Les variables aléatoires continues
Exercices solutionnés

Geneviève Gauthier

dernière mise à jour : 16 octobre 2000

Exercice. *Dans chacun des cas suivants, déterminez la valeur de c afin que f soit une fonction de densité.*

a) $f(x) = \begin{cases} cx & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{si } 5 < x < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} ce^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ *d)* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ c^2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} cx & \text{si } c < x < 2c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ *f)* $f(x) = \begin{cases} -c & \text{si } 0 < x < 1 \\ c & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Réponse. a) $c = \frac{2}{9}$ b) $c = 12$ c) $c = 2$ d) $c = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $c = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ e) $c = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ ou $c = -\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ f) il n'existe pas de $c \in \mathbb{R}$ qui rende cette fonction une fonction de densité puisque f doit être non-négative.

Exemple de calcul. e) Évidemment, c ne peut pas être nul. Si $c > 0$ alors f est non-négative si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in (c, 2c),\ cx \geq 0$$

ce qui est le cas. Enfin,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{c}^{2c} cx dx = c\frac{x^2}{2}\bigg|_{x=c}^{2c} = c\left(\frac{4c^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right) = \frac{3c^3}{2} \\ &\Leftrightarrow c^3 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow c = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Maintenant, si $c < 0$ alors posons $c^{'} = -c > 0$. La fonction f est non-négative si et seulement si

$$\forall x \in \left(-2c^{'}, -c^{'}\right),\ -c^{'}x \geq 0$$

ce qui est bien le cas. Enfin,

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-2c^{'}}^{-c^{'}} -c^{'}x dx = -c^{'}\frac{x^2}{2}\Big|_{x=-2c^{'}}^{-c^{'}} \\
&= -c^{'}\left(\frac{\left(-c^{'}\right)^2}{2} - \frac{4\left(-c^{'}\right)^2}{2}\right) = \frac{3\left(c^{'}\right)^3}{2} = \frac{3\left(c^{'}\right)^3}{2} \\
&\Leftrightarrow \left(c^{'}\right)^3 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow c^{'} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow c = -\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Exercice. *Déterminez une fonction de densité correspondant à chacune des fonctions de répartition suivantes.*

$$a)\quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \qquad b)\quad F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Réponse.

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad b)\quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple de calcul. a)

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}0 = 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{d}{dx}(x-1) = 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{d}{dx}1 = 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Exercice. *Déterminez la fonction de répartition correspondant à chacune des fonctions de densité suivantes.*

$$a)\qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } 4 < x < 7 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad b)\qquad f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$c)\quad f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad d)\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{9}{4}(x-2)^2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Réponse.

$$a) \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4 \\ \frac{x}{3} - \frac{4}{3} & \text{si } 4 \leq x < 7 \\ 1 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

$$b) \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$c) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$d) \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(x-2)^3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Exemple de calcul. c)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\ dy = 0 & \text{si } x < -1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0\ dy + \int_{-1}^{x} (1+y)\ dy & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0\ dy + \int_{-1}^{0} (1+y)\ dy + \int_{0}^{x} (1-y)\ dy & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0\ dy + \int_{-1}^{0} (1+y)\ dy + \int_{0}^{1} (1-y)\ dy + \int_{1}^{x} 0\ dy & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice. *Pour chacune des quatre fonctions de densité de l'exercice précédent, déterminez l'espérance et la variance associées.*

Réponse. a) $\mu = 5,5$ et $\sigma^2 = \frac{3}{4}$ b) $\mu = \frac{3}{4}$ et $\sigma^2 = \frac{3}{80}$ c) $\mu = 0$ et $\sigma^2 = \frac{1}{6}$ d) $\mu = \frac{35}{16}$ et $\sigma^2 = \frac{3833}{3840}$.

Exemple de calcul. c)

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x \ f(x) \ dx \\
&= \int_{-\infty}^{-1} x \ 0 \ dx + \int_{-1}^{0} x \ (1+x) \ dx + \int_{0}^{1} x \ (1-x) \ dx + \int_{1}^{\infty} x \ 0 \ dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \ f(x) \ dx \\
&= \int_{-\infty}^{-1} x^2 \ 0 \ dx + \int_{-1}^{0} x^2 \ (1+x) \ dx + \int_{0}^{1} x^2 \ (1-x) \ dx + \int_{1}^{\infty} x^2 \ 0 \ dx \\
&= \frac{1}{6} \\
\sigma^2 &= E\left[X^2\right] - \mu^2 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$