordre de h*.

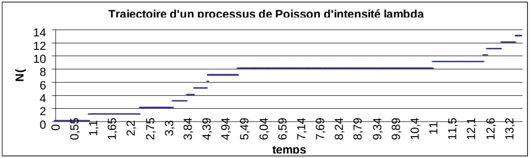
-
  - C'est-à-dire qui tend vers 0 infiniment plus rapidement que h : une fonction $f\left(h\right)$ est $o(h)$ si

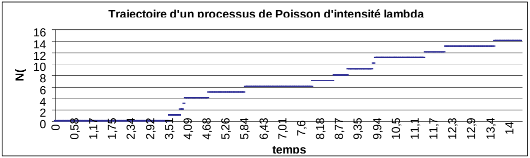
$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(h\right)}{h}=0.$$

Par exemple, la fonction h^2 est petit ordre de h tandis que la fonction $\sqrt{h}$ ne l'est pas.

La condition $(PP3)$ signifie que si la longueur h de l'intervalle de temps sur lequel nous dénombrons les événements est petite, la probabilité d'observer plus d'un événement est quasiment nulle.

Définition V





Note : lors de ces simulations, nous avons utilisé une intensité $\lambda = 1$.

Définition VI

- Puisque nous débutons l'observation du processus au temps $t = 0$, $N(0) = 0$, c'est-à-dire que nous n'avons dénombré aucun événement.

Définition VII

- La condition $(PP3)$ implique que

$$\begin{aligned} & P\left[N(t+h)-N(t)=0\right] \\ = \quad & 1-\underbrace{P\left[N(t+h)-N(t)\geq 1\right]}_{=\lambda h+o(h)} \\ = \quad & 1-\lambda h+o(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P\left[N(t+h)-N(t)=1\right] \\ = \quad & \underbrace{P\left[N(t+h)-N(t)\geq 1\right]}_{=\lambda h+o(h)}-\underbrace{P\left[N(t+h)-N(t)\geq 2\right]}_{o(h)} \\ = \quad & \lambda h+o(h). \end{aligned}$$

Distribution de N(t) I

Theorem

Pour tout nombre réel $t > 0$, la variable aléatoire $N(t)$ est de loi de Poisson de paramètre λt, c'est-à-dire que pour tout entier n non négatif,

$$P[N(t) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Distribution de N(t) II

Preuve du théorème. Dans un premier temps, nous supposerons que $n = 0$. Puisque les variables aléatoires $N(t+h) - N(t)$ et $N(t) - N(0)$ sont indépendantes,

$$\begin{aligned} & P\left[N(t+h) = 0\right] \\ = \; & P\left[N(t) - N(0) = 0 \text{ et } N(t+h) - N(t) = 0\right] \\ = \; & P\left[N(t) - N(0) = 0\right] P\left[N(t+h) - N(t) = 0\right] \\ = \; & P\left[N(t) = 0\right]\left(1 - \lambda h + o(h)\right) \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$P\left[N(t+h) = 0\right] - P\left[N(t) = 0\right] = P\left[N(t) = 0\right]\left(-\lambda h + o(h)\right).$$

Distribution de N(t) III

En divisant par h de part et d'autre de l'égalité, il vient

$$\frac{P\left[N\left(t+h\right)=0\right]-P\left[N(t)=0\right]}{h}=P\left[N(t)=0\right]\frac{\left(-\lambda h+o\left(h\right)\right)}{h}.$$

En prenant la limite lorsque h tend vers 0 de part et d'autre de l'égalité, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}P\left[N(t)=0\right]=-\lambda P\left[N(t)=0\right].$$

Puisque $P\left[N(0)=0\right]=1$, alors la solution de cette équation différentielle est

$$P\left[N(t)=0\right]=e^{-\lambda t}. \tag{1}$$

Distribution de N(t) IV

En effet, lors de la résolution d'une équation différentielle, l'inconnue est une fonction. Dans notre cas, nous cherchons une fonction $g(t)$ qui satisfait l'équation

$$\frac{dg}{dt}(t) = -\lambda g(t).$$

Or, il est possible de montrer que $g(t) = ce^{-\lambda t}$ où c représente n'importe quel nombre réel:

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{d}{dt} ce^{-\lambda t} = -\lambda ce^{-\lambda t} = -\lambda g(t).$$

