

École des Hautes Études Commerciales de Montréal
Affiliée à l'Université de Montréal

**Un modèle d'évaluation d'options américaines sur contrats à terme
énergétiques**

Sébastien Monciaud

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Mai 2002
© Sébastien Monciaud, 2002

SOMMAIRE

Dans ce travail de recherche, nous développons un modèle opérationnel d'évaluation d'options américaines sur contrat à terme pour produits énergétiques.

Les prix des produits énergétiques présentant empiriquement des signes marqués de discontinuité, notre modèle a été établi sur la base d'un processus mixte de diffusion avec sauts pour l'évolution de l'actif sous-jacent. En outre, comme des études antérieures l'ont déjà prouvé, il existe aussi pour ces mêmes produits énergétiques un bénéfice à leur détention qui influence la relation entre leurs prix au comptant et leurs prix à terme. C'est pourquoi une deuxième variable d'état a été introduite dans notre modèle, à savoir un bénéfice de détention stochastique. Les investissements dans la plupart des actifs conditionnels aux produits énergétiques se faisant surtout dans un but de couverture à court terme, terme pour lequel la volatilité du taux d'intérêt n'a que peu d'influence, notre modèle considère donc en conséquence tout au long de notre analyse le taux d'intérêt comme étant constant.

Le modèle est développé autour d'une approximation quadratique permettant de réduire fortement les temps de calculs par rapport à d'autres modèles numériques, et ainsi de le rendre directement fonctionnel dans n'importe quelle salle de négociation.

Nous avons montré que l'erreur d'approximation du modèle est tout à fait acceptable dans le cadre d'activités quotidiennes de négociation sur les marchés énergétiques.

Nous avons estimé certains des paramètres du modèle à l'aide d'un filtre de Kalman basé sur les prix à terme de gaz naturel, et avons effectué une analyse de sensibilité du modèle par rapport aux paramètres ainsi obtenus. Cette analyse de sensibilité nous a permis de démontrer que le modèle répondait parfaitement aux attentes que l'on pouvait avoir par rapport à chaque modèle d'évaluation de biens conditionnels, mais que toutefois celui-ci possédait un certain nombre de caractéristiques inattendues venant ainsi modifier la dynamique classique du prix des options sur contrat à terme.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de recherches, Messieurs Pierre Laroche et Bruno Rémillard pour leur souci d'excellence, leur confiance, leurs encouragements, leurs conseils, leurs recommandations et leur disponibilité. Merci pour m'avoir encadré tout au long de ce travail et m'avoir permis de le mener à bien. Veuillez trouver dans ce mémoire toute ma reconnaissance et mon respect.

Je tiens également à remercier Messieurs Pierre Fortin et James Mott d'Hydro-Québec pour le temps qu'ils m'ont consacré et le soutien technique qu'ils m'ont procuré durant cette recherche.

Je tiens finalement à remercier mon père et ma mère pour le soutien moral et matériel qu'ils m'ont apporté tout au long de ma vie et qui m'ont permis d'aller jusqu'au bout de mes rêves. Je vous suis infiniment reconnaissant.

Sans oublier Valérie et tous mes amis qui n'ont cessé de m'encourager et qui m'ont permis d'affronter nombre de moments difficiles.

Merci à vous tous.

TABLE DES MATIÈRES

<i>INTRODUCTION GÉNÉRALE</i>	<i>1</i>
<i>CHAPITRE 1 : REVUE DE LA LITTÉRATURE</i>	<i>3</i>
Introduction	3
1.1 Les actifs énergétiques	3
1.2 Les options sur contrats à terme	10
1.2.1 Le modèle de Black pour l'évaluation d'options sur contrat à terme	11
1.3 Conclusion	14
<i>CHAPITRE 2 : LE MODÈLE D'HILLIARD ET REIS</i>	<i>16</i>
Introduction	16
2.1 Résumé de l'article d'Hilliard et Reis (1998)	16
2.2 Les hypothèses de base du modèle	17
2.3 Évaluation de contrats à terme avec un modèle à deux facteurs	18
2.4 Modèle de diffusion à trois facteurs avec sauts	20
2.5 Conclusion	23
<i>CHAPITRE 3 : LE DÉVELOPPEMENT DU MODÈLE D'ÉVALUATION</i>	<i>26</i>
Introduction	26
3.1 Les hypothèses de base du modèle	26
3.2 L'évaluation des contrats à terme	29
3.3 Le modèle d'évaluation d'options européennes sur contrat à terme	40
3.4 Le modèle d'évaluation d'options américaines sur contrat à terme	50
3.5 Conclusion	58
<i>CHAPITRE 4 : MÉTHODOLOGIE ET ANALYSE DES RÉSULTATS</i>	<i>59</i>
Introduction	59
4.1 Estimation de paramètres : espace état et filtre de Kalman	60
4.1.1 L'espace État-Mesure	60
4.1.2 Filtre de Kalman	63
4.1.3 La base de données	68
4.1.4 Processus d'optimisation et résultats	69
4.2 Évaluation de la performance du modèle d'évaluation d'options américaines sur contrat à terme	76
4.2.1 Le modèle d'évaluation d'Amin (1993)	77
4.2.2 Implantation du modèle et résultats	78
4.3 Analyse de sensibilité	88
4.3.1 Les indices classiques de sensibilité	90

4.3.2	Les indices de sensibilité par rapport aux paramètres de sauts	97
4.3.3	Conclusion	98
CONCLUSION GÉNÉRALE		100
ANNEXES		101
Annexe 1 : Le modèle d'évaluation en temps discret d'Amin (1993)		102
Annexe 2 : Les graphiques relatifs à l'analyse de sensibilité du modèle		111
BIBLIOGRAPHIE		134

LISTE DES TABLES ET FIGURES

Table I	: Paramètres du modèle des prix à terme estimés à partir du prix de contrats à terme sur le gaz naturel.....	72
Table II	: Valeurs théoriques d'options sur contrat à terme dont les prix au comptant suivent un processus mixte de diffusion avec sauts en présence d'un bénéfice de détention stochastique.....	80
Table III	: Valeurs théoriques d'options d'achat sur contrat à terme lors d'une augmentation importante des prix à terme.....	85
Table IV	: Temps de calcul et précision du modèle d'évaluation d'options d'Amin.....	86
Figure 1	: Graphique du prix à terme de décembre 2001 pour le gaz naturel NYMEX livraison Henry Hub.....	9
Figure 2	: Représentation d'ensemble de la mécanique du filtre de Kalman.....	66
Figure 3	: Représentation d'ensemble du processus d'estimation des paramètres du modèle des prix à terme.....	70
Figure 4	: Graphique des variables d'états estimées et du prix du contrat à terme d'octobre 2001.....	74
Figure 5	: Graphique des erreurs de prédiction pour les contrats à terme d'octobre et de novembre 2001.....	75
Figure 6	: Espace d'états (Ω_n) de l'approximation discrète de la distribution des prix à terme pour un paramètre de discrétisation n fixe.....	104

- Figure 7** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction du prix à terme sous-jacent.....111
- Figure 8** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction du prix à terme sous-jacent.....111
- Figure 9** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de l'écoulement du temps.....112
- Figure 10** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de l'écoulement du temps.....112
- Figure 11** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de l'écoulement du temps et du prix à terme sous-jacent.....113
- Figure 12** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de l'écoulement du temps et du prix à terme sous-jacent.....113
- Figure 13** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de la date d'échéance de l'option.....114
- Figure 14** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de la date d'échéance de l'option.....114
- Figure 15** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction du taux d'intérêt sans risque.....115
- Figure 16** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction du taux d'intérêt sans risque.....115

- Figure 17** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sous-jacents.....116
- Figure 18** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sous-jacents.....116
- Figure 19** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de l'écart-type du rendement des prix au comptant sous-jacents aux prix à terme.....117
- Figure 20** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de l'écart-type du rendement des prix au comptant sous-jacents aux prix à terme.....117
- Figure 21** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de l'écart-type des changements du bénéfice net de détention.....118
- Figure 22** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de l'écart-type des changements du bénéfice net de détention.....118
- Figure 23** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de la vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention.....119
- Figure 24** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de la vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention.....119

- Figure 25** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction du coefficient de corrélation entre les prix au comptant sous-jacents aux prix à terme et le bénéfice net de détention....120
- Figure 26** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction du coefficient de corrélation entre les prix au comptant sous-jacents aux prix à terme et le bénéfice net de détention....120
- Figure 27** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de la date d'échéance du contrat à terme sous-jacent.....121
- Figure 28** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de la date d'échéance du contrat à terme sous-jacent.....121
- Figure 29** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de la fréquence moyenne des sauts de Poisson ajustée pour le risque122
- Figure 30** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de la fréquence moyenne des sauts de Poisson ajustée pour le risque122
- Figure 31** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de l'amplitude aléatoire moyenne des sauts de Poisson ajustée pour le risque.....123
- Figure 32** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de l'amplitude aléatoire moyenne des sauts de Poisson ajustée pour le risque.....123

- Figure 33** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de l'écart-type de la distribution de l'amplitude aléatoire des sauts de Poisson ajustée pour le risque124
- Figure 34** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de l'écart-type de la distribution de l'amplitude aléatoire des sauts de Poisson ajustée pour le risque124
- Figure 35** : Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de la fréquence moyenne et de l'amplitude aléatoire moyenne des sauts de Poisson ajustées pour le risque.....125
- Figure 36** : Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de la fréquence moyenne et de l'amplitude aléatoire moyenne des sauts de Poisson ajustées pour le risque.....125
- Figure 37** : Graphique de l'évolution de l'écart-type du rendement des prix à terme en fonction de l'écart-type du rendement des prix au comptant sous-jacents aux prix à terme126
- Figure 38** : Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction de l'écart-type du rendement des prix au comptant sous-jacents aux prix à terme.....126
- Figure 39** : Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction de l'écart-type du rendement des prix au comptant sous-jacents aux prix à terme.....127
- Figure 40** : Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction de l'écart-type des changements du bénéfice net de détention.....127

- Figure 41** : Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction de l'écart-type des changements du bénéfice net de détention.....128
- Figure 42** : Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction de la vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention.....128
- Figure 43** : Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction de la vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention.....129
- Figure 44** : Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction du coefficient de corrélation entre les prix au comptant sous-jacents aux prix à terme et le bénéfice net de détention.....129
- Figure 45** : Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction du coefficient de corrélation entre les prix au comptant sous-jacents aux prix à terme et le bénéfice net de détention.....130
- Figure 46** : Graphique de l'évolution de la variance du rendement des prix à terme en fonction de l'écoulement du temps.....130
- Figure 47** : Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction de l'écoulement du temps.....131
- Figure 48** : Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction de l'écoulement du temps.....131

- Figure 49** : Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction de la date d'échéance de l'option.....132
- Figure 50** : Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction de la date d'échéance de l'option.....132
- Figure 51** : Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction de la date d'échéance du contrat à terme sous-jacent.....133
- Figure 52** : Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction de la date d'échéance du contrat à terme sous-jacent.....133

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les modèles d'évaluation d'options et l'univers log-normal de Black et Scholes

Depuis la publication en 1973 du modèle de Black et Scholes (1973) pour l'évaluation d'options, nous avons assisté à l'éclosion d'un nombre important de modèles de la sorte. Ces nouveaux modèles d'évaluation d'options possèdent comme base commune la modification des hypothèses restrictives du modèle de Black et Scholes, et tentent de justifier les biais de prix observés empiriquement lors de l'utilisation de ce même modèle, que ce soit en rapport avec la maturité ou le degré d'enjeu des options. En effet, on constate empiriquement que les distributions implicites des rendements d'actifs possèdent une asymétrie négative et un degré de kurtose supérieur à ce qui serait permis dans l'univers de la distribution log-normale du modèle de Black et Scholes. Guidée par cette constatation, la recherche de modèles alternatifs d'évaluation d'options s'est donc concentrée sur la formulation d'hypothèses et le développement de modèles de distribution qui décriraient mieux la dynamique de l'actif sous-jacent.

Chaque modèle d'évaluation d'options repose sur trois hypothèses de base, à savoir le processus de distribution des prix de l'actif sous-jacent, le processus des taux d'intérêt et en dernier lieu le prix de marché des facteurs de risque. Pour chacune de ces hypothèses, il existe un certain nombre de choix possibles. Par exemple, le prix de l'actif sous-jacent peut suivre un processus en temps discret ou en temps continu. Parmi les choix possibles pour un processus en temps continu, celui-ci peut être markovien ou non markovien, à diffusion ou sans diffusion, avec sauts ou non, un mélange entre des composantes de saut et des composantes de diffusion avec ou sans volatilité stochastique, etc. Pour la structure à terme des taux d'intérêt, des choix similaires peuvent être faits. Un grand nombre de modèles d'évaluation d'options peuvent ainsi être considérés.

Constatant que la recherche pour un modèle parfait d'évaluation d'options pourrait s'avérer sans fin, Bakshi, Cao et Chen (1997) tentent plutôt de répondre à un certain nombre de questions telles que : Quel est le gain apporté par chaque modèle? Le gain, si gain il y a, amené par un processus plus réaliste suffit-il à compenser la complexité additionnelle du modèle et les coûts d'implantation? Est-ce que chaque modification des hypothèses de Black et Scholes aide à expliquer le biais empirique associé à leur modèle, tel que la structure de volatilité par exemple?

Pour ce faire, ils ont conduit une étude empirique sur les mérites relatifs de quelques modèles d'évaluation d'options de type européen. Les modèles qu'ils ont considérés sont le modèle de Black et Scholes, un modèle avec taux d'intérêt stochastique, un modèle avec volatilité stochastique, un modèle avec taux d'intérêt stochastique et volatilité stochastique, un modèle avec volatilité stochastique et sauts aléatoires, et finalement un modèle avec taux d'intérêt stochastique, volatilité stochastique et sauts aléatoires, développé par leurs soins, qui est assez riche pour contenir tout les autres modèles en tant que cas spéciaux. En se basant sur des prix d'options d'achat pour l'indice S&P 500, ils en arrivent à la conclusion qu'un modèle avec volatilité stochastique et sauts aléatoires est une meilleure alternative au modèle de Black et Scholes, non seulement parce que le premier est plus performant que le deuxième, mais également parce que celui-ci est facile à implanter et à utiliser en pratique.

Conscient de la conclusion de Bakshi, Cao et Chen (1997), nous allons donc dans ce mémoire proposer, dans le cadre des marchés énergétiques, un modèle d'évaluation d'options sur contrat à terme alternatif au modèle de Black (1976), et qui intègre la possibilité d'exercice anticipé des options américaines.

CHAPITRE I : REVUE DE LA LITTÉRATURE

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous passons en revue un certain nombre d'articles ayant un lien avec notre recherche, et desquels notre modèle d'évaluation d'options est inspiré. Nous introduisons, en premier lieu, les marchés énergétiques et les caractéristiques qui leurs sont propres. En second lieu, nous abordons les concepts relatifs aux options sur contrat à terme. Puis, en dernier lieu, nous terminons ce chapitre par une conclusion d'ordre générale.

