COURS 8 ET 9 : LA VOLATILITÉ DU PRIX DES OBLIGATIONS : DURÉE ET CONVEXITÉ

- LE RISQUE DE TAUX D'INTÉRÊT
- DÉFINITION ET CALCUL DE LA DURÉE ET CONVEXITÉ
- LES RÈGLES DE LA DURÉE
- LES PROPRIÉTÉS DE LA CONVEXITÉ
- LES LIMITES DE LA DURÉE ET DE LA CONVEXITÉ

1) LE RISQUE DE TAUX D'INTÉRÊT

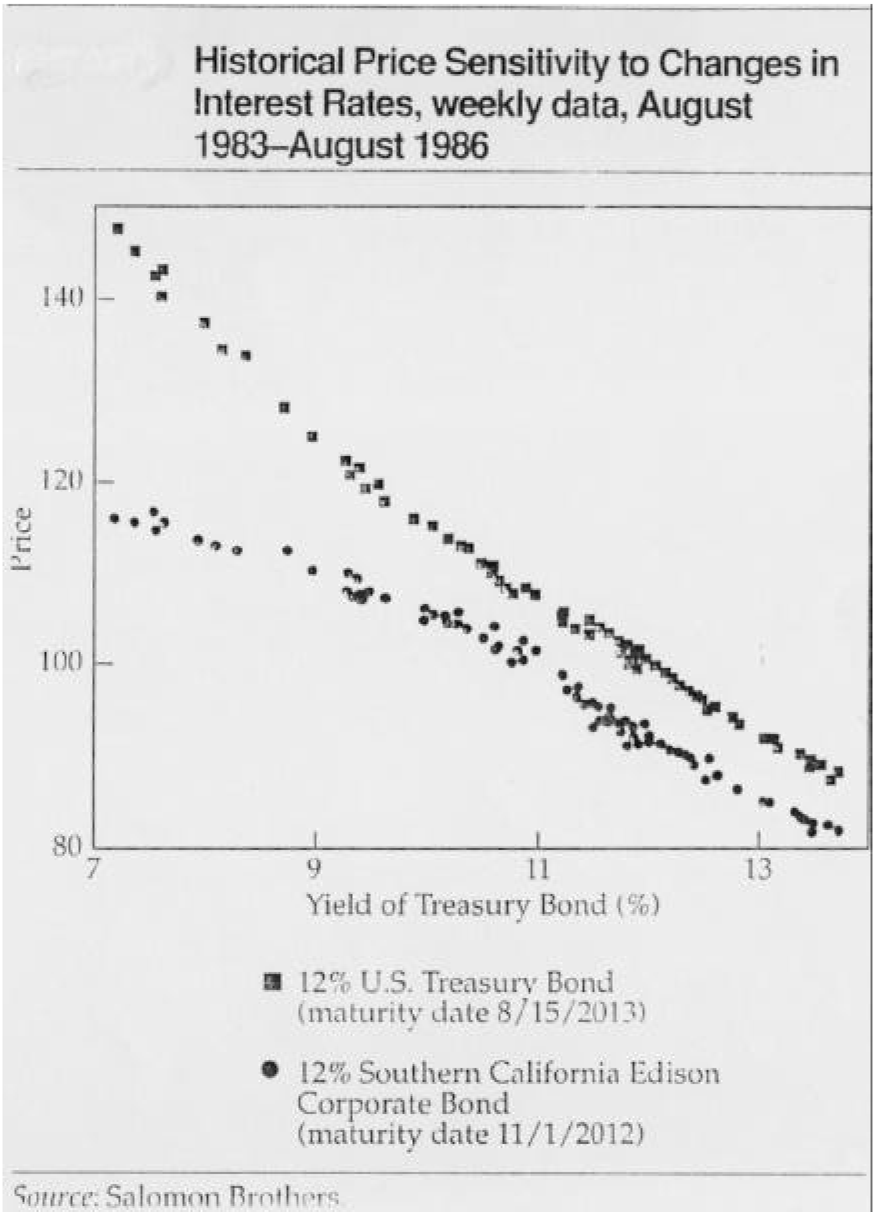
1.1- DÉFINITION

Le prix d'une obligation est sensible aux variations des taux d'intérêt. Ces variations peuvent générer des gains ou des pertes, d'où le risque de taux. Ce risque est systématique.

