Règles mathématiques et calculs utiles en macroéconomie[1]

L'économiste qui s'intéresse à l'évolution macroéconomique d'un pays doit fréquemment effectuer certains calculs de base dans le but de rendre plus significative la masse de statistiques avec laquelle il travaille. Les pages qui suivent ont pour but de présenter quelques uns de ces calculs. La présentation est essentiellement axée sur le concept de **croissance** qui est central à toute l'analyse macroéconomique.

1 Rédigé par Martin Coiteux, juillet 1994

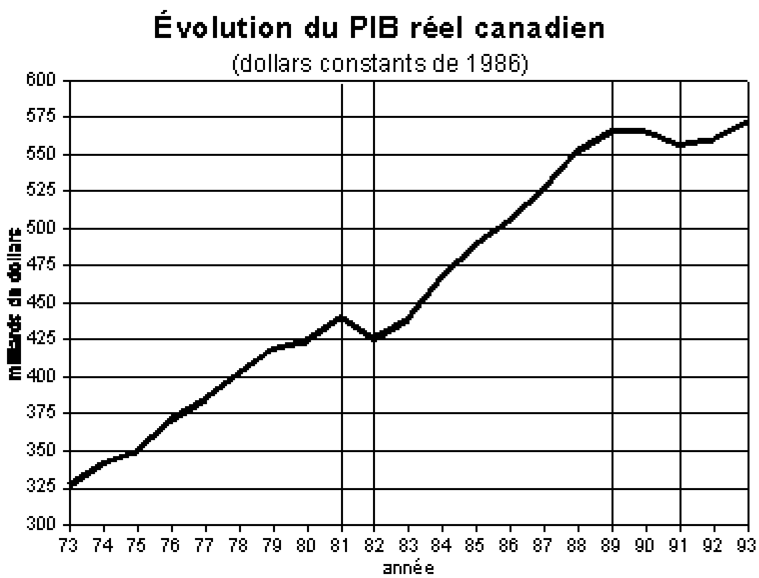
1. Calcul et interprétation de divers taux de croissance

1.1 La déduction d'une formule générale

La performance macroéconomique d'un pays se juge le plus souvent en fonction de l'évolution du volume de sa production globale. En principe, plus ce volume est grand, plus il est permis de penser que les résidents du pays atteindront un niveau de vie élevé en termes de consommation possible. Il n'est cependant pas possible de mesurer directement le volume de la production nationale. Comment pourrait-on en effet additionner des pommes et des oranges? Comme nous l'avons déjà étudié, on peut contourner le problème en calculant la valeur de la production nationale en utilisant pour chacun des biens produits le prix qui prévalait au cours d'une année de base. En procédant ainsi pour chaque année avec les nouvelles quantités produites de chacun des biens, on s'assure que toute augmentation ou diminution du total obtenu ne peut être due qu'à un changement dans le volume de la production. On obtient donc ainsi l'évolution du PIB en termes réels, c'est à dire en terme de quantités produites.

Le graphique présenté à la figure 1 permet de visualiser très rapidement l'évolution du PIB réel canadien au cours des deux dernières décennies.

Figure 1



Comme on peut le voir en suivant le tracé de la courbe, le PIB réel canadien, mesuré aux prix prévalants en 1986 (c'est ce que l'on entend par l'expression "en dollars constants de 1986"), est passé d'un peu plus de 325 milliards de dollars à presque 575 milliards. Le volume de la production nationale canadienne s'est donc fortement accru au cours des vingt dernières années. Afin de voir ce que cette croissance représente en termes de pourcentage, rien de plus simple. En désignant le PIB réel par le symbole Y, il suffit de procéder au calcul suivant:

$$\left(\frac{Y\,(93) - Y\,(73)}{Y\,(73)}\right)100$$

ce qui se simplifie aussi à

$$\left(\frac{Y\,(93)}{Y\,(73)} - 1\right)100.$$

On obtient donc

$$\left(\frac{575}{325} - 1\right)100 = \underline{76{,}92\,\%}$$

La croissance du PIB réel canadien a donc atteint 76,92 % sur une période de vingt ans. Pour atteindre cette performance, il a bien fallu que la croissance soit soutenue tout au long de la période. Comme on le réalise en observant à nouveau le graphique du PIB réel, la croissance a été générale au cours des derniers vingt ans. Seules les années 1982, 1990 et 1991 font figure d'exception. En effet, uniquement au cours de ces trois années le PIB réel s'est-il établi à un montant inférieur à celui de l'année précédente. Ces trois années ont été des années de récession caractérisées par une croissance négative du PIB réel. Si le PIB réel a progressé de 76,92 % sur vingt ans, c'est par ce que les années d'expansion ont largement dominé les années de récession.