1.1 Les actifs énergétiques

Les marchés énergétiques sont des marchés en pleine évolution dont la dynamique des quinze dernières années a été marquée par une vague de déréglementation qui s'est propagée mondialement, en plus d'avoir été périodiquement modifiée par l'incorporation de produits dérivés et de nouvelles techniques de gestion des risques¹. En comparaison des marchés énergétiques, les marchés financiers font figure de marchés matures. L'analyse fondamentale nous démontre que les facteurs sous-jacents influençant l'évolution du prix des produits énergétiques diffèrent diamétralement des taux d'intérêt et autres facteurs bien établis pour les actifs financiers. Les actifs énergétiques sont régis par les relations dynamiques entre production et consommation, transfert et stockage, achat et vente, et ultimement par la "réduction en cendres" du produit physique. Les questions concernant le stockage, le transport, le climat, et les avancées technologiques jouent un rôle majeur ici. Chaque acteur du marché de l'énergie, du producteur au consommateur final, prend ses décisions en fonction de nombreux facteurs fondamentaux, qui eux mêmes affectent le comportement des marchés énergétiques. Ce qui rend les produits énergétiques si différents est le très grand nombre de facteurs sous-jacents qui complexifient le comportement de leurs prix.

¹ Voir par exemple le livre Energy desk book de la Duke Energy Corporation (1999) pp. i, ou pour un résumé de l'évolution du marché du gaz naturel aux États Unis le chapitre 1 du livre de Sturm (1997).

Cette complexité rend plus difficile le développement de modèles quantitatifs permettant de décrire l'évolution de tels actifs, tout en étant assez simples pour une utilisation rapide et efficace sur un pupitre de négociation.

Les marchés énergétiques présentent les cinq principales caractéristiques suivantes (voir Pilipovic (1998)) :

- Décentralisation des marchés.
- Capacités de stockage limitées et coûts de transport.
- Caractère saisonnier des prix et existence d'un niveau d'équilibre à long terme.
- Existence d'un bénéfice de détention.
- Présence de sauts dans les prix.

Alors que les marchés financiers sont essentiellement centralisés en terme de localisation, capital et expertise, les marchés énergétiques sont quant à eux fortement décentralisés. Les producteurs et les utilisateurs finaux d'énergie sont éparpillés à travers le monde. La plupart des acteurs du marché nord américain utilisent des contrats à terme de la bourse de New York ou de Kansas City pour couvrir leurs risques locaux. Cependant, ces contrats portent sur des actifs livrés à des points spécifiques et peuvent donc se comporter totalement différemment de l'exposition au risque énergétique local à couvrir. La décentralisation introduit donc un risque de base géographique qui est unique aux marchés énergétiques. Tandis qu'un dollar vaut un dollar partout au pays, les prix des actifs énergétiques dépendent de leur nature et de leur localisation qui représentent des facteurs fondamentaux dans leur détermination. Compte tenu de ce besoin de couverture du risque local, un grand nombre de contrats à terme et d'options sont négociés au comptoir.

L'offre et la demande de produits énergétiques est influencée par des facteurs fondamentaux qui n'existent pas dans le cas des marchés financiers : le stockage et les coûts de transport. Les problèmes créés par des capacités de stockage limitées conduisent la volatilité intra-quotidienne des prix énergétiques à se comporter selon différents régimes, tout en étant supérieure à la volatilité observée sur les marchés financiers. Une autre conséquence liée à ces problèmes de capacité de stockage limitées est le fait que les prix au comptant possèdent une très grande volatilité, alors que pour les prix à terme, on observe une volatilité qui décroît significativement avec l'augmentation du temps à faire avant l'échéance. Effectivement, on s'attend à ce que dans le long terme l'offre et la demande reviennent à une position d'équilibre. Ainsi, les prix de long terme reflètent cet équilibre. En ayant une vision plus large, on peut observer que les prix des produits énergétiques possèdent des comportements différents selon le terme considéré. Les prix sont influencés par les conditions de stockage à court terme et par le potentiel futur de l'offre d'énergie dans le long terme. Les prix à terme reflètent ces deux facteurs fondamentaux et possèdent donc des caractéristiques différentes selon qu'on les considère dans le long ou le court terme.

Conjugués aux problèmes de stockage, s'ajoutent les problèmes de coûts de transport qui représentent une variable supplémentaire venant influencer la volatilité du coût des matières premières. Ces coûts de transport vont dépendre de la nature du produit énergétique considéré, de son lieu de livraison, ainsi que de la localisation de l'acheteur.

La demande agrégée du secteur résidentiel amène un effet de saisonnalité dans les prix des produits énergétiques, qui se traduit par exemple par une augmentation des prix de l'huile de chauffage pendant l'hiver et une baisse de ceux-ci durant l'été, au profit d'une augmentation des prix de l'électricité liée à l'utilisation croissante de l'air conditionné. Ces effets de saisonnalité ne se constatent pas uniquement au travers des prix au comptant historiques, mais s'observent également dans les prix à terme.

D'une façon générale, la plupart des marchés économiques évoluent autour d'une sorte de niveau d'équilibre. Ce niveau d'équilibre peut être un taux d'intérêt historique, le rendement d'un actif ou le prix d'une denrée. Plusieurs études² tendent à démontrer que les processus stochastiques avec retour vers la moyenne décrivent bien la dynamique de tels marchés.

Dans le cas des marchés énergétiques, on observe une forte tendance au retour vers un niveau d'équilibre à long terme. En effet, les guerres, les tempêtes et autres événements inattendus créent des déséquilibres entre l'offre et la demande d'énergie. Le processus de retour vers la moyenne mesure avec quelle rapidité ces événements vont se dissiper, ou combien de temps cela va-t-il prendre pour que l'offre et la demande retournent à un niveau d'équilibre.

La propriété de retour vers un niveau d'équilibre du prix des produits énergétiques et des denrées a été considérée dans une série d'articles récents, tels que par exemple Besssembinder, Coughenour, Seguin, et Smoller (1995), Cortazar et Schwartz (1994), et Schwartz (1997). Plus récemment, Pilipovic (1998), et Schwartz et Smith (2000) ont développé de façon indépendante un modèle de prix à deux facteurs pour les denrées, dans lequel les prix à court terme sont assumés retourner vers un niveau d'équilibre à long terme qui lui-même possède un comportement stochastique. Schwartz et Smith démontrent que leur modèle est formellement équivalent à celui de Gibson et Schwartz (1990b), qui lui considère un bénéfice de détention stochastique, tout en étant en apparence plus intuitif et naturel.

L'existence d'un bénéfice de détention est une caractéristique importante propre aux marchés énergétiques, et aux denrées de façon plus générale. Selon Brennan (1990), le bénéfice de détention d'une denrée représente les bénéfices obtenus par la détention physique de la denrée qui ne peuvent être obtenus par la détention du contrat à terme sur cette même denrée. Ces bénéfices peuvent être par exemple la possibilité de pouvoir faire face à un choc non anticipé de l'offre ou de la demande, ou l'opportunité de pouvoir réduire ses coûts en lissant le processus de production. D'une façon plus spécifique, le bénéfice de détention est le bénéfice net moins les coûts autres que financiers, comme par exemple les coûts de stockage, d'assurance, et autres, liés à la détention d'une denrée.

² Voir par exemple Vasicek (1977) pour les taux d'intérêt ou Schwartz (1997) pour les prix des denrées.

Ce bénéfice de détention dépend de l'identité de la personne détenant la denrée et les prix d'équilibre futurs de celle-ci vont eux-mêmes dépendre d'un bénéfice de détention d'équilibre déterminé par la compétition entre ses détenteurs potentiels. L'information concernant les préférences de consommation et les technologies de production du marché est implicitement incluse dans le bénéfice de détention d'équilibre.

Il existe certaines évidences empiriques qui prèchent en faveur d'un bénéfice de détention stochastique. Entre autres, Fama et French (1987) décelèrent des variations saisonnières du bénéfice de détention marginal pour la plupart des produits agricoles et animaliers. Fama et French (1988) démontrèrent également l'existence d'un processus de retour vers la moyenne pour le bénéfice de détention des métaux.

Brennan (1990) décela lui aussi l'existence d'un processus de retour vers la moyenne pour le bénéfice de détention du bois contre-plaqué, du bois de charpente, de l'huile de chauffage, du cuivre, du platine, de l'argent et de l'or. Gibson et Schwartz (1990a) trouvèrent qu'un bénéfice de détention constant n'était pas approprié pour l'évaluation d'obligations indexées sur le pétrole et suggérèrent que le bénéfice de détention soit explicitement considéré lors de la détermination de modèles d'évaluation pour des biens conditionnels. C'est pourquoi Gibson et Schwartz (1990b) utilisèrent dans un autre article, un processus stochastique de retour vers la moyenne pour modéliser le bénéfice lié à la détention du pétrole, dans le but d'évaluer la valeur de biens financiers et réels conditionnels aux prix de ce même pétrole.

Plus récemment, Schwartz (1997), Miltersen et Schwartz (1998), et Hilliard et Reis (1998) ont développé des modèles d'évaluation de contrats à terme et d'options pour les denrées, qui tiennent compte d'un bénéfice de détention et d'un taux d'intérêt tous deux stochastiques.

Dans son article, Schwartz (1997) compare trois modèles d'évolution du prix des denrées qui tiennent compte respectivement et de façon additive d'un retour vers la moyenne, d'un bénéfice de détention stochastique et d'un taux d'intérêt stochastique. Il analyse l'implication de ces modèles dans l'évaluation d'actifs réels et de décisions d'allocations d'investissements. Schwartz détermine les paramètres des différents modèles pour le pétrole, le cuivre, et l'or à l'aide de la méthodologie du filtre de Kalman. Son analyse conclut entre autre à un fort retour vers la moyenne des prix du pétrole et du cuivre.

Miltersen et Schwartz (1998) de leur côté fournissent un cadre d'analyse général pour un modèle d'évaluation à trois facteurs utilisant la méthodologie de Heath, Jarrow et Morton (1992), et une diffusion avec absence d'opportunité d'arbitrage pour le bénéfice de détention et les taux d'intérêt. Ils font également la distinction entre un bénéfice de détention pour les contrats de gré à gré et pour les contrats à terme boursiers, chose rarement envisagée dans la littérature. Leur modèle ne demande aucune estimation de primes de risque puisque celles-ci sont implicitement incluses dans les prix au comptant. De plus, assumant une volatilité qui dépend uniquement du temps, ce modèle leur permet d'obtenir des solutions analytiques pour l'évaluation d'options européennes dans la même tradition que le modèle de Black et Scholes.

Hilliard et Reis (1998) quant à eux introduisent, en plus des deux processus stochastiques pour le bénéfice de détention et le taux d'intérêt, un processus mixte de diffusion avec sauts régissant l'évolution des prix au comptant des denrées. Ils en arrivent entre autres à la conclusion que l'hypothèse d'un processus mixte de diffusion avec sauts pour les prix au comptant des denrées n'affecte pas leurs prix à terme, mais peut avoir un effet non négligeable lors de l'évaluation d'options sur contrats à terme. Nous reviendrons par la suite plus en détail sur cet article.

Finalement le dernier point à retenir, qui n'est pas uniquement propre aux marchés énergétiques mais qui est particulièrement prononcé dans leur cas, est la présence de sauts dans les prix. Cette discontinuité des prix souvent observée avec l'arrivée sur le marché de nouvelles informations non anticipées est le résultat conjugué d'un déséquilibre entre l'offre et la demande d'énergie et des capacités de stockage limitées. La figure 1 ci-dessous nous donne un aperçu des sauts qui peuvent affecter les prix à terme du gaz naturel.

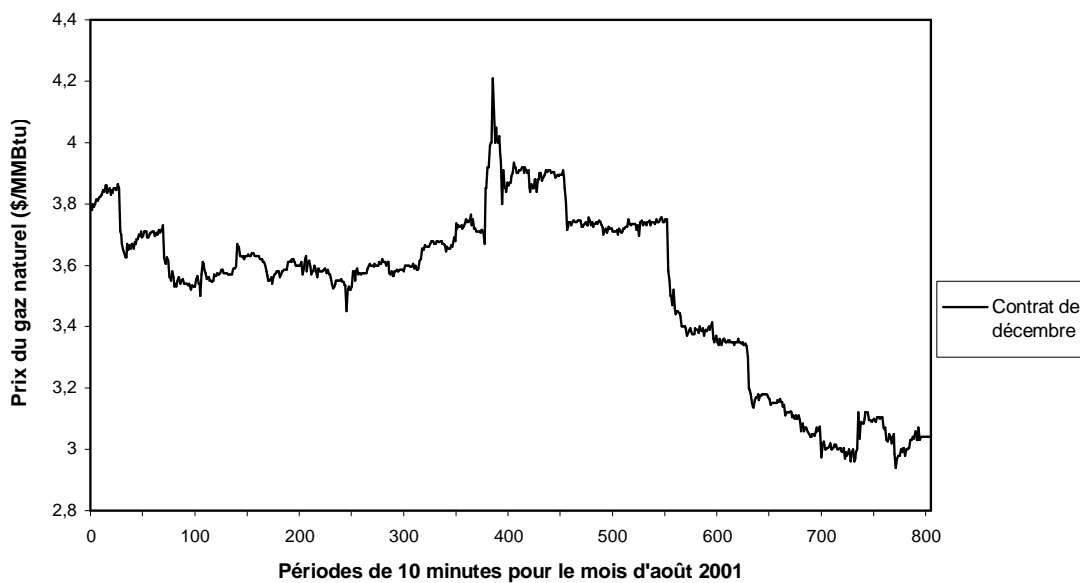


Figure 1. Graphique du prix à terme de décembre 2001 pour le gaz naturel NYMEX livraison Henry Hub. Cette figure illustre l'évolution intraquotidienne (fréquence de dix minutes) du prix du contrat à terme de décembre 2001 pour le gaz naturel durant le courant du mois d'août 2001. On y constate de façon distincte la présence de sauts dans les prix³.

Merton (1976) est le premier à postuler un modèle où le changement total du prix d'un actif se compose de deux parties : de petites variations normales de prix modélisées par un mouvement brownien géométrique et de larges variations anormales dues à l'arrivée d'informations importantes modélisées par des sauts suivant une distribution de Poisson. Les larges changements de prix modélisés par le processus de sauts produisent des probabilités supérieures aux probabilités de la loi normale dans la queue de la distribution de prix. Ce phénomène s'observe fréquemment lorsqu'on considère des rendements d'actifs. Le modèle de Merton fait l'hypothèse d'un risque de saut diversifiable, donc non systématique. Malheureusement dans le cas des denrées comme dans le cas de la monnaie, les prix sont systématiquement reliés à des variables macroéconomiques ou autres facteurs, conduisant ainsi à un risque de saut non diversifiable.

³ L'unité de cotation utilisée pour le prix du gaz naturel est le dollar par million d'unités thermiques britanniques (\$/MMBtu), où une unité thermique britannique représente la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température d'une livre d'eau d'un degré Fahrenheit.