1.2- EFFET PRIX ET EFFET REVENU

- Effet revenu : l'impact sur le réinvestissement des coupons ou sur les coupons à taux variable.

- Effet prix : l'impact des variations sur le prix, qui est opposé à l'effet revenu.



2) DÉFINITION ET CALCUL DE LA DURÉE ET CONVEXITÉ

La duration et la convexité sont des concepts pour mesurer la sensibilité d'un titre à revenus fixes aux variations des taux d'intérêt. Plusieurs stratégies de gestion de portefeuille de titres à revenus fixes sont basées sur ces concepts.

La sensibilité d'une obligation aux variations du taux d'intérêt dépend de sa maturité effective (et non de son échéance) qui est une sorte de moyenne des maturités de chacun des versements (flux monétaires) de l'obligation.

Lorsque les taux d 'intérêt augmentent ou baissent, les détenteurs d'obligations réalisent des pertes ou des gains en capital. Ces pertes et gains rendent l 'investissement dans les obligations assez risqué même si le coupon et le paiement du principal sont garanties.

2.1- LA DURATION (ou DURÉE)

- La duration (D) est une mesure approximative de la sensibilité du prix d'une obligation (P) à une petite variation de son taux de rendement exigé (y) (i.e. de son taux de rendement à l'échéance). On peut dire que la volatilité du prix de l'obligation est proportionnelle à la duration de cette dernière. Ainsi, la durée est considérée comme la mesure de l'exposition au risque de taux d'intérêt :

$$dP/P \approx -D \times dy/(1+y)$$

- **Note:** on peut exprimer cette relation en termes de la D «modifiée» (D' = D/(1+y)) :

$$dP/P \approx -D' \times dy$$

La variation du prix d'une obligation qui est exprimée en % est fonction de sa duration modifiée multipliée par la variation de son TRE.

☞ *Formule de Macauley :*

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{T} t \times CF_t \times (1+y)^{-t}}{\sum_{t=1}^{T} CF_t \times (1+y)^{-t}}$$

où CF : flux monétaire reçu à la date t

y : Taux de rendement à l'échéance

P_0 : Prix de l'obligation

- La formule de la duration peut être écrite aussi comme suit :

$$D = \sum_{t=1}^{T} t \times W_t$$

$$W_t = \frac{CF_t / (1+y)^t}{\text{Prix de l 'obligation}}$$

t = temps à écouler pour recevoir les F.M,

W_t = Poids relatif du F.M par rapport au prix de l'obligation,

D est donc la moyenne des t pondérés par les W_t. C'est donc la moyenne pondérée des durées jusqu'au paiement de chaque flux. Les poids W_t mesurent l'importance de ces flux par rapport au prix.

- La duration est une mesure importante pour :

  - ♦Déterminer la durée effective ;
  - ♦Effectuer l 'immunisation contre une variation positive ou négative des taux d 'intérêt ;
  - ♦Mesurer la sensibilité (du prix) à une variation positive ou négative des taux d 'intérêt.

3) LES RÈGLES DE LA DURÉE

- La duration d'une zéro-coupon est égale à sa maturité.

- À échéance égale, la duration est plus longue si le coupon est faible.

• À coupon égal, la duration augmente généralement avec l’échéance. La durée augmente toujours avec l’échéance pour les obligations se vendent au pair ou à prime.

• La duration est plus longue lorsque le rendement à l’échéance est plus faible, toute chose étant égale par ailleurs.

• La duration d’une perpétuité est telle que :

$$D = \frac{1+y}{y}$$

• La duration d’une annuité est telle que :

$$D = \frac{1+y}{y} - \frac{T}{(1+y)^T - 1}$$

Où T = nombre de paiements ? y = rendement de l’annuité par période.