Distribution de N(t) V

Nous avons tout de même une information supplémentaire: nous savons que $g(0) = 1$. Cette condition à la frontière implique que

$$1 = g(0) = ce^{-\lambda \times 0} = c$$

C'est pourquoi

$$g(t) = e^{-\lambda t}.$$

Définition
Loi de Poisson
Temps d'attente
Exemple
Intensité variable

Distribution de N(t) VI

Maintenant, pour tout entier positif n,

$$\begin{aligned}
& P\left[N\left(t+h\right)=n\right] \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} P\left[N(t)-N(0)=n-k \text{ et } N\left(t+h\right)-N(t)=k\right] \\
= \quad & \sum_{k=0}^{n} P\left[N(t)=n-k\right] P\left[N\left(t+h\right)-N(t)=k\right] \\
= \quad & P\left[N(t)=n\right] P\left[N\left(t+h\right)-N(t)=0\right] \\
& +P\left[N(t)=n-1\right] P\left[N\left(t+h\right)-N(t)=1\right] \\
& +\sum_{k=2}^{n} P\left[N(t)=n-k\right] P\left[N\left(t+h\right)-N(t)=k\right] \\
= \quad & P\left[N(t)=n\right]\left(1-\lambda h+o\left(h\right)\right) \\
& +P\left[N(t)=n-1\right]\left(\lambda h+o\left(h\right)\right) \\
& +\sum_{k=2}^{n} P\left[N(t)=n-k\right] o\left(h\right)
\end{aligned}$$

Définition
Loi de Poisson
Temps d'attente
Exemple
Intensité variable

Distribution de N(t) VII

Nous venons d'établir que

$$\begin{aligned} P\left[N\left(t+h\right)=n\right] &= P\left[N(t)=n\right]\left(1-\lambda h+o\left(h\right)\right) \\ &\quad +P\left[N(t)=n-1\right]\left(\lambda h+o\left(h\right)\right) \\ &\quad +\sum_{k=2}^{n} P\left[N(t)=n-k\right] o\left(h\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & P\left[N\left(t+h\right)=n\right]-P\left[N(t)=n\right] \\ = \; & P\left[N(t)=n\right]\left(-\lambda h+o\left(h\right)\right) \\ & +P\left[N(t)=n-1\right]\left(\lambda h+o\left(h\right)\right) \\ & +\sum_{k=2}^{n} P\left[N(t)=n-k\right] o\left(h\right). \end{aligned}$$

Distribution de N(t) VIII

Divisons par h de part et d'autre de l'égalité :

$$\begin{aligned} & \frac{P\left[N\left(t+h\right)=n\right]-P\left[N(t)=n\right]}{h} \\ = \quad & P\left[N(t)=n\right]\frac{\left(-\lambda h+o\left(h\right)\right)}{h} \\ & +P\left[N(t)=n-1\right]\frac{\left(\lambda h+o\left(h\right)\right)}{h} \\ & +\sum_{k=2}^{n}P\left[N(t)=n-k\right]\frac{o\left(h\right)}{h}. \end{aligned}$$

Distribution de N(t) IX

En prenant la limite lorsque h tend vers 0, nous obtenons pour tout $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{d}{dt} P\left[N(t) = n\right] = \lambda \left(P\left[N(t) = n - 1\right] - P\left[N(t) = n\right]\right). \tag{2}$$

Il nous faut maintenant solutionner ce système d'équations différentielles.

Définition
Loi de Poisson
Temps d'attente
Exemple
Intensité variable

Distribution de N(t) X

Posons

$$f_n(t) = e^{\lambda t} P\left[N(t) = n\right]. \tag{3}$$

Il est bon de remarquer qu'il découle de l'équation (1)

$$P\left[N(t) = 0\right] = e^{-\lambda t}$$

que

$$\begin{aligned} f_0(t) &= e^{\lambda t} P\left[N(t) = 0\right] \\ &= e^{\lambda t} e^{-\lambda t} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{4}$$

et que pour tout entier positif n,

$$\begin{aligned} f_n(0) &= e^{\lambda 0} P\left[N(0) = n\right] \\ &= P\left[N(0) = n\right] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Distribution de N(t) XI