C'est pourquoi Bates (1991) développa un modèle mixte de diffusion avec sauts admettant des sauts asymétriques et surtout permettant de considérer le risque de saut comme étant systématique. Afin d'obtenir le processus de diffusion risque neutre de son modèle, Bates impose des restrictions sur la technologie et les préférences. A partir de ce modèle de diffusion, il développe une approximation quadratique lui permettant de déterminer les prix d'options américaines. Plus récemment, Bates (1996b) a raffiné son modèle de base en y incorporant une volatilité stochastique.

1.2 Les options sur contrats à terme

Une option sur contrat à terme donne le droit, et non l'obligation, à son détenteur de prendre position sur un contrat à terme à une date future pour un prix convenu à l'avance. Plus spécifiquement, une option d'achat sur contrat à terme est un droit d'acheter un contrat à terme à un prix fixé alors qu'une option de vente est un droit de vendre un tel contrat. L'actif sous-jacent d'une telle option est donc un contrat à terme. Lorsque l'option est exercée, il y a deux échanges de flux monétaires échelonnés dans le temps. Le premier flux est lié à l'exercice de l'option en tant que tel, il correspond à la différence entre le prix d'exercice de l'option et le plus récent prix de règlement du contrat à terme. Puis va suivre un deuxième flux monétaire lié quant à lui au règlement du contrat à terme, correspondant à la différence entre le prix du contrat à terme à la date de règlement de celui-ci et le prix de règlement considéré lors de l'exercice de l'option (i.e. son prix de levée).

La plupart des options sur contrat à terme sont de type américain, c'est-à-dire qu'elles peuvent être exercées à n'importe quel moment avant leur échéance. Sur les marchés, elles sont référencées par le mois durant lequel le contrat sous-jacent arrive à maturité, et non par leur mois d'échéance. Généralement l'option vient à échéance quelques jours avant ou au moment de la première date de livraison du contrat à terme sous-jacent.

Des options sur contrat à terme sont maintenant disponibles pour la plupart des actifs pour lesquels des contrats à terme sont transigés. Il existe plusieurs raisons à leur popularité, dont la principale est le fait que les contrats à terme sont souvent plus liquides et plus faciles à transiger que l'actif sous-jacent lui-même, conduisant alors à des coûts de transaction inférieurs. Par exemple dans le cas des denrées, il est plus facile et plus commode d'acheter ou de vendre des contrats à terme sur le bétail vivant plutôt que de transiger directement le bétail.

De plus, les prix à terme sont connus immédiatement en transigeant sur les marchés à terme, alors que les prix au comptant des actifs sous-jacents ne sont pas si facilement disponibles.

Un autre point à retenir est le fait que l'exercice des options sur contrat à terme ne conduit généralement pas à la livraison de l'actif sous-jacent au contrat puisque dans la plupart des cas la position sur le contrat à terme est annulée avant l'échéance. Ainsi, les options sur contrat à terme sont généralement réglées de façon monétaire. Cette situation semble donc attractive pour bien des investisseurs, particulièrement ceux limités financièrement qui se verraient dans l'impossibilité de lever les fonds nécessaires à l'achat de l'actif sous-jacent lorsque la date d'échéance du contrat à terme serait atteinte.

1.2.1 Le modèle de Black pour l'évaluation d'options sur contrat à terme

Une analogie peut être faite entre une option sur contrat à terme et une option sur une action payant un taux de dividende continu. En effet, les prix des contrats à terme se comportent de façon similaire à une action payant un taux de dividende continu égal au taux d'intérêt domestique sans risque. Ceci s'explique aisément en notant que les contrats à terme ne requièrent aucun investissement initial. Dans un monde neutre au risque, le profit espéré lié à la détention d'un actif dont le coût initial est nul doit être égal à zéro, cela afin d'éviter toute opportunité d'arbitrage. Le profit espéré d'un contrat à terme dans un monde sans risque doit donc être de zéro. En conséquence, le taux de croissance espéré du prix d'un contrat à terme doit être nul.

Sachant que, toujours dans un monde neutre au risque, une action payant un taux de dividende continu d possède un taux de croissance espéré égal à la différence $r-d$ entre le taux d'intérêt domestique sans risque r et son taux de dividende continu d , il est facile de montrer que le taux de croissance espéré de l'action sera nul lorsqu'on aura égalisé le taux de dividende continu d au taux d'intérêt domestique sans risque r . Le prix de l'action se comportera ainsi comme le prix d'un contrat à terme.

Black (1976) est le premier à utiliser cette relation entre les contrats à terme et les actions payant un taux de dividende continu afin de démontrer que les options européennes sur contrat à terme peuvent être évaluées en modifiant légèrement le modèle d'évaluation développé par Merton (1973). Il démontre pour cela qu'il suffit de remplacer dans la formule de Merton le taux de dividende continu par le taux d'intérêt domestique sans risque et le prix de l'action sous-jacente par le prix du contrat à terme. La seule hypothèse nécessaire est de supposer que la volatilité du prix des contrats à terme est constante, c'est-à-dire que le prix des contrats à terme possède la même propriété de log-normalité que celle assumée pour le prix des actions dans le monde de Black et Scholes. Le modèle de Black pour l'évaluation d'options européennes sur contrat à terme s'énonce donc de la façon suivante :

$$c(F, \tau_0, X) = e^{-r\tau_0} [F(t, T_1)N(d_1) - XN(d_2)] \quad (1.1)$$

$$p(F, \tau_0, X) = e^{-r\tau_0} [XN(-d_2) - F(t, T_1)N(-d_1)] \quad (1.2)$$

où

$$d_1 = \frac{\ln(F(t, T_1) / X) + \sigma^2 \tau_0 / 2}{\sigma \sqrt{\tau_0}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F(t, T_1) / X) - \sigma^2 \tau_0 / 2}{\sigma \sqrt{\tau_0}} = d_1 - \sigma \sqrt{\tau_0}$$

avec

$c(F, \tau_0, X)$: Valeur au temps t d'une option d'achat européenne qui expire au temps T_0 sur un contrat à terme qui lui expire au temps T_1

$p(F, \tau_0, X)$: Valeur au temps t d'une option de vente européenne qui expire au temps T_0 sur un contrat à terme qui lui expire au temps T_1

$F(t, T_1)$: Valeur au temps t d'un contrat à terme de maturité T_1

X : Prix d'exercice de l'option

r : Taux d'intérêt sans risque

t : Temps d'observation

T_0 : Date d'échéance de l'option

T_1 : Date d'échéance du contrat à terme ($T_1 \geq T_0$)

- τ_0 : Temps à faire jusqu'à l'échéance de l'option de maturité T_0 ,
avec $\tau_0 = T_0 - t$
- σ : Écart-type du rendement des prix à terme⁴
- $N(\cdot)$: Fonction de densité cumulative pour une variable normale standardisée

Malheureusement comme nous l'avons mentionné en introduction, il existe un certain nombre d'évidences empiriques allant à l'encontre de l'hypothèse d'une distribution log-normale du rendement des actifs. Ceci étant également confirmé dans le cas des prix à terme sur les marchés énergétiques, il apparaît donc que le modèle de Black induit un biais systématique dans l'évaluation d'options sur contrat à terme.

Hilliard et Reis (1999) semblent penser que cet écart observé par rapport à la loi normale soit causé par de larges changements de prix sur les marchés des denrées, changements occasionnés par l'arrivée de nouvelles informations importantes. Aussi suggèrent-ils qu'un processus mixte de diffusion avec sauts pourrait être un bon compromis pour modéliser le processus stochastique des prix à terme des denrées, processus sous-jacent aux prix des options sur contrats à terme. Dans leur article, ils comparent donc la performance de versions américaines des modèles de Black (1976) et de Bates (1991) pour l'évaluation d'options sur contrats à terme.

La version américaine du modèle de Black utilisée est une approximation analytique développée par Barone-Adesi et Whaley (1987). Quant à la version américaine du modèle de Bates, les auteurs utilisent une approximation quadratique développée par Bates lui-même en prolongement des travaux de MacMillan (1987) et Barone-Adesi et Whaley (1987).

⁴ Le terme rendement des prix à terme utilisé ici et tout au long de cette étude doit être compris comme la variation relative des prix à terme. En effet, les contrats à terme ne nécessitant aucune mise de fond initiale, il est dès lors difficile de leur attribuer un rendement en tant que tel. On parlera alors plutôt d'une variation relative des prix à terme.

Hilliard et Reis en concluent que pour l'échantillon analysé, le modèle mixte de diffusion avec sauts de Bates est significativement plus performant que le modèle de diffusion pure de Black. Le cadre d'évaluation d'option considérant un processus mixte de diffusion avec sauts expliquerait donc le biais obtenu avec le modèle de Black.

Leur étude démontre que les paramètres relatifs à la taille moyenne des sauts, ainsi qu'à leur fréquence, sont significativement positifs pour chaque jour d'estimation. Ainsi avec des valeurs positives pour ces deux paramètres, la distribution logarithmique des prix à terme serait plus positivement asymétrique et plus leptokurtique que la distribution normale, ce qui expliquerait les larges erreurs de surévaluation et de sous-évaluation du modèle de Black dans les cas respectivement d'options de vente et d'achat hors-jeu⁵.

Toutefois, Hilliard et Reis constatent également que les paramètres estimés ne sont pas stables, et que la performance des modèles augmente considérablement lorsque ces paramètres sont réestimés quotidiennement. Il apparaît donc, à la vue de leur analyse, que l'incorporation de sauts dans le processus de diffusion des prix à terme pour les denrées permet de décrire de façon plus vraisemblable la réalité, et ainsi de conduire à des modèles d'évaluation d'actifs conditionnels aux denrées possédant des degrés de précision supérieurs à ceux observés avec des modèles plus simpliste n'incorporant aucun saut.

1.3 Conclusion

Il apparaît donc qu'un certain nombre de facteurs fondamentaux influencent de façon prépondérante la dynamique des marchés de denrées ainsi que celle des marchés énergétiques, rendant celles-ci toutes deux complexes. Parmi ces principaux facteurs, nous pouvons retenir l'existence d'un bénéfice de détention stochastique, la présence de sauts et d'un niveau d'équilibre à long terme pour les prix, et finalement une volatilité des prix qui semble être dépendante du temps, voir même complètement stochastique. La représentation la plus fidèle possible de ces dynamiques de marchés est une des clés ouvrant la porte à une évaluation toujours plus précise des biens qui leur sont conditionnels.

⁵ Hilliard et Reis aboutissent, à partir de prix d'options d'achat et de vente sur contrat à terme pour les germes de soja obtenus sur le Chicago Board of Trade, à des erreurs relatives moyennes de prix de l'ordre de -0.15 pour les options d'achat et de 0.18 pour les options de vente. (Voir la table 4 de leur article (1999) pp. 280).

C'est ce à quoi se sont attelés les chercheurs au fil des ans, améliorant le degré de raffinement de leurs modèles en y incorporant toujours plus de paramètres dans le but de représenter le plus fidèlement possible la réalité. C'est une voie encore bien ouverte, et le chemin qu'il reste à parcourir est une source de motivation pour bien des individus.

CHAPITRE 2 : LE MODÈLE D'HILLIARD ET REIS

Introduction

Dans ce deuxième chapitre, nous allons aborder plus en détail l'article d'Hilliard et Reis (1998) : " Valuation of commodity futures and options under stochastic convenience yields, interest rates, and jump diffusion in the spot", celui-ci constituant effectivement la pierre angulaire de toute notre analyse.

2.1 Résumé de l'article d'Hilliard et Reis (1998)

Hilliard et Reis présentent dans leur article une étude sur l'évaluation de contrats de gré à gré, de contrats à terme et d'options sur contrat à terme, chacun portant sur des denrées, dans un contexte de bénéfice de détention stochastique, de taux d'intérêt stochastique et de sauts dans les prix au comptant du sous-jacent.

Leur investigation diffère selon deux voies bien significatives des analyses de Schwartz (1997), et de Miltersen et Schwartz (1998). Premièrement, ils postulent que les prix au comptant du sous-jacent suivent un processus mixte de diffusion avec sauts permettant des sauts asymétriques, c'est-à-dire de moyenne non nulle, de façon similaire au modèle de Bates (1991). Ceci étant somme toute assez intuitif puisque comme nous l'avons déjà mentionné, l'arrivée de nouvelles informations ou autres évènements inattendus causent de larges changements dans les prix des denrées. Deuxièmement, ils utilisent un processus de diffusion d'équilibre pour le bénéfice de détention et un processus de diffusion avec absence d'opportunités d'arbitrage pour le taux d'intérêt. Les auteurs justifient ce choix en nous faisant remarquer que la structure à terme des taux d'intérêt peut être obtenue facilement. Il existe en effet un bon nombre d'obligations avec des maturités différentes échelonnées jusqu'à trente ans. Aussi, des produits dérivés de n'importe quelle maturité peuvent être évalués puisque les paramètres d'une diffusion avec absence d'opportunité d'arbitrage peuvent être déterminés à partir de la structure à terme des taux.

Inversement, une structure à terme générale pour le bénéfice de détention est difficile à construire principalement à cause d'un manque d'instruments de longue maturité. Une diffusion avec absence d'opportunités d'arbitrage pour le bénéfice de détention n'est donc généralement pas disponible pour l'évaluation de produits dérivés à long terme. C'est pourquoi les auteurs optent pour un processus de diffusion d'équilibre dans le cas du bénéfice de détention.

Hilliard et Reis partent d'un modèle simple de diffusion avec une seule variable d'état et améliorent ce modèle tout au long de leur analyse pour finalement atteindre un modèle mixte de diffusion avec sauts à trois variables d'état. En utilisant les propriétés du lemme d'Itô, le théorème de Feynman-Kac, ainsi que la fonction génératrice de moments d'une loi normale, ils obtiennent à chaque étape de leur analyse une solution analytique pour l'évaluation de trois types d'actifs conditionnels aux prix des denrées, à savoir des contrat de gré à gré, des contrats à terme, et des options européennes sur contrat à terme.

Nous allons résumer ci-dessous les principales étapes de leur cheminement se rapportant à l'évaluation d'options.

2.2 Les hypothèses de base du modèle

Tout d'abord, Hilliard et Reis postulent un certain nombre d'hypothèses de base, dont voici les principales :

- A1. Les transactions se déroulent sur une base temporelle continue.
- A2. Il n'y a pas de coûts de transaction, de taxes, ou de restriction concernant les ventes à découvert.
- A3. Le taux d'intérêt sans risque r est constant.