• La duration d’une obligation avec coupons est telle que :

$$D = \frac{1+y}{y} - \frac{(1+y) + T(c-y)}{C\left[\ (1+y)^T - 1\ \right] + y}$$

Où : c = taux de coupon par période de versement ;
y = rendement de l’obligation par période ;
T = nombre de paiement

La durée est exprimée en nombre de période

• La duration pour une obligation se vendant au pair est telle que :

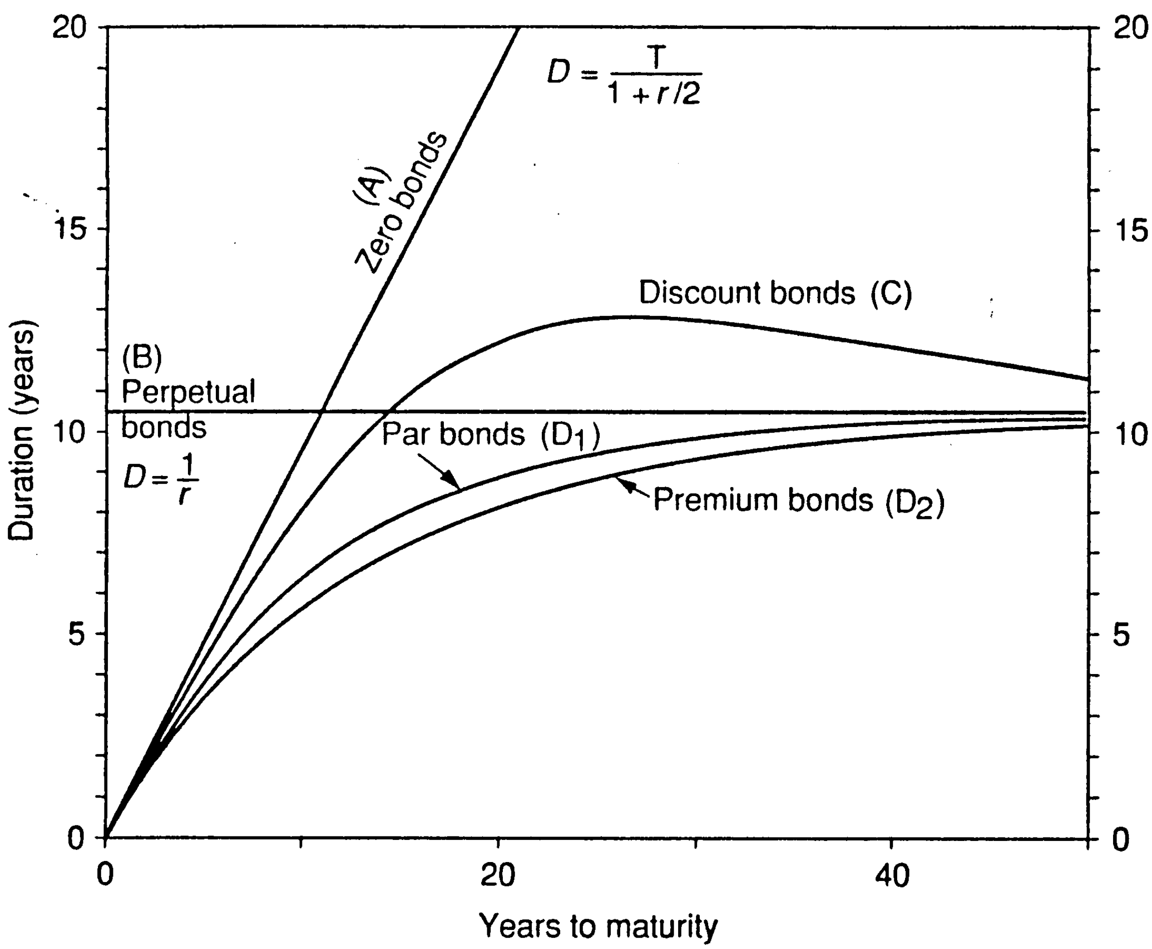
$$D = \frac{1+y}{y}\left[\ 1-(1+y)^{-T}\ \right]$$

- La duration d'un portefeuille d'obligations est égale à la moyenne pondérée des durées des obligations qui le composent (poids = proportion de chaque obligation dans le portefeuille).

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \times D_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \times D_i$$

Remarque : Quand on anticipe une baisse des taux d 'intérêt, on préfère des titres ayant une durée élevée et vice-versa.

Duration versus Maturity—Premium, Par, and Discount Bonds



2.2- LA CONVEXITÉ

La convexité mesure le degré de la variation de la duration lorsque les taux d'intérêt varient.