Ainsi, utilisant le système d'équations différentielles (2)

$$\frac{d}{dt} P\left[N(t) = n\right] = \lambda \left(P\left[N(t) = n-1\right] - P\left[N(t) = n\right]\right).$$

et la définition (3)

$$f_n\left(t\right) = e^{\lambda t} P\left[N(t) = n\right],$$

nous pouvons écrire, pour tout entier $n > 0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} f_n\left(t\right) \\
= \;& \lambda e^{\lambda t} P\left[N(t) = n\right] + e^{\lambda t} \frac{d}{dt} P\left[N(t) = n\right] \\
= \;& \lambda e^{\lambda t} P\left[N(t) = n\right] + e^{\lambda t} \lambda \left(P\left[N(t) = n-1\right] - P\left[N(t) = n\right]\right) \\
= \;& \lambda e^{\lambda t} P\left[N(t) = n-1\right] \\
= \;& \lambda f_{n-1}\left(t\right).
\end{aligned}$$

Distribution de N(t) XII

Rappel: nous venons d'établir que

$$\frac{d}{dt} f_n(t) = \lambda f_{n-1}(t).$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} f_n(t) &= f_n(0) + \lambda \int_0^t f_{n-1}(s) \ ds \\ &= \lambda \int_0^t f_{n-1}(s) \ ds \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la condition de frontières (5)

$$f_n(0) = 0.$$

Distribution de N(t) XIII

Rappel:

$$f_n(t) = \lambda \int_0^t f_{n-1}(s)\ ds$$

En ajoutant la condition (4)

$$f_0(t) = 1,$$

nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= 1, \\
f_1(t) &= \lambda \int_0^t f_0(s)\, ds = \lambda \int_0^t 1 ds = \lambda t, \\
f_2(t) &= \lambda \int_0^t f_1(s)\, ds = \lambda \int_0^t \lambda s ds = \lambda^2 \frac{t^2}{2}, \\
f_3(t) &= \lambda \int_0^t f_2(s)\, ds = \lambda \int_0^t \lambda^2 \frac{s^2}{2} ds = \frac{\lambda^3}{2} \frac{t^3}{3}, \ \ldots
\end{aligned}$$

Distribution de N(t) XIV

Nous pouvons montrer par induction que, pour tout entier non négatif n,

$$f_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \tag{6}$$

En effet, lorsque $n = 0$ nous avons déjà établi que $f_0(t) = 1$.

Distribution de N(t) XV

Supposons que l'égalité (6) est vérifiée pour un certain entier n non négatif et démontrons alors, elle l'est aussi pour l'entier $n+1$ suivant.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) &= \lambda \int_0^t f_n(s)\, ds \\ &= \lambda \int_0^t \frac{(\lambda s)^n}{n!} ds \text{ par hypothèse d'induction} \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \frac{t^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de l'équation (6).

Distribution de N(t) XVI

Par conséquent, comme

$$f_n(t) = e^{\lambda t} P[N(t) = n]$$

alors

$$\begin{aligned} P[N(t) = n] &= e^{-\lambda t} f_n(t) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \blacksquare \end{aligned}$$

Temps d'attente I

Theorem

Le temps d'attente entre deux événements successifs suit une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire que si $T_0 = 0$ et pour tout $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $T_n =$ l'instant auquel se produit le n ième événement, alors pour tout entier positif n et pour tout nombre réel positif t,

$$P\left[T_n - T_{n-1} \leq t\right] = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Temps d'attente II

Preuve du théorème. Soit X, le temps d'attente avant que le premier événement survienne. Pour tout nombre réel positif x,

$$\begin{aligned} P\left[X \leq x\right] &= 1 - P\left[X > x\right] \\ &= 1 - P\left[N\left(x\right) = 0\right] \\ &= 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Temps d'attente III

Plus généralement,

$$\begin{aligned} & P\left[T_n - T_{n-1} \leq t\right] \\ = \; & 1 - P\left[T_n - T_{n-1} > t\right] \\ = \; & 1 - P\left[N\left(T_{n-1} + t\right) - N\left(T_{n-1}\right) = 0\right] \\ = \; & 1 - P\left[N\left(t\right) = 0\right] \;\; \text{par } \left(PP2\right) \\ = \; & 1 - e^{-\lambda t}. \; \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple I

Les admissions à l'urgence d'un hôpital se font selon un processus de Poisson (ici, l'événement est l'arrivée d'un patient). Nous savons qu'en moyenne un patient se présente l'urgence à toutes les 12 minutes.
Modélisons cette situation : nous commençons l'observation du processus disons au début du quart de travail de 7 heures du matin, aujourd'hui. Le temps sera exprimé en heures.

