

Tarek Dakhli

**Analyse de la dépendance de défaut et Évaluation des dérivés de
crédit sur portefeuille**

Mémoire
présenté
à HEC Montréal
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences de gestion (M.Sc.) en ingénierie financière

HEC MONTRÉAL

©Tarek Dakhli, 2003

Dédicaces

À mon Père, À ma Mère,

Comme preuve de mon affectueuse reconnaissance.

Remerciements

Toute ma gratitude à Mr **BRUNO RÉMILLARD** et Mr **NICOLAS PAPAGEORGIU**, pour m'avoir encadré dans ce mémoire, d'aussi bonne grâce, et s'y être intéressé. Qu'ils trouvent dans ces petits mots l'expression de mes sentiments les plus respectueux, et j'espère avoir été à la hauteur de leur confiance.

Il m'est très agréable aussi, d'adresser mes vifs remerciements aux membres de Jury qui ont bien voulu accepter de valoriser ce mémoire. Mes remerciements à ma famille et à tous mes amis qui m'ont encouragé tout au long de ce projet et à mes enseignants, à qui je dois ma formation et ma réussite.

Que tous soient remerciés très sincèrement.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Revue de la littérature	5
2.1	Modèles de risque de crédit	5
2.1.1	Approche structurelle	6
2.1.2	Approche réduite	9
2.2	Modèles de risque de crédit de portefeuille	12
2.2.1	Modèles commerciaux de risque de crédit	12
2.2.2	Modélisation de la dépendance de défaut dans un portefeuille de crédit	18
2.2.3	Études empiriques	25
3	Méthodologie	28

3.1	Modélisation du risque du crédit	29
3.1.1	Estimation de la probabilité de défaut marginale	30
3.1.2	Paramètres du modèle de probabilité de défaut	33
3.2	Modélisation de la dépendance de défaut	35
3.2.1	Rappel sur les copules	36
3.2.2	Choix de la meilleure structure de dépendance	40
3.3	Évaluation des dérivés de crédit : cas du Swap du k -ième en défaut	42
4	Étude empirique	44
4.1	Estimation des probabilités de défaut	45
4.1.1	Base de données et estimation des inputs du modèle du risque de crédit	45
4.1.2	Estimation des probabilités de défaut	47
4.2	Analyse de la structure de dépendance de défaut	50
4.2.1	Estimation des copules	50
4.2.2	Estimation pour les copules archimédiennes	51
4.2.3	Estimation pour la copule normale	57

4.2.4	Estimation pour la copule de Student	57
4.2.5	Choix de la meilleure structure de dépendance	61
4.2.6	Estimation de la fonction K empirique	61
4.2.7	Estimation de la fonction K des copules archimédiennes	62
4.2.8	Estimation de la fonction de Kendall pour la copule normale et la copule de Student	68
4.2.9	Comparaison des fonctions de Kendall et sélection de la meilleure structure de dépendance	69
4.3	Simulation des temps de défaut et évaluation des dérivés de crédit sur plusieurs noms	74
4.3.1	Simulation des temps de défaut	75
4.3.2	Évaluation du swap de crédit	87
4.3.3	Discussion	88
5	Conclusion	91
A	Démonstration de la Proposition 3.1.1	94
B	Calcul du ratio dette par action	97

Liste des figures

4.1	Probabilité de défaut journalière pour un horizon d'une année, de mars 1984 à décembre 2000.	49
4.2	– log-vraisemblance pour l'estimation du paramètre θ de la copule de Clayton.	54
4.3	– log-vraisemblance pour l'estimation du paramètre θ de la copule de Frank.	55
4.4	– log-vraisemblance pour l'estimation du paramètre θ de la copule de Gumbel.	56
4.5	– log-vraisemblance pour l'estimation du degré de liberté de la copule de Student.	60
4.6	Fonction de Kendall K estimée.	63
4.7	Fonction de Kendall K pour la copule de Clayton avec 10 composantes.	64

4.8	Fonction de Kendall K pour la copule de Frank avec 10 composantes.	66
4.9	Fonction de Kendall K pour la copule de Gumbel avec 10 composantes.	67
4.10	Fonction de Kendall K pour la copule normale avec 10 composantes.	70
4.11	Fonction de Kendall K pour la copule de Student avec 10 composantes.	71
4.12	Fonction de Kendall empirique K_n vs fonctions de Kendall estimées \hat{K} , pour les cinq familles de copules considérées. . .	72
4.13	Probabilité de défaut de Sun Microsystems.	77
4.14	Probabilité de défaut de Hewlett Packard.	78
4.15	Probabilité de défaut de Intel.	79
4.16	Probabilité de défaut de Tyco.	80
4.17	Probabilité de défaut de Sprint.	81
4.18	Probabilité de défaut de Verizon.	82
4.19	Probabilité de défaut de 3Com.	83
4.20	Probabilité de défaut de Applied Material.	84
4.21	Probabilité de défaut de BellSouth.	85

4.22 Probabilité de défaut de Nortel. 86

Liste des tableaux

3.1	Copules, générateurs et paramètre pour les familles de Clayton, Frank, et Gumbel.	40
4.1	Liste des entreprises constituant le portefeuille.	47
4.2	Estimation du paramètre θ pour les familles de Clayton, Frank et Gumbel.	53
4.3	Estimation de θ pour la copule de Clayton.	63
4.4	Estimation de θ pour la copule de Frank.	65
4.5	Estimation de θ pour la copule de Gumbel.	65
4.6	Mesure d'adéquation des différents modèles.	73
4.7	Prix d'un swap du premier en défaut, au 30 décembre 2000 (en points de base, calculé à partir de 100,000 simulations) . .	87
4.8	Prix d'un swap du second en défaut, au 30 décembre 2000 (en points de base, calculé à partir de 100,000 simulations)	88

4.9 Prix d'un swap de défaut sur un seul nom, au 30 décembre
2000 (en points de base, calculé à partir de 100,000 simulations) 89

Chapitre 1

Introduction

Tout portefeuille obligataire, à moins qu'il soit composé de titres émis par le gouvernement américain, est exposé au risque de crédit. Ce dernier se matérialise dans le fait qu'un émetteur soit incapable de remplir ses obligations à savoir le paiement des intérêts ou remboursement du principal. Dans ce cas l'obligation est considérée en défaut. Les détenteurs d'obligations émises par une compagnie, une municipalité ou un gouvernement en voie de développement, etc. courent un risque de défaut ou un risque de crédit.

Les institutions financières et surtout les banques, détenant un large portefeuille d'obligations ou de prêts, ont intérêt à gérer leur risque de crédit pour éviter des grosses pertes mettant en péril leur survie. Auparavant, ces institutions gèrent leurs exposition cas par cas en mettant en place des limites d'exposition par industrie ou par classe de risque. Cette méthode, quoique fa-

cile à mettre en application, souffre de quelques limites du fait qu'elle ignore l'interaction entre les différents titres constituant le portefeuille et néglige, par conséquent, les effets bénéfiques de la diversification. D'autre part, elle ne permet pas de prévoir la détérioration du risque de crédit dans le temps.

Pour ces raisons, les banques ont recouru à d'autres moyens de gestion de risque de crédit. La vente de crédit en constitue un. Cette pratique permet aux banques de réduire ou modifier leur exposition à certains secteurs pour garder leur portefeuille bien diversifié. La principale difficulté que cette pratique pose aux banques, est que la qualité de crédit est souvent sous-évaluée par le marché et la banque peut se voir vendre un crédit en payant des primes de risques relativement plus élevées.

La gestion du risque de crédit est rendue encore plus facile avec le développement du marché des produits dérivés sur le crédit. Ces derniers sont des produits semblables à des polices d'assurance permettant à une firme de se couvrir contre le défaut d'une contrepartie ou la détérioration de sa cote de crédit. Comparé à la vente de crédit, l'utilisation des produits dérivés permettent aux banques couvrir leur risque de crédit sans être obligés de rendre publique leurs expositions .

Plusieurs catégories de produits dérivés sur le crédit existent déjà sur le marché. Certains permettent de couvrir le risque de crédit d'une seule contrepartie tel que le swap de défaut à revenu total ("Total return default swap") ou les options sur écart de crédit. D'autres sont écrits sur un panier d'obligations tel que le swap du premier en défaut ou swap du deuxième en défaut ("first and second to default swap").

Ces derniers produits sont utiles pour la gestion de l'exposition au risque de crédit dans un portefeuille. L'acheteur d'un swap du premier en défaut cherche à se couvrir contre le défaut le plus probable dans son portefeuille. Un swap du deuxième en défaut permet à un investisseur de se couvrir contre le deuxième défaut dans son portefeuille. Ce produit est acheté par certains investisseurs qui sont capables de supporter un premier défaut dans leur portefeuille. Le second défaut est couvert. Le swap du deuxième en défaut doit coûter moins cher que le swap du premier en défaut et ce parce que la probabilité de défaut de deux contreparties est toujours inférieure à la probabilité de défaut d'une seule contrepartie.

D'autre part ces produits peuvent être utilisés dans la "redistribution" de l'exposition au risque de crédit dans un portefeuille de crédits ou d'obligations, sans coût supplémentaire. Par exemple, une compagnie, de par la nature de ses activités, peut se retrouver largement exposée à un secteur. Elle peut alors acheter une protection contre le défaut dans ce secteur et vendre plusieurs swaps de crédit sur plusieurs autres secteurs pour le même montant nominal. Ceci permet de remplacer une large exposition à une certaine industrie ou compagnie par plusieurs petites autres expositions à d'autres secteurs non dépendants permettant d'avoir un degré de diversification plus élevé.

L'analyse que nous faisons dans ce mémoire a pour but l'évaluation de cette dernière catégorie de produits dérivés sur le crédit à savoir ceux écrits sur un portefeuille d'obligations. Pour atteindre cet objectif deux variables doivent être spécifiées. La première est la distribution marginale de la pro-

babilité de défaut ou la distribution des temps de défaut. On proposera un modèle utilisé par CreditMetrics pour calculer les cotes de crédit (Credit-Grades). C'est un modèle structurel donnant une forme analytique des probabilités de défaut d'une obligation donnée, exprimées en fonction de plusieurs variables observables sur le marché.

La deuxième variable à étudier est la dépendance de défaut ou la structure de dépendance entre les risques de défaut des noms constituant le portefeuille. Les copules sont un moyen pratique d'analyser celle-ci. Elles nous permettent d'incorporer la dépendance entre les probabilités (ou les temps) de défaut dans notre analyse sans modifier les probabilité marginales. L'analyse marginale du risque de crédit et l'analyse de la dépendance sont ainsi séparées.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante : dans le chapitre 2, une revue de la littérature de la modélisation du risque de crédit marginal (lié à un seul nom) et du risque de crédit multidimensionnel (lié à un portefeuille de noms), est exposée. Dans un troisième chapitre, on exposera notre méthodologie d'estimation des probabilités de défaut, d'analyse de la structure de dépendance dans un portefeuille de crédit et d'évaluation des produits dérivés sur le crédit. On implementera les différents modèles exposés dans le chapitre 4 et on conclura dans le dernier chapitre.

Chapitre 2

Revue de la littérature

Dans ce chapitre nous présentons les principaux travaux de recherche liés à la gestion et la modélisation du risque de crédit. Deux sections sont alors prévues. La première expose les modèles de risque de crédit lié à un seul nom (ou contrepartie). La deuxième présente les travaux visant la modélisation du risque de crédit lié à un portefeuille de crédit.

2.1 Modèles de risque de crédit

On pourrait classer les modèles de risque de crédit en deux principales classes selon l'approche suivie dans sa modélisation : modèles structurels (approche structurelle) et modèles réduits (approche réduite).

2.1.1 Approche structurelle

La base fondamentale de l'approche structurelle est la modélisation de la dynamique de la valeur de la firme nécessaire pour l'évaluation de la dette en défaut. Elle tire son origine de la proposition de Black et Scholes (1973) dans leur article intitulé "*The pricing of options and corporate liabilities*". Leur proposition stipule qu'une dette en défaut est une réclamation conditionnelle à la valeur des actifs de la firme et elle est évaluée en utilisant la théorie de la tarification des options. Dans ce cas, les actifs de la firme sont supposés suivre un processus de diffusion et le défaut est modélisé comme le premier temps pour lequel la valeur de la firme touche une certaine barrière prescrite.

Merton (1974) a développé cette idée en montrant qu'une action de la firme est une option européenne sur son actif. Dans ce cas le défaut ne peut se réaliser qu'à la maturité de la dette.

Cette approche à été améliorée par Black et Cox (1976) pour permettre le défaut avant la maturité, si la valeur de la firme touche une certaine limite. Ce modèle est similaire au modèle d'évaluation des options barrières.

Longstaff et Schwartz (1995), en utilisant la même approche et en postulant un taux d'intérêt stochastique (modèle de Vasicek) qui peut être corrélé avec le processus de la valeur de la firme, trouvent une solution explicite (sous forme de série infinie) pour les obligations corporatives avec défaut.

Leland (1994) incorpore la structure de capital de la société pour déterminer le potentiel de défaut et de faillite. Son modèle est une extension des modèles

précédents qui supposent que les activités de la société sont indépendantes de sa structure de capital. L'analyse de Leland regarde deux types différents d'obligations. D'abord, il considère les obligations qui sont protégés par des clauses de valeur net, communes dans le financement à court terme. Ensuite, il étudie la dette sans clauses protectives, communes dans le financement à long terme. Leland observe que les processus de déclenchement de défaut pour ces deux types de dette sont significativement différents.

Leland et Toft (1996) prolongent les résultats de Leland (1994) et examinent l'effet de la maturité de dette sur des prix des obligations, les écarts de crédit et le taux d'endettement optimal. Leland et Toft constatent que la dette à long terme exploite mieux les avantages fiscaux et ce parce que la faillite tend à se réaliser à des valeurs d'actifs faibles. D'autre part, la dette à long terme crée de plus grands coûts d'agence et ce parce que les actionnaires voudront augmenter le risque de la firme par la substitution de capitaux.

Saa-Requejo et Santa Clara (1999) offrent un nouveau modèle structurel pour évaluer les obligations exposées au risque de défaut. Saa-Requejo et Santa Clara modélisent l'événement du défaut comme l'état où la variable d'état, qui capture la solvabilité de l'émetteur, dépasse pour la première fois un certain niveau. Dans le cas du défaut, le montant recouvert est une fraction constante de la valeur d'une obligation, ayant les mêmes caractéristiques, mais sans risque de défaut. De même que Longstaff et Schwartz (1995), il permet la dépendance entre les processus de taux d'intérêt de défaut.

Mella-Barral et Perraudin (1997) incorporent le service de la dette dans un modèle continu d'évaluation des actifs et développent des formes analytiques

simples pour calculer la valeur de la dette et des actions. Leur recherche ainsi que celle d'Anderson et Sundaresan (1996) contribuent à la littérature par l'examen de l'effet, sur la valeur de la dette, de l'intégration des créanciers de la firme dans les décisions stratégiques de service de la dette.

Ericson et Reneby (1998) appliquent l'idée de la barrière pour obtenir des solutions analytiques pour l'évaluation des actifs de la firme. L'idée principale derrière leur approche est qu'un actif d'une firme peut être considéré comme un portefeuille de trois actifs : une option *down and out*, une option binaire *down and out* et une réclamation unitaire *down and in*. Chacun de ces trois réclamations ayant des formules simples d'évaluation, permettent l'évaluation d'une dette à durée finie. Cependant, leur approche impose certaines hypothèses simplificatrices telles qu'un taux d'intérêt constant et une volatilité des actifs constante .

François et Morellec (2003) examinent l'impact des procédures de faillite aux États-Unis sur l'évaluation des actifs corporatifs et les décisions de structure de capital. Ils constatent que la possibilité de renégociation des contrats de dette augmente les écarts de crédit de la dette corporative mais ils ont un impact ambigu sur le choix du levier financier.

D'autres auteurs ont cherché d'autres extensions. Par exemple, Schönbucher (1996) et Zhou (1997), ont introduit un processus de diffusion avec saut pour la modélisation de la valeur de la firme. Ces modèles ont résolu en partie le problème des faibles écart de crédit générés par les modèles indiqués ci-haut.

Le principal avantage de ces modèles est leur caractère intuitif. La dette d'une compagnie est évaluée à partir de ces fondamentaux permettant d'étudier d'autres problèmes de finance corporative. Ces modèles portent une faiblesse majeure se matérialisant dans la difficulté de modélisation de la valeur de la firme. De plus, comme on l'a déjà mentionné, les écarts de crédit implicites à court terme sont faibles par rapport à ceux observés sur le marché (Duffie et Lando (2000)).

2.1.2 Approche réduite

Ces modèles ont émergé pour remédier à l'applicabilité limitée des modèles structurels. Dans ces modèles, une intensité de défaut risque neutre (appelée aussi un taux de hasard) est inférée à partir des données de marché tels que les écarts de crédit ou la fréquence de changement de cotation de crédit. Ceci permet de modéliser le temps de défaut comme le temps de premier saut d'un processus de Poisson avec une intensité de défaut aléatoire (connu sous l'appellation "processus de Cox").

Ces modèles ont été premièrement développés par Jarrow et Turnbull (1995). Ces auteurs considèrent que le défaut est engendré par un processus de Poisson homogène, c'est-à-dire avec une intensité constante.

Ceci a été ensuite développé par Madan et Unal (1998) qui considèrent que l'intensité de défaut suit un certain processus stochastique et le paiement en cas de défaut est inconnu à l'avance et est une variable aléatoire.

Duffie et Singleton (1999) poursuivent une approche semblable à celle de Jarrow-Turnbull. Ils traitent le défaut comme un événement imprévisible régi par un processus de taux de hasard. Leur approche est distinguée par la paramétrisation des pertes en cas de défaut considérées comme une réduction partielle de la valeur marchande à la date de défaut. Le caractère attrayant de ce modèle est que la valeur de la dette peut être considérée comme si elle était sans risque de défaut et ce en remplaçant le taux d'intérêt court par un taux ajusté par défaut :

$$R_t = r_t + h_t L_t$$

avec h_t le taux de hasard (ou la probabilité de défaut) et L_t est la fraction exprimant la perte anticipée de la valeur de marché. La valeur actuelle d'un actif avec risque de défaut est alors donnée par :

$$V_0 = E_0^Q \left[\exp \left(\int_0^T -R_t dt \right) X \right].$$

Actualisant au taux court R_t en tenant compte de la probabilité et les temps de réalisation du défaut ainsi que l'effet de la perte en cas de défaut. L'avantage de cette méthode est que le taux moyen de perte ($h_t L_t$) peut être considéré comme exogène. Les modèles standards de structure à terme sont applicables et ce en paramétrisant R_t au lieu de r_t . Par exogène, ils signifient que ni h_t ni L_t ne dépendent de la valeur de la firme. Cette hypothèse n'est, cependant, pas empiriquement toujours vraie.

Dai et Singleton (2000) et Duffee (1999) considèrent une grande variété

des structures à terme qui peuvent être utilisées dans le cadre de Duffie-Singleton. Collin-Dufresne et Solnik (2001) adoptent un cadre semblable pour modéliser le risque de défaut inclus dans la structure à terme des taux swap et expliquant l'écart entre les taux swap et les taux Libor.

D'autres modèles à base de transition de cotation de crédit ont été proposés. Un des premiers travaux dans ce sens, a été celui de Jarrow, Lando et Turnbull (1997). Ils modélisent la dynamique de la cotation de crédit par une chaîne de Markov, sans permettre une dynamique stochastique de l'écart de crédit.

Lando (1998) a ensuite amélioré ce modèle, en permettant d'avoir un écart de crédit stochastique, et en incorporant un coefficient stochastique devant le générateur de matrice de transition. Malgré l'obtention d'un certain aspect réaliste de l'écart de crédit, les dynamiques des écarts des différentes classes de crédit sont les mêmes puisqu'elles sont générées par le même coefficient aléatoire.

Une approche différente pour incorporer une dynamique stochastique dans les écarts de crédit à été proposée par Das et Tufano (1996). Leur approche consiste à incorporer un taux de recouvrement stochastique. Dans cette approche, quoique l'on peut générer des écart de crédit stochastique à l'intérieur de chaque classe de cotation, l'intensité de défaut demeure constante.

2.2 Modèles de risque de crédit de portefeuille

Plusieurs modèles étudiant le risque de crédit des portefeuilles de prêts ou d'obligations ont été proposés. Les premiers modèles ont été proposés par des institutions financières tels que CreditMetrics, KMV et CreditRisk⁺. On peut se référer à l'excellent article de Crouhy, Galai et Mark (2000) pour une analyse comparative des différents modèles de risque de crédit.

D'autres modèles proposant une généralisation au cas multidimensionnel, des modèles unidimensionnels structurels ou réduits, ont été développés dans le milieu académique. Les deux prochaines sections présentent un survol de ces différents modèles. La troisième section donne un aperçu sur les principales études empiriques réalisées dans ce domaine.

2.2.1 Modèles commerciaux de risque de crédit

On expose dans cette section, à titre indicatif, les trois principaux modèles commerciaux utilisés par les institutions financières dans la gestion de leur exposition au risque de crédit dans leur portefeuille de prêts ou d'obligations.

CreditMetrics

L'approche CreditMetrics est basée sur l'estimation de la distribution à terme du changement de la valeur du portefeuille de prêts ou d'obligations dans un horizon de temps donné. Trois étapes sont nécessaires pour l'implan-

tation du modèle CreditMetrics.

- Spécification d'un système de cotation avec des probabilités de migration d'une certaine qualité de crédit vers une autre dans un horizon de temps donné. Les matrices de transition peuvent être basées sur un système de cotation publiques tel que Moody's ou Standard and Poor's ou tout autre système de cotation interne.
- Spécification de l'horizon du risque de crédit. Généralement c'est 1 an.
- Détermination des écarts de crédit pour chaque classe de crédit.

Pour évaluer le risque de crédit d'un portefeuille, les corrélations de défaut doivent être estimées. Par simplicité, CreditMetrics utilise la corrélation des rendements des actions comme valeurs de remplacement pour estimer la corrélation entre les valeurs des actifs (non observables) des firmes émettrices. Le modèle de Merton (1974) est utilisé pour déterminer la distribution de défaut et a été prolongé pour inclure les changements de cotation.

L'approche de CreditMetrics comporte plusieurs limites.

- Le modèle tient uniquement compte du risque de crédit. La structure à terme des taux d'intérêt sans risque est fixe. D'autre part, la corrélation

entre risque de marché (risque de taux) et risque de crédit est omise.

- Le modèle utilise des matrices de transition dans lesquelles les probabilités de défaut sont des moyennes historiques. Ces matrices sont supposés constantes dans le temps. Ceci est non conforme avec la réalité puisque les probabilités de défaut changent dans le temps et dépendent de certains variables macro-économiques, e.g. Wilson (1997) et Altman (1993).
- Les probabilités de migration supposent que toutes les firmes ont les mêmes probabilités de défaut à l'intérieur de chaque classe de crédit. En pratique le risque de défaut d'une firme peut varier alors qu'un changement de cotation n'est pas encore réalisé.

KMV

Par un exercice de simulation, KMV a montré que la moyenne historique de taux de défaut et les probabilités de transition peuvent dévier significativement des taux réels. KMV a aussi démontré que les taux de défaut peut varier substantiellement dans une même classe de crédit et l'écart de probabilité de défaut peut être large.

Pour compenser les limites du modèle CreditMetrics, KMV propose un modèle dans lequel elle dérive une estimation de la fréquence de défaut (EDF) ou la probabilité de défaut pour chaque émetteur, en se basant sur le modèle

de Merton (1974).