- A4. La dynamique des prix au comptant du bien sous-jacent est donnée par l'équation stochastique différentielle suivante :

$$\frac{dS}{S} = \mu_s dt + \sigma_s dZ_s \quad (2.1)$$

avec

- μ_s : Taux de rendement instantané espéré des prix au comptant
- σ_s : Écart-type instantané du rendement des prix au comptant
- dZ_s : Incrément d'un processus de Wiener standard

2.3 Évaluation de contrats à terme avec un modèle à deux facteurs

Dans un premier temps, les auteurs s'attachent à considérer le bénéfice de détention comme étant stochastique et non constant comme dans le cas du modèle de Black. En conséquence, ils introduisent alors une nouvelle hypothèse concernant le bénéfice de détention, qui est défini de la façon suivante :

- A5. Le bénéfice net de détention, celui-ci étant défini comme le bénéfice de détention moins les coûts d'entreposage, suit le processus de retour vers la moyenne suivant :

$$d\delta = \kappa_c (\alpha_c - \delta) dt + \sigma_c dZ_c \quad (2.2)$$

avec

- κ_c : Vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention ($\kappa_c > 0$)
- α_c : Niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention
- σ_c : Écart-type des changements du bénéfice net de détention
- dZ_c : Incrément d'un processus de Wiener standard

De plus, $\text{cov}(dZ_s, dZ_c) = \rho_{sc} dt$ où ρ_{sc} représente le coefficient de corrélation entre le prix au comptant de la denrée et son bénéfice net de détention.

Hilliard et Reis utilisent dès lors une approche similaire à Hull et White (1987) et Scott (1987) afin de construire un portefeuille d'arbitrage contenant deux contrats à terme de différentes maturités et la denrée. Cette approche leur permet d'obtenir l'équation différentielle partielle des prix à terme. Une version du théorème de Feynman-Kac est alors invoquée afin de résoudre cette équation différentielle partielle. A partir de cette solution pour les prix à terme et à l'aide du lemme d'Itô ainsi que de la fonction génératrice de moments d'une loi normale, Hilliard et Reis obtiennent la solution pour une option d'achat européenne sur contrat à terme. Cette solution s'exprime de la façon suivante :

$$c(F, \tau_0, X) = B(t, T_0) [F(t, T_1)N(d_1) - XN(d_2)] \quad (2.3)$$

où

$$d_1 = \frac{\ln(F(t, T_1) / X) + 0.5v_F^2}{v_F}$$

$$d_2 = d_1 - v_F$$

v_F^2 est la solution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option, soit du temps t au temps T_0 :

$$v_F^2(t, T_0, T_1) = \sigma_s^2 \tau_0 - \frac{2\sigma_s \sigma_c \rho_{sc}}{\kappa_c} \left[\tau_0 - \frac{(e^{-\kappa_c(T_1-T_0)} - e^{-\kappa_c \tau_1})}{\kappa_c} \right] + \frac{\sigma_c^2}{\kappa_c^2} \left[\tau_0 - \frac{2}{\kappa_c} (e^{-\kappa_c(T_1-T_0)} - e^{-\kappa_c \tau_1}) + \frac{1}{2\kappa_c} (e^{-2\kappa_c(T_1-T_0)} - e^{-2\kappa_c \tau_1}) \right] \quad (2.4)$$

avec

$B(t, T_0)$: Valeur au temps t d'une obligation sans risque à coupons détachés d'échéance T_0

τ_1 : Temps à faire jusqu'à l'échéance du contrat à terme ($\tau_1 = T_1 - t$)

L'équation (2.3) est similaire à la solution de Black de l'équation (1.1) lorsqu'on remplace la solution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option v_F^2 par $\sigma_s^2(T_0 - t)$, c'est-à-dire lorsque l'écart-type des changements du bénéfice net de détention σ_c est nul. Hilliard et Reis démontrent donc que la volatilité des prix au comptant ne peut généralement pas être utilisée, tel que dans la formule de Black, comme une approximation de la volatilité des prix à terme. En effet, l'équation (2.3) dépend de la structure à terme de la volatilité des prix à terme, structure qui est assumée plate dans la formule de Black.

2.4 Modèle de diffusion à trois facteurs avec sauts

Dans cette étape de leur développement, Hilliard et Reis se concentrent simultanément sur deux hypothèses, à savoir l'hypothèse des taux d'intérêt constants et l'hypothèse concernant le processus de diffusion des prix du sous-jacent, tout en gardant pour acquis l'hypothèse d'un bénéfice de détention stochastique. Le modèle à deux facteurs précédent est donc maintenant étendu à un monde où les taux d'intérêt sont stochastiques, et où des sauts sont incorporés dans le processus de diffusion des prix du sous-jacent.

- A6. Le taux d'intérêt sans risque r n'est donc plus considéré comme étant constant, mais suit plutôt le processus stochastique ajusté pour le risque suivant :

$$dr(v) = \left(\frac{\partial g(t, v)}{\partial v} + \kappa_r g(t, v) + \frac{\sigma_r^2}{2\kappa_r} (1 - e^{-2\kappa_r(v-t)}) - \kappa_r r(v) \right) dt + \sigma_r dZ_r \quad (2.5)$$

avec

κ_r : Vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du taux d'intérêt sans risque r

σ_r : Écart-type instantané de la variation relative du taux d'intérêt sans risque

dZ_r : Incrément d'un processus de Wiener standard

Le terme $g(t, v)$ correspond au taux à terme instantané au temps t pour la date v , avec $v > t$.

Le processus de Markov de l'équation (2.5) est un cas spécial de la famille des processus de Heath, Jarrow et Morton qui a été développé par Ritchken et Sankarasubramanian (1985).

L'intégration de sauts dans le modèle permet de créer des changements abruptes dans les prix au comptant qui peuvent être amenés par des chocs d'offre et de demande sur le marché des denrées. Ces sauts conduisent à des distributions pour les prix au comptant et les prix à terme ayant des degrés d'asymétrie et de kurtose différents de ceux d'une distribution log-normale.

Les auteurs remplacent donc l'hypothèse A4. par l'hypothèse suivante :

- A7. Les prix au comptant obéissent au processus de diffusion avec sauts ajusté pour le risque suivant :

$$\frac{dS}{S} = [r - \delta - \lambda^* \bar{\kappa}^*] dt + \sigma_s dZ_s + \kappa^* dq^* \quad (2.6)$$

où σ_s est l'écart-type instantané du rendement des prix au comptant conditionnel à l'absence de sauts, $\bar{\kappa}^*$ est l'amplitude aléatoire moyenne (en pourcentage) d'un saut ajustée pour le risque et conditionnée par l'arrivée d'évènements suivant une distribution de Poisson, où $1 + \kappa^*$ possède une distribution log-normale : $\ln(1 + \kappa^*) \sim N(\ln(1 + \bar{\kappa}^*) - 0.5\omega^2, \omega^2)$, $E(\kappa^*) \equiv \bar{\kappa}^*$. λ^* représente la fréquence moyenne ajustée pour le risque des sauts de Poisson et q^* est un incrément de Poisson avec une fréquence λ^* : $\text{Prob}(dq^* = 1) = \lambda^* dt$ et $\text{Prob}(dq^* = 0) = 1 - \lambda^* dt$. Les variables aléatoires de saut sont non corrélées par paire, c'est-à-dire $\text{cov}(dq^*, \kappa^*) = 0$, $\text{cov}(dZ_s, dq^*) = \text{cov}(dZ_s, \kappa^*) = 0$, $\text{cov}(dZ_c, dq^*) = \text{cov}(dZ_c, \kappa^*) = 0$, et $\text{cov}(dZ_r, dq^*) = \text{cov}(dZ_r, \kappa^*)$.

En suivant une démarche similaire à celle utilisée précédemment dans le cas du modèle à deux facteurs, mais cette fois-ci à l'aide du lemme d'Itô pour les processus avec sauts développé par Merton (1976), Hilliard et Reis obtiennent la solution pour une option d'achat européenne sur contrat à terme quand les taux d'intérêt et la dynamique des prix au comptant sont donnés par les équations (2.5) et (2.6) respectivement.

La valeur au temps t d'une option d'achat qui vient à échéance au temps T_0 sur un contrat à terme qui lui vient à échéance au temps T_1 est donnée par :

$$c(F, \tau_0, X) = B(t, T_0) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda^* \tau_0} (\lambda^* \tau_0)^n}{n!} \right] \left[F(t, T_1) Z(t, T_0, T_1) e^{b(n) \tau_0} N(d_{1n}) - X N(d_{2n}) \right] \quad (2.7)$$

où

$$b(n) = -\lambda^* \bar{\kappa}^* + \frac{n\gamma^*}{\tau_0}$$

$$d_{1n} = \frac{\ln \frac{F(t, T_1) Z(t, T_0, T_1)}{X} + b(n) \tau_0 + \frac{1}{2} (v_F^2 + n\omega^2)}{\sqrt{v_F^2 + n\omega^2}}$$

$$d_{2n} = d_{1n} - \sqrt{v_F^2 + n\omega^2}$$

$$\begin{aligned} Z(t, T_0, T_1) = & \exp \left[-\frac{\rho_{sr} \sigma_s \sigma_r}{\kappa_r} \left(\tau_0 - \frac{1 - e^{-\kappa_r \tau_0}}{\kappa_r} \right) \right] \\ & \cdot \exp \left[-\frac{\sigma_r^2}{\kappa_r^2} \left(\tau_0 - \frac{1 - e^{-\kappa_r \tau_0}}{\kappa_r} - \frac{e^{-\kappa_r (T_1 - T_0)} - e^{-\kappa_r \tau_1}}{\kappa_r} + \frac{e^{-\kappa_r \tau_0} - e^{2\kappa_r t - \kappa_r (T_1 + T_0)}}{2\kappa_r} \right) \right] \\ & \cdot \exp \left[\frac{\rho_{cr} \sigma_c \sigma_r}{\kappa_c \kappa_r} \left(\tau_0 - \frac{1 - e^{-\kappa_r \tau_0}}{\kappa_r} - \frac{e^{-\kappa_c (T_1 - T_0)} - e^{-\kappa_c \tau_1}}{\kappa_c} + \frac{e^{-\kappa_c \tau_0} - e^{(\kappa_c - \kappa_r)t - \kappa_r (T_1 + T_0)}}{\kappa_c + \kappa_r} \right) \right] \end{aligned}$$

Comme auparavant, v_F^2 représente la solution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option.

L'expression $Z(t, T_0, T_1)$ dans l'équation ci-dessus provient de la corrélation entre les prix à terme et les taux d'intérêt, et est égale à l'unité lorsque $\text{cov}(dZ_F, dZ_r) = 0$.

En remplaçant dans l'équation (2.7) v_F^2 par $\sigma_s^2 \tau_0$ et en posant $Z(t, T_0, T_1) = 1$, la formule d'évaluation d'options d'achat européennes sur contrat à terme d'Hilliard et Reis devient identique à celle développée par Bates (1991), pour laquelle celui-ci assume une volatilité constante du rendement des prix à terme et des taux d'intérêt constants. La formule d'Hilliard et Reis de l'équation (2.7) est donc une généralisation de la formule de Bates.

Finalement, dans la dernière partie de leur article, Hilliard et Reis utilisent les modèles qu'ils ont développés afin d'évaluer la valeur actuelle d'un baril de pétrole livrable dans le futur.

2.5 Conclusion

L'analyse comparative des différents modèles développés tout au long de leur article permet à Hilliard et Reis d'aboutir à un certain nombre de conclusions.

Tout d'abord, l'analyse suggère qu'un modèle avec un bénéfice de détention déterministe peut conduire à des prix à terme significativement différents par rapport à ceux obtenus avec un modèle considérant un bénéfice de détention stochastique. Ces différences peuvent s'élever jusqu'à 8% des prix à terme considérés (voir la table 1 pp. 66 de l'article d'Hilliard et Reis (1998)). Les variables importantes dans la détermination des prix à terme sont le niveau initial du bénéfice net de détention, la vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention, et le temps restant à faire jusqu'à la maturité des contrats. Il n'apparaît pas de différences significatives entre le modèle de Black et le modèle à deux facteurs développé par Hilliard et Reis pour l'évaluation de contrats à terme lorsque le taux initial du bénéfice de détention est proche de son niveau d'équilibre à long terme. Toutefois, le modèle de Black est clairement inapproprié en présence de conditions anormales sur le marché des denrées durant la vie d'un contrat, comme par exemple lorsque le bénéfice net de détention est loin au-dessus ou loin en-dessous de son niveau d'équilibre à long terme.

L'hypothèse d'un taux d'intérêt stochastique (modèle à trois facteurs) amène des prix à terme différents de ceux obtenus avec le modèle à deux facteurs⁶. La différence de prix entre ces deux modèles dépend de la volatilité du processus des taux d'intérêt, de la corrélation entre les prix au comptant et les taux d'intérêt, ainsi que de la corrélation entre le bénéfice de détention et les taux d'intérêt.

Quant à l'hypothèse d'un processus de sauts pour les prix au comptant, celle-ci n'affecte pas les prix à terme mais peut avoir un impact non négligeable lors de l'évaluation d'options. Ceci étant lié au fait que les prix à terme sont obtenus comme une espérance sur la distribution total des prix de l'actif sous-jacent alors que les prix des options sont quant à eux obtenus comme une espérance sur une portion seulement de la distribution des prix de l'actif sous-jacent. Conséquemment, une distribution non normale des rendements de l'actif sous-jacent affecte le prix des options mais pas celui des contrats à terme.

En guise de point final, les auteurs laissent entendre que les prix théoriques de biens conditionnels aux denrées, incluant les contrats à terme et les options, sont fortement influencés par la structure à terme du bénéfice de détention. Par conséquent, ils suggèrent une étude de cette structure à terme afin d'obtenir des modèles plus précis pour l'évaluation de biens contingents au marché des denrées.

Toutefois, on pourrait émettre deux principales critiques à l'encontre de l'analyse d'Hilliard et Reis. La première est somme toute assez évidente. Alors que la plupart des options sur contrat à terme dans le cas des denrées sont de type américain, Hilliard et Reis nous fournissent, dans la dernière étape de leur développement, une solution pour l'évaluation d'options européennes sur contrats à terme, nous privant ainsi immédiatement de la possibilité d'estimer les paramètres de leur modèle à partir de données réelles d'options observées sur les marchés, et donc de pouvoir en tester empiriquement la performance.

⁶ Il nous est malheureusement impossible ici de donner un ordre de grandeur aux différences ainsi obtenues, Hilliard et Reis ne fournissant en effet aucune indication à ce sujet.

La deuxième critique qui peut leur être adressée est un petit peu plus subtile. Hilliard et Reis obtiennent une formule d'évaluation des prix à terme linéaire par rapport aux prix au comptant et se basent sur cette relation pour la suite de leur développement. En raison de cette linéarité, le processus de Poisson dq^* ainsi que l'amplitude aléatoire d'un saut ajustée pour le risque κ^* dans le processus de diffusion des prix à terme sont donc les mêmes que dans le processus de diffusion des prix au comptant. Or, il apparaît empiriquement, selon certaines études (voir par exemple Moosa et Silvapulle (1999)), que cette relation de linéarité entre les prix au comptant et les prix à terme ne serait pas vérifiée, et que l'on observerait plutôt une relation bidirectionnelle non linéaire. En conséquence, le fait de considérer cette relation comme étant linéaire pourrait introduire une erreur supplémentaire lors de l'évaluation de biens conditionnels aux prix à terme.