Il serait intéressant de se demander ce que signifie une croissance de 76,92 % sur vingt ans en termes de taux de croissance annuel moyen. Après tout, les journaux nous communiquent généralement la croissance en termes annuels. Si les 2,4 % de croissance réalisés en 1993 (par rapport au PIB réel de 1992) en déçoivent plusieurs, c'est entre autre par ce que l'on se rappelle qu'en 1984 (soit comme en 1993, au cours de la deuxième année marquant la fin de la récession), la croissance du PIB réel avait atteint 6,3 % (par rapport à 1983).

Le taux de croissance annuel moyen réalisé au cours des vingt dernières années n'est pas la moyenne arithmétique de vingt taux annuels. Il s'agit plutôt du taux de croissance constant qui porterait le PIB canadien de son niveau réalisé en 1973 à son niveau réalisé en 1993. Nous allons déduire une formule générale permettant de calculer ce taux moyen. Cependant, comme cette formule est d'application bien plus générale, nous allons procéder à la déduction de la formule à l'aide d'une question hypothétique. Voici la question:

A combien se chiffrerait le PIB réel canadien en 1993 si son taux de croissance avait atteint, chaque année depuis 1973, la performance réalisée en 1984, soit environ 6 % ?

Voyons maintenant la réponse:

En 1973, le PIB réalisé a été de 325 milliards. Cela constitue le point de départ de nos calculs:

Point de départ 1973: PIB = 325			
Après			
1 an (1974)	325 + 0,06 (325)		
	325 (1 + 0,06)	=	344,5
2 ans (1975)	344,5 (1 + 0,06)		
	325 (1 + 0,06) (1 + 0,06)		
	325 $(1 + 0{,}06)^2$	=	365,17
3 ans (1976)	365,17 (1 + 0,06)		
.	325 $(1 + 0{,}06)^2$ (1 + 0,06)		
.	325 $(1 + 0{,}10)^3$	=	387,0802
.			
20 ans (1993)	325 $(1 + 0{,}06)^{20}$	=	**1042,32**

Maintenant que nous avons trouvé la réponse à cette question hypothétique, il vaut la peine de bien observer la nature des calculs effectués. On s'aperçoit que le PIB hypothétique de 1993 a été obtenu à l'aide d'une formule générale que l'on pourrait écrire:

$$Q_o (1 + g)^n = Q_n$$

où Q_o est la valeur de la quantité au point de départ;
g est le taux de croissance par unité de temps de cette quantité;
n est le nombre d'années, mois, jours, etc... que l'on considère;
et Q_n est la valeur de la quantité au terme de la période considérée.

Dans le cas présent:

Q_o est la valeur du PIB au point de départ (325);
g est le taux de croissance annuel supposé du PIB (0,06);
n est le nombre d'années (20 ans);
et Q_n est la valeur du PIB en 1993.

Si donc la croissance annuelle avait atteint 6 % par an, le PIB aurait augmenté en vingt ans de 220,71 % (il suffit de comparer 1042,32 avec 325). En réalité, il n'a augmenté que de 76,92 %. Pour trouver le taux de croissance annuel moyen correspondant à la véritable performance de l'économie canadienne, il suffit d'isoler *g* dans la formule générale présentée plus haut:

$$(1 + g)^n = \frac{Q_n}{Q_0}$$

$$(1 + g) = \left(\frac{Q_n}{Q_0}\right)^{1/n}$$

$$g = \left(\frac{Q_n}{Q_0}\right)^{1/n} - 1$$

En appliquant la formule au cas présent on obtient:

$$g = 1{,}7692^{(1/20)} - 1 = 2{,}89\%$$

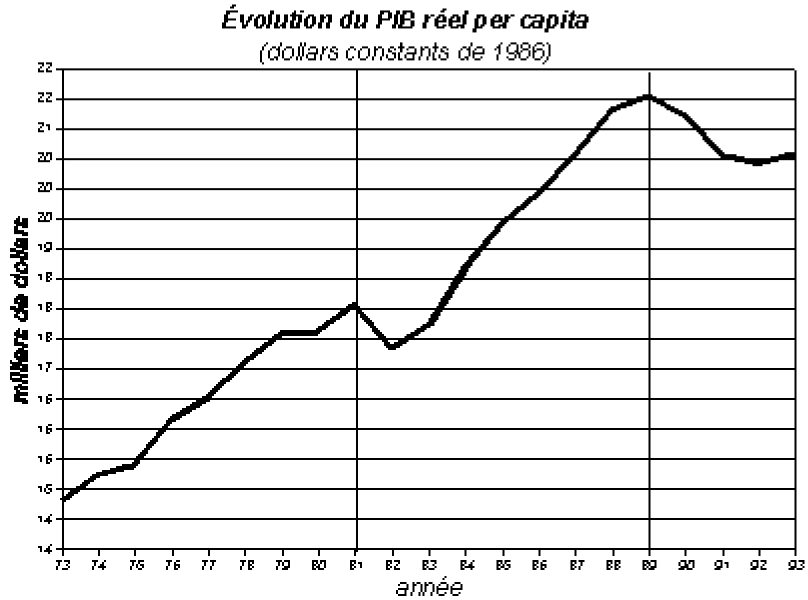
L'économie canadienne a donc crû au rythme annuel moyen de 2,89 % au cours des vingt dernières années. C'est dire qu'un taux de croissance annuel en apparence modeste peut avoir des effets cumulatifs importants à travers le temps. Pour ceux qui sont familiers avec les placements à intérêt composé, cela ne devrait guère surprendre. En effet, le taux d'intérêt n'est pas autre chose que le taux de croissance du capital investi. Le ré-investissement continu du capital et des intérêts assure une progression géométrique du capital de départ. Nous y reviendrons plus loin. Par ailleurs, en annexe de ce texte, nous présentons un certain nombre de problèmes pouvant s'analyser à l'aide de la formule $Q_0\,(1 + g)^n = Qn$.

1.2 Une méthode et deux règles importantes concernant le calcul approximatif des taux de croissance

À la section précédente, nous avons examiné à l'aide d'un graphique l'évolution du PIB réel canadien depuis 1973. Nous allons considérer maintenant un autre indicateur important de la performance macroéconomique canadienne, soit le PIB réel per capita. Par définition, celui-ci est égal au PIB réel divisé par le nombre d'habitants. Il s'agit d'une variable cruciale dans l'appréciation du niveau de vie d'une population. Si le PIB s'accroît moins rapidement que la population (auquel cas on assiste à une baisse du PIB per capita), les niveaux de consommation possible s'amenuisent pour la moyenne de la population.

La performance canadienne peut s'analyser à l'aide du graphique présenté à la figure 2. En dollars constants de 1986, le PIB per capita est passé d'un niveau approximatif d'environ 14 800 dollars en 1973 à un niveau d'environ 20 600 dollars en 1993. On constate que cette progression a été soutenue à l'exception des années 1982, 1990, 1991 et 1992. À la section précédente, nous avons vu que le PIB réel canadien a chuté en 1982, 1990 et 1991 mais qu'il a augmenté (faiblement il est vrai) en 1992. L'année 1992 représente donc une année où la croissance de la population a dépassé la croissance positive du PIB réel. Cela démontre bien que le PIB per capita peut chuter même lorsque le PIB augmente.