La probabilité de défaut est une fonction de la structure de capital de la firme, la volatilité du rendement des actifs ainsi que de leur valeur actuelle. Le calcul des EDF est spécifique pour chaque firme et peut être conjugué à n'importe quel système de cotation pour dériver la cote de crédit de chaque émetteur.

Les trois étapes pour l'estimation des EDF sont :

- Estimation de la valeur de marché et la volatilité des actifs de la firme.
- Calcul de la distance de défaut (DD) : C'est la différence entre la valeur espérée des actifs moins le point de défaut, définie comme la somme des dettes à court terme et la moitié des dettes à long terme, divisée par la volatilité des actifs.
- Dériver les probabilités de défaut correspondant à la distance de défaut calculée. Par exemple, $DD=4$ correspond à une EDF égale à 40 points de base.
- Une cotation est accordée à l'obligation ou à l'obligataire selon la valeur de son EDF.

Pour analyser le risque de crédit dans un portefeuille d'obligation, KMV calcule les corrélations de défaut à partir de corrélation des rendements des actifs en utilisant un modèle à plusieurs facteurs.

Malgré les solutions que le modèle KMV proposent aux limites du modèle CreditMetrics, plusieurs autres inconvénients ont été constatés.

- Tout comme CreditMetrics la structure à terme de taux d'intérêt est supposée constante. La corrélation entre risque de marché et risque de crédit est omise.
- Dans la dérivation des EDF à partir des DD, KMV utilise des données historiques de défaut. Ceci suppose implicitement la stationnarité de probabilités de défaut alors que d'après les travaux de Wilson (1998) et Altman (1993), celles-ci dépendent du cycle économique.

CreditRisk⁺

CreditRisk⁺ est une approche actuarielle pour la dérivation de la distribution de perte dans un portefeuille d'obligations ou de prêts. Contrairement à l'approche de KMV, le défaut n'est pas relié à la structure de capital de la firme. Aucune hypothèse n'est faite sur la cause du défaut.

Dans ce modèle, la distribution de nombre de défaut durant une période donnée est représentée par une distribution de Poisson. Mais il s'est avéré

que cette distribution sous-estime les probabilités de défaut et ce parce que la moyenne de défaut n'est pas constante ; elle change selon le cycle économique. Pour cela, CreditRisk⁺ ajoute une autre hypothèse supposant que la moyenne de défaut est elle même stochastique.

Voici les trois étapes pour implanter le modèle de CreditRisk⁺ :

- Estimation de la fréquence des événements de défaut.
- Estimation de la sévérité des pertes en cas de défaut.
- Estimation de la distribution de la perte de défaut dans un portefeuille.

L'approche de CreditRisk⁺ permet d'avoir des formes analytiques des probabilités de perte dans un portefeuille d'obligations ou de prêts. Ceci rend le modèle très attrayant de point de vue computationnel. D'autre part, la contribution marginale au risque de crédit par un obligataire est facilement estimée.

Ce modèle comporte les mêmes limites que CreditMetrics et KMV, en supposant qu'il y a aucune relation entre risque de crédit et risque de marché, le modèle supposant que le taux d'intérêt est déterministe. De plus, CreditRisk⁺ ne modélise que le défaut. Il ignore le "risque de migration". L'exposition à un émetteur est fixe et ne varie pas selon le changement futurs de sa qualité

de crédit. Finalement, d'ailleurs comme CreditMetrics et KMV, CreditRisk⁺ n'est pas satisfaisant pour traiter les produit non linéaires comme les options ou les swaps.

2.2.2 Modélisation de la dépendance de défaut dans un portefeuille de crédit

L'évaluation de la corrélation de défaut et les probabilités de défauts multiples sont des questions importantes, pour l'analyse de crédit en particulier, et pour une meilleure gestion de risque en général, dans une institution financière. Pas contre, celles-ci sont difficiles à estimer, notamment parce que les corrélations de défaut ne sont pas observables.

Plusieurs auteurs ont analysé la question. Leurs travaux de recherche sont applicables pour l'évaluation des dérivés de crédit sur plusieurs noms (*First-to-default swap*), pour l'analyse du cotation des CDO ("*Collateralized Debt obligations*"), CBOs ("*Collateralized Bond Obligations*") ou pour la tarification des contrats dérivés impliquant une corrélation entre la dynamique de l'actif sous-jacent et celle de la contrepartie.

Approche structurelle

Deux travaux importants ont essayé d'incorporer la corrélation entre le risque de défaut en utilisant l'approche structurelle. Zhou (1997) trouve des formules analytiques pour les corrélations de défaut et les distributions de

probabilité de défaut, dans le cas bidimensionnel. Dans son modèle, il suppose que les actifs des firmes suivent des mouvements browniens géométriques corrélés. Pour l'estimation des paramètres de son modèle, l'auteur utilise la même hypothèse que KMV, en supposant que le point de défaut est égal à la dette à court terme + 50% (approximativement) des dettes à long terme.

Ce modèle comporte l'avantage de la simplicité. Il est intuitif et computationnellement puissant (formule analytique). Son inconvénient, à part celui de tous les modèles structurels, est qu'il suppose implicitement une structure de dépendance normale (à travers le coefficient de corrélation linéaire entre les browniens). Plusieurs recherches ont montré que ces modèles sous-estiment les probabilités de défaut jointes et ne permettent pas de tenir compte de certains événements de défaut extrêmes.

Hull et White (2000) ont proposé un modèle structurel tenant compte de la corrélation de défaut. Le défaut est déclenché selon une barrière dépendante de temps et la dépendance de défaut est introduite à travers la corrélation des processus de la valeur de la firme. Ce modèle a été critiqué pour trois raisons : la première est qu'il n'est pas clair que ce modèle reproduit une structure de dépendance gaussienne des temps de défaut, à cause de l'existence de la barrière. Deuxièmement, le mécanisme de calibration est computationnellement coûteux et instable. Troisièmement, l'implantation numérique est lente puisque la trajectoire entière de la valeur de la firme doit être simulée.

Approche réduite

Dans le cadre des modèles basés sur l'intensité de défaut, deux approches ont été suivies pour incorporer la corrélation de défaut. La première et la plus simple est d'introduire une corrélation dans la dynamique de l'intensité de défaut. Cette approche a été utilisée dans les modèles commerciaux (CreditRisk⁺) ainsi que pour l'évaluation des CDO, voir par exemple Duffie et Garleanu (2001).

Cette approche souffre de plusieurs limites. Les corrélations de défaut réalisées sont assez faibles comparées aux corrélations de défaut empiriques. De plus il est difficile avec cette modélisation de dériver et d'analyser la structure de dépendance de défaut.

Cette approche a été améliorée avec une modélisation plus réaliste de la corrélation de défaut avec le modèle d'infection de défaut proposé par Davis et Lo (2000) et ensuite développé par Jarrow et Yu (2000). Dans ces modèles, les intensités de défaut font un saut vers le haut avec une quantité discrète dans le cas d'une crise de crédit.

Un des inconvénients de ce modèle est la difficulté d'estimation du facteur de saut des intensités de défaut et la calibration du modèle sur les observations historiques des fréquences de défaut. Néanmoins, ce modèle est plus réaliste que celui que Duffie et Singleton (2000), présenté dans le paragraphe suivant.

La deuxième approche est introduite par Duffie et Singleton (2000) et

développée par Kijima (2000). Pour atteindre une plus forte dépendance de défaut, un certain processus est introduit pour déclencher le défaut joint au même moment. Quoique ce modèle peut atteindre des corrélations de défaut plus élevés que ceux proposés dans la première approche, il souffre de la nécessité de spécifier l'intensité pour tout les événements de défauts joints possibles, et ce nombre augmente exponentiellement avec le nombre d'émetteurs.

D'autre part, il n'est pas réaliste de supposer que le défaut se réalise exactement au même moment, surtout pour l'évaluation des CDO. En plus la notion d'infection est exclue dans ces modèles, puisqu'en cas de défaut d'un émetteur, l'écart de crédit des autres ne change pas. Ceci n'est pas conforme avec la réalité.

Modélisation de la dépendance de défaut par les copules

L'analyse de la dépendance entre les risques de défaut consiste à estimer la structure de dépendance entre les différentes probabilités de défaut marginales (probabilités de défaut d'un seul émetteur). Ceci revient à estimer la distribution de défaut multidimensionnelle. Cette dernière estimation n'est pas facile et peut présenter quelques inconvénients à savoir : pour différentes distributions marginales, une différente distribution jointe doit être estimée. D'autre part, l'estimation de cette distribution dans le cas où les marginaux ne sont pas normaux n'est pas claire.

Les copules nous donnent un moyen d'estimation de la dépendance sans

modéliser les distributions marginales. Une copule est une fonction de distribution multidimensionnelle définie dans un cube unitaire, et liant les fonctions de distributions marginales. Elle est utile pour l'analyse de la structure de dépendance de plusieurs vecteurs aléatoires. Elle présente un avantage principal consistant à séparer les distributions marginales et la structure de dépendance.

Les copules ont été utilisées dans plusieurs domaines économiques. Utilisées en statistique depuis assez longtemps, elles ont été introduites en actuariat pour modéliser les distributions de mortalité jointes dans un groupe, voir par exemple l'article de Frees et Valdez (1998). Ensuite, les copules ont été utilisées dans d'autres domaines, pour modéliser la structure de dépendance de plusieurs séries de données pour fin de gestion de risque (risque de marché, risque de crédit et risque opérationnel).

Ici on présentera un aperçu de l'utilisation des copules dans la modélisation de la dépendance de défaut. Le lecteur intéressé par l'application des copules en finance peut se référer à Embrechts, McNeil et Straumann (2002).

En risque de crédit, les copules permettent d'analyser la structure de dépendance entre les différents risques de défaut sans avoir à se préoccuper du modèle supposé pour les risques marginaux.

Li (2000) a traité le problème de corrélation de défaut en modélisant la corrélation entre les temps de survie et ce qu'il appelle "le temps-jusqu'au-

défaut” (*time to default*), en utilisant les copules de survie (survival copulas) pour définir la fonction de survie jointe. La calibration des paramètres de quelques modèles connus a été étudiée par l’auteur. Il montre que la modèle CreditMetrics utilise implicitement la copule normale dans la formule de corrélation de défaut.

D’autres auteurs comme Schönbucher et Schubert (2001), Giescke (2001, 2002), Jouanine et al.(2001) ont proposé d’autres modèles de risque de défaut multidimensionnels utilisant les copules pour modéliser la structure de dépendance. Contrairement à Li (2000), la dynamique marginale de défaut est définie.

Giescke (2001) a proposé un modèle structurel incorporant une structure de dépendance de défaut dans lequel il suppose que les caractéristiques de défaut de l’émetteur ne sont pas totalement transparentes pour l’investisseur. Dans ce modèle l’auteur discrimine deux sources de dépendance : la première tenant compte de la santé financière de toutes les compagnies et ce à travers des facteurs économiques et qu’il appelle “macro-corrélation”. Une deuxième relation de “micro-corrélation” due aux relations de liaison comme celle des succursales-parent ou des compagnies de holding de capital. Les copules de Clayton et de Gumbel ont été proposées.

En 2002, le même auteur propose un modèle réduit de dépendance de défaut. Dans ce modèle, les temps d’arrivés au défaut sont modélisés par une distribution exponentielle jointe. La modélisation de la dépendance est faite à travers la copule exponentielle (appelée aussi copule de Marshall-Olkin). A part sa simplicité et sa tractabilité (les résultats sont présentés dans des formes fermées), ce modèle contient plusieurs paramètres dont l’estimation

peut s'avérer difficile. D'autre part, le modèle suppose implicitement que la structure à terme des écarts de crédit implicite est constante alors qu'il est connu en pratique que l'écart de crédit varie substantiellement dans le temps.

Schönbucher et Schubert (2001) ont incorporé la dynamique de dépendance dans un modèle à base d'intensité de défaut. Des structures de dépendance arbitraires ont été proposées et les résultats sont appliqués à quelques copules archimédiennes (Clayton et Gumbel). Les auteurs dérivent la dynamique de la probabilité de survie ainsi que celle de l'écart de crédit. Le modèle permet, en cas de défaut d'une obligation, que l'écart de crédit des autres obligations augmentent en cas d'une corrélation positive.

Bouyé et al. (2001) ont utilisé la même approche que celle de Giescke et Schönbucher en modélisant la corrélation de défaut par les copules. Deux approches ont été proposées : la première modélise la fonction de survie jointe directement par une copule de survie de temps de défaut. La deuxième utilise les copules pour corréliser des marges exponentielles. Les auteurs appliquent la dernière approche pour l'évaluation des swap du premier en défaut ("*first to default swap*"). Pour la calibration des paramètres, les auteurs proposent une méthode pratique basée sur "*Moody's Diversity Score*" ; une technique utilisée par Moody's pour affecter des cotations aux CDO ("*Collateralized Debt Obligations*").

2.2.3 Études empiriques

Dû à la non disponibilité de données sur le risque de crédit, les études empiriques sont rares. Dans ce qui suit on présentera celles qu'on a jugé les plus importantes.

Eurturk (2000) a fait une investigation étudiant la corrélation de défaut parmi les émissions qualifiées de “Investment and Poors). L’auteur confond les cotations des dettes à court terme et celles à long terme. Sa méthodologie consiste à estimer la distribution de défaut en observant le nombre de défaut dans des intervalles de temps donnés (45, 90 et 270 jours) ainsi que leurs fréquences. Ces probabilités sont comparées à celles données par la distribution binomiale qui suppose une corrélation de défaut nulle. L’auteur conclut qu’il n’y a aucune évidence de corrélation de défaut parmi les émissions “Investment Grade”, dans des intervalles de temps court (maximum 1 an). Ceci supporte l’hypothèse de corrélation nulle avancée en pratique lors de l’évaluations des CDO.

Hamilton, James et Webber (2002) ont proposé un modèle à base de cotation. Dans ce modèle, la transition de cotation est modélisée à travers une variable q comprise entre 0 et 1 représentant la qualité de crédit d’une obligation. Pour tenir compte de “l’effet surprise” du défaut, cette variable est modélisée par un processus stochastique contenant une composante de saut qui peut la ramener à tout instant à 1, correspondant à la situation de défaut. La cotation d’une obligation est allouée selon la qualité de crédit q . Les auteurs établissent une relation entre le cotation actuel et la qualité de

crédit futurs permettant de calculer les matrices de transition implicites.

Ce modèle est généralisé pour modéliser la qualité de crédit d'un portefeuille d'obligations. La fonction de copule est utilisée pour modéliser la structure de dépendance entre les distributions marginales des incréments des différentes qualités de crédit des obligations composant le portefeuille. La copule empirique est enfin calibrée à la copule de Ali-Mikhail-Haq. Les auteurs appliquent leurs modèles pour la tarification des dérivés de crédit. Une comparaison entre les différents prix selon la structure de dépendance est aussi faite.

Das et Geng (2002) ont réalisé une étude empirique, première du genre, qui consistait à examiner les processus stochastiques empiriques joints du risque du défaut dans la période 1987-2000. La fonction de copule est utilisée pour séparer les distributions marginales de la distribution jointe. Les auteurs considèrent deux modèles pour modéliser l'intensité de défaut dans chaque classe de cotation : le premier consiste à modéliser des chocs normaux avec une composante de saut, le second consiste à permettre un "changement de régime". Plusieurs structures de dépendance ont été testées à travers les copules suivantes : normale, Gumbel, Clayton et Student. Les différents modèles sont comparés sur la base de trois critères à savoir : le niveau de corrélation, l'asymétrie de la corrélation et la dépendance des queues.

Les auteurs concluent que le modèle de changement de régime permet une meilleure représentation des propriétés des corrélations de défaut. Les auteurs trouvent que la structure de dépendance donnée par la copule Clayton combine mieux avec des marges modélisées par une distribution expo-

nentielle jointe. Et si les marges sont considérées normales, la copule normale est préférée. Ce résultat est surprenant, voire suspect, du fait qu'il contredit le principal avantage de l'utilisation des copules à savoir la séparation entre les distributions marginales et leur structure de dépendance.

Chapitre 3

Méthodologie

Comme indiqué précédemment, l'objectif de cette étude est de présenter une méthodologie consistante d'évaluation des dérivés de crédit écrits sur plusieurs noms. Nous intégrons la dépendance entre les risques de défaut pour tenir compte du risque de concentration sous-jacent, dans le portefeuille obligataire qu'on voulait couvrir soit partiellement soit parfaitement par le dérivés de crédit en question (Swap de crédit).

Notre méthodologie est structurée en quatre étapes successives :

1. Analyse du risque de crédit de chaque nom composant notre portefeuille et ce par l'estimation des probabilités de défaut et le temps de défaut correspondant. Nous optons dans notre étude pour un modèle structurel, celui utilisé par CreditMetrics pour l'estimation des cotes CreditGrades. Nous exposons le modèle dans la section 3.1.

2. Analyse de la dépendance des différents risques de défaut des noms composant le portefeuille obligataire. Nous utiliserons les copules pour modéliser cette dépendance. Les copules sont un outil permettant d'analyser la dépendance entre plusieurs variables aléatoires, sans se préoccuper de leurs distributions marginales. La section 3.2 donnera une brève introduction à la notion des copules et exposera les fonctions utilisées dans la modélisation de la dépendance entre plusieurs phénomènes financiers et le risque de défaut en particulier.
3. Simulation des temps de défaut corrélés selon la structure de dépendance trouvée à l'étape précédente, en tenant compte de la fonction de probabilité de défaut donnée par l'analyse à l'étape 1.
4. Évaluation des produits dérivés sur le crédit. Les swaps du premier et second en défaut seront évalués par simulation Monte Carlo utilisant les temps de défaut trouvés à l'étape 3. Une comparaison des prix de produits dérivés sur le crédit selon plusieurs structures de dépendance sera aussi faite.

3.1 Modélisation du risque du crédit

Dans ce mémoire, un modèle de risque de crédit structurel est considéré. Le modèle exposé ci-après a été utilisé par RiskMetrics Group pour estimer les probabilités de défaut nécessaires dans le calcul de l'indice CreditGrades commercialisé dans l'industrie financière.

Dans ce modèle, le défaut se réalise dès que le prix des actifs dépasse un

certain seuil fixé à l'avance. Le modèle est une variante du modèle de Saa-Requejo et Santa-Clara (1999) dans lequel la barrière de défaut est stochastique. Cette hypothèse trouve son fondement dans le fait qu'une entreprise au cours de sa vie aura un taux d'endettement non constant. Ce dernier est un déterminant principal de la probabilité de défaut et du seuil à partir duquel l'entreprise sera en cessation de paiement et sera en défaut.

La variabilité des taux de recouvrement est aussi soutenue par plusieurs études empiriques, dont notamment celle de Hu et Lawrence (2000). Ces études ont montré une grande variabilité des taux de recouvrement. En effet, ce dernier peut être affecté par plusieurs facteurs dont la source du défaut telles que les difficultés financières ou opérationnelles.

3.1.1 Estimation de la probabilité de défaut marginale

L'hypothèse de base du modèle est que les actifs d'une firme V suit un processus stochastique et que le défaut se réalise si V traverse la barrière de défaut. Cette dernière peut être considérée comme la valeur de recouvrement en cas de défaut. C'est la quantité $L \cdot D$ avec L le taux de recouvrement considéré constant et D la dette par action de l'entreprise variant avec le temps. Aucun processus stochastique n'est spécifié pour cette dernière variable.

La valeur des actifs est supposée suivre un mouvement brownien géométrique donné par

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW_t,$$

où μ est la dérive de la valeur des actifs, σ est la volatilité des actifs et $(W_s)_{s \geq 10}$ est un mouvement brownien standard.

Le taux de recouvrement L est supposé suivre une distribution log-normale d'espérance \bar{L} . On suppose que la variance de $\log(L)$ est λ^2 . Spécifiquement, on a

$$\begin{aligned}\bar{L} &= E(L), \\ \lambda^2 &= \text{Var}(\log L)\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$LD = \bar{L}De^{\lambda Z - \lambda^2/2},$$

où Z est une variable aléatoire normale standard. On suppose que Z est indépendante de mouvement brownien W . Avec la variabilité de Z , le modèle capture une certaine variabilité de la dette par action de la firme. Dans ce cas, avec un taux de recouvrement incertain, la barrière de défaut peut être traversée aléatoirement, donnant un modèle semblable aux modèles de diffusion avec saut.

Pour une valeur de firme initiale V_0 , le défaut ne se réalisera pas tant que

$$V_0 e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2} > \bar{L}De^{\lambda Z - \lambda^2/2}$$

Dans cette dernière inégalité, la dérive μ de la valeur des actifs est considérée nulle par les auteurs du document technique de *CredeitGrades*. cette hypothèse est justifié dans la section 3.2.1.

Soit τ le temps du défaut, et soit $P(t)$ la probabilité de survie, c'est-à-dire,

$$P(t) = P(\tau > t) = P(V_s > LD, \forall s \leq t).$$

Soit ϕ la fonction de répartition d'une loi normale standard, et soit $\Phi_2(x, y; r)$ la fonction de répartition d'une normale bivariée, de marges centrées réduites, et de corrélation r . On a alors

Proposition 3.1.1

$$P(t) = \Phi_2\left(\frac{\log(d)}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}, -\frac{A_t}{2} + \frac{\log(d)}{A_t}; \frac{\lambda}{A_t}\right) - d\Phi_2\left(\frac{\log(d)}{\lambda} + \frac{\lambda}{2}, -\frac{A_t}{2} - \frac{\log(d)}{A_t}; -\frac{\lambda}{A_t}\right).$$

En particulier,

$$P(0) = P(LD < V_0) = \Phi\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\log d}{\lambda}\right),$$

et la probabilité de défaut est donc

$$P_d(t) = P(\tau \leq t | \tau > 0) = 1 - \frac{P(t)}{P(0)}. \quad (3.1)$$

où

$$d = \frac{V_0}{LD} e^{\lambda^2},$$

$$A_t^2 = \sigma^2 t + \lambda^2,$$

Remarque 3.1.1 *La formule pour $P(t)$ corrige une erreur dans le document technique de CreditGrades. La démonstration se trouve dans l'appendice A.*

3.1.2 Paramètres du modèle de probabilité de défaut

Pour estimer la probabilité de défaut, il est important de relier la valeur initiale et la volatilité des actifs à des variables observables sur le marché.