- $N(t) =$ le nombre de patients s'étant présentés à l'urgence au temps t depuis le moment où nous avons commencé l'observation du processus.

Exemple II

Question. Quelle est l'intensité du processus de Poisson impliqué dans la modélisation?

Exemple III

Réponse. Si, en moyenne, il y a une arrivée de patient toutes les douze minutes, alors il y a, en moyenne, cinq arrivées par heure, c'est-à-dire cinq arrivées par unité de temps. Par conséquent, l'intensité est $\lambda = 5$.

Exemple IV

Question. Si le préposé aux admissions prend 3 minutes pour remplir le dossier d'un patient, quelle est la probabilité qu'il ait le temps de se reposer entre l'arrivée de deux patients sachant qu'il était inoccupé lors de l'arrivée du premier des deux?

Définition
Loi de Poisson
Temps d'attente
Exemple
Intensité variable

Exemple V

Réponse. Nous savons que le temps d'attente entre deux arrivées suit une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}$. Or, puisque

$$3 \text{ minutes} = 3 \times \frac{1 \text{ heure}}{60 \text{ minutes}} = \frac{1}{20} \text{ heure},$$

$$\begin{aligned} & P\left[\begin{array}{c} \text{le préposé a le temps de se reposer} \\ \text{entre l'arrivée de deux patients} \\ \text{sachant qu'il était inoccupé lors de} \\ \text{l'arrivée du premier des deux} \end{array}\right] \\ = \quad & P\left[\underbrace{T_n - T_{n-1}}_{\text{de loi } \exp(0{,}2)} > \frac{1}{20}\right] \\ = \quad & e^{-5 \times \frac{1}{20}} \cong 0,7788 \end{aligned}$$

Exemple VI

Question. Supposons que le préposé aux admissions commence sa journée de travail à 7 heures du matin, qu'il la termine à 15 heures et qu'il va dîner de midi à 13 heures. Quelles sont l'espérance et la variance du temps que le préposé passe, au cours de la journée, à remplir des demandes d'admission?

Exemple VII

Réponse. Le nombre X de patients se présentant à l'urgence au cours de la période de travail du préposé est

$$X = \underbrace{N(5) - N(0)}_{\substack{\text{nombre de patients} \\ \text{se présentant au cours} \\ \text{de l'avant-midi.} \\ \textit{Poisson}(5\times 5)}} + \underbrace{N(8) - N(6)}_{\substack{\text{nombre de patients} \\ \text{se présentant au cours} \\ \text{de l'après-midi.} \\ \textit{Poisson}(5\times 2)}}.$$

Le nombre Y de minutes passées à remplir des formulaires d'admission est

$$Y = 3X.$$

Définition
Loi de Poisson
Temps d'attente
Exemple
Intensité variable

Exemple VIII

Ainsi,

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[3X] = 3E[X] \\ &= 3E[N(5) - N(0) + N(8) - N(6)] \\ &= 3(E[N(5) - N(0)] + E[N(8) - N(6)]) \\ &= 3(25 + 10) = 105 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var[Y] &= Var[3X] = 9Var[X] \\ &= 9Var[N(5) - N(0) + N(8) - N(6)] \\ &= 9(Var[N(5) - N(0)] + Var[N(8) - N(6)]) \\ &\quad \text{par } (PP1) \\ &= 9(25 + 10) = 315. \end{aligned}$$

Exemple IX

L'espérance du temps que le préposé passe, au cours de la journée, à remplir des demandes d'admission est de 105 minutes (1 heure et 45 minutes) tandis que son écart-type est de $(315)^{1/2} \cong 17,748$ minutes. Bref, nous espérons qu'il a autre chose à faire pour s'occuper au cours de la journée.

Exemple X

Question. Le second hôpital de la région ferme son urgence pour la journée. Notre hôpital doit donc absorber cette clientèle. Sachant que ce second hôpital reçoit, en moyenne, 60 patients entre 7 heures et 15 heures et que ces arrivées se font selon un processus de Poisson, est-ce que le nouveau flot de patients se présentant au premier hôpital est encore un processus de Poisson? Si oui, quelle est son intensité? Sinon, pourquoi?