Figure 2



On peut calculer le taux annuel moyen de croissance du PIB per capita à l'aide de la formule générale présentée plus haut:

$$\left(\frac{20\,600}{14\,800}\right)^{1/20} - 1 = 1{,}67\ \%$$

Par comparaison, on avait calculé une progression annuelle moyenne du PIB réel de 2,89 %. À quoi doit-on attribuer la différence? Bien entendu à la croissance de la population. Intuitivement, on écrirait:

croissance du PIB per capita = croissance du PIB - croissance de la population

Il reste à voir pourquoi et dans quelles circonstances cette intuition est valide. En attendant, sans autres données, on estimerait la croissance annuelle moyenne de la population canadienne au cours des vingt dernières années à 1,22 % par simple manipulation de la formule précédente. En réalité, le taux de croissance annuel moyen de la population s'est chiffré à 1,17 %. Notre calcul intuitif constitue quand même une excellente approximation.

Voyons maintenant comment se justifie de manière formelle notre intuition. Désignons à nouveau le PIB réel par la lettre Y et utilisons la lettre N pour désigner la population. Par définition, le PIB réel per capita que nous désignerons y est égal à:

$$y = \frac{Y}{N}$$

La différentiation totale de cette expression nous donne[2]:

$$d\,y = (N\,dY - Y\,dN)\frac{1}{N^2}$$

Une toute petite manipulation nous permet d'écrire:

$$d\,y = \frac{Y}{N}\left(\frac{dY}{Y} - \frac{dN}{N}\right)$$

Finalement, en divisant les deux côtés de cette expression par *y* (qui, rappelons-le est égal par définition à *Y/N*), on obtient:

$$\frac{d\,y}{y} = \frac{dY}{Y} - \frac{dN}{N}$$

Les termes *dy/y*, *dY/Y* et *dN/N* représentent tous des variations exprimées en pourcentage. Ce que nous dit donc cette expression, c'est que pour autant que les variations considérées ne soient pas trop grandes (*dy*, *dY* et *dN* représentent des variations très faibles selon le concept de différentiation), on peut calculer la croissance en pourcentage du PIB per capita en soustrayant la croissance en pourcentage de la population de la croissance en pourcentage du PIB.

Évidemment, lorsque les variations considérées sont grandes, l'approximation peut devenir trompeuse. Par exemple, on a déjà vu que le PIB réel avait augmenté de 76,92 % entre 1973 et 1993. Sachant que la population a quant à elle augmenté de 23,11 % au cours de la même période, l'utilisation de la formule suggéreraient une augmentation du PIB per capita de 53,81 %. En réalité, selon les chiffres utilisés plus haut, cette augmentation n'a été que de 39,19 %[3]. En pratique, il faut calculer les taux de croissance de manière exacte lorsque l'on possède les données nécessaires et recourir à la formule autrement pour autant que les variations considérées ne soient pas trop grandes.

La règle que nous venons de voir s'applique à un quotient. Il en existe d'autres selon le type d'expression mathématique considéré. Une manière relativement simple de déduire la règle à utiliser fait appel au concept d'élasticité étudié en microéconomie. Vous avez vu ce concept dans le contexte des fonctions de demande et d'offre. Néanmoins, le concept d'élasticité est d'application beaucoup plus générale. Par exemple, supposons qu'une variable *z* dépende des variables *v* et *w*. On écrit:

$$z = f(v, w)$$

Pour calculer l'élasticité de *z* par rapport à *v*, il suffit de calculer la dérivée partielle de z par rapport à v puis de multiplier le résultat par le ratio *v/z*:

$$\frac{d\,z}{d\,v}\frac{v}{z}$$

---

[2] Si vous éprouvez quelques doutes sur le concept de différentiation totale et/ou sur les règles de différentiation à utiliser, consultez un manuel de base ou les notes de cours appropriées.

[3] Vérifiez!

et bien entendu, l'élasticité de z par rapport à w se calcule de manière similaire:

$$\frac{d\,z}{d\,w}\frac{w}{z}$$

Cette formule s'applique à toute variable et donc, bien entendu, au PIB per capita. Le PIB per capita dépend lui-même de deux variables: le PIB et la population. L'élasticité du PIB per capita par rapport au PIB se calcule:

$$\frac{dy}{dY}\frac{Y}{y} = \frac{1}{N}\frac{N}{Y}Y = 1$$

tandis que l'élasticité du PIB per capita par rapport à la population nous est donnée par:

$$\frac{dy}{dN}\frac{N}{y} = \frac{-Y}{N^2}N\frac{N}{Y} = -1$$

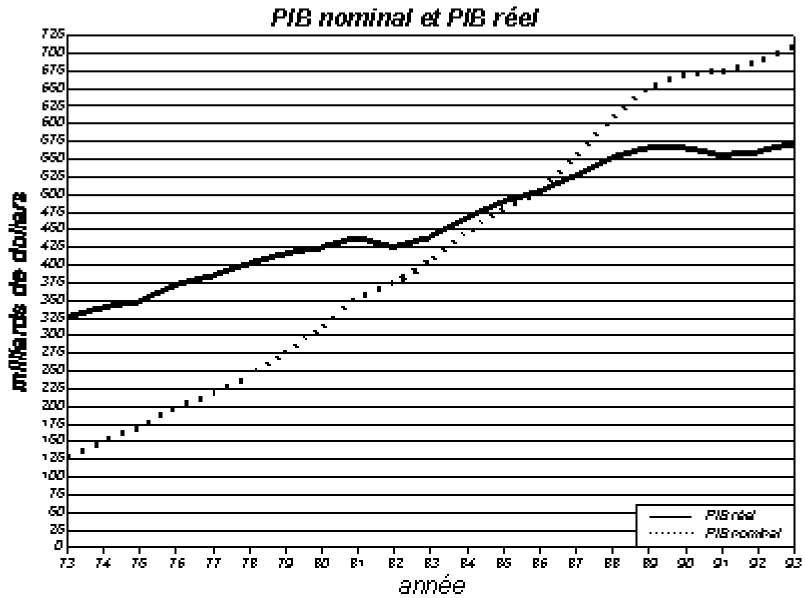
Afin de calculer approximativement le taux de croissance du PIB per capita, nous n'avons pas fait autre chose que sommer les taux de croissance de chacun des déterminants de celui-ci (dans ce cas le PIB, Y et la population, N) en pondérant chacun de ces taux de croissance par l'élasticité correspondante. Nous avions donc:

$$\frac{d\,y}{y} = (+1)(\frac{d\,Y}{Y}) + (-1)(\frac{d\,N}{N})$$

En fait, toutes les formules visant à calculer approximativement un taux de croissance peuvent être déduites formellement à l'aide de cette méthode. Nous avons vu la règle du quotient. Voyons maintenant la règle du produit à l'aide d'un exemple important: celui du PIB nominal.

La raison pour laquelle le PIB nominal diffère du PIB réel, c'est qu'on l'obtient en évaluant la valeur de la production nationale aux prix de l'année courante plutôt qu'aux prix de l'année de base. Bien entendu, lorsque l'année courante est l'année de base, il n'y a pas de différence entre les deux. Pour les autres années, tout dépend de l'évolution des prix courants par rapport à ceux de l'année de base. Pour illustrer notre propos, le graphique présenté à la figure 3 montre l'évolution des PIB nominal et réel au cours des vingt dernières années.

Figure 3



Comme on peut s'apercevoir, les PIB nominal et réel diffèrent l'un de l'autre sauf pour l'année 1986 qui a été choisie comme année de base. Le PIB nominal est inférieur au PIB réel avant 1986 car les prix étaient plus élevés en 1986 qu'auparavant. Le PIB nominal est supérieur au PIB réel après 1986 car les prix ont continué d'augmenter après 1986. On obtient un indice synthétique des prix en divisant le PIB nominal par le PIB réel. En général, l'indice ainsi obtenu est ensuite multiplié par 100. Cependant, nous n'allons pas le faire ici. Nous nous contentons de désigner par P l'indice en question. En désignant le PIB nominal par Yn et en conservant la notation habituelle pour le PIB réel, on peut écrire la définition suivante du PIB nominal:

$$Yn = P\,Y$$

Le PIB nominal est donc le produit de l'indice synthétique des prix (non multiplié par 100) et du PIB réel. Supposons que nous connaissions l'inflation (l'augmentation en pourcentage de l'indice des prix) et la croissance réelle. Comment pourrait-on calculer de manière approximative la croissance du PIB nominal? Intuitivement, on serait porté à additionner la croissance réelle à l'inflation. L'intuition est tout à fait juste mais on peut s'en assurer en procédant de manière formelle. Selon la méthode exposée, il suffit d'additionner les taux de croissance de chacun des deux déterminants du PIB nominal en pondérant chacun des deux termes par l'élasticité correspondante.