CHAPITRE 3 : LE DÉVELOPPEMENT DU MODÈLE D'ÉVALUATION

Introduction

Dans ce troisième chapitre, fort des considérations théoriques des autres études, nous allons présenter un nouveau modèle d'évaluation d'options sur contrat à terme pour actifs énergétiques qui constitue une extension des travaux d'Hilliard et Reis (1998). L'objectif étant la mise au point d'un modèle d'évaluation répondant à la principale critique que l'on puisse adresser à leur modèle, à savoir l'évaluation d'options européennes uniquement, et en conséquence d'obtenir un modèle d'évaluation d'options de type américaines sur contrat à terme. Cet objectif sera atteint entre autre en utilisant l'approximation quadratique développée par Bates (1991) pour l'évaluation d'options américaines.

Ce chapitre se compose de cinq sections : dans la première section, nous énonçons les principales hypothèses du modèle, dans la deuxième section nous présentons un modèle d'évaluation pour contrat à terme, la troisième section est consacrée quant à elle au modèle d'évaluation d'options européennes sur contrat à terme, la quatrième dévoile le modèle d'évaluation d'options américaines sur contrat à terme, et finalement la cinquième et dernière section conclut ce chapitre.

3.1 Les hypothèses de base du modèle

Afin de pouvoir développer des modèles d'évaluation, un certain nombre d'hypothèses doivent être postulées relativement aux caractéristiques des marchés considérés et aux différents processus de diffusion suivis par les variables d'état.

Les hypothèses qui vont suivre seront maintenues tout au long de notre analyse.

- A1. Les transactions se déroulent selon une base temporelle continue.
- A2. Les marchés sont exempts de frictions : il n'y a pas de coûts de transaction, de taxes, ou de restrictions concernant les ventes à découvert et les emprunts.
- A3. Le taux d'intérêt sans risque r est constant.
- A4. Le prix au comptant de l'actif sous-jacent $S(t)$ suit le processus mixte de diffusion avec sauts suivant :

$$\frac{dS}{S} = (\mu_s - \lambda \bar{\kappa}) dt + \sigma_s dZ_s + \kappa dq \quad (3.1)$$

avec

- μ_s : Taux de rendement instantané espéré des prix au comptant conditionnel à l'absence de sauts
- σ_s : Écart-type instantané du rendement des prix au comptant conditionnel à l'absence de sauts
- dZ_s : Incrément d'un processus de Wiener standard
- $\bar{\kappa}$: Amplitude aléatoire moyenne en pourcentage d'un saut conditionnelle à l'arrivée d'évènements distribués selon une loi de Poisson, et où $1 + \kappa$ possède une distribution log-normale :
- $$\ln(1 + \kappa) \sim N\left(\gamma - \frac{1}{2}\omega^2, \omega^2\right), E(\kappa) = \bar{\kappa} = e^\gamma - 1$$
- λ : Fréquence moyenne d'arrivée des sauts de Poisson
- q : Incrément du processus de Poisson avec fréquence λ :
 $\text{Prob}(dq = 1) = \lambda dt, \text{Prob}(dq = 0) = 1 - \lambda dt$

De plus, les variables aléatoires de saut sont non corrélées par paire, c'est-à-dire $\text{cov}(dq, \kappa) = 0$, $\text{cov}(dZ_s, dq) = 0$, et $\text{cov}(dZ_s, \kappa) = 0$.

A5. La dynamique du bénéfice net de détention $\delta(t)$ est donnée par le processus de retour vers la moyenne suivant :

$$d\delta = \kappa_c (\alpha_c - \delta)dt + \sigma_c dZ_c \quad (3.2)$$

avec

- κ_c : Vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention ($\kappa_c > 0$)
- α_c : Niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention
- σ_c : Écart-type des changements du bénéfice net de détention
- dZ_c : Incrément d'un processus de Wiener standard

De plus, $\text{cov}(dZ_c, dq) = 0$, $\text{cov}(dZ_c, \kappa) = 0$, et $\text{cov}(dZ_s, dZ_c) = \rho_{sc}$ où ρ_{sc} représente le coefficient de corrélation entre le prix au comptant de l'actif sous-jacent et le bénéfice que procure sa détention.

Les deux premières hypothèses sont des hypothèses classiques communes à la plupart des modèles d'évaluation de biens conditionnels. Le choix d'un taux d'intérêt sans risque constant nous permettra le moment venu d'utiliser l'approximation quadratique de Bates (1991) pour l'évaluation d'options américaines. En fait, le choix d'un taux d'intérêt constant n'est pas forcément imposé, mais découle plutôt, comme nous le verrons par la suite, des hypothèses A2., A6., et A7., postulées par Bates (1991), qui lui permettent de dériver le processus de diffusion ajusté pour le risque suivi par les prix de l'actif sous-jacent en présence de sauts. Cette hypothèse n'est pas trop restrictive si l'on considère uniquement des biens contingents à court terme. En effet, une étude de Scott (1993) démontre que la volatilité des taux d'intérêt n'a que peu d'impact sur les prix d'options à court terme.

Le processus choisi pour les prix au comptant de l'actif sous-jacent est le même processus que dans l'article de Bates (1991), où les sauts peuvent être asymétriques et le risque de saut systématique. Ce processus ressemble à un mouvement brownien géométrique la plupart du temps, mais les prix sautent discrètement en moyenne λ fois par année d'un montant aléatoire. Les sauts dans les prix au comptant conduisent à des distributions pour les prix au comptant et à terme qui possèdent des degrés de kurtose et d'asymétrie différents de ceux d'une distribution log-normale.

Finalement en ce qui concerne le processus suivi par le bénéfice net de détention, notre choix a été motivé par l'étude de Gibson et Schwartz (1990a) concernant les propriétés des série chronologiques du bénéfice de détention à terme pour le pétrole brut. Dans cette étude, Gibson et Schwartz décelèrent empiriquement l'existence d'un processus de retour vers la moyenne pour le bénéfice lié à la détention du pétrole brut.

3.2 L'évaluation des contrats à terme

La première étape dans l'évaluation d'options sur contrat à terme consiste à obtenir le processus stochastique suivi par les prix à terme. Pour ce faire, nous allons tout d'abord dériver l'expression du prix des contrat à terme.

Nous introduisons à cet effet un nouveau processus sans composante de sauts pour le prix au comptant de l'actif sous-jacent que nous notons maintenant S' afin de ne pas le confondre avec le premier processus qui lui considère l'existence de sauts :

$$\frac{dS'}{S'} = \mu_s dt + \sigma_s dZ_s \quad (3.3)$$

avec les paramètres μ_s , σ_s , dZ_s , et $\text{cov}(dZ_s, dZ_c)$ identiques à ceux de l'équation (3.1).

Une telle simplification peut être faite en sachant que cela n'aura aucune influence sur la solution des prix à terme. En effet, nous verrons par la suite qu'en invoquant une version du théorème de Feynman-Kac, nous pouvons exprimer les prix à terme de la façon suivante :

$$F(S(t), \mathcal{F}(t), t, T_1) = \hat{E}_t[S(T_1)]$$

où \hat{E}_t représente l'espérance conditionnelle étant donné l'information disponible au temps t , par rapport à un processus ajusté pour le risque.

Or, l'on sait que :

$$\hat{E}[S'(T_1)] = \hat{E}[S(T_1)] \quad (3.4)$$

où $S(T_1)$ est le prix au comptant terminal donné par le processus de diffusion avec sauts ajusté pour le risque obtenu à partir du processus non ajusté pour le risque de l'équation (3.1), et de façon similaire, $S'(T_1)$ est le prix au comptant terminal donné par le processus de diffusion sans sauts ajusté pour le risque obtenu à partir du processus non ajusté pour le risque de l'équation (3.3).

Ce résultat est lié au fait que les prix à terme sont obtenus à partir d'espérances ajustées pour le risque déterminées sur l'ensemble de la distribution des prix au comptant. L'arrivée des sauts n'affecte donc pas cette espérance. Toutefois, les options étant fortement influencées par une des queue de la distribution des prix, leurs valeurs pourront donc changer de façon marquée avec l'introduction de sauts.

Aussi dans un but de simplification, mais sans aucune perte en généralité, nous considérerons l'équation (3.3) à la place de l'équation (3.1) lors de la détermination de l'expression des prix à terme. (Afin de simplifier la notation, nous laisserons tomber l'exposant prime de S dans les développements qui vont suivre).

La détermination de l'expression des prix à terme commence par la construction d'un portefeuille d'arbitrage qui va nous permettre de dériver l'équation différentielle partielle que devra respecter la fonction des prix à terme. Toutefois, l'introduction d'un bénéfice de détention stochastique amène quelques difficultés supplémentaires. Un portefeuille d'arbitrage dynamique composé uniquement d'un contrat à terme et de l'actif sous-jacent n'est pas suffisant pour créer une stratégie d'investissement sans risque. Le problème provient du fait que l'équation différentielle stochastique pour les prix à terme contient deux sources d'incertitude, dZ_s et dZ_c , reliées au prix au comptant et au bénéfice net de détention. Aussi dans le but d'éliminer totalement l'incertitude, un portefeuille d'arbitrage composé de deux contrats à terme de maturités différentes et de l'actif sous-jacent est construit.

$$\pi = F(S(t), \delta(t), \tau_1) + w_2 F(S(t), \delta(t), \tau_2) + w_3 S(t) \quad (3.5)$$

avec

- π : Portefeuille d'arbitrage
- $F(S(t), \delta(t), \tau_1)$: Prix d'un contrat à terme d'échéance T_1
- $F(S(t), \delta(t), \tau_2)$: Prix d'un contrat à terme d'échéance T_2 avec $T_2 \neq T_1$
- w_2 : Proportion de contrats à terme d'échéance T_1 contenue dans le portefeuille d'arbitrage
- w_3 : Proportion de contrats à terme d'échéance T_2 contenue dans le portefeuille d'arbitrage
- τ_1 : Temps à faire jusqu'à l'échéance du contrat à terme de maturité T_1 , avec $\tau_1 = T_1 - t$
- τ_2 : Temps à faire jusqu'à l'échéance du contrat à terme de maturité T_2 , avec $\tau_2 = T_2 - t$

Cette approche est similaire à celle adoptée par Scott (1987) qui évalue des prix d'option à l'aide d'un modèle à deux facteurs, où l'un des deux facteurs, à savoir la volatilité de l'actif sous-jacent, est une variable non transigée sur les marchés, tout comme l'est dans notre cas le bénéfice de détention.

Le portefeuille d'arbitrage étant autofinancé, son rendement s'exprime de la façon suivante :

$$d\pi = dF_1 + w_2 dF_2 + w_3 dS \quad (3.6)$$

où pour fin de simplification $F(S(t), \delta(t), \tau_1)$ et $F(S(t), \delta(t), \tau_2)$ ont été remplacés respectivement par F_1 et F_2 .

En assumant que la fonction de prix des contrats à terme $F(S(t), \delta(t), \tau)$ est deux fois continûment dérivable par rapport à S et δ , et en utilisant le lemme d'Itô en relation avec les processus stochastique des équations (3.2) et (3.3), on obtient le processus suivi par les changements des prix à terme.

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial S} S \mu_s + \frac{\partial F}{\partial \delta} \kappa_c (\alpha_c - \delta) - \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \right] dt + \frac{\partial F}{\partial S} S \sigma_s dZ_s + \frac{\partial F}{\partial \delta} \sigma_c dZ_c \quad (3.7)$$

En remplaçant les dF de l'équation (3.6) par l'équation (3.7), on peut récrire l'équation du rendement du portefeuille d'arbitrage sous la forme suivante :

$$d\pi = \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial S} S \mu_s + \frac{\partial F_1}{\partial \delta} \kappa_c (\alpha_c - \delta) - \frac{\partial F_1}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \right) dt + \frac{\partial F_1}{\partial S} S \sigma_s dZ_s + \frac{\partial F_1}{\partial \delta} \sigma_c dZ_c \right] + w_2 \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial S} S \mu_s + \frac{\partial F_2}{\partial \delta} \kappa_c (\alpha_c - \delta) - \frac{\partial F_2}{\partial \tau_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \right) dt + \frac{\partial F_2}{\partial S} S \sigma_s dZ_s + \frac{\partial F_2}{\partial \delta} \sigma_c dZ_c \right] + w_3 [S \mu_s dt + S \sigma_s dZ_s] \quad (3.8)$$

Déterminons maintenant les proportions w_2 et w_3 de façon à éliminer complètement les risques du portefeuille d'arbitrage. En prenant uniquement la partie risquée du rendement du portefeuille d'arbitrage de l'équation (3.8) et en l'égalisant à zéro afin d'éliminer le risque, on obtient :

$$\left[\frac{\partial F_1}{\partial S} S \sigma_s dZ_s + \frac{\partial F_1}{\partial \delta} \sigma_c dZ_c \right] + w_2 \left[\frac{\partial F_2}{\partial S} S \sigma_s dZ_s + \frac{\partial F_2}{\partial \delta} \sigma_c dZ_c \right] + w_3 [S \sigma_s dZ_s] = 0 \quad (3.9)$$

En résolvant l'équation (3.9) pour w_2 et w_3 , on obtient :

$$w_2 = - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \delta}}{\frac{\partial F_2}{\partial \delta}} \quad (3.10)$$

$$w_3 = -\frac{\partial F_1}{\partial S} + \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \delta} \frac{\partial F_2}{\partial S}}{\frac{\partial F_2}{\partial \delta}} \quad (3.11)$$

L'équation (3.8) devient donc :

$$\begin{aligned} d\pi = & \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial S} S\mu_s + \frac{\partial F_1}{\partial \delta} \kappa_c (\alpha_c - \delta) - \frac{\partial F_1}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \right) dt \right. \\ & + \left. \frac{\partial F_1}{\partial S} S \sigma_s dZ_s + \frac{\partial F_1}{\partial \delta} \sigma_c dZ_c \right] - \left(\frac{\partial F_1}{\partial \delta} \right) \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial S} S\mu_s + \frac{\partial F_2}{\partial \delta} \kappa_c (\alpha_c - \delta) - \frac{\partial F_2}{\partial \tau_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \right) dt + \frac{\partial F_2}{\partial S} S \sigma_s dZ_s + \frac{\partial F_2}{\partial \delta} \sigma_c dZ_c \right] \\ & + \left(-\frac{\partial F_1}{\partial S} + \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \delta} \frac{\partial F_2}{\partial S}}{\frac{\partial F_2}{\partial \delta}} \right) [S\mu_s dt + S\sigma_s dZ_s] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Après quelques simplification l'équation (3.12) peut se réécrire :

$$\begin{aligned} d\pi = & \left[\left(-\frac{\partial F_1}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \right) dt \right] \\ & - \left(\frac{\partial F_1}{\partial \delta} \right) \left[\left(-\frac{\partial F_2}{\partial \tau_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \right) dt \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Puisque le portefeuille créé avec les proportions w_2 et w_3 des équations (3.10) et (3.11) est maintenant sans risque, il doit donc, en situation d'absence d'opportunité d'arbitrage, rapporter le taux sans risque r :

$$d\pi = w_3 (r - \delta) S dt = \left(-\frac{\partial F_1}{\partial S} + \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \delta} \frac{\partial F_2}{\partial S}}{\frac{\partial F_2}{\partial \delta}} \right) (r - \delta) S dt \quad (3.14)$$

En égalisant les équations (3.13) et (3.14), on obtient l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\left[\frac{\partial F_1}{\partial S} S(r-\delta) - \frac{\partial F_1}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \right] - \left(\frac{\partial F_1}{\partial \delta} \right) \left[\frac{\partial F_2}{\partial S} S(r-\delta) - \frac{\partial F_2}{\partial \tau_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \right] = 0 \quad (3.15)$$

L'expression (3.15) peut être vue comme la somme de deux équations aux dérivées partielles propres à chaque contrat à terme considéré. Aussi, la solution à l'équation aux dérivées partielles ci-dessous, avec la condition aux bornes $F(S(T), \delta(T), \tau = 0) = S(T)$, sera également une solution à l'expression (3.15)⁷.

$$\frac{\left[\frac{\partial F}{\partial S} S(r-\delta) - \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \right]}{\frac{\partial F}{\partial \delta}} = a \quad (3.16)$$

où a est une variable arbitraire qui ne dépend pas de la maturité des contrats à terme.