Soit S le prix de l'action de la firme et σ_s sa volatilité. En général, la volatilité de l'action et celle des actifs d'une firme sont reliées par la relation suivante

$$\sigma_s = \sigma \frac{V}{S} \frac{\partial S}{\partial V}.$$

On peut définir la distance de défaut η par le nombre d'écart type séparant le prix de l'équité de la firme au seuil de défaut, par

$$\eta = \frac{1}{\sigma} \log \left(\frac{V}{LD} \right) = \frac{1}{\sigma_s} \frac{V}{S} \frac{\partial S}{\partial V} \log \left(\frac{V}{LD} \right).$$

η doit vérifier deux conditions de borne. La première est déterminée pour une valeur de V proche du seuil de défaut LD . On suppose que plus on s'approche du défaut ($S \ll LD$), plus la valeur des actifs est proche de zéro. La valeur de la firme est alors donnée par

$$V|_{S=0} = LD$$

et pour S petit, par développant de Taylor autour de $S = 0$

$$V \approx L \cdot D + \frac{\partial V}{\partial S} S.$$

Ces équations donnent une distance de défaut

$$\eta \approx 1/\sigma_s.$$

La deuxième condition aux bornes est celle qui doit être vérifiée quand le prix de l'action est loin du seuil de défaut ($S \gg LD$). Ici, on suppose que la valeur des actifs et celle des actions augmentent avec le même taux (S/V tend alors vers 1). Ceci nous permet d'approximer η par

$$\eta \simeq \frac{1}{\sigma_s} \log \left(\frac{V}{LD} \right).$$

Les valeurs de V et de η permettant de vérifier simultanément ces conditions de bornes sont

$$V = S + LD,$$

et

$$\eta = \frac{S + LD}{\sigma_s S} \log \left(\frac{S + LD}{LD} \right).$$

Ceci nous permet de poser, pour une valeur initiale V_0 à la date $t = 0$,

$$V_0 = S_0 + \bar{L}D,$$

avec S_0 est la valeur initiale de l'action de la firme. Aussi, on a

$$\sigma = \sigma_s \frac{S_0}{S_0 + \bar{L}D}.$$

Dans la dérivation de la formule de probabilité de défaut $P(t)$, la dérive de la valeur des actifs est supposée égale à zéro. En fait, dans ce modèle, la dérive de la valeur des actifs relative à la valeur de la barrière est plus importante que celle de la valeur des actifs. Les auteurs du modèle de *CreditGrades* supposent que les firmes auront tendance à garder un niveau de levier financier stable soit par l'émission de nouvelles dette, soit par le versement de dividende. Et étant donnée que

$$V = S + LD$$

et pour éviter toute opportunité d'arbitrage, on doit supposer que la dérive de la valeur des actifs et celle des actions sont égales. Ceci donnera obligatoirement une dérive nulle de la valeur des actifs relative à la barrière de défaut.

3.2 Modélisation de la dépendance de défaut

Dès qu'on est concerné par le risque de défaut dans un portefeuille d'obligations, on doit tenir compte du risque de concentration matérialisé par la corrélation entre les différents risque de crédit. Faute de quoi, ce dernier sera sous-estimé et le produit dérivé tarifé sera sous-évalué.

Après une brève introduction sur les copules et leur estimation, nous exposons l'approche utilisée pour l'incorporation de la dynamique de corrélation entre les risques de défaut dans notre modèle. Pour plus de détails concernant ces résultats et autres notions sur les copules, le lecteur peut se référer au livre de Nelsen (1999) ou à celui de Joe (1997).

3.2.1 Rappel sur les copules

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_m) \in R^m$ un vecteur de m variables aléatoires dont la fonction cumulative jointe est

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_m \leq x_m)$$

et la fonction cumulative marginale

$$F_i(x_i) = \Pr(X_i \leq x_i), \quad 1 \leq i \leq m.$$

Une fonction de copule C de F est définie comme la fonction de répartition définie dans $[0, 1]^m$ et telle que $\forall (x_1, x_2, \dots, x_m)$ on a :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)).$$

Une fonction de copule a les caractéristiques suivantes :

1. $C(u_1, u_2, \dots, u_m)$ est non-décroissante par rapport à chacune de ses composantes.
2. $C(u_1, \dots, u_m) = 0$ si $u_i = 0$, pour tout $1 \leq i \leq m$.

Les copules ont trois caractéristiques intéressantes :

1. Pour toute fonction de répartition jointe, il existe une représentation de copule. Si la fonction de répartition jointe est continue, la copule est unique.
2. La copule est invariante sous des transformations croissantes des variables aléatoires.

3. La structure de dépendance modélisée par les copules est la même quelles que soient les fonctions de répartition marginales des variables aléatoires étudiées.

Ces caractéristiques sont les principales raisons de l'utilisation accrue des copules dans l'analyse des phénomènes multivariés en finance. En effet, quel que soit le modèle supposé pour la dynamique des distributions marginales, une seule structure de dépendance existe, si l'on suppose que les distributions marginales sont continues. D'autre part, si les variables aléatoires marginales sous étude sont compliquées à modéliser, des transformations croissantes pourraient faciliter l'étude tout en gardant la même structure de dépendance.

Les copules étendent l'analyse de la dépendance entre les différents phénomènes financiers tel que l'effet de diversification dans un portefeuille d'actif financiers à une échelle plus grande. Par exemple, la corrélation analysée à travers le coefficient de corrélation ρ n'est qu'un cas particulier dans lequel on suppose que les variables aléatoires sous-jacentes suivent des distributions normales et dont la structure de dépendance est donnée par la copule normale exposée plus loin.

À titre d'exemple, si les variables aléatoires sont indépendantes, la dépendance est modélisée par la copule d'indépendance

$$C(u_1, \dots, u_m) = u_1 \cdots u_m = \prod_{k=1}^n u_k$$

Dans la littérature financière plusieurs fonctions de copules ont été utilisées, les principales sont la copule Normale, la copule de Student et les

copules dites archimédiennes, comme la famille de Clayton, de Frank et de Gumbel.

Copule normale

La copule **normale** est définie par

$$C(u_1, \dots, u_m; \rho) = \phi_\rho(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_m)),$$

où

- ρ est une matrice de corrélation, c'est-à-dire une matrice symétrique définie positive dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.
- ϕ_ρ la fonction de répartition de la distribution normale multidimensionnelle standard de matrice de corrélation ρ .

Pour $m = 2$, c'est-à-dire 2 actifs financiers, on a

$$C(u, v) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho_{12}^2)} \exp\left(-\frac{s^2 - 2\rho_{12}st + t^2}{2(1-\rho_{12}^2)}\right) ds dt.$$

Copule de Student

La copule de **Student** est donnée par la fonction

$$C(u_1, u_2, \dots, u_m; \rho, v) = t_{v,\rho}(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2), \dots, t_v^{-1}(u_m)),$$

où

- ρ est une matrice de corrélation.
- $t_{\rho,v}$ la fonction de répartition de la distribution de Student multidimensionnelle standard à v degrés de liberté et de matrice de corrélation ρ .

Pour $m = 2$, on a

$$C(u_1, u_2; \rho, v) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} dx_1 dx_2.$$

Nelsen (1999) donne une importante liste de familles de copules dont la plus importante est la famille des copules archimédiennes auxquelles, par exemple, les copules de Clayton, de Frank et de Gumbel, de plus en plus utilisées en finance, appartiennent.

Les copules appartenant à la classe des copules archimédiennes, introduites par Genest et MacKay (1986), peuvent être écrites sous la forme suivante.

Soit $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty[$ telle que $\phi(1) = 0$, et $(-1)^k \phi^{(k)}(u) = (-1)^k \frac{d^k \phi}{dt^k}(u) > 0$, $\forall k < m$, et ce pour tous $u \in]0, 1[$, alors

$$C(u_1, \dots, u_m) = \begin{cases} \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_m)), & \text{si } \sum_{i=1}^m \phi(u_i) \leq \phi(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

ϕ est appelée fonction génératrice de la copule archimédienne C .

Le tableau 4.3 résume ces trois copules.

Tableau 3.1: Copules, générateurs et paramètre pour les familles de Clayton, Frank, et Gumbel.

Famille	$C_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$	$\phi(\mathbf{t})$	$\theta \in$
Clayton	$\max\left([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}; 0\right)$	$\frac{t^{-\theta}-1}{\theta}$	$[0, \infty[$
Frank	$\frac{1}{\log \theta} \ln\left(1 + \frac{(\theta^u-1)(\theta^v-1)}{(\theta-1)^{2-1}}\right)$	$-\log\left(\frac{1-\theta^t}{1-\theta}\right)$	$[0, \infty[$
Gumbel	$\exp\left(-\left((-\log 1/u)^{1/\theta} + (-\log 1/v)^{1/\theta}\right)^\theta\right)$	$\log^{1/\theta}(1/u)$	$]0, 1]$

3.2.2 Choix de la meilleure structure de dépendance

Les copules permettent de modéliser la dynamique de la dépendance entre plusieurs variables aléatoires. La grande variété des copules permet de les adapter à toute forme de dépendance. La question qui se pose à ce niveau est, quelle est la meilleure structure de dépendance pouvant être adaptée au phénomène étudié? Pour tester les différentes formes de dépendance, deux solutions se présentent.

- Premièrement, on pourrait construire la copule empirique et la comparer aux différentes fonctions de copules théoriques.

On peut estimer facilement la fonction de copule empirique de n réalisations de m variables aléatoires.

Soit $X_i = (X_{1,i}, \dots, X_{m,i})$, $i = 1, \dots, n$, l'ensemble des n observations.

La copule empirique est donnée par

$$\widehat{C}\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \text{card}\{i \mid R_{1,i} \leq k_1, \dots, R_{m,i} \leq k_m\}$$

où $R_{j,i}$ dénote le rang de $X_{j,i}$, parmi $X_{j,1}, \dots, X_{j,n}$, $j = 1, \dots, m$. La dépendance retenue est celle qui assure que C soit la plus proche possible de \widehat{C} .

- La deuxième solution, préconisée par Genest, Quessy et Rémillard (2003), consiste à calculer la fonction de Kendall K définie par

$$K(u) = \Pr [F(X_1, X_2, \dots, X_m) \leq u], \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Cette fonction présente l'avantage d'être de dimension 1. Une présentation graphique facilitera la comparaison des différentes formes de dépendance. D'autre part, Barbe, Genest, Ghoudi et Rémillard (1996), ont montré que dans le cas des copules archimédiennes,

$$K(u) = t + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \frac{\phi^i(t)}{i!} f_{i-1}(t),$$

avec

$$f_i(t) = \left. \frac{d^{i+1}}{ds^{i+1}} \phi^{-1} \right|_{s=\phi(t)},$$

et $\phi(t)$ est la fonction génératrice de la copule.

Pour ce mémoire, on se limitera aux structures de dépendance les plus utilisées en finance, à savoir la copule Gaussienne, celle de Student, de Clayton, de Frank, ainsi que celle de Gumbel. On utilisera aussi la seconde méthode pour la comparaison des différentes structures de dépendance.

3.3 Évaluation des dérivés de crédit : cas du Swap du k -ième en défaut

Une fois que la structure de dépendance entre les risques de défaut est bien définie, il est possible d'évaluer les produits dérivés de crédit écrits sur un portefeuille d'obligations. C'est le cas des Swap du k -ième en défaut.

L'acheteur de la protection contre le défaut du k -ième en défaut payera une prime périodique au vendeur de l'assurance (vendeur du swap) qui, en cas de défaut de la k -ième obligation, payera la valeur de l'obligation (ou la valeur nominale), moins la somme recouverte de l'émetteur de l'obligation.

Les primes sont fixées de telle sorte que la valeur espérée du contrat est nulle. En pratique, si les deux contreparties n'ont pas la même cote de crédit, une somme est avancée par celui qui a la côte de crédit la plus faible.

Prenons un contrat de swap de crédit ayant les caractéristiques suivantes¹ :

- Le contrat commence à la date $t = 0$. La maturité de contrat est $t = T$.
- Le valeur notionnelle du contrat est N dollars.
- Il existe m noms (ou obligations) auxquels, on associe des distributions de temps de défaut $\tau_i, i = 1, \dots, m$.
- La fonction de répartition jointe des temps de défaut est donnée par

$$\Pr [\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_i \leq t_i, \dots, \tau_m < t_m] = F(t_1, \dots, t_m).$$

¹Nous avons gardé les mêmes caractéristiques du contrat de swap de crédit telles que spécifiées dans Madan et Unal (1998).

- La distribution marginale cumulative de τ_i est donnée par par $F_i(t_i)$ pour tous i .

$$F_i(t_i) = F(\infty, \dots, \infty, t_i, \infty, \dots, \infty)$$

- $\tau_{(i)}, i = 1, \dots, m$ est le i -ème temps de défaut avec $\tau_{(1)} < \tau_{(2)} < \dots < \tau_{(m)}$ et m le nombre de compagnie composant le portefeuille.
- Une prime annuelle P est payée périodiquement f fois par année. Le montant PN/f est payé jusqu'à la date $\min(T, \tau_{(k)})$.
- RR est le taux de recouvrement. $RR_{(j)}$ est le taux de recouvrement de la j -ième obligation en défaut. Ce taux peut être déterministe ou stochastique. Dans les deux cas, il doit être estimé séparément.
- a est le pourcentage de la valeur de la prime accrue depuis le dernier paiement.
- Au temps T , si $\tau_{(k)} < T$, l'événement de crédit est réalisé et le vendeur de l'assurance doit payer à l'acheteur $N \cdot (1 - RR_{(k)} - a)$.
- $r(t)$ est le taux d'intérêt continu sans risque.

Sous la mesure risque neutre Q , la valeur de la prime P doit vérifier l'équation

$$E^Q \left[\sum_{i=1}^{f*T} \left(e^{-\int_0^{\frac{i}{f}} r(s)ds} N \frac{P}{f} 1_{\{\tau_{(k)} > \frac{i}{f}\}} \right) - e^{-\int_0^{\tau_{(k)}} r(s)ds} N(1 - RR_{(k)} - a) 1_{\{\tau_{(k)} < T\}} \right] = 0.$$

Le caractère multidimensionnelle de cette équation, rend difficile de trouver une solution analytique. Elle doit être alors résolue par simulation Monte Carlo.

Chapitre 4

Étude empirique

Comme on l'a dit précédemment, nous optons pour un modèle structurel dans lequel le défaut est modélisé à travers la valeur des actifs de l'entreprise. Le modèle considéré nous donne une forme analytique de la probabilité de défaut en fonction du temps et d'autres variables observables sur le marché.

Dans cette section nous effectuons premièrement, l'implantation de ce modèle. Deuxièmement, une estimation de plusieurs formes de dépendance, données par différentes fonctions de copules, ainsi que la dépendance empirique, sont estimées. Le choix de la meilleure forme de dépendance de défaut des noms constituant le portefeuille hypothétique choisi est ensuite effectué. Finalement, les valeurs des contrats de swap du premier et deuxième en défaut sont calculées selon la meilleure structure de dépendance trouvée et comparées aux valeurs données par la structure de dépendance normale et par l'indépendance, qui sont somme toutes les plus utilisées.

4.1 Estimation des probabilités de défaut

Dans cette section, nous exposons notre choix du portefeuille hypothétique sur lequel nous appliquerons notre méthodologie ainsi que les données utilisées pour estimer les probabilités de défaut.

4.1.1 Base de données et estimation des inputs du modèle du risque de crédit

Quatre principales valeurs d'entrée sont nécessaires à l'estimation des probabilités de défaut historique à savoir

- La volatilité des actifs des firmes constituant notre portefeuille. Celle-ci, tel que montré précédemment, est liée à la volatilité des actions par la relation

$$\sigma = \sigma_s \frac{S_0}{S_0 + LD}.$$

Les auteurs du document technique de CreditGrades argumentent à travers une analyse empirique que la volatilité historique sur une fenêtre mobile de 750 jours ou de 1000 jours, est optimale. Dans notre analyse, nous avons considéré la volatilité des actions sur une fenêtre mobile de 1000 jours. Nous avons utilisé les prix historiques des actions tels que donnés dans la base des données *CRSP* pour la période allant du début de l'année 1984, jusqu'à la fin de l'année 2000. Les prix d'action considérées sont ajustés pour tout fractionnement de l'action. Les rendements de ces actions sont utilisés plus tard pour l'estimation de la

dépendance des défauts.

- La dette par action. Ce ratio est calculé à partir des données des états financiers. La dette est composée de toutes les catégories de dettes à savoir la dettes à court terme, la dette à long terme, les obligations convertibles, ainsi que les quasi-dettes tel que les crédit-bails et les actions privilégiées. Voir l’appendice B pour les détails de calcul de la dette par action. Les données des états financiers sont tirés de la base de données *Compustat* de Standard and Poors.
- La moyenne (\bar{L}) et l’écart type (λ) du taux de recouvrement global (L) ont été estimés dans le document technique de CreditGrades et ils sont évalués respectivement à 0.5 et 0.3. Cette estimation est faite en utilisant les données du “*Portfolio Management Data*” et le “*Standard and Poor’s database*”. Ces estimations est une moyenne estimée sur les compagnies appartenant à toutes les industries considérées dans ces bases de données. Ces mêmes estimations pouvant être refaites sur des compagnies appartenant à une industrie particulière. Dans le cadre de ce mémoire, nous avons appliqué ces estimations sur notre portefeuille hypothétique.

Nous avons choisi d’effectuer notre analyse sur un portefeuille hypothétique composé de 10 firmes appartenant au secteur des technologies (informatique et télécommunications). Notre choix des compagnies n’a pas été dicté par aucune condition (e.g. la taille, etc.). Néanmoins, on a choisi 10 noms parmi l’échantillon des compagnies dont le calcul des différents paramètres ne comportait aucun risque d’erreur (e.g. disponibilité de tous les sous-comptes comptables permettant le calcul de la dette par action). Les compagnies

Tableau 4.1: Liste des entreprises constituant le portefeuille.

	ENTREPRISES
1	SUN MICROSYSTEMS INC
2	HEWLETT PACKARD CORP
3	TYCO INTERNATIONAL LTD
4	NORTEL NETWORKS CORP
5	3COM CORP
6	BELLSOUTH CORP
7	INTEL CORP
8	VERIZON COMMUNICATIONS
9	APPLIED MATERIALS INC
10	SPRINT CORP

qui ont été retenues sont énumérées dans le tableau 4.1.

4.1.2 Estimation des probabilités de défaut

Comme cela a été montré dans la section 3.1 la probabilité de survie est donnée par la formule analytique suivante

$$P(t) = \Phi_2 \left(\frac{\log(d)}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}, -\frac{A_t}{2} + \frac{\log(d)}{A_t}; \frac{\lambda}{A_t} \right) - d\Phi_2 \left(\frac{\log(d)}{\lambda} + \frac{\lambda}{2}, -\frac{A_t}{2} - \frac{\log(d)}{A_t}; -\frac{\lambda}{A_t} \right),$$

et elle est exprimée en fonction les paramètres suivants, observables sur le marché :

$$d = \frac{S_0 + \bar{L}D}{\bar{L}D} e^{\lambda^2},$$

et

$$A_t^2 = \left(\sigma_s \frac{S_0}{S_0 + \bar{L}D} \right)^2 t + \lambda^2,$$

où

- S_0 : prix initial de l'action de référence ;
- S : prix de l'action référence ;
- σ_s : volatilité de l'action sous-jacente ;
- D : dette par action ;
- \bar{L} : taux de recouvrement ;
- λ : volatilité (en pourcentage) de la barrière de défaut.

La probabilité de défaut, sachant qu'il n'y a pas de défaut au temps $t = 0$, est

$$P_d(t) = 1 - \frac{P(t)}{P(0)}.$$

Les graphiques des probabilités de défaut historiques sur la période de mars 1984 jusqu'à décembre 2000 (4365 jours), telles qu'elles sont calculées par ce modèle, sont données dans la figure 4.1. Ce sont des probabilités de défaut journalières sur un horizon d'un an. La volatilité est égale à la volatilité mobile sur une période de 4 ans et le ratio de dette par action de chaque firme est calculé trimestriellement et considéré constant tout au long du trimestre.

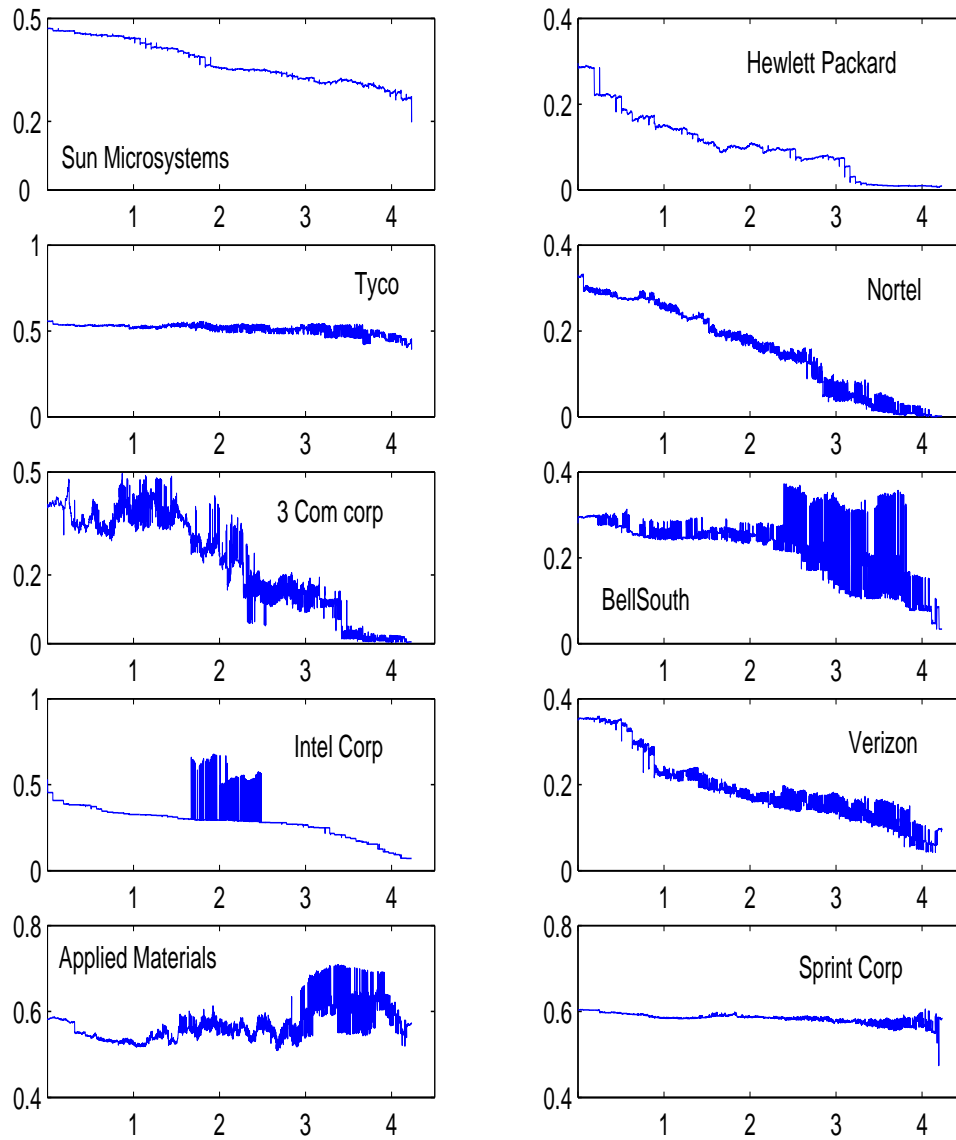


Figure 4.1: Probabilité de défaut journalière pour un horizon d'une année, de mars 1984 à décembre 2000.

4.2 Analyse de la structure de dépendance de défaut

Dans cette section nous procédons à l'analyse de la structure de dépendance du risque de défaut du portefeuille choisi. Cette analyse sera faite en deux parties à savoir l'estimation des différentes fonctions de copules considérées et le choix de la meilleure structure de dépendance.

4.2.1 Estimation des copules

Dans notre méthodologie, on suggère de prendre les rendements comme substituts pour analyser la dépendance entre les défauts. Cette substitution est valable si l'on tient compte d'une des principales caractéristiques des copules, à savoir que ces dernières sont invariantes sous des transformations croissantes des marges. Comme il est plausible de supposer que les temps de défaut sont des fonctions croissantes des rendements, l'utilisation de ceux-ci est donc justifiable comme substituts, car ils auraient alors la même copule.

Les paramètres à estimer diffèrent selon la famille de copules sous étude. Dans les copules archimédiennes pour lesquelles on a opté, à savoir les familles de Clayton, de Frank et de Gumbel, un seul paramètre, dénoté par θ , doit être estimé. Par contre, pour la copule normale, on doit estimer la matrice de corrélation ρ , tandis que la copule de Student nécessite l'estimation de la matrice de corrélation ρ ainsi que le degré de liberté ν .