Exemple XI

Réponse. Si les deux processus de Poisson, N et $\widetilde{N}$, modélisant les arrivées des patients dans chacun des deux hôpitaux sont indépendants, alors le nouveau flot de patients, $\widehat{N} = N + \widetilde{N}$, se présentant au premier hôpital se modélise aussi à l'aide d'un processus de Poisson. Nous avons déterminé précédemment que l'intensité de N est $\lambda = 5$. Celle de $\widetilde{N}$ se détermine de la façon suivante : comme, en moyenne, il y a 60 patients en 8 heures alors il y a, en moyenne, 7, 5 patients par heure, c'est-à-dire $\widetilde{\lambda} = 7,5$ patients par unité de temps. L'intensité du nouveau processus de Poisson $\widehat{N}$ est d'intensité $\widehat{\lambda} = \lambda + \widetilde{\lambda} = 5 + 7,5 = 12,5$. Cela provient du fait que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement est de loi de Poisson$(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exemple XII

Si les deux processus N et $\widetilde{N}$ ne sont pas indépendants, alors il est possible que la somme de ces deux processus ne soit plus un processus de Poisson.

Exemple XIII

Question. Si le préposé aux admissions prend 3 minutes pour remplir le dossier d'un patient, quelle est la probabilité qu'il ait le temps de se reposer entre l'arrivée de deux patients sachant qu'il était inoccupé lors de l'arrivée du premier des deux?

Exemple XIV

Réponse. Nous savons que le temps d'attente entre deux arrivées suit une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{12{,}5} = 0,08$. Or, puisque

$$3 \text{ minutes} = 3 \times \frac{1 \text{ heure}}{60 \text{ minutes}} = \frac{1}{20} \text{ heure},$$

$$\begin{aligned} & P\left[\begin{array}{c}\text{le préposé a le temps de se reposer} \\ \text{entre l'arrivée de deux patients} \\ \text{sachant qu'il était inoccupé lors de} \\ \text{l'arrivée du premier des deux}\end{array}\right] \\ = \quad & P\left[\underbrace{T_n - T_{n-1}}_{\text{de loi } \exp(0{,}08)} > \frac{1}{20}\right] \\ = \quad & e^{-12.,5 \times \frac{1}{20}} \cong 0,53526 \end{aligned}$$

Exemple XV

Question. Quelles sont l'espérance et la variance du temps que le préposé passe, au cours de la journée, à remplir des demandes d'admission sachant qu'il prend toujours trois minutes par formulaire?

Exemple XVI

Réponse. Le nombre X de patients se présentant à l'urgence au cours de la période de travail du préposé est

$$X = \underbrace{N(5) - N(0)}_{\substack{\text{nombre de patients} \\ \text{se présentant au cours} \\ \text{de l'avant-midi.} \\ \textit{Poisson}(12{,}5\times 5)}} + \underbrace{N(8) - N(6)}_{\substack{\text{nombre de patients} \\ \text{se présentant au cours} \\ \text{de l'après-midi} \\ \textit{Poisson}(12{,}5\times 2)}} .$$

Le nombre Y de minutes passées à remplir des formulaires d'admission est

$$Y = 3X.$$

Exemple XVII

Ainsi,

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[3X] = 3E[X] \\ &= 3E[N(5) - N(0) + N(8) - N(6)] \\ &= 3(E[N(5) - N(0)] + E[N(8) - N(6)]) \\ &= 3(62,5 + 25) = 262,5 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Var[Y] &= Var[3X] = 9Var[X] \\ &= 9Var[N(5) - N(0) + N(8) - N(6)] \\ &= 9(Var[N(5) - N(0)] + Var[N(8) - N(6)]) \\ &\quad \text{par } (PP1) \\ &= 9(62,5 + 25) = 787,5. \end{aligned}$$

Exemple XVIII

L'espérance du temps que le préposé passe, au cours de la journée, à remplir des demandes d'admission est de 262,5 minutes ($4,375$ heures) tandis que son écart-type est de $(787,5)^{1/2} \cong 28,062$ minutes.