On peut réécrire de façon plus explicite l'équation (3.16) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial S} S(r-\delta) + \frac{\partial F}{\partial \delta} a - \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} = 0 \quad (3.17)$$

⁷ L'expression (3.16) représente chaque équation aux dérivées partielles de l'expression (3.15) de façon indépendante avec les termes τ_1 et τ_2 généralisés par le terme τ . De façon identique, les termes T_1 et T_2 de la condition aux bornes ont été généralisé par le terme T .

Dans ce modèle avec bénéfice de détention stochastique, la condition d'arbitrage n'est malheureusement pas suffisante pour la détermination d'une fonction unique de prix pour les contrats à terme. On peut voir ce problème d'une façon alternative en constatant que pour ce modèle, le portefeuille équivalent à un contrat à terme est composé du bien sous-jacent ainsi que d'un autre contrat à terme avec une échéance différente du premier. On ne peut donc pas déterminer le prix d'un contrat à terme sans connaître le prix d'un autre contrat à terme sur le même sous-jacent, mais c'est précisément la fonction que l'on cherche à déterminer.

Une des solutions pour l'obtention d'une fonction de prix unique pour les contrats à terme est d'utiliser un modèle d'équilibre pour l'évaluation d'actifs. C'est précisément l'approche utilisée par Hull et White (1987), et nous allons employer leur technique dans ce qui va suivre.

En se basant sur l'équation différentielle (3.7) pour les prix à terme, on remarque que les changements dF dans les prix à terme dépendent de deux variables aléatoires, soit des changements dS dans les prix au comptant et des changements $d\delta$ du bénéfice net de détention. En appliquant soit un modèle intertemporel d'évaluation d'actifs, ou une version en temps continu de la théorie d'évaluation d'arbitrage de Ross (1976) (1977), on obtient l'équation suivante pour le rendement espéré des contrats à terme⁸ :

$$E\left(\frac{dF}{F}\right) = \frac{(\mu_s + \delta) - r}{\sigma_s} \frac{\partial F}{\partial S} S \sigma_s + \lambda_c \frac{\partial F}{\partial \delta} \sigma_c \quad (3.18)$$

où $\frac{(\mu_s + \delta) - r}{\sigma_s}$ représente la prime de risque associée à l'actif sous-jacent, et λ_c représente la prime de risque associée au bénéfice net de détention.

⁸ Voir également le paragraphe intitulé Convenience yield p. 507 du livre de Hull (2000).

Le rendement espéré d'un contrat à terme est aussi déterminé par le terme en dt de l'équation (3.7) relative au lemme d'Itô :

$$E(dF) = \frac{\partial F}{\partial S} S \mu_s + \frac{\partial F}{\partial \delta} \kappa_c (\alpha_c - \delta) - \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \quad (3.19)$$

En simplifiant l'expression (3.18), on obtient,

$$E(dF) = \frac{\partial F}{\partial S} S (\mu_s + \delta - r) + \frac{\partial F}{\partial \delta} \lambda_c \sigma_c \quad (3.20)$$

Maintenant en égalisant les expressions (3.19) et (3.20), on aboutit sur :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial S} S (r - \delta) + \frac{\partial F}{\partial \delta} (\kappa_c (\alpha_c - \delta) - \lambda_c \sigma_c) - \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 \\ + \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

L'équation différentielle partielle (3.21), avec la condition aux bornes $F(S(T), \delta(T), \tau = 0) = S(T)$, possède une solution unique, et il est facile de démontrer que cette solution satisfait également l'équation différentielle partielle (3.15).

Le taux de rendement espéré des prix au comptant de l'actif sous-jacent n'influence donc pas la valeur des contrats à terme. Mais en général les changements espérés et la prime de risque associés au bénéfice net de détention affectent quant à eux la valeur des contrats à terme.

Puisque le bénéfice de détention n'est pas transigé sur les marchés, l'équation différentielle partielle (3.21) dépend des préférences des investisseurs par rapport au risque, préférences qui sont incluses dans le prix de marché du risque lié au bénéfice net de détention λ_c .

Afin d'obtenir une solution à cette l'équation différentielle partielle, une version du théorème de Feynman-Kac est invoquée, et dans un but de traçabilité, la prime de risque du bénéfice net de détention λ_c est supposée constante⁹.

La solution de Feynman-Kac pour les prix à terme $F(t, T_1)$ s'exprime de la façon suivante¹⁰ :

$$F(t, T_1) = \hat{E}_t[S(T_1)] \quad (3.22)$$

où l'espérance conditionnelle à l'information disponible au temps t est calculée en respect avec les processus ajustés pour le risque suivants :

$$dS = S(r - \delta)dt + S\sigma_s dZ_s \quad (3.23)$$

$$d\delta = [\kappa_c(\alpha_c - \delta) - \lambda_c\sigma_c]dt + \sigma_c dZ_c \quad (3.24)$$

Il est intéressant de noter que dans les deux équations ci-dessus, la tendance du processus des prix au comptant de l'actif sous-jacent, $S\mu_s$, a été remplacée par $S(r - \delta)$, le coefficient de la dérivée partielle des prix à terme par rapport aux prix au comptant de l'équation différentielle (3.21). Et de façon similaire, la tendance du bénéfice net de détention a été remplacée par $[\kappa_c(\alpha_c - \delta) - \lambda_c\sigma_c]$, le coefficient de la dérivée partielle des prix à terme par rapport au bénéfice net de détention de l'équation différentielle (3.21). En fait, ces nouveaux coefficients définissent les processus ajustés pour le risque.

La solution de l'équation (3.22) peut être obtenue à l'aide d'un changement de variable et de la fonction génératrice de moments d'une loi normale comme nous allons le démontrer ci-dessous.

⁹ Ceci est équivalent à assumer, dans un cadre général d'analyse, que l'investisseur représentatif possède une fonction d'utilité logarithmique. Dans ce cas spécial, l'utilité marginale de la richesse est indépendante de la richesse; et le prix de marché du risque, qui est donné par la covariance entre les changements du bénéfice net de détention et le taux de changement de l'utilité marginale de la richesse, est constant. Brennan (1990) et Gibson et Schwartz (1990b) utilisent la même hypothèse d'utilité logarithmique pour l'agent représentatif.

¹⁰ Voir Duffie (1992) et Neftci (2000) pour une exposition claire du théorème de Feynman-Kac et de ses conditions nécessaires de régularité.

Définissons tout d'abord une nouvelle fonction :

$$G(S) = \ln(S) \quad (3.25)$$

A partir de la transformation (3.25), du processus ajusté pour le risque des prix au comptant de l'actif sous-jacent (3.23), et ainsi qu'en utilisant le lemme d'Itô, le processus de diffusion ajusté pour le risque pour la fonction $G(S)$ s'écrit :

$$dG = \left(r - \delta - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) dt + \sigma_s dZ_s \quad (3.26)$$

En intégrant l'équation (3.26), on obtient :

$$G(T_1) = G(t) + r\tau_1 - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \tau_1 - \int_t^{T_1} \delta(v) dv + \sigma_s [Z_s(T_1) - Z_s(t)] \quad (3.27)$$

La distribution de G est normale avec une valeur espérée conditionnelle à l'information disponible au temps t égale à :

$$\hat{E}_t [G(T_1)] = \ln S(t) + r\tau_1 - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \tau_1 - \int_t^{T_1} \hat{E}_t [\delta(v)] dv \quad (3.28)$$

Afin de résoudre l'intégrale de l'équation (3.28), la solution de l'équation différentielle stochastique (3.24) pour le bénéfice net de détention est utilisée. Cette solution prend la forme suivante :

$$\delta(v) = \alpha_c - \frac{\lambda_c \sigma_c}{\kappa_c} + \left(\delta(t) - \alpha_c + \frac{\lambda_c \sigma_c}{\kappa_c} \right) e^{-\kappa_c(v-t)} + \sigma_c e^{-\kappa_c v} \int_t^v e^{\kappa_c s} dZ_c(s) \quad (3.29)$$

En substituant la valeur espérée de l'équation (3.29) dans l'équation (3.28) et en intégrant, nous aboutissons à l'expression suivante :

$$\hat{E}_t [G(T_1)] = \ln S(t) + r\tau_1 - \frac{1}{2}\sigma_s^2\tau_1 - \left(\alpha_c - \frac{\lambda_c\sigma_c}{\kappa_c}\right)\tau_1 - \left(\delta(t) - \alpha_c + \frac{\lambda_c\sigma_c}{\kappa_c}\right)H_c \quad (3.30)$$

avec

$$H_c = \frac{1 - e^{-\kappa_c\tau_1}}{\kappa_c}$$

La variance de $G(T_1)$ conditionnelle à l'information disponible au temps t , équation (3.27), est donnée par :

$$\text{var}_t [G(T_1)] = \sigma_s^2\tau_1 + \text{var} \left[\int_t^{\tau_1} \delta(v) dv \right] - 2 \text{cov} \left[\int_t^{\tau_1} \delta(v) dv, \sigma_s \int_t^{\tau_1} dZ_s(v) \right] \quad (3.31)$$

En remplaçant $\delta(v)$ dans l'équation (3.31) par la partie aléatoire de l'équation (3.29) et en intégrant, on obtient :

$$\text{var}_t [G(T_1)] = \sigma_s^2\tau_1 + \left[-(H_c - \tau_1) \frac{\sigma_c^2}{\kappa_c^2} - \frac{\sigma_c^2 H_c^2}{2\kappa_c} \right] - 2 \left[\frac{\sigma_s\sigma_c\rho_{sc}}{\kappa_c} (\tau_1 - H_c) \right] \quad (3.32)$$

D'après l'équation (3.25), l'expression de l'espérance ajustée pour le risque de $S(T_1)$ conditionnelle à l'information disponible au temps t , c'est-à-dire le prix à terme au temps t , est égale à :

$$F(t, T_1) = \hat{E}_t [S(T_1)] = \hat{E}_t \left[e^{G(T_1)} \right] \quad (3.33)$$

La fonction $G(S)$ étant distribuée selon une loi normale, l'équation (3.33) représente donc la fonction génératrice de moments d'une distribution normale :

$$F(t, T_1) = \hat{E}_t [S(T_1)] = e^{\hat{E}_t[G(T_1)] + \frac{1}{2}\text{var}_t[G(T_1)]} \quad (3.34)$$

Le résultat final pour les prix à terme $F(t, T_1)$, avec le modèle à deux facteurs considéré dans notre analyse, s'obtient en remplaçant $\hat{E}_t[G(T_1)]$, équation (3.30), et $\text{var}_t[G(T_1)]$, équation (3.32), dans l'équation (3.34).

Ainsi la fonction des prix à terme est donnée par :

$$F(S(t), \delta(t), t, T_1) = S(t) e^{r\tau_1} e^{-H_c(\tau_1)\delta(t)} A(\tau_1) \quad (3.35)$$

avec

$$A(\tau_1) = \exp \left[\frac{(H_c - \tau_1) \left(\kappa_c^2 \alpha_c - \kappa_c \lambda_c \sigma_c - \frac{\sigma_c^2}{2} + \kappa_c \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \right)}{\kappa_c^2} - \frac{\sigma_c^2 H_c^2}{4\kappa_c} \right]$$

Cette solution pour la fonction des prix à terme a été développée indépendamment par Jamshidian et Fein (1990), Bjerksund (1991), et Hilliard et Reis (1998).

On constate donc que pour ce modèle à deux facteurs, les prix théoriques à terme dépendent du niveau actuel des prix au comptant de l'actif sous-jacent $S(t)$, du niveau actuel du bénéfice net de détention $\delta(t)$, du temps restant jusqu'à l'échéance du contrat à terme τ_1 , du taux d'intérêt sans risque r , ainsi que des paramètres des processus des équations (3.23) et (3.24).

3.3 Le modèle d'évaluation d'options européennes sur contrat à terme

Maintenant que nous connaissons la fonction de prix des contrats à terme, continuons notre cheminement vers l'évaluation des options européennes sur contrat à terme.

Pour ce faire, reprenons le processus de diffusion du prix au comptant de l'actif sous-jacent initialement postulé, à savoir :

$$\frac{dS}{S} = (\mu_s - \lambda \bar{\kappa}) dt + \sigma_s dZ_s + \kappa dq \quad (3.1)$$

Malheureusement comme nous l'avons déjà mentionné, les prix des produits énergétiques sont systématiquement reliés à des variables macroéconomiques ou à d'autres facteurs, qui tous conduisent à un risque de saut systématique, et donc non diversifiable. Il nous est alors impossible de réaliser un quelconque portefeuille d'arbitrage. Afin de contourner cette difficulté, Bates (1991) postule deux hypothèses concernant la technologie et les préférences qui vont lui permettre de dériver un processus mixte de diffusion avec sauts ajusté pour le risque.

Les hypothèses de Bates sont les suivantes :

A.6 Le richesse $W(t)$ de l'agent représentatif suit le processus de diffusion avec sauts suivant¹¹ :

$$\frac{dW}{W} = \left(\mu_w - \lambda \bar{\kappa}_w - \frac{Co}{W} \right) dt + \sigma_w dZ_w + \kappa_w dq \quad (3.36)$$

avec

Co : Consommation

μ_w : Taux espéré instantané des changements de la richesse

σ_w : Écart-type instantané des changements de la richesse conditionnel à l'absence de sauts

$\bar{\kappa}_w$: Amplitude aléatoire moyenne en pourcentage d'un saut dans la richesse conditionnelle à l'arrivée d'évènements distribués selon une loi de Poisson. $1 + \kappa_w$ possède une distribution log-normale :

$$\ln(1 + \kappa_w) \sim N\left(\gamma_w - \frac{1}{2}\omega_w^2, \omega_w^2\right)$$

$$E(\kappa_w) \equiv \bar{\kappa}_w = e^{\gamma_w} - 1 \quad \text{et} \quad \text{cov}[\ln(1 + \kappa), \ln(1 + \kappa_w)] \equiv \rho_{sw}$$

¹¹ Ce processus pour la richesse peut être dérivé d'une extension de l'économie de production de Cox, Ingersoll, et Ross (1985), avec des opportunités d'investissement multiples qui sont représentées par des rendements constants afin de pouvoir identifier le processus mixte de diffusion avec sauts simultanés. Voir également Bates (1988).