4.2.2 Estimation pour les copules archimédiennes

Dans ce cas, nous utilisons la méthode de maximum de vraisemblance, telle que suggérée dans Genest, Ghoudi et Rivest (1995), pour l'estimation du paramètre θ dans chacune des copules étudiées. La fonction de vraisemblance est calculée de la façon suivante.

On rappelle qu'une copule archimédienne est définie par

$$C(u_1, u_2, \dots, u_m) = \phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \phi(u_i) \right), \text{ si } \sum_{i=1}^m \phi(u_i) \leq 0, \text{ et } 0 \text{ sinon,}$$

où ϕ est la fonction génératrice de la copule.

On voit alors que la fonction de densité c de la copule archimédienne C , peut être écrite sous la forme

$$c(u_1, u_2, \dots, u_m) = \frac{d^m}{ds^m} \phi^{-1} \Big|_{s=\sum_{i=1}^m \phi(u_i)} \cdot \phi'(u_1) \cdots \phi'(u_m).$$

Si on utilise la fonction f telle que définie dans Barbe, Genest, Ghoudi et Rémillard (1996), par

$$f_{m-1}(\phi^{-1}(s)) = \frac{d^m}{ds^m} \phi^{-1}(s),$$

on obtient

$$\frac{d^m}{ds^m} \phi^{-1} \Big|_{s=\sum_{i=1}^m \phi(u_i)} = f_{m-1}(C(u_1, u_2, \dots, u_m)),$$

et la fonction de densité d'une copule archimédienne peut être écrite sous la forme

$$c(u_1, u_2, \dots, u_m) = f_{m-1}(C(u_1, u_2, \dots, u_m)) \phi'(u_1) \cdots \phi'(u_m).$$

Barbe, Genest, Goudi et Remillard (1996) ont aussi calculé les fonctions f_{m-1} pour les différentes copules sous étude. On trouve alors

- Copule de Clayton dont la fonction génératrice $\phi_\theta(t) = (t^{-\theta} - 1) / \theta$ avec $\theta \geq 0$,

$$f_i(t) = (-1)^{i+1} t^{1+(1+i)\theta} \prod_{j=0}^i (1 + j\theta), \quad i \geq 0.$$

- Copule de Frank dont la fonction génératrice $\phi_\theta(t) = -\log\left(\frac{1-\theta t}{1-\theta}\right)$ avec $0 < \theta \leq \infty$,

$$f_i(t) = p_i(\theta^{-t}) / \log(\theta), \quad i \geq 0,$$

où $p_0 = x - 1$ et $p_i(x) = x(x - 1)$, $p'_{i-1}(x)$ pour $i \geq 1$.

- Copule de Gumbel dont la fonction génératrice $\phi_\theta(t) = \log^{1/\theta}(1/t)$ avec $0 < \theta \leq 1$,

$$f_i(t) = (-1)^{i+1} \theta t \log^{1-(i+1)/\theta}(1/t) p_i\{\log(1/t)\}, \quad i \geq 0$$

avec $p_0 = 1$ et $p_i(x) = \theta x\{p_{i-1}(x) - p'_{i-1}(x)\} + (i + \theta)p_{i-1}(x)$, $i \geq 1$

La fonction de vraisemblance à maximiser est alors définie par

$$V_\theta = \sum_{k=1}^n \log(c(u_{1,k}, u_{2,k}, \dots, u_{m,k})),$$

où n est le nombre d'observations, m le nombre de firmes, et $u_{j,k} = \frac{R_{j,k}}{n+1}$, $R_{j,k}$ étant le rang du rendement $X_{j,k}$ parmi les n rendements de la firme j , $1 \leq j \leq m$.

Tableau 4.2: Estimation du paramètre θ pour les familles de Clayton, Frank et Gumbel.

Famille de copules	$\hat{\theta}$	V
Clayton	0.1900	-1823.3
Frank	0.4428	269.2099
Gumbel	0.8732	-1505.4

Dans cette dernière expression, on suppose implicitement que les rendements sont non corrélés dans le temps. Une analyse plus approfondie pourrait analyser la forme de dépendance dans le temps par les copules et en tenir compte dans le modèle. Une autre possibilité consiste à supposer que les rendements suivent un certain modèle (de type GARCH par exemple) et analyser la dépendance des résidus, qui sont indépendants dans le temps, par la même méthodologie présentée en haut. Toutefois, comme on ne s'intéresse pas à l'erreur d'estimation des paramètres, l'hypothèse d'indépendance n'est pas absolument nécessaire.

Dans le cas de notre portefeuille composé de $m = 10$ firmes, les résultats obtenus sont indiqués dans le tableau 4.2. Ces valeurs sont estimées à l'aide de l'algorithme d'optimisation donnée par la fonction "*fminsearch*" de Matlab.

Les figures 4.2, 4.3 et 4.4 tracent respectivement les fonctions de vraisemblance des familles de copules de Clayton, Frank et Gumbel.

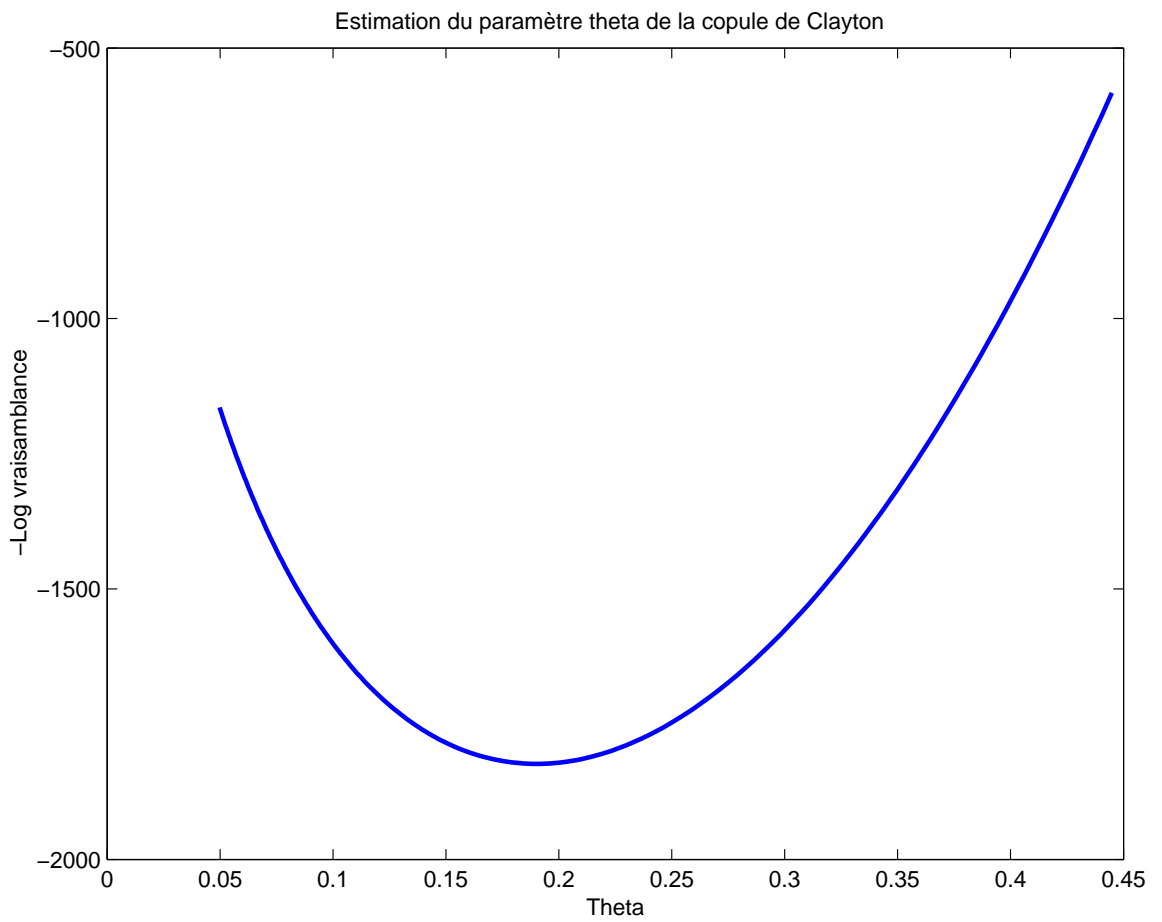


Figure 4.2: $-\log$ -vraisemblance pour l'estimation du paramètre θ de la copule de Clayton.

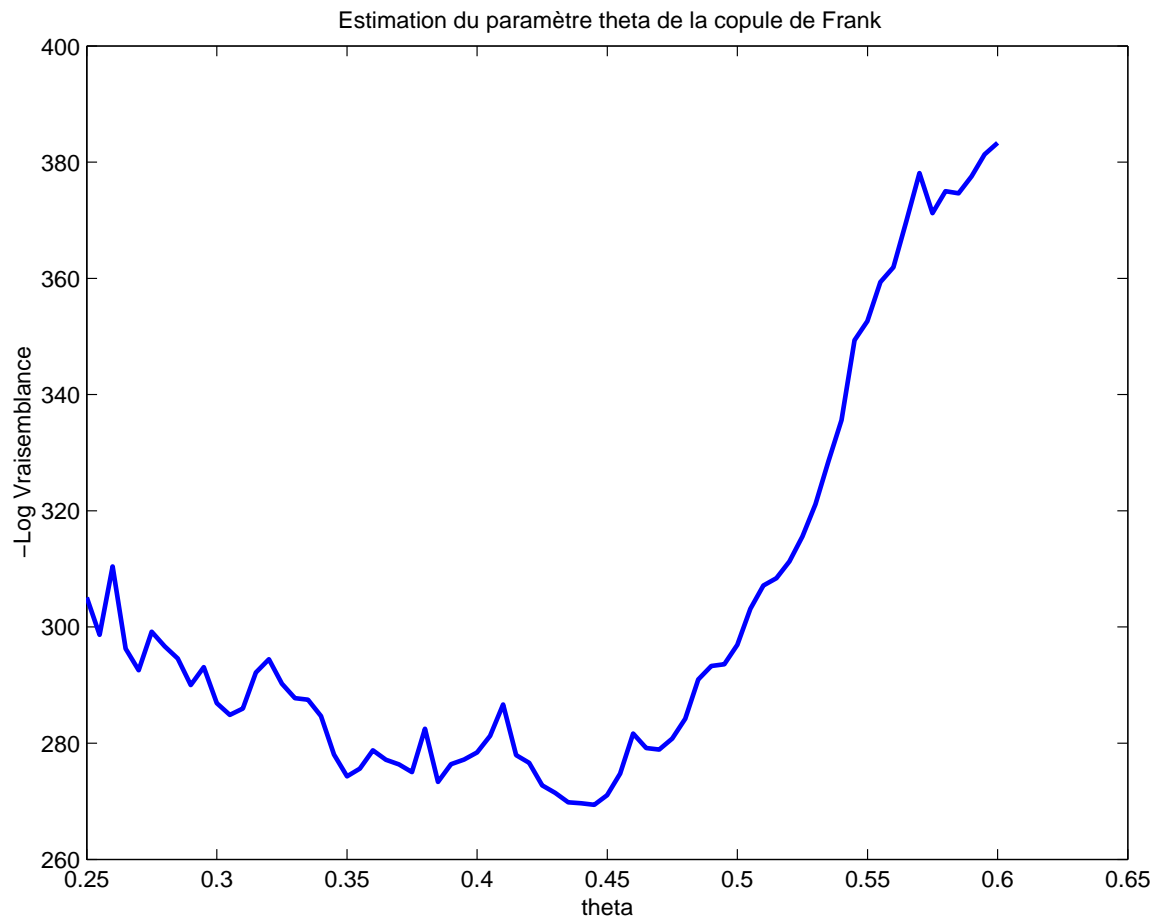


Figure 4.3: $-\log$ -vraisemblance pour l'estimation du paramètre θ de la copule de Frank.

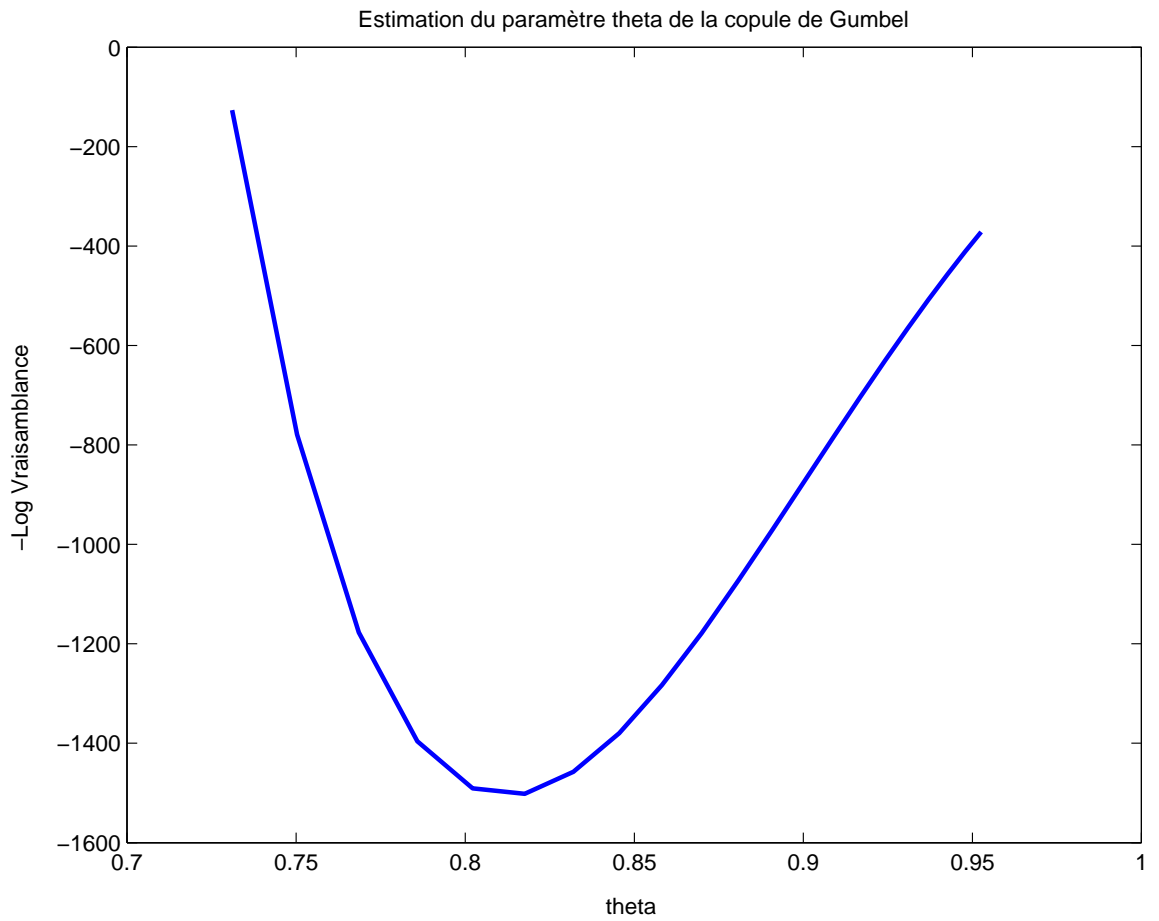


Figure 4.4: $-\log$ -vraisemblance pour l'estimation du paramètre θ de la copule de Gumbel.

4.2.3 Estimation pour la copule normale

L'estimation de la copule normale revient à estimer la matrice de corrélation ρ . Cette dernière est estimée par la matrice des coefficients de corrélation de Van der Waerden, définis par l'expression

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m \Phi^{-1}\left(\frac{R_{ik}}{m+1}\right) \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{R_{jk}}{m+1}\right)}{\sum_{k=1}^m \left\{ \Phi^{-1}\left(\frac{k}{m+1}\right) \right\}^2}$$

où Φ^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition d'une loi normale, $R_{i,k}$ est le rang du rendement $X_{i,k}$ parmi les n rendements historiques de la firme i , et m est le nombre de noms existant dans le portefeuille à savoir, dans notre cas, 10.

Ceci nous donne la matrice de corrélation suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0.1780 & 1 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0.2060 & 0.2135 & 1 & - & - & - & - & - & - & - \\ 0.2118 & 0.3332 & 0.2733 & 1 & - & - & - & - & - & - \\ 0.0119 & 0.0174 & 0.0256 & 0.0082 & 1 & - & - & - & - & - \\ 0.2239 & 0.2210 & 0.2177 & 0.2452 & 0.0055 & 1 & - & - & - & - \\ 0.0117 & 0.0068 & 0.0057 & -0.0093 & -0.0074 & -0.0214 & 1 & - & - & - \\ 0.2126 & 0.1986 & 0.2159 & 0.2531 & 0.0240 & 0.5852 & -0.0117 & 1 & - & - \\ -0.0122 & 0.0034 & -0.0070 & -0.0024 & -0.0165 & -0.0111 & 0.3055 & 0.0151 & 1 & - \\ 0.0093 & 0.0029 & 0.0119 & 0.0008 & 0.0120 & 0.0199 & -0.0069 & 0.0079 & -0.0136 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2.4 Estimation pour la copule de Student

Dans le cas de la copule de Student, deux paramètres doivent être estimés. La matrice de corrélation ρ et le degré de liberté ν . Ces deux paramètres vont être estimés séparément.

D'abord, on estimera la matrice de corrélation à partir des coefficients tau de kendall. Le tau de Kendall, dénoté par τ , des paires X_1, X_2, \dots, X_n , est une mesure d'association comparable au coefficient de corrélation. Il est égal à $\frac{c-d}{c+d}$, où c le nombre de paires concordantes et d est le nombre de paires discordantes. Voir Nelsen (1999) pour des détails sur les différentes mesures d'association.

Pour des lois meta-elliptiques comme la loi de Student multivariée, il est connu, e.g. Abdous, Genest et Rémillard (2004), que

$$\hat{\rho}_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau_{ij}\right),$$

où τ_{ij} est le tau de Kendall entre les paires de rendements $(X_{i,1}, X_{j,1}), \dots, (X_{i,n}, X_{j,n})$.

Nous utiliserons dans notre cas le tau de Kendall empirique, défini de la façon suivante

$$\hat{\tau}_{ij} = 1 - \frac{4D_{ij}}{n(n-1)},$$

où N_{ij} est le nombre des paires de rendements discordants pour les firmes i et j . Rappelons qu'une paire est considérée discordante lorsque

$$\text{sign}(X_{i,k} - X_{i,l}) \text{sign}(X_{j,k} - X_{j,l}) < 0,$$

$$1 \leq k \neq l \leq n.$$

Comme la matrice A obtenue n'est pas nécessairement définie positive, on commence par obtenir une matrice définie positive B , en prenant la racine carrée du carré. En effet, puisque A peut s'écrire sous la forme $A = M\delta M^\top$, avec Δ diagonale, on pose $B = M|\delta|M^\top$, où $|\Delta|$ est la matrice diagonale obtenue en prenant la valeur absolue des éléments correspondants de Δ .

Finalement, on pose $\hat{\rho}_{ij} = \frac{B_{ij}}{\sqrt{B_{ii}B_{jj}}}$, $1 \leq i, j \leq m$. Cette procédure donne un estimateur consistant de ρ .

On obtient alors la matrice de corrélation

$$\begin{pmatrix} 1 & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ -0.1755 & 1 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ -0.2039 & -0.1023 & 1 & - & - & - & - & - & - & - \\ -0.3176 & -0.1979 & 0.1617 & 1 & - & - & - & - & - & - \\ 0.1466 & -0.0639 & 0.0012 & -0.0894 & 1 & - & - & - & - & - \\ -0.4292 & 0.7447 & -0.2567 & 0.0462 & -0.5028 & 1 & - & - & - & - \\ -0.0303 & -0.4601 & -0.1590 & 0.3672 & -0.0756 & -0.1324 & 1 & - & - & - \\ -0.2813 & 0.0782 & 0.0104 & -0.2546 & -0.0304 & 0.2119 & -0.2111 & 1 & - & - \\ 0.2577 & -0.1166 & -0.0028 & 0.2038 & -0.0945 & -0.0114 & -0.2088 & 0.1819 & 1 & - \\ -0.2701 & 0.0571 & -0.4283 & 0.0625 & -0.2470 & 0.1972 & -0.2366 & -0.0132 & -0.2097 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on estime le degré de liberté ν par la méthode de maximum de vraisemblance, c'est-à-dire en minimisant

$$V_\nu = - \sum_{i=1}^n \log (c_{\hat{\rho}, \nu}(u_{1,i}, \dots, u_{m,i})),$$

où $c_{\hat{\rho}, \nu}$ est la fonction de densité multidimensionnelle de la copule de Student et est donnée par l'expression

$$c_{\rho, \nu}(u_1, \dots, u_m) = |\rho|^{-1/2} \frac{\Gamma(\frac{\nu+m}{2}) [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^m (1 + \frac{1}{\nu} \zeta^T \rho^{-1} \zeta)^{-\frac{\nu+m}{2}}}{[\Gamma(\frac{\nu+1}{2})]^m \Gamma(\frac{\nu}{2}) \prod_{i=1}^m \left(1 + \frac{\zeta_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}}$$

où $\zeta_i = t_\nu^{-1}(u_i)$ et t_ν^{-1} est la fonction inverse de la fonction de répartition de la distribution de Student de degré de liberté ν .

Dans notre cas, l'estimateur de maximum de vraisemblance du degré de liberté est $\hat{\nu} = 3.11$, correspondant à une valeur de vraisemblance $V = 5.6261$, tel qu'indiqué dans la figure 4.5.

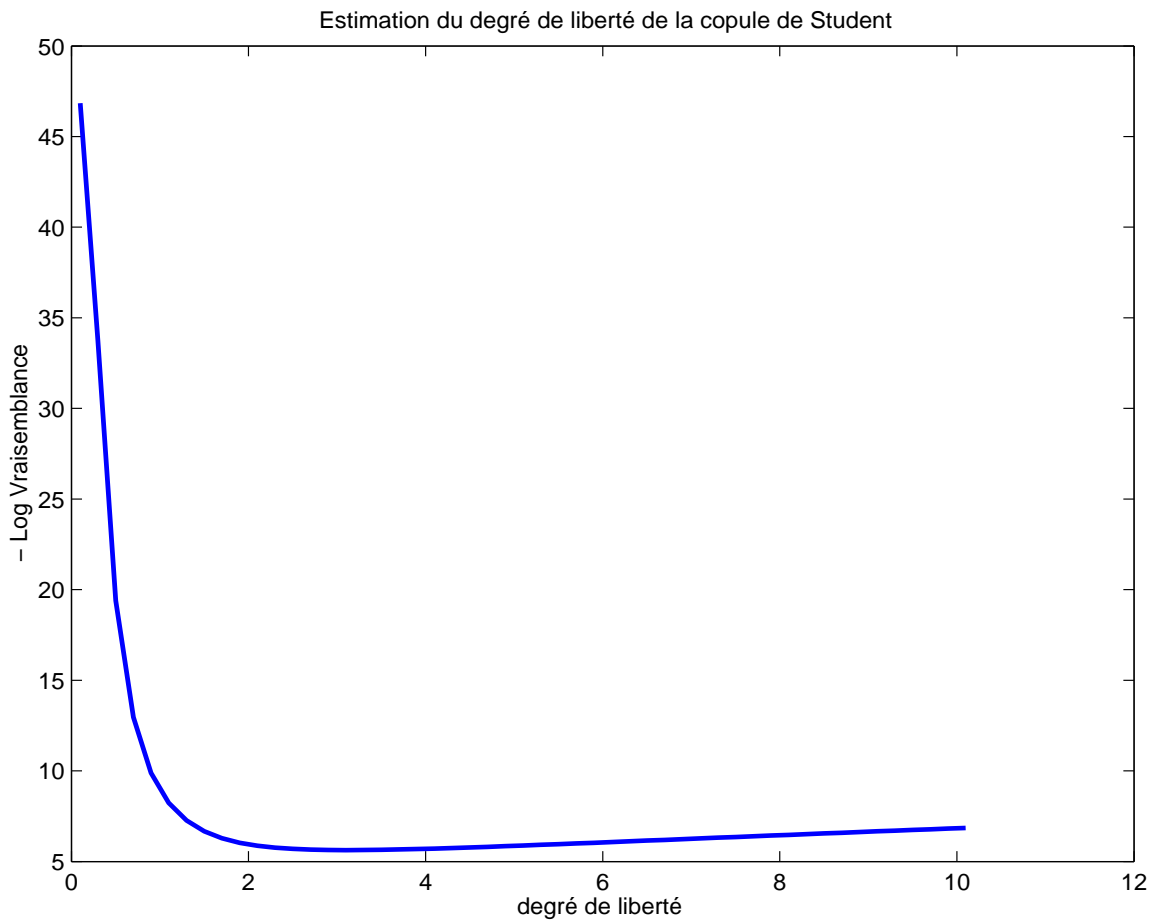


Figure 4.5: $-\log$ -vraisemblance pour l'estimation du degré de liberté de la copule de Student.