Intensité variable I

Il est possible que l'intensité du processus de Poisson ne soit pas constante dans le temps. Si nous dénotons par $\lambda(t)$ l'intensité qui prévaut au temps t, alors le nombre

$$N(t_1) - N(t_0)$$

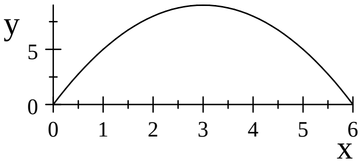
d'événements qui se produiront pendant l'intervalle de temps $(t_0, t_1]$ est de loi de Poisson d'espérance

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)\, dt.$$

Intensité variable II

Exemple. Nous voulons modéliser les arrivées des clients dans une banque. Il y a, en moyenne, moins de clients aux heures d'ouverture (9 heures) et de fermeture (15 heures) et une période de pointe en mi-journée. Comme le temps est mesuré en heures et que la banque est ouverte pendant 6 heures, nous modélisons l'intensité du processus par la fonction

$$\lambda(t) = \begin{cases} t(6-t) & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$



où le temps $t = 0$ représente le moment de l'ouverture de la banque.

Intensité variable III

Posons

$$N(t) \quad = \quad \text{nombre de clients se présentant à la banque pendant l'intervalle de temps } (0, t]$$

Le nombre $N(3) - N\left(\frac{3}{2}\right)$ de clients se présentant à la banque entre 10 heures 30 minutes ($t = \frac{3}{2}$) et midi ($t = 3$) est de loi de Poisson d'espérance

$$\int_{\frac{3}{2}}^{3} \lambda(t)\ dt \quad = \quad \int_{\frac{3}{2}}^{3} t(6-t)\ dt = \frac{99}{8} = 12,375.$$

(C'est une très petite succursale!!!)

Intensité variable IV

Le prix à payer pour une telle généralisation est que le temps d'attente entre deux arrivées de clients n'est plus nécessairement de loi exponentielle.

Intensité variable V

Exemple. Replaçons-nous dans le contexte de l'exemple précédent. Soit

$$T = \text{l'instant de l'arrivée du premier client.}$$

Puisqu'il est possible qu'aucun client ne se présente à la banque au cours d'une journée, nous devons définir ce que vaut T dans ce cas. Nous choisissons de symboliser cette situation par $T = \infty$.

Intensité variable VI

Pour tout nombre réel positif t, la fonction de répartition de T évaluée au point t est

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P[T \leq t] = 1 - P[T > t] \\ &= 1 - P[N(t) = 0]. \end{aligned}$$

Or, puisque $N(t)$ est de loi de Poisson d'espérance

$$\begin{cases} \int_0^t u(6-u)\ du = 3t^2 - \frac{t^3}{3} & \text{si } 0 < t \leq 6 \\ \int_0^6 u(6-u)\ du + \int_6^t 0\ du = 36 & \text{si } t > 6 \end{cases},$$

alors

$$P[N(t) = 0] = \begin{cases} e^{-\left(3t^2 - \frac{t^3}{3}\right)} \frac{\left(3t^2 - \frac{t^3}{3}\right)^0}{0!} = \exp\left(\frac{t^3}{3} - 3t^2\right) & \text{si } 0 < t \leq 6 \\ e^{-36} \frac{36^0}{0!} = \exp(-36) & \text{si } t > 6 \end{cases}$$

Intensité variable VII

et

$$F_T(t) = 1 - P[N(t) = 0] = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{t^3}{3} - 3t^2\right) & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 1 - \exp(-36) & \text{si } 6 < t < \infty \\ 1 & \text{si } t = \infty. \end{cases}$$

Remarquons que T est une variable aléatoire mixte et n'est clairement pas de loi exponentielle, et ce,...

Intensité variable VIII

Définition
Loi de Poisson
Temps d'attente
Exemple
Intensité variable

... même si nous conditionnons sur le fait qu'il y a au moins un client qui se présente à la banque au cours de la journée :

$$P\left[T \leq t \,|\, N(6) \geq 1\right]$$

$$= \frac{P\left[T \leq t \text{ et } N(6) \geq 1\right]}{P\left[N(6) \geq 1\right]}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{P[T \leq t]}{P[N(6) \geq 1]} = \frac{1 - \exp\left(\frac{t^3}{3} - 3t^2\right)}{1 - \exp(-36)} & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 1 & \text{si } t > 6. \end{cases}$$