A.7 L'agent représentatif possède la fonction d'utilité $U(Co)$ suivante :

$$E_t \int_t^\infty e^{-\chi v} U(Co(v)) dv \quad \text{avec} \quad U(Co(v)) = \frac{Co(v)^{1-R} - 1}{1-R} \quad (3.37)$$

où

- R : Coefficient d'aversion relative du consommateur au risque
 χ : Taux d'actualisation sans risque.

Comme nous l'avons déjà mentionné au début de ce chapitre, le choix d'un taux d'intérêt sans risque constant découle des hypothèses A2., A6., et A7., et plus particulièrement de l'hypothèse d'un taux espéré instantané des changements de la richesse μ_w constant.

A partir de ces hypothèses, Bates parvient à démontrer que n'importe quel bien conditionnel peut être évalué comme si les investisseurs étaient neutre au risque en utilisant pour le prix de l'actif sous-jacent le processus mixte de diffusion avec sauts ajusté pour le risque suivant :

$$\frac{dS}{S} = (r - \delta - \lambda^* \bar{\kappa}^*) dt + \sigma_s dZ_s + \kappa^* dq^* \quad (3.38)$$

avec

- $\bar{\kappa}^*$: Amplitude aléatoire moyenne en pourcentage ajustée pour le risque d'un saut conditionnelle à l'arrivée d'évènements distribués selon une loi de Poisson, et où $1 + \kappa^*$ possède une distribution log-normale :

$$\ln(1 + \kappa^*) \sim N\left(\gamma^* - \frac{1}{2}\omega^2, \omega^2\right), \quad E(\kappa^*) = \bar{\kappa}^* = e^{\gamma^*} - 1$$

- λ^* : Fréquence moyenne ajustée pour le risque des sauts de Poisson

- q^* : Incrément du processus de Poisson avec fréquence λ^*
 $\text{Prob}(dq^* = 1) = \lambda^* dt, \text{Prob}(dq^* = 0) = 1 - \lambda^* dt$

De plus, Les variables aléatoires de sauts sont non corrélées par paire, c'est-à-dire $\text{cov}(dq^*, \kappa^*) = 0, \text{cov}(dZ_s, dq^*) = 0, \text{cov}(dZ_s, \kappa^*) = 0, \text{cov}(dZ_c, dq^*) = 0, \text{et } \text{cov}(dZ_c, \kappa^*) = 0.$

Les paramètres neutres au risque $\bar{\kappa}^*$ et λ^* diffèrent des paramètres actuels $\bar{\kappa}$ et λ par un terme qui dépend de la fonction d'utilité de l'agent représentatif de l'économie considérée. Ces paramètres ajustés pour le risque sont donnés par les expressions suivantes :

$$\bar{\kappa}^* = \bar{\kappa} + \frac{\text{cov}\left(\kappa, \frac{\Delta J_w}{J_w}\right)}{E\left[1 + \frac{\Delta J_w}{J_w}\right]} = e^{(\gamma - R\rho_{sw})} - 1 \quad \text{et} \quad \lambda^* = \lambda E\left[1 + \frac{\Delta J_w}{J_w}\right] = \lambda e^{\left(-R\gamma_w + \frac{1}{2}R(1+R)\omega_w^2\right)} \quad (3.39)$$

où $\frac{\Delta J_w}{J_w}$ représente les changements relatifs de l'utilité marginale de la richesse de l'agent représentatif conditionnels à l'occurrence de sauts.

Tel qu'expliqué aux pages 29 et 30 de cette étude, la solution des prix à terme reste inchangée lorsqu'une composante de saut est ajoutée au processus de diffusion du sous-jacent. C'est pourquoi la fonction des prix à terme de l'équation (3.35) reste valable en présence de sauts. C'est donc à partir de cette fonction que nous allons dériver le processus de diffusion des prix à terme.

En utilisant le lemme d'Itô pour les processus avec sauts (voir Merton (1976)) et les processus neutres au risque pour le prix au comptant de l'actif sous-jacent et le bénéfice net de détention, respectivement équation (3.38) et (3.24), on obtient le processus de diffusion neutre au risque des prix à terme :

$$\begin{aligned} \bar{d}F = & \left[\frac{\partial F}{\partial S} S(r - \delta) + \frac{\partial F}{\partial \delta} (\kappa_c (\alpha_c - \delta) - \lambda_c \sigma_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} S^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \delta^2} \sigma_c^2 \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial \delta} S \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} - \frac{\partial F}{\partial \tau_1} \right] dt + \frac{\partial F}{\partial S} S \sigma_s dZ_s + \frac{\partial F}{\partial \delta} \sigma_c dZ_c - \frac{\partial F}{\partial S} S \bar{\kappa}^* \lambda^* dt + \frac{\partial F}{\partial S} S \kappa^* dq^* \end{aligned} \quad (3.40)$$

Le terme entre crochet de l'équation (3.40) étant identique à l'équation (3.21), nous pouvons donc l'annuler. Il nous reste alors :

$$\bar{d}F = \frac{\partial F}{\partial S} S \sigma_s dZ_s + \frac{\partial F}{\partial \delta} \sigma_c dZ_c - \frac{\partial F}{\partial S} S \bar{\kappa}^* \lambda^* dt + \frac{\partial F}{\partial S} S \kappa^* dq^* \quad (3.41)$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (3.41) les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial S}$ et $\frac{\partial F}{\partial \delta}$ par leur valeur calculée à partir de la fonction des prix à terme de l'équation (3.35).

$$dF = F \sigma_s dZ_s - F H_c(\tau_1) \sigma_c dZ_c - F \bar{\kappa}^* \lambda^* dt + F \kappa^* dq^* \quad (3.42)$$

Afin de simplifier le processus de l'équation (3.42), définissons un autre processus de Wiener standard Z_F , ainsi qu'un nouveau paramètre σ_F tel que :

$$\sigma_F dZ_F = \sigma_s dZ_s - H_c(\tau_1) \sigma_c dZ_c \quad (3.43)$$

De cette façon l'équation (3.42) se réduit à :

$$\frac{dF}{F} = -\bar{\kappa}^* \lambda^* dt + \sigma_F dZ_F + \kappa^* dq^* \quad (3.44)$$

avec

$$\sigma_F^2(\sigma_s, \sigma_c, \rho_{sc}, \kappa_c, \tau_1) = \sigma_s^2 + \sigma_c^2 H_c^2(\tau_1) - 2\sigma_s \sigma_c \rho_{sc} H_c(\tau_1) \quad (3.45)$$

Le processus de Poisson dq^* ainsi que l'amplitude aléatoire d'un saut κ^* dans le processus de diffusion des prix à terme de l'équation (3.44) sont les mêmes que dans le processus de diffusion des prix au comptant de l'actif sous-jacent, équation (3.38). Cela provient du fait que le saut de Poisson pour les prix à terme se produit si et seulement si le saut de Poisson pour les prix au comptant a eu lieu. De plus, si le saut de Poisson se produit, alors l'amplitude du saut dans les prix à terme sera égale à l'amplitude du saut dans les prix au comptant, puisque la formule d'évaluation des prix à terme de l'équation (3.35) est linéaire par rapport aux prix au comptant. Cette linéarité entre les prix au comptant et les prix à terme représente, comme nous l'avons vu auparavant, une des critiques que l'on peut adresser au modèle d'Hilliard et Reis. L'objectif de cette étude n'étant pas de répondre à cette critique, mais plutôt de se concentrer sur l'évaluation d'options de type américain, nous considérerons donc cette relation de linéarité comme valable dans notre cadre d'analyse.

La racine de l'équation (3.45) représente la structure à terme de la volatilité du rendement des prix à terme. À la différence d'un modèle avec un bénéfice de détention déterministe, où la volatilité du rendement des prix à terme est égale à la volatilité du rendement des prix au comptant, on constate au travers de la racine de l'équation (3.45) que la volatilité du rendement des prix à terme dépend de la volatilité du rendement des prix au comptant, de la volatilité du bénéfice net de détention, de la corrélation entre les prix au comptant et le bénéfice net de détention, de la vitesse de retour vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention, et finalement du temps restant à faire jusqu'à l'échéance du contrat à terme.

De façon générale, la volatilité σ_F du rendement des prix à terme dépend du temps et est différente de la volatilité σ_s du rendement des prix au comptant. Toutefois, à la maturité des contrats à terme, l'équation (3.45) se simplifie jusqu'à se réduire à la volatilité du rendement des prix au comptant. En effet, la volatilité du rendement des prix à terme est identique à la volatilité du rendement des prix au comptant à la maturité des contrats. Ceci étant somme toute assez logique puisqu'à l'échéance des contrats à terme, les prix à terme sont alors égaux aux prix au comptant.

La volatilité du rendement des prix à terme étant indépendante du niveau des prix au comptant et du niveau du bénéfice net de détention, les prix à terme vont donc pouvoir être traités de façon exogène dans la suite du développement de notre modèle d'évaluation d'options sur contrat à terme.

La valeur au temps t d'une option d'achat, qui expire au temps T_0 , sur un contrat à terme, qui lui expire au temps T_1 , et dont le processus de diffusion est donné par l'équation (3.44), s'exprime sous la forme suivante (voir Merton (1976) et Bates (1991)) :

$$c(F, \tau_0, X) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Prob}^*(n \text{ sauts}) \hat{E}_t \left[e^{-r\tau_0} \max(F(t=T_0, T_1) - X, 0) | n \text{ sauts} \right] \quad (3.46)$$

La solution de l'équation (3.46) est une simple extension de la solution de Merton (1976), le taux d'intérêt n'apparaissant en effet pas dans la diffusion des prix à terme. On peut voir que celui-ci affecte uniquement l'actualisation des flux monétaires. La solution à l'équation (3.46) est donc égale à :

$$c(F, \tau_0, X) = e^{-r\tau_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda^* \tau_0} (\lambda^* \tau_0)^n}{n!} \right] \left[\hat{E}_t [F(t=T_0, T_1)] e^{b^{(n)}\tau_0} N(d_{1n}) - XN(d_{2n}) \right] \quad (3.47)$$

dont les éléments $b(n)$, d_{1n} , et d_{2n} seront définis ultérieurement.

Nous savons que la solution de l'espérance des prix à terme conditionnelle à l'information disponible au temps t et ajustée pour le risque, $\hat{E}_t [F(t=T_0, T_1)]$, n'est pas affectée par la présence de sauts dans le processus de diffusion des prix à terme. Cette espérance conditionnelle peut donc être calculée en respect avec la processus de l'équation (3.44) soustrait de ses composantes de saut. C'est pourquoi, au lieu de l'équation (3.44), le processus de diffusion pour les prix à terme suivant va être utilisé :

$$\frac{dF}{F} = \sigma_F(\tau_1) dZ_F \quad (3.48)$$

où $\sigma_F(\tau_1)$ est donné par l'équation (3.45).

En reprenant la démarche adoptée lors de la détermination de la fonction des prix à terme, nous définissons une nouvelle fonction Y tel que :

$$Y(F) = \ln F \quad (3.49)$$

A partir du processus neutre au risque pour les prix à terme, équation (3.48), et en utilisant le lemme d'Itô, le processus de diffusion pour Y s'écrit :

$$dY = -\frac{1}{2} \sigma_F^2 dt + \sigma_F dZ_F \quad (3.50)$$

En intégrant l'équation (3.50), nous obtenons :

$$Y(T_0) = \ln F(t, T_1) - \frac{1}{2} \int_t^{T_0} \sigma_F^2(v) dv + \int_t^{T_0} \sigma_F(v) dZ_F(v) \quad (3.51)$$

La distribution de $Y(T_0)$ étant normale, $\hat{E}_t[e^{Y(T_0)}]$ représente donc la fonction génératrice de moments d'une loi normale, et s'exprime de la façon suivante :

$$\hat{E}_t[F(t = T_0, T_1)] = \hat{E}_t[e^{Y(T_0)}] = e^{\hat{E}_t[Y(T_0)] + \frac{1}{2} \text{var}_t[Y(T_0)]} \quad (3.52)$$

La valeur espérée de $Y(T_0)$ conditionnelle à l'information disponible au temps t est égale à :

$$\hat{E}_t[Y(T_0)] = \ln F(t, T_1) - \frac{1}{2} \int_t^{T_0} \sigma_F^2(v) dv \quad (3.53)$$

La variance de $Y(T_0)$ conditionnelle à l'information disponible au temps t est quant à elle égale à :

$$\text{var}_t[Y(T_0)] = \int_t^{T_0} \sigma_F^2(v) dv \quad (3.54)$$

En substituant $\hat{E}_t[Y(T_0)]$, équation (3.53), et $\text{var}_t[Y(T_0)]$, équation (3.54), dans l'équation (3.52), on obtient :

$$\hat{E}_t[F(t = T_0, T_1)] = F(t, T_1) \quad (3.55)$$

Il ne nous reste donc plus qu'à substituer l'équation (3.55) dans l'équation (3.47) afin d'obtenir la solution pour la fonction de prix d'une option d'achat européenne sur un contrat à terme dont la dynamique d'évolution du prix est définie par l'équation (3.44) :

$$c(F, \tau_0, X) = e^{-r\tau_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda^* \tau_0} (\lambda^* \tau_0)^n}{n!} \right] [F(t, T_1) e^{b(n)\tau_0} N(d_{1n}) - XN(d_{2n})] \quad (3.56)$$

En suivant un développement similaire, nous obtenons de manière analogue la fonction de prix d'une option de vente européenne sur contrat à terme :

$$p(F, \tau_0, X) = e^{-r\tau_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\lambda^* \tau_0} (\lambda^* \tau_0)^n}{n!} \right] \left[XN(-d_{2n}) - F(t, T_1) e^{b(n)\tau_0} N(-d_{1n}) \right] \quad (3.57)$$

avec

$$b(n) = -\lambda^* \bar{k}^* + \frac{n\gamma^*}{\tau_0}$$

$$d_{1n} = \frac{\ln\left(\frac{F(t, T_1)}{X}\right) + b(n)\tau_0 + \frac{1}{2}(v_F^2 + n\omega^2)}{\sqrt{v_F^2 + n\omega^2}}$$

$$d_{2n} = d_{1n} - \sqrt{v_F^2 + n\omega^2}$$

Et où v_F^2 représente la solution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme, équation (3.45), le long de la durée de vie de l'option, c'est-à-dire du temps t au temps T_0 :

$$v_F^2(t, T_0, T_1) = \int_t^{T_0} \sigma_s^2 dv + \int_t^{T_0} \left[\frac{\sigma_c}{\kappa_c} (1 - e^{-\kappa_c(T_1-v)}) \right]^2 dv - \int_t^{T_0} \frac{2\sigma_s \sigma_c \rho_{sc}}{\kappa_c} (1 - e^{-\kappa_c(T_1-v)}) dv \quad (3.58)$$

En résolvant les intégrales, nous obtenons :

$$v_F^2(t, T_0, T_1) = \sigma_s^2 \tau_0 - \frac{2\sigma_s \sigma_c \rho_{sc}}{k_c} \left[\tau_0 - \frac{(e^{-k_c(T_1-T_0)} - e^{-k_c \tau_1})}{k_c} \right]$$

$$+ \frac{\sigma_c^2}{k_c^2} \left[\tau_0 - \frac{2}{k_c} (e^{-k_c(T_1-T_0)} - e^{-k_c \tau_1}) + \frac{1}{2k_c} (e^{-2k_c(T_1-T_0)} - e^{-2k_c \tau_1}) \right] \quad (3.59)$$

Les expressions (3.56) et (3.57) sont des cas spéciaux du modèle d'évaluation d'options d'Hilliard et Reis pour lesquels la covariance entre les prix à terme et le taux d'intérêt sans risque est nulle, celui-ci étant considéré constant dans notre cadre d'étude. Le terme $Z(t, T_0, T_1)$ de l'équation (2.7) tenant compte de la corrélation entre ces deux variables devient alors égal à l'unité.