4.2.5 Choix de la meilleure structure de dépendance

La comparaison graphique des différentes fonctions de Kendall K est retenue pour discriminer l'ensemble des copules choisies ¹ à savoir les copules archimédiennes de Clayton, Frank, et Gumbel, ainsi que la copule normale et la copule de Student.

Rappelons que le choix de ces différentes copules a été motivé par leur utilisation intensive dans la littérature financière (voir la section 2.2 de la revue de la littérature).

4.2.6 Estimation de la fonction K empirique

La fonction de Kendall est définie par

$$K(u) = \Pr [F(X_{1,i}, X_{2,i}, \dots, X_{m,i}) \leq u]$$

La distribution empirique de la fonction K est la fonction de répartition empirique des V_i , définies de la manière suivante dans Barbe, Genest, Ghoudi et Rémillard (1996) :

$$V_i = \frac{1}{n} \text{card} \{j \leq n \mid X_{j,k} \leq X_{i,k} \text{ pour tout } 1 \leq k \leq m\},$$

¹À la date de l'écriture du mémoire, des travaux de recherche ont débuté pour établir des tests statistiques permettant de discriminer entre les structures de dépendance, dont notamment l'article de C. Genest, J.-F. Quessy et B. Rémillard (2003).

où X_1, X_2, \dots, X_n sont les vecteurs des rendements des $m = 10$ firmes étudiées.

L'estimation de la fonction K est alors donnée par

$$K_n(u) = \frac{1}{n} \text{card} \{i \leq n \mid V_i \leq u\}, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

La fonction de Kendall empirique K_n ainsi obtenue est représentée dans la figure 4.6.

4.2.7 Estimation de la fonction K des copules archimédiennes

Tel qu'énoncé dans la section méthodologie, Barbe, Genest, Ghoudi et Remillard (1996) ont montré que dans le cas des copules archimédiennes,

$$K(u) = t + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \frac{\phi^i(t)}{i!} f_{i-1}(t),$$

où

$$f_i(t) = \frac{d^{i+1}}{ds^{i+1}} \phi^{-1} \Big|_{s=\phi(t)},$$

et $\phi^{-1}|_{s=\phi(t)}$ est la fonction inverse de la fonction génératrice de la copule évaluée à $\phi(t)$.

Copule de Clayton

La fonction de répartition de la fonction de Kendall de la copule de Clayton est représentée dans la figure 4.7, tandis que l'estimation de θ est répétée dans le tableau 4.3.

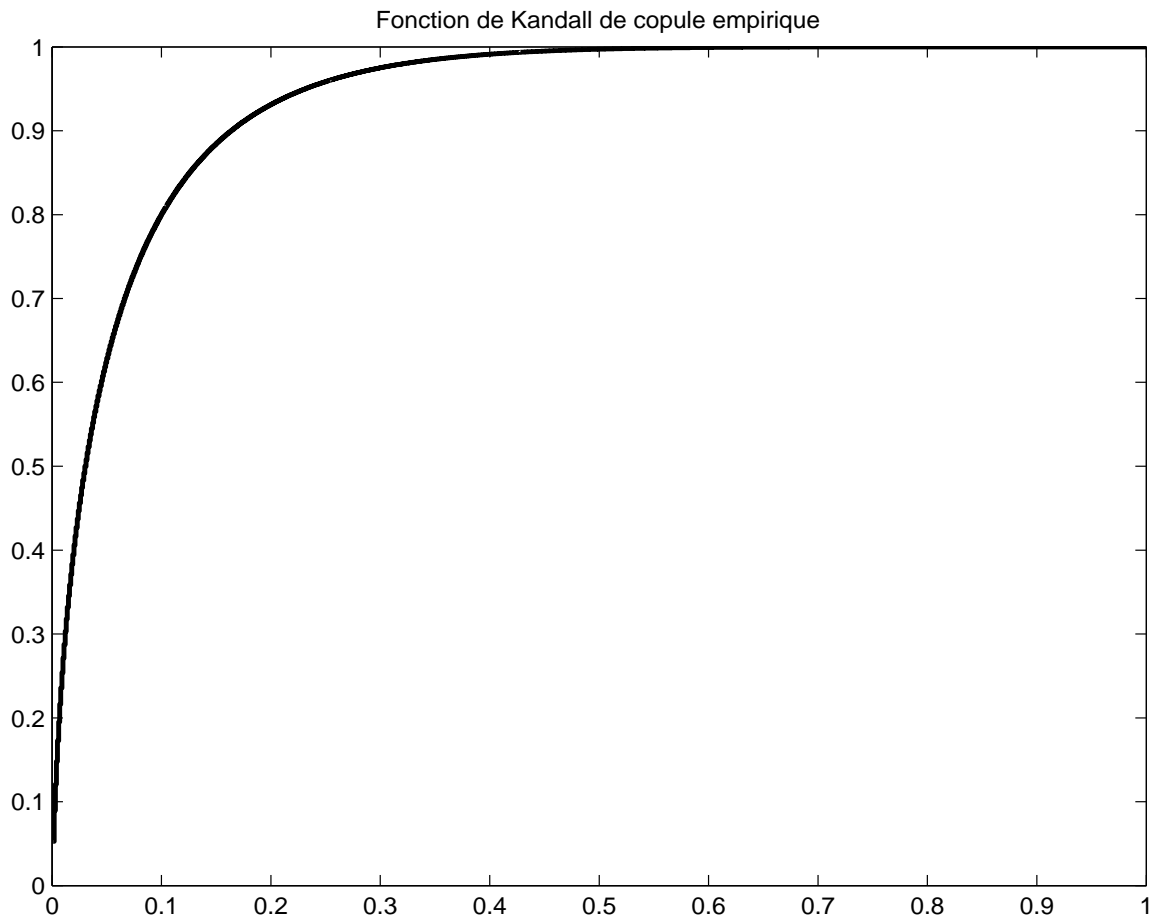


Figure 4.6: Fonction de Kendall K estimée.

Tableau 4.3: Estimation de θ pour la copule de Clayton.

Famille	$\phi(t)$	$\hat{\theta}$
Clayton ou Cook-Johnson	$\frac{t^{-\theta}-1}{\theta}$	0.1901

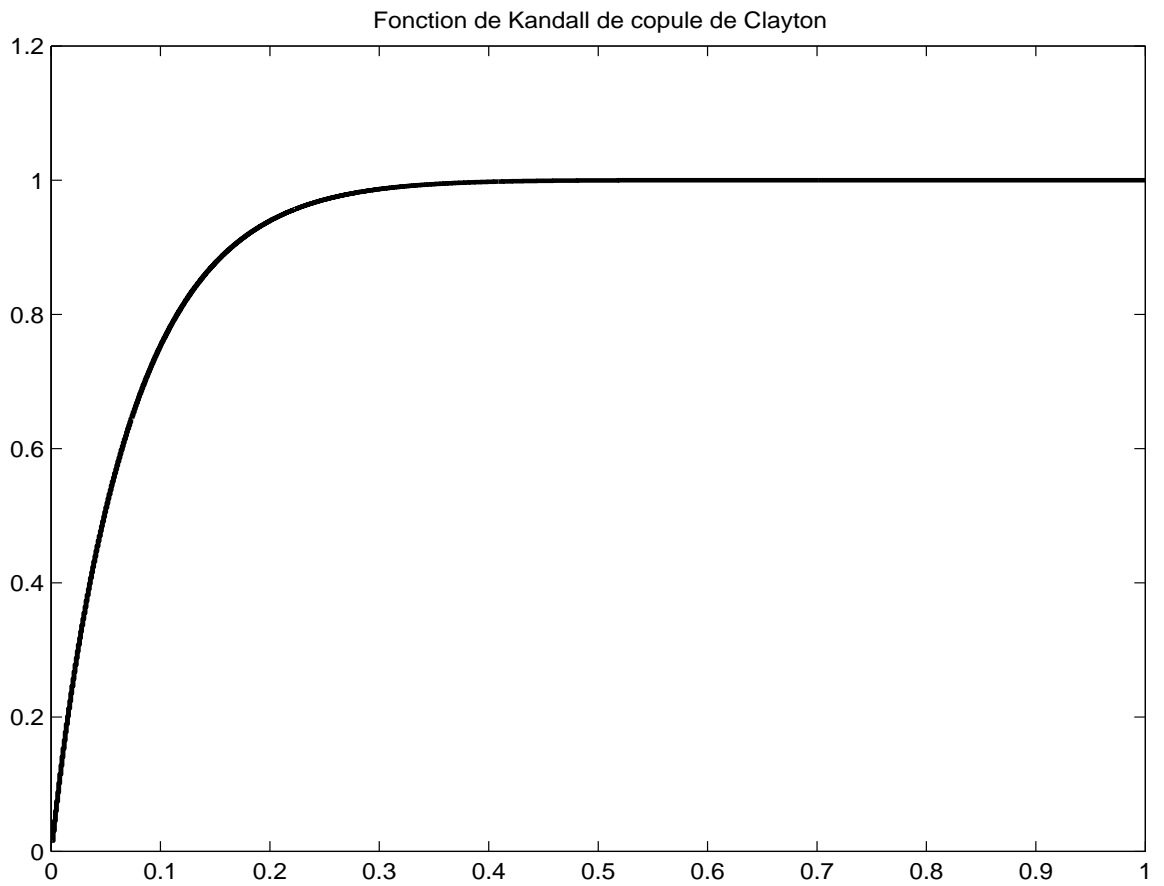


Figure 4.7: Fonction de Kendall K pour la copule de Clayton avec 10 composantes.

Tableau 4.4: Estimation de θ pour la copule de Frank.

Copule de	$\phi(t)$	θ
Frank	$-\log\left(\frac{1-\theta^t}{1-\theta}\right)$	0.4428

Tableau 4.5: Estimation de θ pour la copule de Gumbel.

Copule de	$\phi(t)$	θ
Gumbel	$\log^{1/\theta}(1/u)$	0.8732

Copule de Frank

La fonction de répartition de la fonction de Kendall de la copule de Frank est représentée dans la figure 4.8, tandis que l'estimation de θ est répétée dans le tableau 4.4.

Copule de Gumbel

La fonction de répartition de la fonction de Kendall de la copule de Frank est représentée dans la figure 4.9, tandis que l'estimation de θ est répétée dans le tableau 4.5.

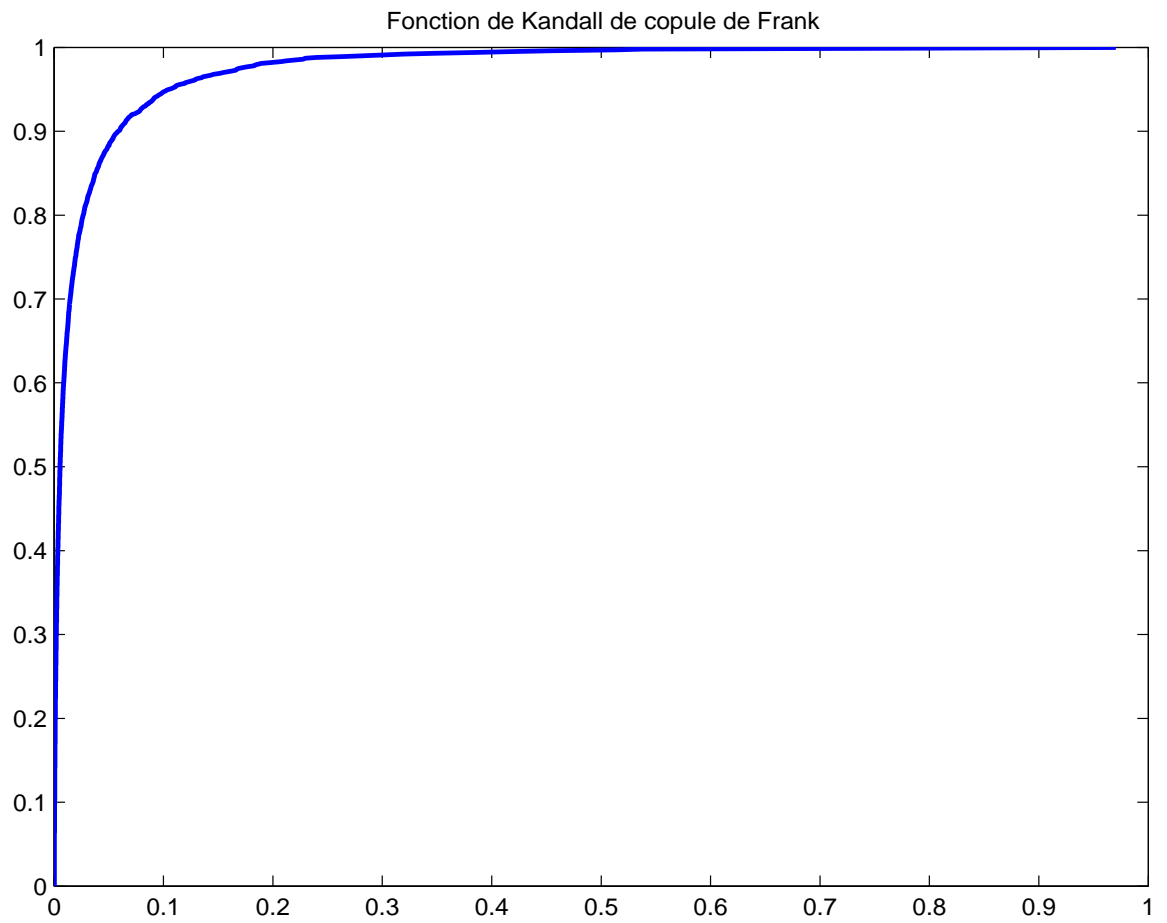


Figure 4.8: Fonction de Kendall K pour la copule de Frank avec 10 composantes.

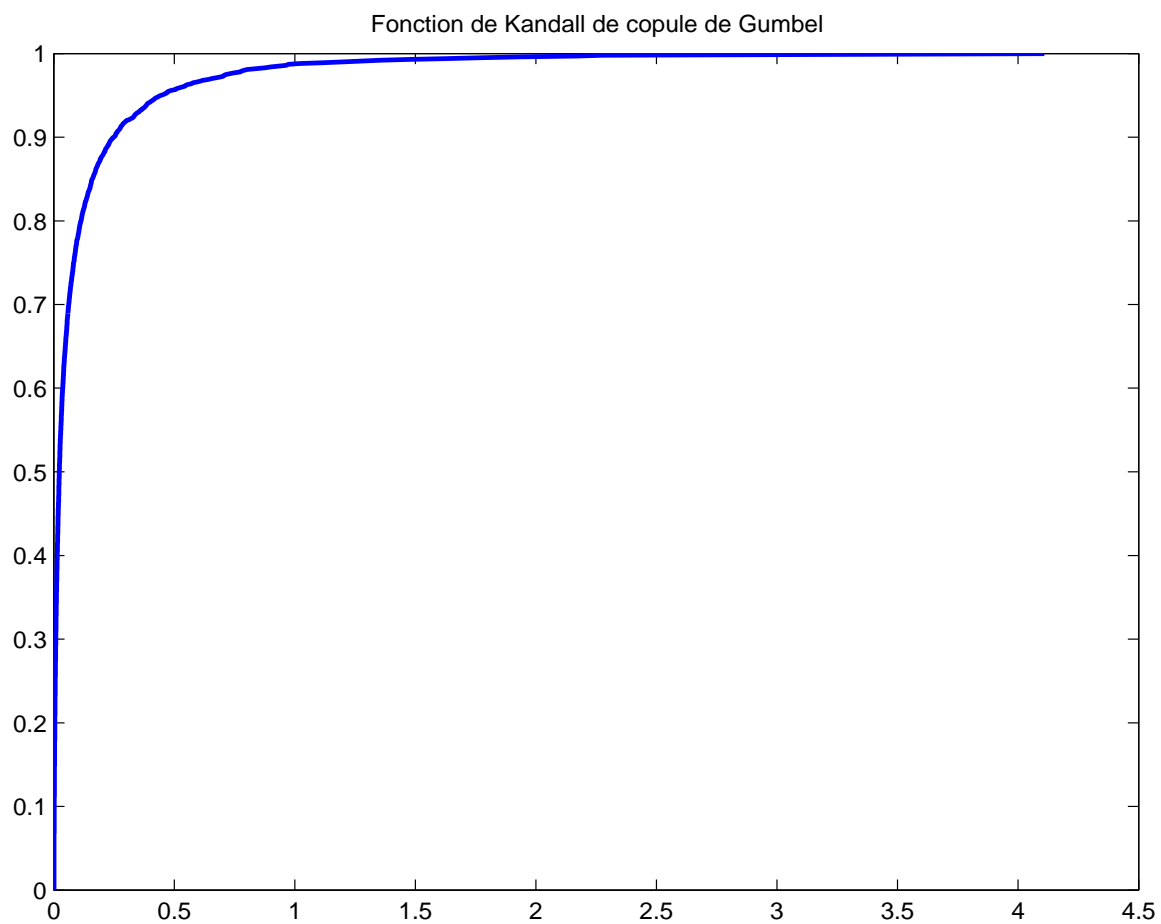


Figure 4.9: Fonction de Kendall K pour la copule de Gumbel avec 10 composantes.

4.2.8 Estimation de la fonction de Kendall pour la copule normale et la copule de Student

Les fonctions de Kendall des copules normale et Student ne sont pas connues explicitement. Toutefois, on peut facilement les estimer par simulation. Il suffit de générer de grands échantillons distribués selon ces copules, $n = 100000$ par exemple, et de calculer la fonction de Kendall empirique. Barbe, Genest, Ghoudi and Rémillard (1996) ont montré que cette estimation était excellente.

On peut donc, par exemple, générer respectivement des vecteurs aléatoires suivant des distributions normale et Student, ayant les paramètres estimés précédemment.

Pour obtenir n vecteurs indépendants de distribution normales de moyenne 0 et de matrice de covariance $\hat{\rho}$, on procède de la façon suivante :

On décompose premièrement $\hat{\rho}$ sous la forme $\hat{\rho} = AA^T$, utilisant la décomposition de Cholesky.

Pour chaque $1 \leq i \leq n$, on génère un vecteur Z_i de composantes indépendantes $Z_{1,i}, Z_{2,i}, \dots, Z_{m,i}$, distribuées selon des lois normales centrées réduites. On pose ensuite $X_i = AZ_i$.

Pour simuler n vecteurs indépendants de distribution de Student de degré

de liberté $\hat{\nu}$ et de matrice de covariance $\hat{\rho}$, on procède de la façon suivante :

Pour chaque $1 \leq i \leq n$, on génère X_i distribué selon une loi normale de moyenne 0 et de matrice de covariance $\hat{\rho}$, E_i distribué selon une loi du chi-carré avec $\hat{\nu}$ degrés de liberté, et on pose $Y_i = X_i/\sqrt{E_i/\hat{\nu}}$.

Les fonctions de Kendall des copules normale et Student sont ensuite estimées par les fonctions de Kendall empiriques, tel que montré précédemment. Cette procédure nous donne les fonctions de répartition représentées respectivement dans les figures 4.10 et 4.11.

4.2.9 Comparaison des fonctions de Kendall et sélection de la meilleure structure de dépendance

Les différentes fonction de répartition des fonctions de Kendall telles que estimées dans la section précédente sont tracées ensemble dans la figure 4.12.

La distance, définie ci-dessous, entre les différentes fonctions estimées \hat{K} et la fonction empirique K_n , nous permet de savoir quelle copule reflète le mieux les données historiques. A priori, les copules de Student et de Clayton sont des bons candidats.

La distance considérée est la somme des carrés des distances entre les points des différentes fonctions de répartition par rapport à la fonction empirique.

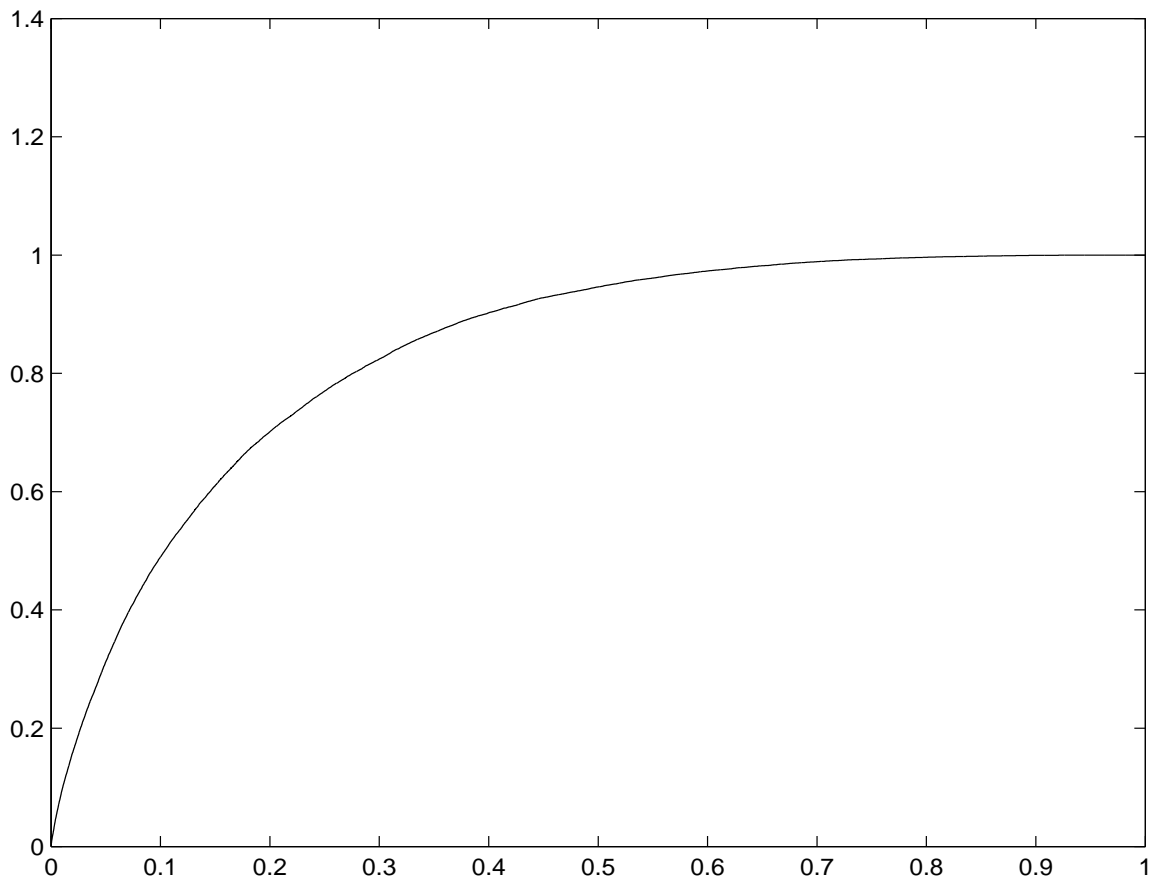


Figure 4.10: Fonction de Kendall K pour la copule normale avec 10 composantes.