L'élasticité du PIB nominal par rapport aux prix s'obtient ainsi:

$$\frac{dYn}{dP}\,\frac{P}{Yn} = \frac{Y\,P}{Yn} = \frac{Yn}{Yn} = 1$$

De même manière, l'élasticité du PIB nominal par rapport au PIB réel est égale à:

$$\frac{dYn}{dY}\frac{Y}{Yn}=\frac{P\,Y}{Yn}=\frac{Yn}{Yn}=1$$

Ainsi, on obtient que:

$$\frac{d\,Yn}{Yn}=(+1)\frac{d\,P}{P}+(+1)\frac{d\,Y}{Y}$$

Puisque *dP/P* et *dY/Y* représentent respectivement le taux d'inflation (mesuré par l'indice des prix du PIB) et le taux de croissance du PIB réel, nous avons bel et bien confirmé notre intuition.

Vérifions avec des vrais chiffres. Au tableau A1 de l'annexe statistique du recueil, on apprend que l'inflation mesurée par l'indice synthétique a atteint 0,8 % en 1993 (colonne 19) tandis que la croissance du PIB réel a atteint 2,4 % (colonne 13). En additionnant ces deux chiffres, on obtient 3,2 % de croissance nominale, ce qui est confirmé par la colonne 12.

Nous aurons l'occasion d'étudier d'autres règles approximatives dans ce cours et celles-ci se déduiront de manière identique à la méthode exposée. Toutefois, les deux règles que nous venons de voir, celles du quotient et du produit, seront les plus utilisées. Il vaut donc la peine de les récapituler:

- Le taux de croissance d'une variable définie par un quotient est approximativement égal au taux de croissance du numérateur moins le taux de croissance du dénominateur.

- Le taux de croissance d'une variable définie par un produit est approximativement égal à la somme des taux de croissance des variables entrant dans ce produit.

1.3 Une application intéressante de la règle du quotient: le taux d'intérêt réel

Supposons que vous ayez 100$ à placer pour une année au taux de 8 %. À la fin de l'année, votre capital atteindra 108$, soit le simple résultat du calcul suivant:

$$100\,(1+0{,}08)$$

Remarquez au passage que le calcul ainsi effectué correspond à l'utilisation de la formule générale $Q_0\,(1+g)^n = Qn$ présentée à la section 1.1. Dans ce cas Q_0=100, g=0,08 et n=1. S'il s'agissait d'un placement à intérêt composé de 8 % pour une période de 5 ans, Q_n serait égal à 146,93$[4]. Revenons toutefois au placement d'une année. Les 108$ obtenus dans un an permettront-ils d'acheter alors plus de biens, moins de bien ou autant de biens que les 100$ l'auraient permis aujourd'hui. La réponse à cette question dépend du taux d'intérêt réel. Voyons cela.

En dollars d'aujourd'hui, 100 dollars permet d'acheter des biens d'une valeur de 100 dollars. En

---

[4] Vérifiez!

choisissant comme année de base l'année courante, on peut donc fixer la valeur d'un indice de prix à 1. Si l'on désigne votre capital financier par *CF*, on peut donc écrire que la valeur réelle de ce capital est égale à:

$$\frac{CF}{P} = \frac{100}{1} = 100$$

Supposons qu'au cours de l'année où vous faites le placement, l'inflation atteigne 5 %. Les 108$ que vous retirerez à la fin de l'année auront comme valeur (en dollars d'aujourd'hui):

$$\frac{CF}{P} = \frac{108}{1{,}05} = 102{,}86$$

Afin de connaître l'augmentation de la valeur réelle de votre capital financier, il suffit de comparer les 102,86 dollars d'aujourd'hui ainsi obtenus avec les 100 dollars initiaux. L'augmentation de la valeur réelle de votre capital est donc de 2,86 %. Ce 2,86 %, à l'opposé du taux nominal de 8 %, représente un taux d'intérêt réel. Ici, nous l'avons calculé de manière exacte. Toutefois, on peut voir facilement comment on aurait dû procéder si notre intention avait été d'obtenir rapidement une approximation.