La convexité a habituellement une valeur positive.

$$C\ (\text{années}) = \frac{1}{(1+y/k)2} \sum_{t=1}^{n} \frac{t \times (t+1) \times VACF}{k^2 \times prix}$$

Où k = nombre de périodes, de paiements par année

n = nombre de période jusqu'à l 'échéance.

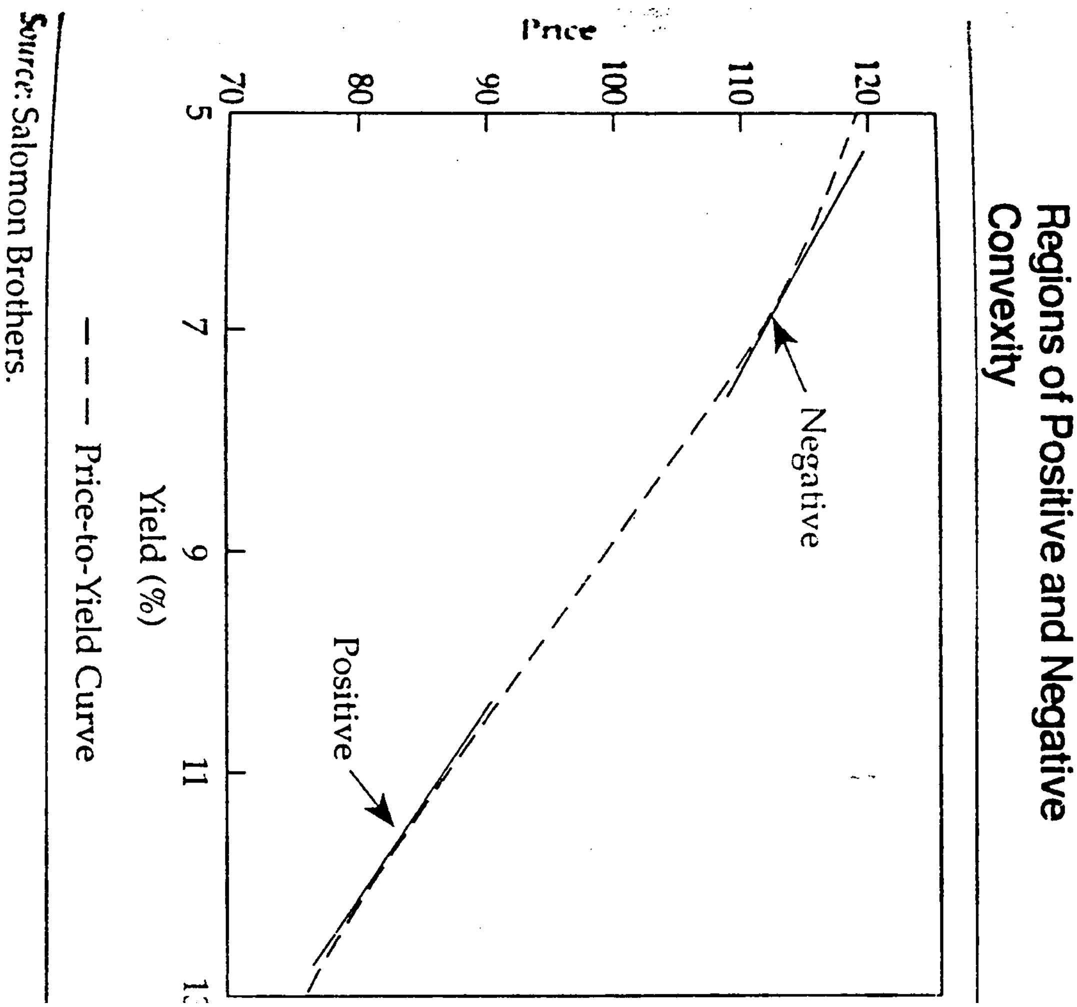
La relation mathématique qui décrit la volatilité du prix de l'obligation est :

$$\frac{\Delta P}{P} = D' \times \Delta y + ½\, C \times \Delta y^2$$

Si Δy est petit et si on néglige C on a :

$$\frac{\Delta P}{P} = D' \times \Delta y \qquad \text{donc} \qquad \Delta y = \frac{\Delta P}{PD'}$$

4) LES PROPRIÉTÉS DE LA CONVEXITÉ



5) LES LIMITES DE LA DURÉE ET DE LA CONVEXITÉ