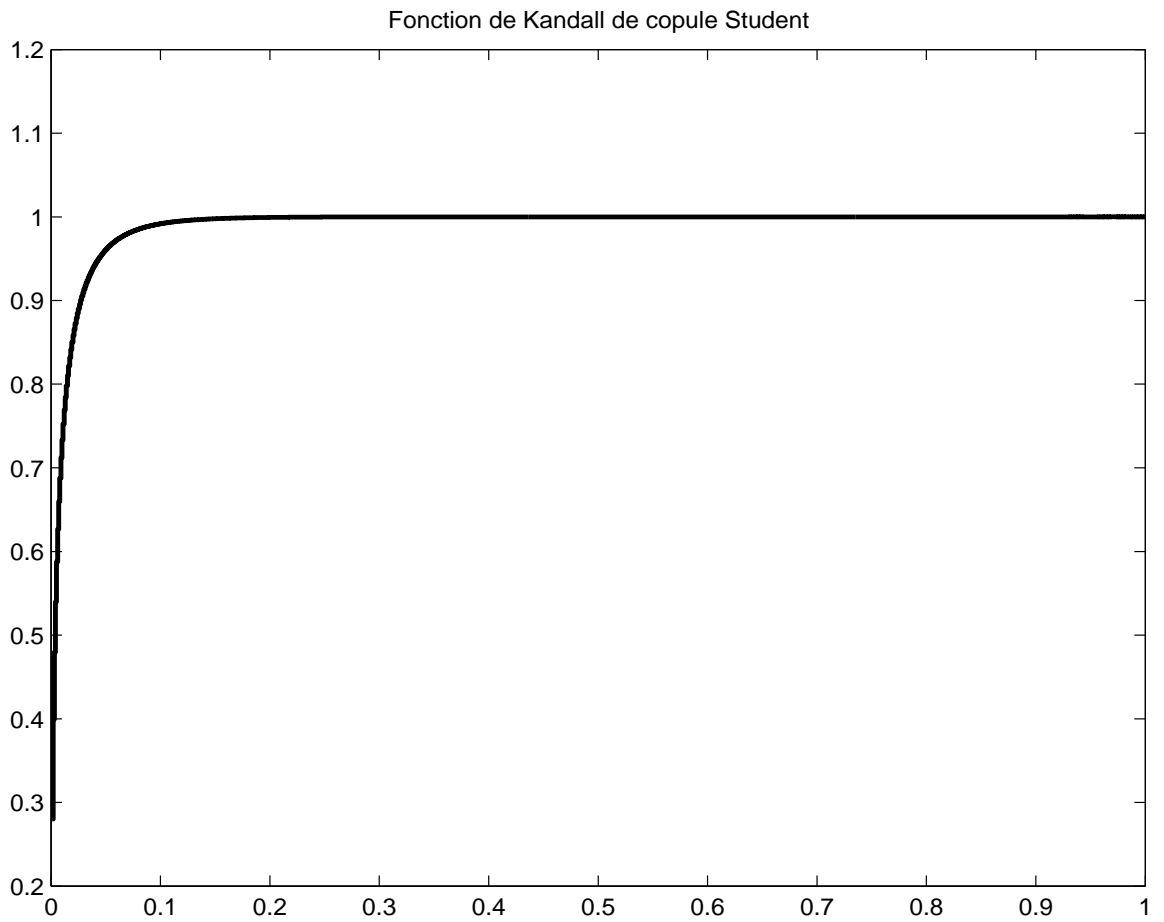


Figure 4.11: Fonction de Kendall K pour la copule de Student avec 10 composantes.

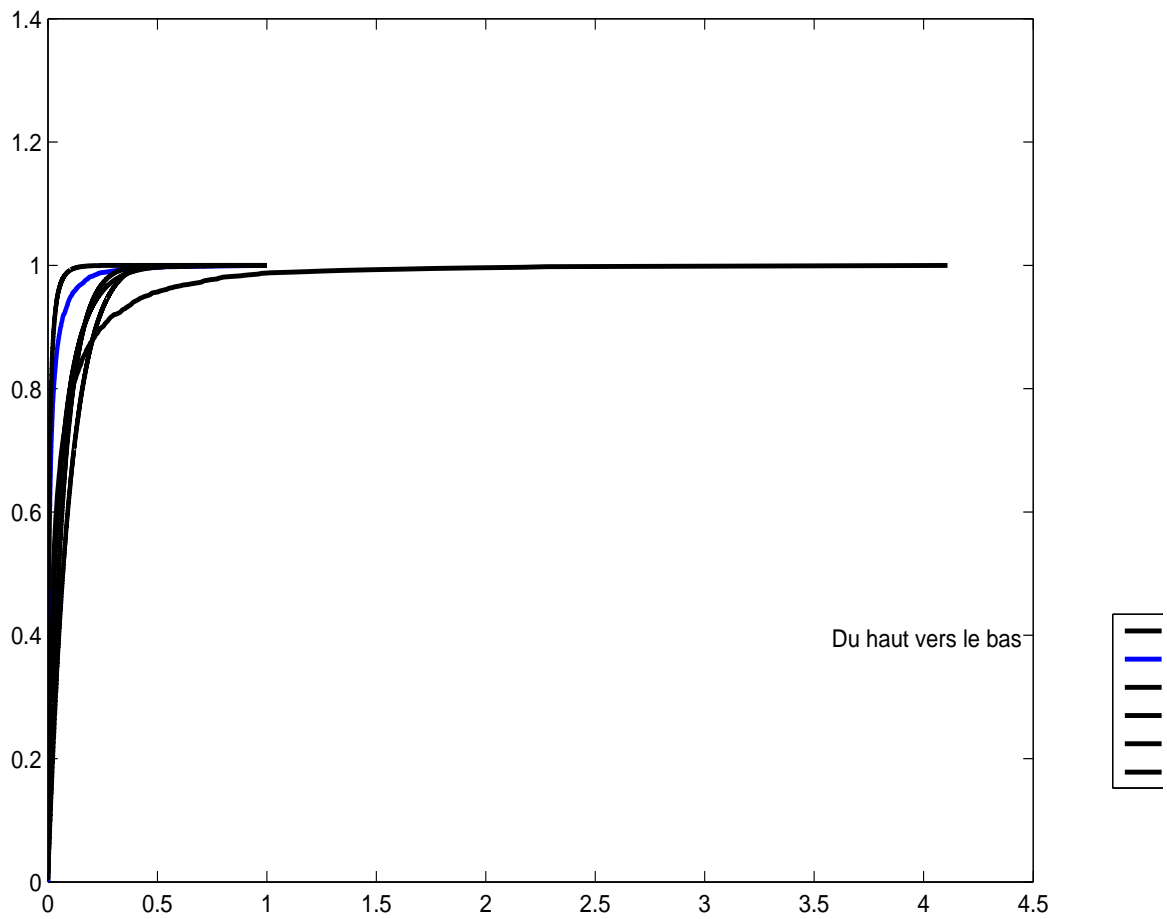


Figure 4.12: Fonction de Kendall empirique K_n vs fonctions de Kendall estimées \hat{K} , pour les cinq familles de copules considérées.

Tableau 4.6: Mesure d'adéquation des différents modèles.

	Copule	D
K_1	Gumbel	622.2785
K_2	Clayton	173.9841
K_3	Frank	939.2692
K_4	Normale	779.8977
K_5	Student	502.8369

Autrement dit, on calcule la distance D définie par

$$D = \sum_{i=1}^n \left(\hat{K}(u_{1,i}, \dots, u_{m,i}) - K_n(u_{1,i}, \dots, u_{m,i}) \right)^2,$$

où $u_{j,i} = \frac{R_{j,i}}{n+1}$, tels que définis dans la section 4.2.2.

Ces distances ainsi calculées, sont données par le tableau 4.6.

Le tableau 4.6 nous permet de conclure que la copule de Clayton est la copule optimale pour modéliser la dépendance de nos données, puisqu'elle correspond à la distance la plus faible entre la fonction de Kendall estimée paramétriquement et celle estimée de façon non paramétrique (fonction K_n). On remarque aussi que la copule normale est dépassée par toutes les autres familles, sauf la famille de Frank. Ceci donne une preuve de la non normalité de la structure de dépendance de défaut.

On doit aussi mentionner que la dépendance donnée par la copule de Student est la plus proche de la dépendance empirique, si on exclut de notre analyse la copule de Clayton. La copule de Student surpasse la copule nor-

male, confirmant ainsi la vraisemblance de l'hypothèse de dépendance par la copule de Student, posée par plusieurs auteurs, dont Marshal et Naldi (2001), pour l'évaluation des produits dérivés sur le crédit sur portefeuille.

Conséquemment, nous continuons notre analyse en retenant que la dépendance modélisée par la copule de Clayton est celle qui semble la plus adéquate d'après nos données.

4.3 Simulation des temps de défaut et évaluation des dérivés de crédit sur plusieurs noms

Comme on l'a montré dans la section précédente, la copule de Clayton est la meilleure copule, parmi celles considérées, permettant de refléter la dépendance entre les noms composant notre portefeuille. Nous entamons dans cette section la dernière étape de notre analyse, à savoir l'évaluation des dérivés de crédit sur portefeuille.

Nous évaluerons dans cette section deux produits dérivés sur le crédit écrit sur plusieurs noms. Un contrat de swap de crédit du premier nom en défaut, et un contrat de swap du deuxième nom en défaut.

Dans un contrat de swap de crédit semblable à un contrat d'assurance, un acheteur doit payer une prime périodique P en vue d'être remboursé de la valeur de l'exposition sur le nom en défaut (le premier ou le deuxième), moins la valeur recouvrée RR .

À la date de début du contrat, la valeur espérée sous la mesure risque neutre Q doit être nulle, tel qu'exprimé dans l'équation

$$E^Q \left[\sum_{i=1}^{f*T} \left(e^{-\int_0^{\frac{i}{f}} r(s)ds} N \frac{P}{f} 1_{\{\tau^{(k)} > \frac{i}{f}\}} \right) - e^{-\int_0^{\tau^{(k)}} r(s)ds} N (1 - RR^{(k)} - a) 1_{\{\tau^{(k)} < T\}} \right] = 0.$$

Les différents termes utilisés dans cette équation sont expliqués dans la section 3.3.

Nous résolvons cette équation par simulation Monte Carlo. Pour cela deux variables importantes sont à déterminer.

- La courbe des taux d'intérêt à terme coupon zéro servant à actualiser les différents flux monétaires futurs. Celle-ci est la courbe estimée à partir des taux LIBOR, pour des maturités inférieures à 1 an, et les taux swap, pour des maturités supérieures à 1 an, à la date d'évaluation du contrat de swap. En effet, la courbe à terme à cette date reflète la meilleure anticipation sur le marché des taux futurs. Néanmoins, il faut signaler ici que la structure à terme des taux d'intérêt est supposé déterministe.
- Les temps de défaut simulés. Ces temps seront calculés en deux étapes.

4.3.1 Simulation des temps de défaut

Pour simuler les temps de défaut, on procède de la façon suivante :

- Simulation des probabilités jointes de défaut, selon la structure de

dépendance donnée par la copule de Clayton. Par exemple, on obtient p_1, \dots, p_m .

- Pour chaque entreprise, obtenir des temps de défaut pour chaque entreprise, en inversant la probabilité de défaut, telle que donnée par la formule analytique 3.1 donnée dans la Proposition 1, et répétée dans la section 4.2.1. Autrement dit, pour chaque $1 \leq j \leq m$, on calcule t_j tel que $p_j = P_d(t_j)$.

À titre indicatif, les fonctions de répartition des temps de défaut des dix entreprises du portefeuille sont données dans les figures 4.13 à 4.22.

Les fonctions de probabilités de défaut sont inversées pour les valeurs des probabilités de défaut corrélées, pour simuler les temps de défaut. Les temps de défaut sont alors corrélés selon la structure de dépendance donnée par la copule de Clayton. En effet les probabilités de défaut simulés p_i sont générés selon la dépendance Clayton et ce, de la façon suivante :

1. On génère X suivant une loi *Gamma* ($\theta = 0.19, 1$).
2. On génère Y_1, Y_2, \dots, Y_m ($m = 10$) suivant des exponentielles indépendantes de moyenne 1.
3. On pose $p_i = (1 + Y_i/X)^{-a}$.

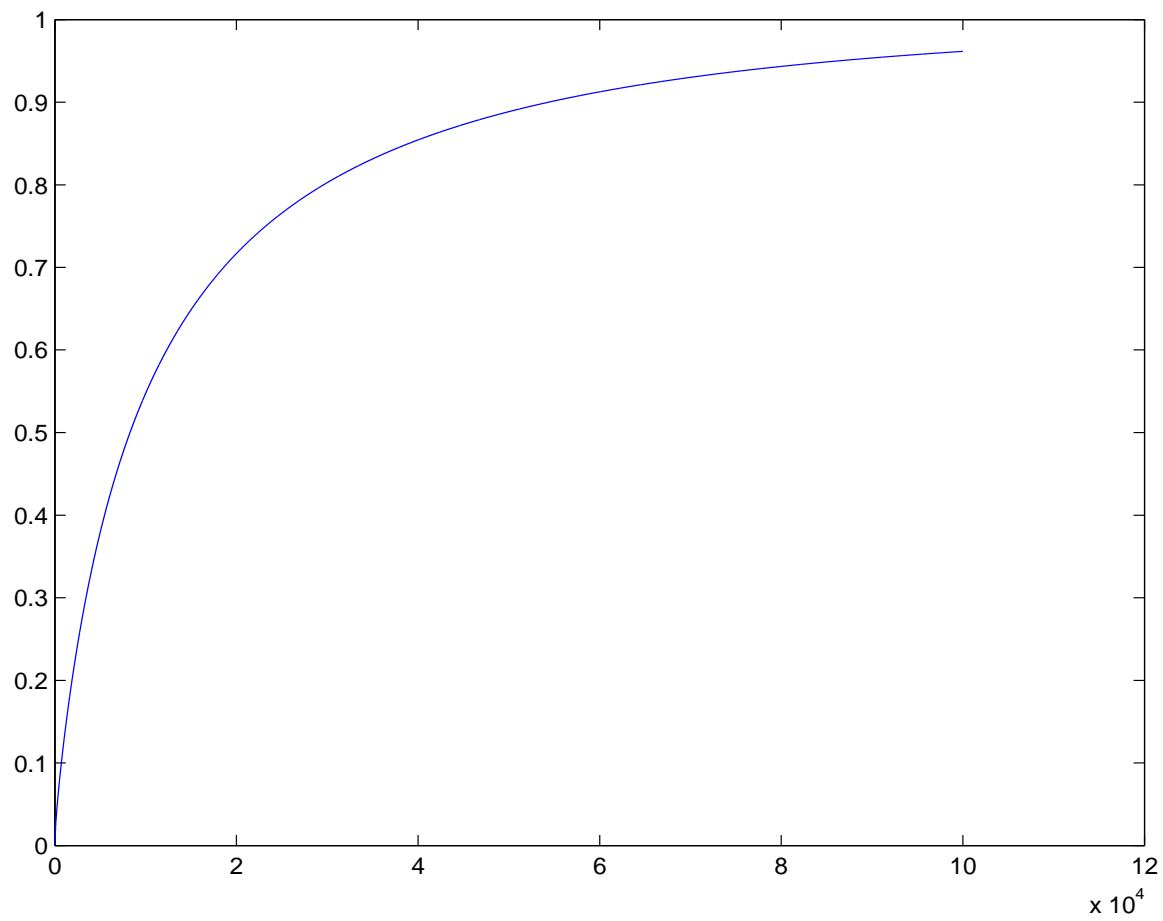


Figure 4.13: Probabilité de défaut de Sun Microsystems.

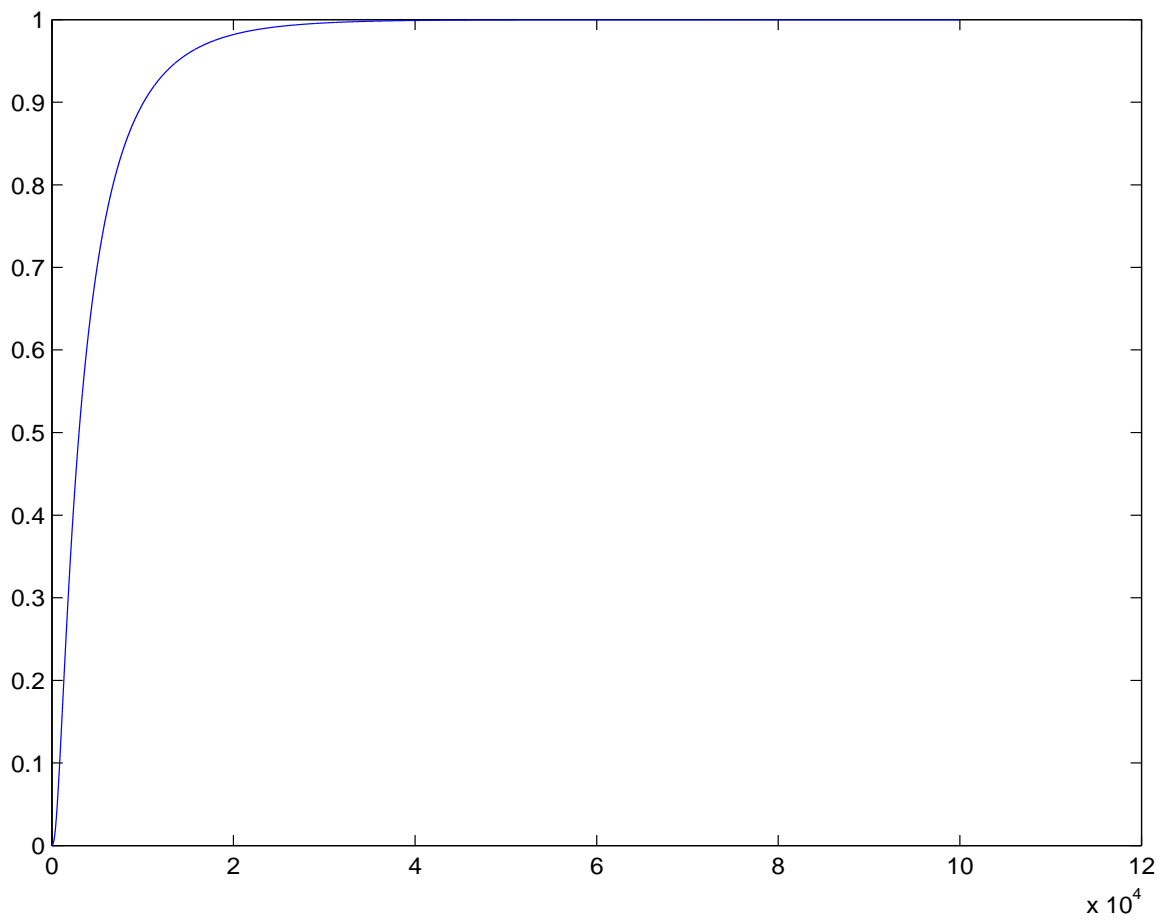


Figure 4.14: Probabilité de défaut de Hewlett Packard.

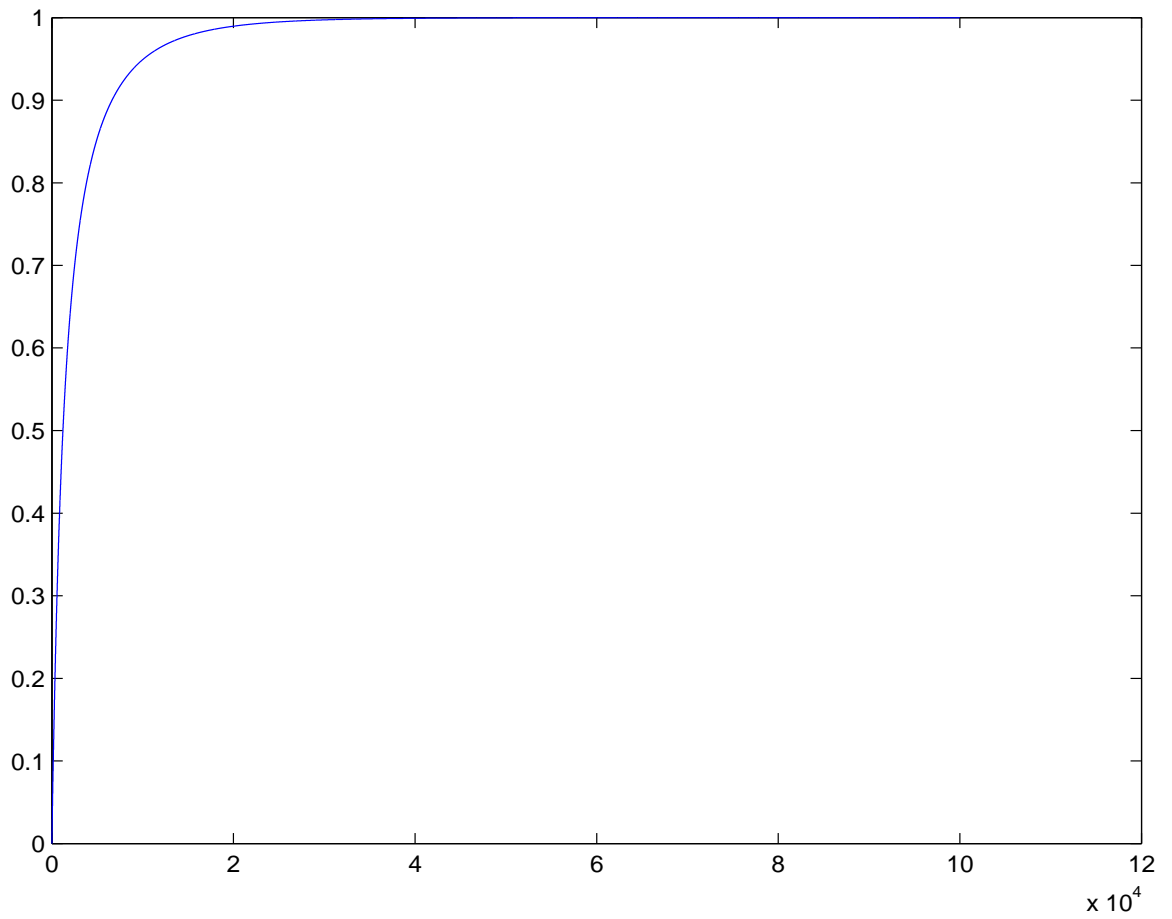


Figure 4.15: Probabilité de défaut de Intel.