En effet, le taux d'intérêt réel représente le taux de croissance de la valeur réelle du capital financier. Or, cette valeur réelle s'exprime sous la forme d'un quotient, *CF/P*. Son taux de croissance peut donc se calculer approximativement comme la différence entre le taux de croissance du numérateur et le taux de croissance du dénominateur. Le taux de croissance du numérateur est égal au taux d'intérêt nominal tandis que le taux de croissance du dénominateur est égal au taux d'inflation. En désignant le taux nominal par *i* et le taux d'inflation par , on peut donc estimer de manière approximative le taux d'intérêt réel *r* par la formule suivante:

$$r \approx i - p$$

En appliquant cette formule au cas présent, on trouve un taux d'intérêt réel approximatif de 3 %, ce qui n'est pas trop différent des 2,86 % trouvés de manière exacte. Lorsque les taux d'intérêt et d'inflation sont élevés, la formule approximative peut facilement induire en erreur. Dans ce cas, il faut utiliser une formule exacte que vous pourriez déduire à titre d'exercice facultatif:

$$r = \frac{i - p}{1 + p}$$

L'application de cette dernière formule aux données du problème courant nous donne:

$$r = \frac{0{,}08 - 0{,}05}{1 + 0{,}05} = 2{,}86\%$$

2. Un mot sur la question des années de base

Nous avons rencontré à plusieurs reprises déjà la question des années de base. Par exemple, le PIB réel était exprimé en dollars constants de l'année de base 1986. Il arrive fréquemment qu'il soit nécessaire ou simplement utile de modifier l'année de base servant à nos analyses. Voici un exemple bien concret qui reprend le concept de PIB per capita. Le tableau ci-bas montre l'évolution récente du PIB per capita du Canada exprimé en dollars de 1986.

Année	**PIB per capita** (en milliers de dollars de 1986)
1989	21,589
1990	21,254
1991	20,591
1992	20,438
1993	20,623

Supposons que, connaissant le PIB nominal et la population de 1993, nous souhaitions exprimer le PIB réel per capita en dollars constants de 1993. Comment devrait-on procéder? Il s'agit d'un exemple typique où il s'agit de se rappeler de la règle de trois. Voyons cela.

Le principe fondamental est le suivant: le choix d'une année de base particulière ne devrait d'aucune manière affecter le taux de croissance de la variable étudiée. Exprimé en dollars de 1986 ou en dollars de 1993, le PIB réel per capita devrait connaître le même taux de croissance. Pour en arriver à nous assurer de cette égalité, il faut au moins une année pour laquelle on dispose de la donnée exprimée dans l'une et l'autre base. Dans notre exemple, c'est le cas de l'année 1993.

En 1993, le PIB nominal du Canada s'est chiffré à 710,723 milliards de dollars. En choisissant 1993 comme année de base, il va de soi que le PIB réel de 1993 s'est aussi établi à 710,723 millions de dollars. En 1993, le Canada comptait 27,806 millions d'habitants. Le PIB per capita de 1993 exprimé en dollars de cette même année a donc atteint 25,560 milliers de dollars. Il est maintenant très facile de procéder à la conversion des données d'une base à l'autre. Prenons par exemple les années 1992 et 1991.

Réunissons en colonnes les données dont nous disposons en fonction de l'année de base. Il suffit que la donnée d'une même année soit disponible dans les deux bases pour que l'on puisse appliquer une règle de trois et trouver les données manquantes. Dans ce cas-ci, nous pouvons procéder en utilisant 1993 comme point de départ.

	PIB per capita (dollars constants de 1986)	**PIB per capita** (dollars constants de 1993)
1991	20,591	?
1992	20,438	?
1993	20,623	25,560

Pour trouver le PIB per capita de 1992 exprimé en dollars de 1993, il suffit d'appliquer la règle de trois suivante:

$$\frac{25\,560 \bullet 20\,438}{20\,623} = 25\,331$$

On procède de même manière pour l'année 1991 en appliquant à nouveau une règle de trois:

$$\frac{25\,560 \bullet 20\,591}{20\,623} = 25\,520$$

Pour vérifier l'exactitude de nos calculs, il suffit de vérifier si les taux de croissance sont les mêmes sans égard à la base.

	dollars de 1986	**dollars de 1993**
1992	(20438/20591)-1 -0,7 %	(25331/25520)-1 -0,7 %
1993	(20623/20438)-1 +0,9 %	(25560/25331)-1 +0,9 %

Nous vous laissons pour exercice de calculer le PIB per capita des années 1989 et 1990.