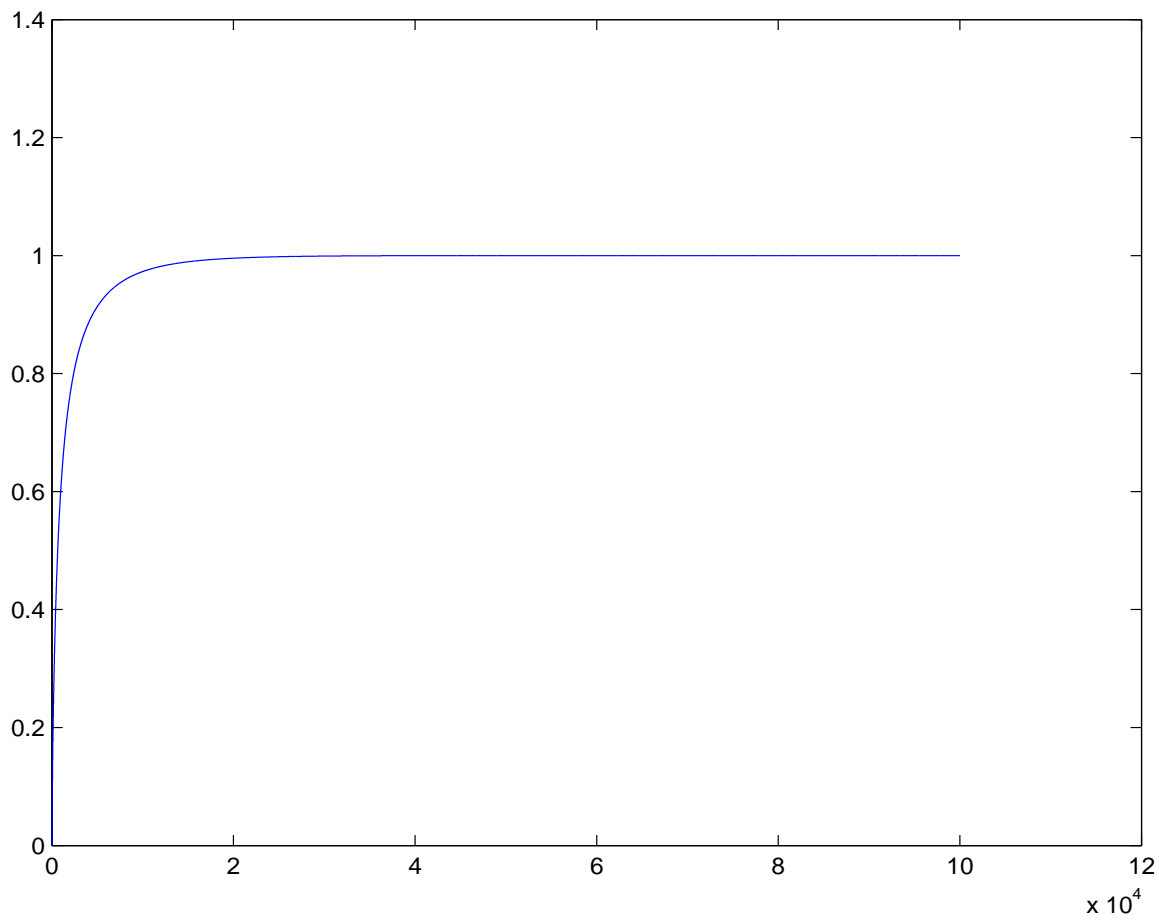


Figure 4.16: Probabilité de défaut de Tyco.

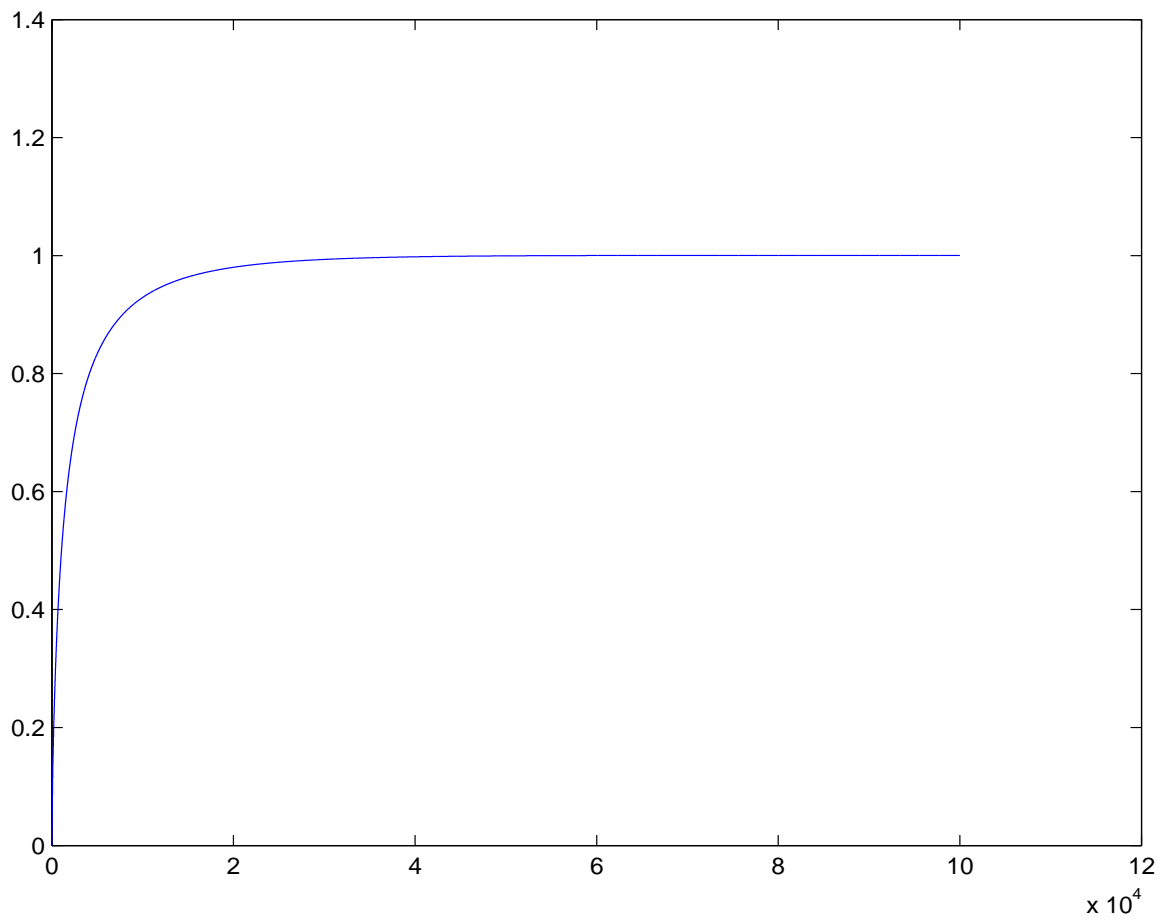


Figure 4.17: Probabilité de défaut de Sprint.

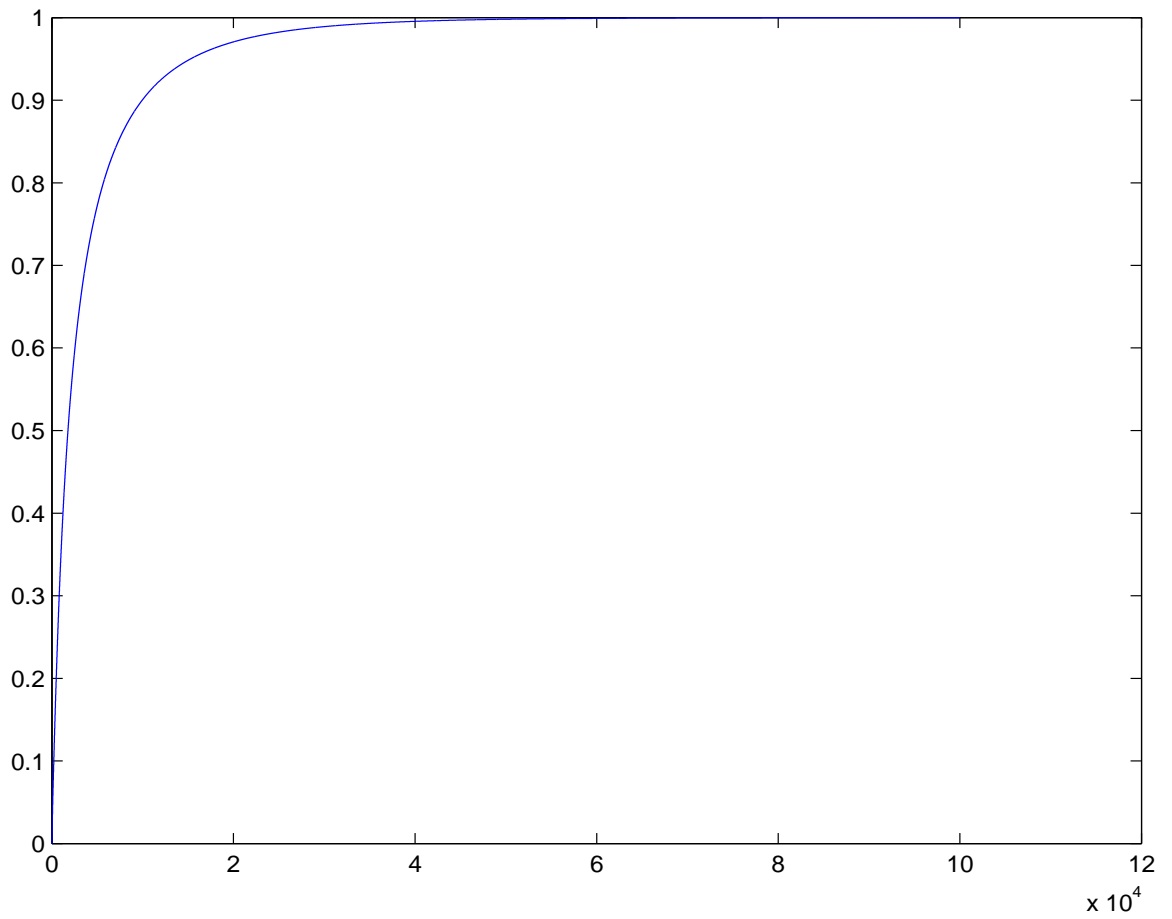


Figure 4.18: Probabilité de défaut de Verizon.

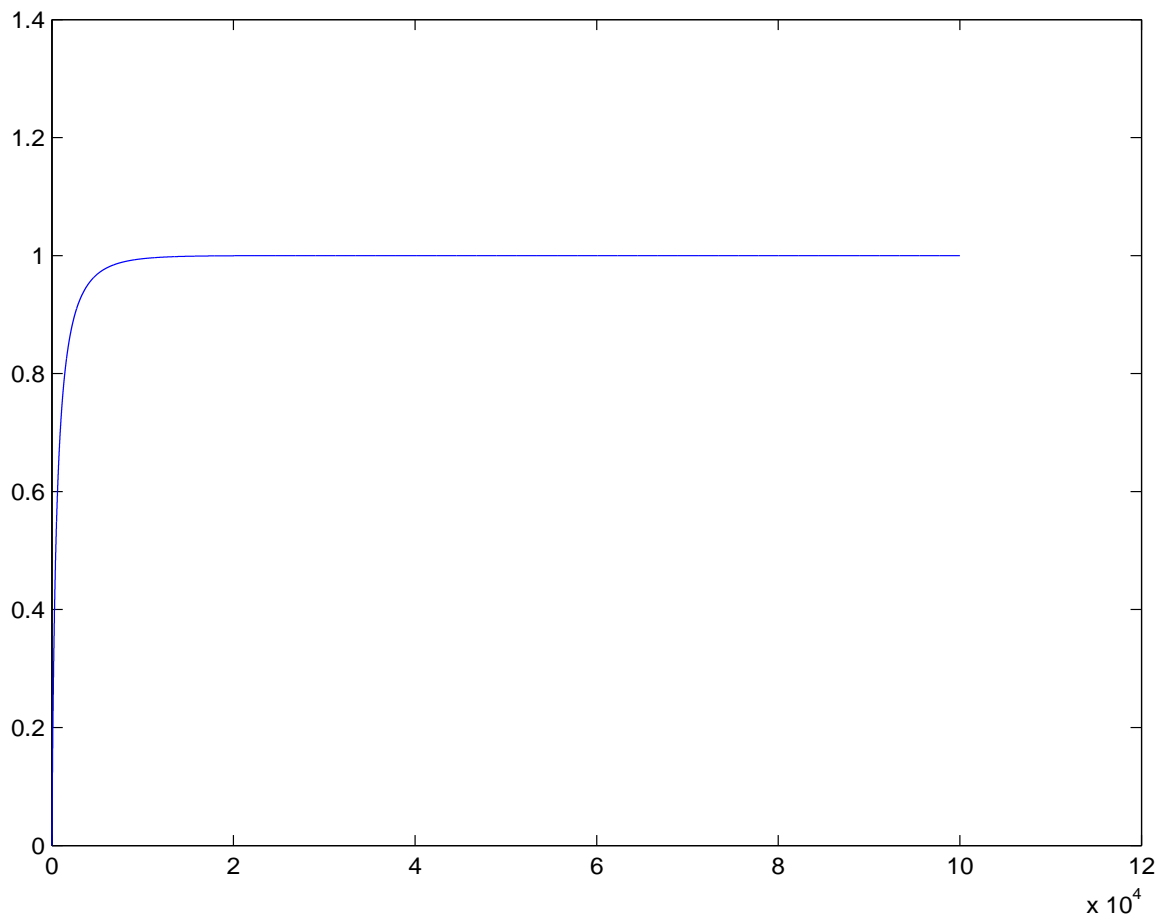


Figure 4.19: Probabilité de défaut de 3Com.

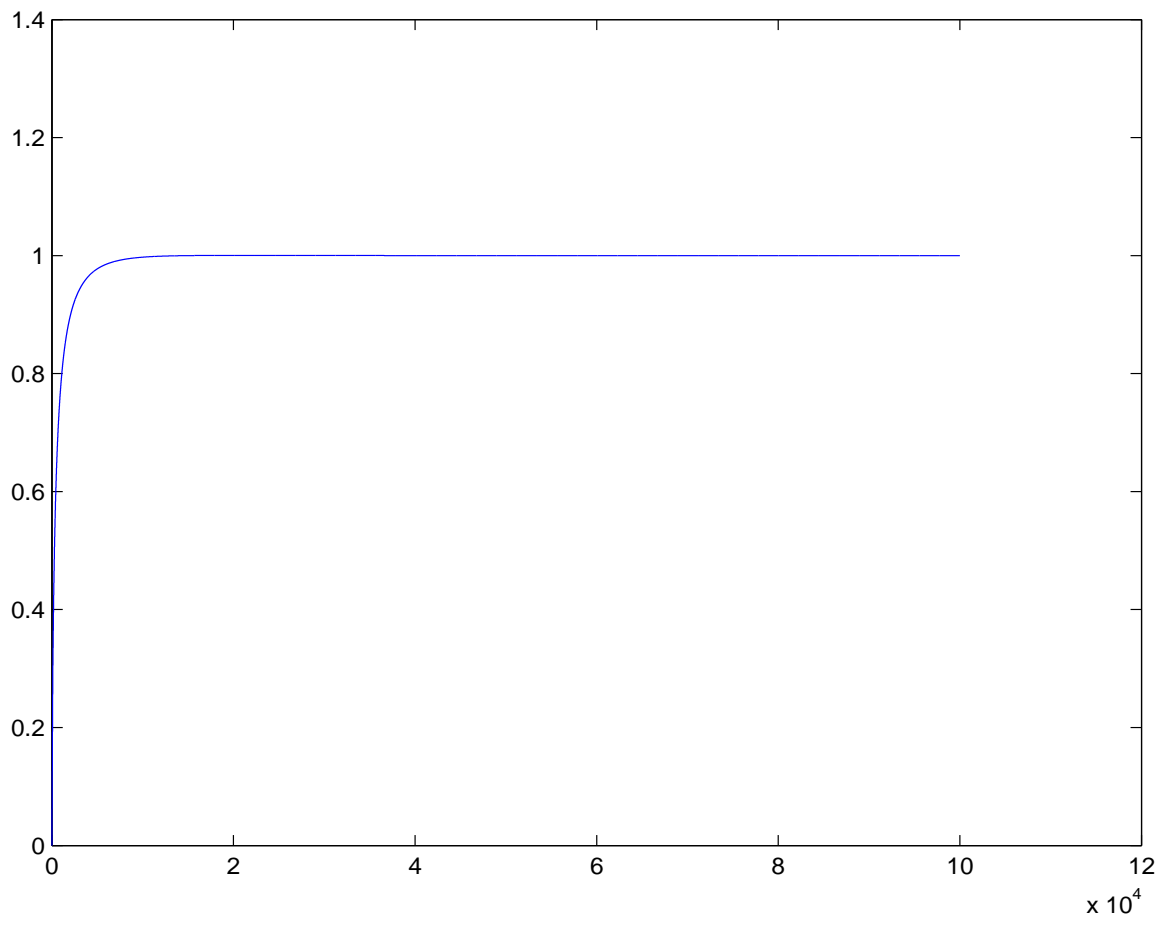


Figure 4.20: Probabilité de défaut de Applied Material.

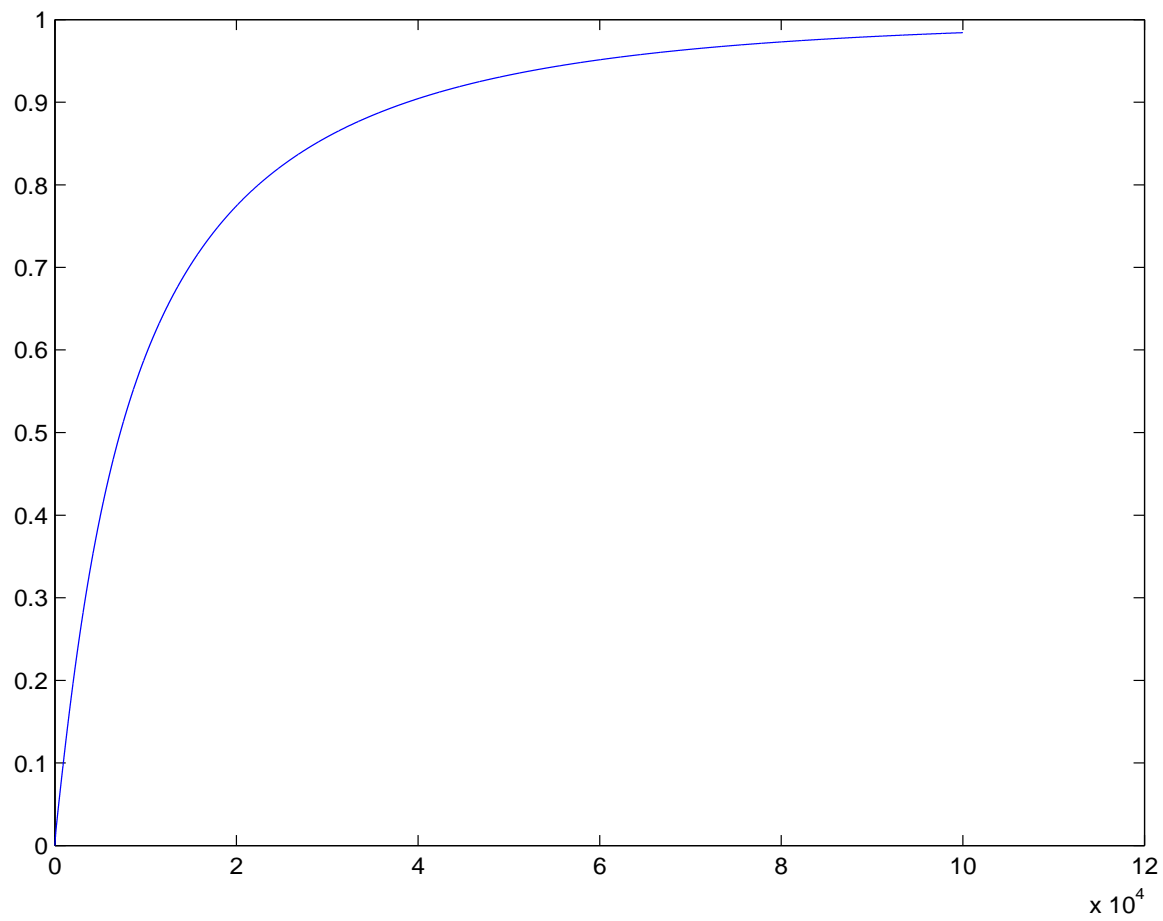


Figure 4.21: Probabilité de défaut de BellSouth.

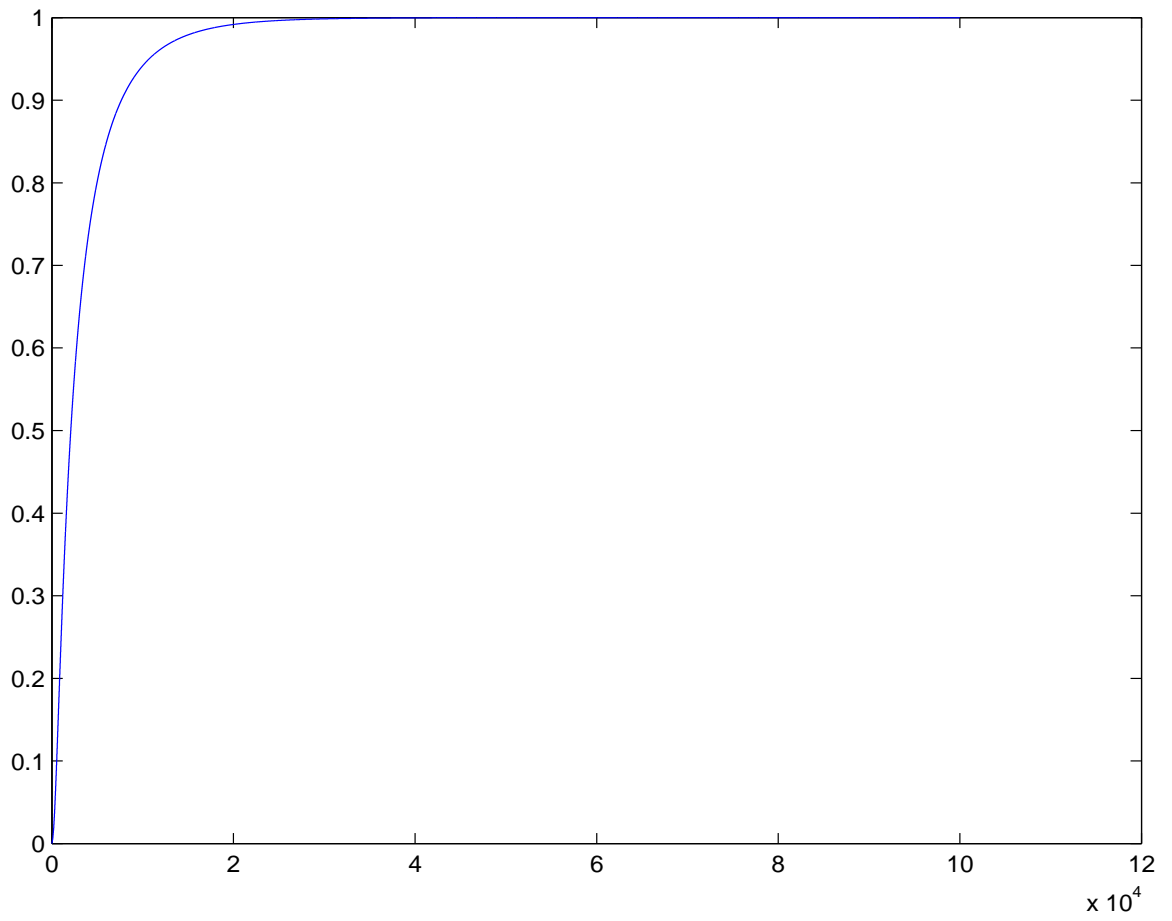


Figure 4.22: Probabilité de défaut de Nortel.

Tableau 4.7: Prix d'un swap du premier en défaut, au 30 décembre 2000 (en points de base, calculé à partir de 100,000 simulations)

	Maturité		
Copule	2 ans	5 ans	7 ans
Clayton	249.601	257.377	262.380
Normale	213.101	239.446	254.079
Différence (%)	-14.62	-6.97	-3.16
indépendance	203.327	235.953	253.914
Différence (%)	-18.54	-8.32	-3.23

4.3.2 Évaluation du swap de crédit

Tel que mentionné précédemment, on a choisit d'évaluer deux contrats de swap à savoir un swap du premier en défaut et un swap du second en défaut. Les contrats considérés sont évalués pour des maturités de 3, 5 et 7 ans. Les valeurs de swap trouvées sont comparées aux valeurs trouvées à partir de temps de défaut normaux et indépendants, générés de la même manière que précédemment. Des swap de défaut écrits sur les noms constituant le portefeuille sont aussi donnés à titre indicatif. Les résultats sont résumés dans les tableaux 4.7, 4.8 et 4.9.

Tableau 4.8: Prix d'un swap du second en défaut, au 30 décembre 2000 (en points de base, calculé à partir de 100,000 simulations)

	Maturité		
Copule	2 ans	5 ans	7 ans
Clayton	115.089	122.328	125.258
Normale	101.164	121.499	130.051
Différence (%)	-12.09	-0.677	+3.83
indépendance	103.686	123.213	130.544
Différence (%)	-9.91	0.72	4.22

4.3.3 Discussion

Les tableaux 4.7, 4.8 et 4.9, donnent les valeurs en points de base des swap de crédit écrits sur notre portefeuille. On peut remarquer que :

- Plus la maturité du contrat augmente, plus la valeur augmente. Ce résultat est très intuitif, puisque plus la maturité augmente plus la probabilité de défaut augmente. Un contrat de swap pour couvrir ce risque de défaut est alors plus cher. Ceci est vrai pour les swap du premier et second en défaut et les swap de crédit écrit sur une seul nom.
- Pour toutes les maturités considérées, un contrat de swap du premier en défaut a une valeur plus grande qu'un contrat de swap du second en défaut. En effet, la probabilité d'avoir deux défauts dans le portefeuille est toujours inférieure ou égale à la probabilité d'avoir un seul défaut.

Tableau 4.9: Prix d'un swap de défaut sur un seul nom, au 30 décembre 2000
(en points de base, calculé à partir de 100,000 simulations)

Maturité	2 ans	5 ans	7 ans
Sun	153.988	184.313	209.276
HP	211.155	245.327	254.234
Tyco	251,555	251.918	251.948
Nortel	239.844	253.507	254.719
3Com	255.143	255.573	255.962
BellSouth	255.143	212.457	226.726
Intel	251.811	254.537	254.779
Verizon	244.782	253.477	254.818
Applied Material	253.901	254.495	254.759
Sprint	250.205	253.477	257.901

Les corporations ayant des expositions à plusieurs noms peuvent choisir de couvrir seulement le deuxième défaut dans leur portefeuille, puisque la couverture dans ce cas est moins coûteuse.

- La majorité des prix, calculés en supposant la structure de dépendance donnée par la copule de Clayton, sont plus élevés que les prix donnés par la structure de dépendance normale qui sont à leur tour supérieurs aux prix supposant l'indépendance des temps de défaut.

Ceci montre qu'en supposant une structure de dépendance normale ou d'indépendance des temps de défaut, on sous-évalue les prix des contrats de couverture. Néanmoins, on remarque que plus on augmente la maturité du contrat, plus cette différence diminue. Ceci pourrait être expliqué par le fait qu'à long terme, la dépendance de défaut tend à être normale ou même nulle. Cette dernière hypothèse n'est toutefois pas vérifiée dans le cadre de ce mémoire. Cette relation ne semble pas être claire dans le cas des swaps de second en défaut où la tendance de la dite différence n'est pas évidente.

Chapitre 5

Conclusion

On a présenté dans ce mémoire une méthodologie d'évaluation des produits dérivés sur le crédit écrits sur plusieurs noms. Elle consiste à proposer une méthode permettant de séparer l'analyse du risque de crédit marginale de chaque nom constituant le portefeuille et la dépendance entre ces différents risques de crédit. Cette séparation est faite en utilisant les fonctions de copules qui permettent de trouver une structure de dépendance invariante par rapport aux distributions marginales du risque de défaut marginale.

L'analyse qu'on a présentée dans ce mémoire a été donc faite en trois parties :

1. Analyse du risque de crédit de chaque nom composant le portefeuille hypothétique considéré. Les probabilités de défaut individuelles sont estimées par le modèle utilisé par CreditMetrics Group pour estimer les

cotes de crédit (CreditCrades). C'est un modèle structurel présentant le défaut comme l'éventualité que les actifs d'une firme dépasse une certaine borne stochastique.

2. Analyse de la structure de dépendance entre les risques de défaut des différents noms composant le portefeuille considéré. La dépendance entre les rendements des actions des différentes firmes est considérée comme substitués (proxy) de la dépendance entre les différents temps de défaut. L'invariance de la structure de dépendance, donnée par les copules, à des transformations monotones a rendu cette hypothèse très raisonnable.
3. Évaluation des produits dérivés sur le crédit sur un portefeuille hypothétique composés de dix noms.

Plusieurs structures de dépendance données par les copules les plus utilisées en finance (copule normale, Student, Gumbel, Frank et Clayton) ont été considérées. Les fonctions de Kendall ont été utilisées pour discriminer entre elles. On a trouvé que la copule de Clayton correspond le mieux à la dépendance empirique.

Les résultats trouvés dans les deux dernières parties sont utilisés pour évaluer des produits dérivés sur le crédit sur un portefeuille. Des swaps du premier et second nom en défaut sont évalués par simulation Monte Carlo. Des probabilités de défaut corrélées selon la copule de Clayton ont été uti-

lisées.

La méthodologie présentée dans ce mémoire est très flexible et pourrait être appliquée à tout portefeuille de crédit ou d'obligations. Le modèle du risque de crédit marginal pourrait être remplacé par tout autre modèle, permettant de générer des probabilités de défaut en fonction du temps, sans changer la suite de l'analyse de la dépendance et l'évaluation des dérivés de crédit.

Cette analyse pourrait être aussi utile pour d'autres fins autre que l'évaluation des produits dérivés sur le crédit dont notamment le calcul de la valeur à risque ou le capital économique d'un portefeuille de crédit donnée.

Toutefois, il serait important de s'interroger sur la stabilité de la corrélation dans le temps et son effet sur la valeur des dérivés de crédit écrit sur un portefeuille. D'autre part, notre analyse de la dépendance entre les risques de défaut suppose que les risques de défaut sont indépendants dans le temps. Incorporer l'analyse de la dépendance temporelle rendrait l'analyse de la corrélation de défaut plus réaliste.

Appendice A

Démonstration de la Proposition 3.1.1

Pour démontrer la formule pour la probabilité de défaut donnée dans la proposition 3.1.1, on procède de la façon suivante.

On sait que (e.g Musiela et Rutkowski (1998), Corollary B.3.4), si $Y_t = at + \sigma W_t$, a réel et $\sigma > 0$, on a

$$P(Y_s > y, \forall s \leq t) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{at-y}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{2ay/\sigma^2} \Phi\left(\frac{at+y}{\sigma\sqrt{t}}\right) & y \leq 0 \\ 0 & y > 0 \end{cases}. \quad (\text{A.1})$$

Comme Z et W sont indépendants, V est indépendant de L . En appli-

quant (A.1), et en posant $a = -\sigma^2/2$ et $y = \log\left(\frac{LD}{V_0}\right)$, on trouve

$$\begin{aligned} P(V_s > LD, \forall s \leq t | L = l) &= P\left\{Y_s > \log\left(\frac{LD}{V_0}\right), \forall s \leq t\right\} \\ &= \begin{cases} \Phi\left(\frac{at-y}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{2ay/\sigma^2}\Phi\left(\frac{at+y}{\sigma\sqrt{t}}\right) & y \leq 0 \\ 0 & y > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc, si $b = \frac{\log d}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} P(t) &= E\{P(V_s > LD, \forall s \leq t | L)\} \\ &= \int_{-\infty}^b \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \Phi\left(\frac{-\lambda z + \log d - A_t^2/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) dz \\ &\quad - d \int_{-\infty}^b e^{-\lambda z - \lambda^2/2} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \Phi\left(\frac{\lambda z + \lambda^2 - \log d - A_t^2/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) dz \\ &= \int_{-\infty}^b \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \Phi\left(\frac{-\lambda z + \log d - A_t^2/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) dz \\ &\quad - d \int_{-\infty}^{b+\lambda} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \Phi\left(\frac{\lambda x - \log d - A_t^2/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, si Z_0 est une variable distribuée selon une loi normale standard, et indépendante de Z , on a

$$\begin{aligned} P(t) &= P\left(Z \leq b, Z_0 \leq \frac{-\lambda Z + \log d - A_t^2/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &\quad - dP\left(Z \leq b + \lambda, Z_0 \leq \frac{\lambda Z - \log d - A_t^2/2}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &= P\left(Z \leq b, \sigma\sqrt{t}Z_0 + \lambda Z \leq \log d - A_t^2/2\right) \\ &\quad - dP\left(Z \leq b + \lambda, \sigma\sqrt{t}Z_0 - \lambda Z \leq -\log d - A_t^2/2\right) \\ &= \Phi_2\left(\frac{\log d}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}, -\frac{A_t}{2} + \frac{\log d}{A_t}; \frac{\lambda}{A_t}\right) \\ &\quad - d\Phi_2\left(\frac{\log d}{\lambda} + \frac{\lambda}{2}, -\frac{A_t}{2} - \frac{\log d}{A_t}; -\frac{\lambda}{A_t}\right), \end{aligned}$$

car $Z_+ = \frac{\sigma\sqrt{t}Z_0 + \lambda Z}{A_t}$ et $Z_- = \frac{\sigma\sqrt{t}Z_0 - \lambda Z}{A_t}$ sont des variables distribuées selon des lois normales standards, et $\text{corr}(Z, Z_+) = \lambda/A_t$, $\text{corr}(Z, Z_-) = -\lambda/A_t$. La formule pour $P(t)$ est donc prouvée. Comme $A_0 = \lambda$, la formule pour $P(0)$ est valide, puisque

$$\Phi_2\left(\frac{\log d}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}, -\frac{A_0}{2} + \frac{\log d}{A_0}; \frac{\lambda}{A_0}\right) = \Phi_2(b, b; 1) = \Phi(b),$$

et

$$\Phi_2\left(\frac{\log d}{\lambda} + \frac{\lambda}{2}, -\frac{A_0}{2} - \frac{\log d}{A_0}; -\frac{\lambda}{A_0}\right) = \Phi_2(b + \lambda, -b - \lambda; -1) = 0.$$

Finalement, la formule (3.1) est évidente. Ceci complète la preuve de la proposition.

Appendice B

Calcul du ratio dette par action

Dans cette annexe on donne la procédure de calcul de la dette par action. C'est la somme de la dette totale d'une entreprise divisée par le nombre des actions émises.

La dette totale est calculée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Dette totale} &= \text{Dette à court terme} + \text{Dette à long terme} \\ &\quad + 0.5 \times \text{Autres dettes à court terme} \\ &\quad + 0.5 \times \text{Autres dettes à long terme} \\ &\quad + 0 \times \text{Comptes payables.} \end{aligned}$$

La *dette à court à terme* et la *dette à long terme* sont composées de la dette à court et long terme portant intérêt dont notamment les obligations,

les prêts et les découverts bancaires. Les *autres dettes à court terme* et *autres dettes à long terme* sont composées des dettes ne portant pas intérêts tels que les impôts à payer et le passif découlant du régime de retraite. Dans ce cas les comptes *autres dettes à court et long terme* sont incluses à 50% et les comptes payables sont exclus du calcul de la dette puisqu'ils ne participent pas au niveau d'endettement de la firme.

Les dettes d'une filiale sont consolidées à 100% même si la société mère ne détient pas la totalité de la filiale. Pour ajuster ceci, il est supposé que la société filiale a un ratio de dette par action k On considère alors que :

$$\text{Dette minoritaire} = k \times \text{Intérêt minoritaire dans filiale.}$$

Le nombre d'action émises est calculé de la façon suivante :

$$\text{Nombre d'actions} = \text{Actions classiques} + \text{Actions privilégiées,}$$

où

$$\text{Actions classiques} = \text{Capitalisation boursière} / \text{Prix d'action,}$$

et

$$\text{Actions privilégiées} = \text{Équité privilégiée} / \text{Prix d'action.}$$

Enfin

$$\text{Dette par action} = \text{Dette totale} / \text{Nombre d'actions.}$$

Références

- [1] B. Abdous, C. Genest & B. Rémillard (2004). Dependence properties of meta-elliptical distributions, à paraître dans *Statistical Modeling and Analysis for Complex Data Problem*, P. Duchesne and B. Rémillard Eds, Kluwer Academic Publishing.
- [2] E.I. Altman (1993). *Corporate Financial Distress and Bankruptcy*, Second Edition, John Wiley and Sons, New York, NY.
- [3] R. Anderson & S. Sundaresan (1996). Design and valuation of debt contracts, *The Review of Financial Studies*, **9** (1), pp 37-68.
- [4] P. Barbe, C. Genest, K. Ghoudi & B. Rémillard (1996). On Kendall's Process, *Journal of Multivariate Analysis*, **58**, pp 197–229.
- [5] T. Bielecki & M. Rutkowski (2000). Multiple ratings model of defaultable term structure, *Mathematical Finance*, **10**, pp 125-139.
- [6] F. Black & J. Cox (1976). Valuing Corporate Securities : Some Effects of Bond Indenture Provisions, *Journal of Finance*, **31**, pp 351–367.
- [7] F. Black & S. Scholes (1973). The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**, pp 637–654.

- [8] E. Bouyé, V. Durrleman, A. Nikeghbali G. Riboulet & T. Roncalli (2001). Copulas : an open field for risk management, Rapport technique, Crédit Lyonnais.
- [9] P. Collin-Dufresne & B. Solnik (2001). On the term Structure of default premia in the swap and libor markets, *Journal of Finance*, **56** (3), pp 1095-1115.
- [10] C. Cox, J. Ingersoll & S. Ross (1985). A theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, **53**, pp 385–407.
- [11] M. Crouhy, D. Galai & R. Mark (2000). A comparative analysis of current credit risk models, *Journal of Banking and Finance*, **24**, pp 59–117.
- [12] Q. Dai & K. J. Singleton (2000). Specification analysis of affine term-structure models, *Journal of Finance*, **55** (5), pp 1943-1978.
- [13] S. Das & G. Geng (2002). Modeling the processes of correlated default, Working paper.
- [14] S. Das & P. Tufano (1996) Pricing credit sensitive debt when interest rates, credit ratings and credit spreads are stochastic, *The Journal of Financial Engineering*, **5**, pp 161–198.
- [15] M. Davis et V. Lo (2000). Modeling default correlation in bond portfolios, Tokyo-Mutsubishi International Plc, Working Paper.
- [16] M. Davis & V. Lo (2001). Infectious default, *Quantitative Finance*, **1**, pp 382–387.
- [17] L. Douglas (1995). Default correlation and credit analysis, *Journal of fixed Income*, **5** (1), pp 76–87.

- [18] G. Duffee (1999). Estimating the price of default risk, *Review of Financial Studies*, **12**, pp 197-226.
- [19] D. Duffie (1998). First-to-default valuation, Working Paper, Graduate school of business, Stanford University.
- [20] D. Duffie & N.Garleanu (2001). Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations, Working Paper, Graduate School of Business Stanford University.
- [21] D. Duffie & K. Singleton (2000). Transform analysis and option pricing for affine jump diffusions, *Econometrica*, **68**, pp 1434–1376.
- [22] D. Duffie & K. Singleton (1999). Modeling term structures of defaultable bonds, *Review of financial studies*, **12**, pp 687–720.
- [23] D. Duffie & D. Lando (2001) Term structure of credit spreads with incomplete information accounting information, *Econometrica* **69 (3)** pp 633-664.
- [24] V. Durrleman, A. Nikeghbali & T. Roncalli (2000). Which copula is the right one?, Rapport technique, Groupe de Recherche Opérationnelle Crédit Lyonnais, France.
- [25] R.J. Elliot, M. Jeanblanc & M. Yor (2000). On models of default risk, *Mathematical finance*, **10 (2)**, pp 97-195.
- [26] P. Embrechts, A.J. McNeil & D. Straumann (2002). Correlation and dependence in risk management : properties and pitfalls, In *Risk management : value at risk and beyond*, Cambridge Univ. Press, pp 176–223.
- [27] J.Ericsson & J.Reneby (1998). A Framework for Valuing Corporate Securities, *Applied Mathematical Finance*, **5**, pp 143-163.

- [28] E. Erturk (2000) Default Correlation Among Investment-Grade Borrowers, *Journal of fixed income*, **9 (4)**, pp 55 - 60
- [29] P. Francois & E. Morellec (2003). Capital Structure and Asset Prices : Some Effects of Bankruptcy Procedures, à publier au *Journal of Business*.
- [30] E. Frees & E. Valdez (1998). Understanding Relationships Using Copulas, *North American Actuarial Journal*, **2**, pp 1–25.
- [31] R. Frey & A. McNeil (2001). Modelling dependent defaults, Working Paper, ETH Zurich.
- [32] C. Genest, K. Ghoudi & L.-P. Rivest (1995). A Semiparametric Estimation Procedure of Dependence Parameters in Multivariate Families of Distributions, *Biometrika*, **82**, pp 543–552.
- [33] C. Genest & R. MacKay (1986). Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données, *La revue canadienne de statistique*, **14**, pp 145-159.
- [34] C. Genest, J.-F. Quessy & B. Rémillard (2003). Goodness of fit procedures for copula models based on the integral probability transformation, à paraître.
- [35] K. Giesecke (2001). Structural Modeling of correlated default with incomplete information, Humboldt-Universität zu berlin, Working Paper.
- [36] K. Giesecke (2002). An exponential Model for dependant defaults , Working Paper, Humboldt-Universität, Berlin.
- [37] G. Greg, C. Finger & M. Bhatia (1997). CreditMetrics technical document, Internal document, RiskMetrics Group, New York.

- [38] D. Hamilton, J. James et N. Webber (2001). Copula methods and the analysis of credit risk, Working Paper, University of Warwick.
- [39] H. Hu & L. Lawrence, (2000). Estimating Recovery Rates, Internal document, JPMorgan.
- [40] J. Hull & A. White (2000). Valuing credit default Swap II : Modeling default correlation, *Journal of Derivatives*, **8**, pp 987–907.
- [41] R. Jarrow, D. Lando & S. Turnbull (1997). A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads, *Review of Financial Studies*, **10**, pp 481–523.
- [42] R. Jarrow, S.M. Turnbull, (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *Journal of finance*, vol. **L**, **1**, pp 53-85.
- [43] R. Jarrow, D. Lando & F. Yu (2000). Default risk and diversification : theory and application, Working Paper
- [44] R. Jarrow & F. Yu (1999). counterparty risk and the pricing of defaultable securities, *Cornell University*, Working Paper
- [45] M. Jeanblanc & M. Rutkowski (2000). Default risk : mathematical tools, Rapport technique, University d'Evry
- [46] H. Joe (1997). Multivariate Models and Dependence Concepts, *Mono-graphs on statistics and applied Probability*, **73**, Chapman and Hall, London.
- [47] J-F. Jouanine, G. Rapuch, G. Riboulet & T. Roncalli (2001). Modeling dependence for credit derivatives with copulas, Rapport technique, Groupe de Recherche Opérationnelle Crédit Lyonnais, France.

- [48] M. Kijima (2000). Valuation of a credit swap of the basket type, *Review of Derivatives Research*, **4** (1), pp 79–95.
- [49] D. Lando (1998). On Cox processes and credit risk securities, *Review of Derivatives Research* **2**, pp 99-120.
- [50] D. Lando (1998). On rating transition analysis and correlation, In : *Credit Derivatives. Applications for Risk Management, Investment and Portfolio Optimisation*, Risk Books, Risk Publications, pp 147–155.
- [51] H. Leland (1994). Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure, *Journal of Finance*, **49**, pp 1213–1252.
- [52] H. Leland & K. B. Toft (1996). Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads. *Journal of Finance*, **51**, pp 987-1019.
- [53] D.X. Li (2000). On default correlation : a copula function approach, *Journal of fixed Income*, **9**, pp 43–54
- [54] F. Lindskog (2000). Modeling dependence with copulas, Dissertation, Département de Mathématiques, ETH Zurich.
- [55] F. Longstaff & E.S. Schwartz (1995). A Simple Approach to Valuing Risky and Floating Rate Debt, *Journal of Finance*, **50**, pp 789-819
- [56] D. Madan & H. Unal (1998). Pricing the risks of default, *Review of derivatives Research*, **2**, pp 121-160.
- [57] R. Mashal & M. Naldi (2002). Pricing Multiname Credit Derivatives : Heavy tailed Hybrid Approach, Working Paper.
- [58] A. McNeil & M. F. Rudiger(2001). Modeling dependant default, Working Paper, Département de Mathématiques, ETH Zurich.

- [59] P. Mella-Barral & W. Perraudin (1997). Strategic debt service, *Journal of Finance*, **52**, pp 531-556.
- [60] R. Merton (1974). On the Pricing of Corporate Debt : The Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance*, **29**, pp 449-470.
- [61] M. Musiela, & M. Rutkowski (1998). Martingale Methods in Financial Modelling, 2nd edn, Springer-Verlag, Berlin.
- [62] R.B. Nelsen (1999). An Introduction to copulas, *Lectures Notes in Statistics*, **139**, Springer-Verlag, New York.
- [63] A. Prampolini (2001). Modeling default correlation with multivariate intensity processes, Working Paper.
- [64] J. Saa-Requejo & P. Santa-Clara (1999). Bond pricing with default risk, Working Paper, Anderson Graduate School of Mgmt. UCLA.
- [65] P.J. Schönbucher (1996). Valuation of securities subject to credit risk, Working paper, Universität Bonn.
- [66] P.J. Schönbucher (2000). The pricing of credit risk and credit derivatives, Livre non publié (disponible de [http ://www.finasto.uni-bonn.de/~schonbuc/](http://www.finasto.uni-bonn.de/~schonbuc/))
- [67] P.J. Schönbucher & D. Schubert (2001). Copula-dependent default risk in intensity models, Working Paper, Department of Statistics, Bonn University.
- [68] C. Zhou (2001). An analysis of default correlation and multiple defaults, *Review of financial Studies*, **14**, pp 555-576.

- [69] C. Zhou (1997). A Jump-diffusion approach to modeling credit risk and valuing defaultable securities, Finance and Economics Discussion Paper Series, Board of Governors of the Federal Reserve System.
- [70] T.C. Wilson (1997). Portfolio credit risk (I), *Risk*, **10**, pp 111–117.