Annexe

Exemples de problèmes pouvant s'analyser à l'aide de la formule $Q_0 (1 + g)^n = Qn$

Les questions qui suivent sont autant d'application de la formule présentée à la section 1. Nous en profitons aussi pour rappeler quelques règles concernant les logarithmes en base naturelle.

1. À 2 % d'inflation par année, en combien d'années les prix doubleront-ils?

On pose $Q_o = 100$

Si les prix doublent

$Q_n = 200$

On connaît $g = 0{,}02$

Ainsi $100\ (1 + 0{,}02)^n = 200$

et il nous faut trouver n

$(1 + 0{,}02)^n = 2$
$(1{,}02)^n = 2$
$1{,}02 = 2^{1/n}$

À ce stade, il serait bon de se rappeler les quelques règles concernant les logarithmes en base naturelle[5]. En effet, on peut transformer la relation précédente de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \ln(1{,}02) &= 1/n \ln(2) \\ n &= \ln(2)/\ln(1{,}02) \\ &\approx 35 \end{aligned}$$

Les prix doubleraient donc en 35 ans si l'inflation atteignait 2 % par année.

On peut vérifier:

$$100\ (1{,}02)^{35} = 199{,}99$$

Le faible écart n'étant dû qu'aux arrondissements choisis des nombres décimaux.

[5] Règle du produit: $\ln(uv) = \ln u + \ln v$
Règle du quotient: $\ln(u/v) = \ln u - \ln v$
Règle d'une expression exponentielle: $\ln(u)^a = a \ln u$

2. Valeur de 100 $ placé à 10 % composé par année dans 10 ans?

Q_o = 100
g = 0,10
n = 10

$100\ (1 + 0{,}10)^{10} = 259{,}37$ $

3. Taux de croissance annuel qui permettrait de doubler le PIB en 20 ans?

On pose $Q_o = 100$
$Q_{20} = 200$ (peu importe la valeur initiale du PIB, il suffit de doubler ce chiffre)

$n = 20$

On cherche g

$$
\begin{aligned}
100\ (1 + g)^{20} &= 200 \\
(1 + g)^{20} &= 2 \\
(1 + g) &= 2^{1/20} \\
g &= 2^{1/20} - 1 \\
&.\ 3{,}53\ \%
\end{aligned}
$$

On peut vérifier:

$$100\ (1 + 0{,}0353)^{20} = 200{,}14$$

ce qui correspond à ce que l'on cherchait (à quelques approximations décimales près).

4. Quelle somme d'argent investie à 8 % annuel composé rapportera 10 000 $ dans cinq ans?

$$
\begin{aligned}
Q_o\ (1 + 0{,}08)^5 &= 10\ 000 \\
Q_0 &= 10\ 000/(1 + 0{,}08)^5 \\
&= 6\ 805{,}83\ \$
\end{aligned}
$$

Nous reverrons ce genre de problèmes plus tard dans le cours en parlant de l'actualisation. Ici, la valeur actualisée de 10 000 dollars dans cinq ans est égale à 6 805,83 $ car, étant donné un taux d'intérêt de 8 %, il faut renoncer à ce montant aujourd'hui pour l'échanger contre 10 000 dollars dans cinq ans.

5. Indice de prix d'il y a 5 ans si l'indice d'aujourd'hui est 130 et si l'inflation des 5 dernières années a été constante à 5 % par année.

$$Q_o (1 + 0,05)^5 = 130$$
$$Q_o = 130/(1 + 0,05)^5$$
$$= \mathbf{101,86}$$

Nous espérons que vous êtes maintenant convaincus que la formule générale $Q_o (1 + g)^n = Q_n$, une fois bien comprise, vous permet de répondre à une foule de problèmes allant de l'intérêt composé en passant par la croissance économique, l'inflation et l'actualisation.