Les équations (3.56) et (3.57) nous permettent de constater que la volatilité des prix au comptant ne peut pas être utilisée comme une approximation de la volatilité des prix à terme, la valeur d'une option sur contrat à terme dépendant effectivement de la structure de la volatilité des prix à terme. De plus, ces mêmes équations ainsi que l'équation (3.59) nous démontrent également que les prix des options sur contrat à terme transportent de l'information non seulement sur la volatilité des prix au comptant, mais aussi sur les paramètres ajustés pour le risque des sauts de Poisson, sur la volatilité du bénéfice net de détention, sur la corrélation entre les prix au comptant et le bénéfice net de détention, ainsi que sur la vitesse d'ajustement vers un niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention. Ce facteur κ_c de vitesse d'ajustement vers un niveau d'équilibre à long terme quantifie l'information concernant les ajustements espérés des conditions d'offre et de demande sur les marchés énergétiques.

Les prix d'options sur contrat à terme ne dépendent pas explicitement du niveau des prix au comptant, du niveau du bénéfice net de détention, du niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention, et du prix de marché du risque lié au bénéfice net de détention, lorsque les prix à terme des équations (3.56) et (3.57) sont considérés de façon exogène. Cependant, les prix d'options dépendent indirectement de ces variables par l'intermédiaire du niveau des prix à terme exogènes.

Si l'on considère les prix à terme dans les équations (3.56) et (3.57) comme étant endogènes, alors la fonction de prix des options devient :

$$v \equiv v\left(F\left(S(t), \delta(t), \alpha_c, \lambda_c, \sigma_s, \sigma_c, \rho_{sc}, \kappa_c\right), \sigma_s, \sigma_c, \rho_{sc}, \kappa_c, \lambda^*, \bar{k}^*\right)$$

les prix à terme étant alors obtenus à partir de l'équation (3.35). Cela constitue un modèle d'équilibre plus général que lorsqu'on considère les prix à terme comme étant exogènes, et pour lequel une erreur d'évaluation des contrats à terme conduit indubitablement à une erreur d'évaluation des options sur contrat à terme.

3.4 Le modèle d'évaluation d'options américaines sur contrat à terme

La plupart des options sur contrat à terme se transigeant sur les marchés énergétiques étant de type américain, il est dès lors judicieux de se concentrer sur l'évaluation de ce type d'options.

Malheureusement, il n'existe toujours pas à l'heure actuelle de solution analytique similaire aux équations (3.56) et (3.57) dans le cas des options de type américain, de sorte que seul un modèle numérique ou une approximation analytique peuvent être utilisés pour leur évaluation. Une des solutions numériques possibles serait l'utilisation des différences finies ou d'un modèle d'arbre binomial. En effet, ceux-ci permettraient d'évaluer avec précision les prix d'options américaines pour des paramètres de diffusion et de sauts déterminés. Cependant, ces façons de faire engendreraient un coût prohibitif en temps de calcul et l'estimation des paramètres implicites de ces modèles à partir de prix d'options observés sur les marchés en deviendrait presque cauchemardesque. C'est pourquoi nous avons plutôt choisis d'orienter notre recherche vers une approximation quadratique mise au point par Bates.

Bates (1991) développe dans le prolongement d'une formule analytique qu'il a obtenu pour l'évaluation d'options européennes, une approximation quadratique permettant d'évaluer le pendant américain de ces mêmes options.

Cette approximation s'inscrit parfaitement dans notre cadre d'analyse. En effet notre but n'étant pas de développer un modèle théorique exhaustif qui décrirait de façon quasi-parfaite toutes les dynamiques relatives aux marchés énergétiques, mais plutôt de développer un modèle pratique, facilement implantable, et directement utilisable sur un pupitre de négociation. C'est-à-dire un modèle assez fonctionnel pour être utilisé dans les opérations courantes de négociation, tout en ayant une précision acceptable dans le cadre de ces mêmes activités.

C'est une approche opérationnelle dont la grande majorité des études académiques s'éloignent, celles-ci se consacrant plutôt à l'atteinte de sommets théoriques. Les modèles qui en découlent sont donc pour la plupart difficilement réconciliables avec des activités quotidiennes de négociation. L'approximation quadratique de Bates tend à éviter ces problèmes de compatibilité entre théorie et pratique, puisque celle-ci est directement utilisable en pratique.

Les formules analytiques d'évaluation d'options européennes obtenues par Bates sont un cas spécial de nos formules d'évaluations (3.56) et (3.57), où la solution à l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme ν_F^2 est remplacée par $\sigma_s^2 \tau_0$. Ainsi l'unique différence entre notre modèle et celui de Bates réside dans l'existence d'une variance du rendement des prix à terme dépendante du temps à faire jusqu'à l'échéance de l'option, et de ce fait non constante contrairement à ce que Bates assume dans son analyse. Cette similitude entre les deux modèles va donc nous permettre dans ce qui va suivre d'adapter l'approximation quadratique de Bates à notre cadre d'analyse plus général.

On sait que le prix d'une option d'achat américaine $C(F, \tau_0, X)$ doit respecter les conditions aux bornes suivantes :

$$\begin{aligned} C(F, 0, X) &= \text{Max}(F - X, 0) \\ C(F^c, \tau_0, X) &= F^c - X \\ \frac{\partial C(F^c, \tau_0, X)}{\partial F} &= 1 \end{aligned} \quad (3.60)$$

où F^c est le prix à terme critique d'exercice avant l'échéance de l'option d'achat (relativement au prix d'exercice) au-dessus duquel l'option sera toujours immédiatement exercée. La détermination de ce prix à terme critique F^c constitue une partie du problème à résoudre.

Bates postule alors que l'option d'achat doit également satisfaire l'équation de Bellman suivante à l'intérieur de la région sans temps d'arrêt, où l'amplitude des sauts a été remplacée par son espérance moyenne :

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau_0} - \lambda^* \bar{\kappa}^* F \frac{\partial V}{\partial F} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_F^2 F^2 \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} + \lambda^* E[V(Fe^J, \tau, X) - V] = rV \quad (3.61)$$

où

$$V(F, \tau_0, X) = C(F, \tau_0, X)$$

J est une variable aléatoire normale de distribution $N\left(\gamma^* - \frac{1}{2}\omega, \omega^2\right)$

$\bar{\sigma}_F^2(\tau_1)$ représente la variance moyenne du rendement des prix à terme de l'équation (3.45) sur la durée de vie de l'option.

À strictement parlé, l'approximation quadratique pour la prime d'exercice anticipé a été développée par Bates pour un modèle mixte de diffusion avec sauts possédant une volatilité constante. Afin d'être cohérent avec ce développement, nous avons donc choisi de remplacer dans l'équation de Bellman ci-dessus l'expression de la variance dépendante du temps par sa moyenne sur la durée de vie de l'option, introduisant ainsi une première approximation dans le modèle. Cette approximation est similaire à celle effectuée par Bates (1996) lorsque celui-ci remplace l'expression d'une volatilité stochastique par sa variance moyenne espérée le long de la durée de vie de l'option. Nous nous sommes toutefois aperçu du bien fondé de ce choix lors de simulations numériques, les valeurs de prix d'options ainsi obtenues étant en effet les plus proches des valeurs obtenues avec le modèle d'Amin qui est utilisé à des fins de comparaison.

Etant donné qu'il existe une solution à l'équation (3.61) dans le cas des options européennes, c'est-à-dire lorsque $V(F, \tau_0, X) = c(F, \tau_0, X)$, le problème se résume donc à trouver une bonne approximation pour la prime d'exercice anticipé suivante :

$$\varepsilon(F, \tau_0, X) \equiv C(F, \tau_0, X) - c(F, \tau_0, X) \quad (3.62)$$

L'équation (3.61) étant linéaire par rapport à V et à ses dérivées partielles, la prime d'exercice anticipé ε doit donc également respecter l'équation (3.61) à l'intérieur de la région sans temps d'arrêt. La prime d'exercice anticipé étant homogène par rapport à F et à X : $\varepsilon(F, \tau_0, X) = X\varepsilon(F/X, \tau_0, 1)$, on peut donc, sans aucune perte de généralité, récrire celle-ci sous la forme suivante (voir Bates (1991) pp. 1041) :

$$\varepsilon(F, \tau_0, X) = XK(\tau_0)f(F/X, K(\tau_0)) \equiv XK(\tau_0)f(y, K) \quad (3.63)$$

avec

$y = F/X$ et $K(\tau_0)$ une fonction arbitraire du temps restant à faire jusqu'à la maturité de l'option qui sera définie par la suite.

En observant l'équation (3.61), on constate que la fonction $f(y, K)$ doit satisfaire l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}_F^2 y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \lambda^* \bar{\kappa}^* y \frac{\partial f}{\partial y} - rf \left[1 + \frac{\frac{\partial K}{\partial \tau_0} \left(1 + K \frac{\partial f}{\partial K} \right)}{f} \right] + \lambda^* E[f(ye^J, K) - f] = 0 \quad (3.64)$$

En choisissant $K(\tau_0) = 1 - e^{-r\tau_0}$, on peut simplifier l'expression (3.64) de la façon suivante :

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}_F^2 y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \lambda^* \bar{\kappa}^* y \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{r}{K} f - r(1-K) \frac{\partial f}{\partial K} + \lambda^* E[f(ye^J, K) - f] = 0 \quad (3.65)$$

L'équation (3.65) peut être résolue pour une option d'achat avec les conditions aux bornes suivantes :

$$f(y, 0) = 0 \quad (3.66)$$

$$f(0, K) = 0 \quad (3.67)$$

$$f(y_{call}^c, K) = (y_{call}^c - 1) - c(y_{call}^c, \tau_0, 1) \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y_{call}^c, K) = 1 - \frac{\partial c}{\partial F}(y_{call}^c, \tau_0, 1) \quad (3.69)$$

y_{call}^c est le ratio critique du prix à terme sur le prix d'exercice au-dessus duquel l'option d'achat est exercée immédiatement ($y_{call}^c \geq 1$).

Les conditions aux bornes (3.68) et (3.69) requièrent que la prime d'exercice anticipé approche en douceur la valeur d'exercice anticipé

$$f(y, K) = (y-1) - c(F = y, \tau_0, X = 1) \quad (3.70)$$

à mesure que y s'approche du ratio critique du prix à terme sur le prix d'exercice y_{call}^c , ratio au-dessus duquel l'option américaine est toujours exercée de façon anticipée.

En dépit du terme $r(1-K(\tau_0))\frac{\partial f}{\partial K}$, l'expression (3.65) est une équation différentielle ordinaire pour y .

C'est ici qu'intervient l'approximation quadratique de Bates pour la prime d'exercice anticipé, qui originellement fut proposée par MacMillan (1987). Celle-ci est générée en ignorant le terme $r(1-K(\tau_0))\frac{\partial f}{\partial K}$. Le choix de $K(\tau_0) = 1 - e^{-r\tau_0}$ assure l'exactitude de l'approximation lorsque τ_0 approche zéro ou l'infini.

Sous cette approximation l'équation (3.65) devient donc :

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}_F^2 y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \lambda^* \bar{K}^* y \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{r}{K} f + \lambda^* E[f(ye^J, K) - f] = 0 \quad (3.71)$$

La solution générale à cette équation différentielle ordinaire, sujette aux conditions aux bornes (3.66), (3.67), (3.68), et (3.69), est de la forme :

$$f(y) = A_1 y^{u_1} + A_2 y^{u_2} \quad (3.72)$$

où u_1 et u_2 sont les racines de

$$\frac{1}{2}\bar{\sigma}_F^2 u^2 + \left(-\lambda^* \bar{K}^* - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_F^2\right)u - \frac{r}{K(\tau_0)} + \lambda^* \left[e^{\gamma^* u + \frac{1}{2}u(u-1)\omega^2} - 1 \right] = 0 \quad (3.73)$$

Une des racines (u_1) est négative, l'autre (u_2) est positive. Pour des valeurs données des paramètres r , λ^* , $\bar{\kappa}^*$, ω , et de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme $\bar{\sigma}_F^2(\tau_1)$, des valeurs précises des racines u_1 et u_2 peuvent être rapidement obtenues à partir de l'équation (3.73) en utilisant la méthode Newton-Raphson.

Les valeurs initiales pour l'amorçage de cette méthode numérique proviennent de l'équation quadratique obtenue par le développement du terme $\exp[\gamma^*u + u(u-1)\omega^2/2]$ de l'équation (3.73) selon un polynôme de Taylor de second ordre en ignorant les puissances de γ^* et ω supérieures à deux, tout en utilisant l'approximation $\bar{\kappa}^* = \gamma^* + (\omega^*)^2/2$:

$$\frac{1}{2}\phi^2u^2 - \frac{1}{2}\phi^2u - \frac{r}{K(\tau_0)} \approx 0 \quad (3.74)$$

où $\phi^2 = \bar{\sigma}_F^2 + \lambda^*[(\gamma^*)^2 + \omega^2]$ représente la variance inconditionnelle à l'absence de sauts par unité de temps.

L'approximation (3.74) indique que pour des sauts avec des amplitudes plausibles, c'est-à-dire pour $|\gamma^*|$ et ω substantiellement plus petits que l'unité, le paramètre de courbure u va essentiellement dépendre des paramètres de sauts λ^* , γ^* , et ω seulement aussi longtemps qu'ils contribueront à la variance moyenne par unité de temps du processus sous-jacent. De plus, puisque $\frac{r}{K(\tau_0)} = \frac{r}{(1-e^{-r\tau_0})} \approx \frac{1}{\tau_0}$, le paramètre de courbure u est insensible au taux d'intérêt.

La condition aux bornes (3.66) exclue la racine négative, donc $A_1 = 0$ pour une option d'achat. Les conditions (3.68) et (3.69) permettent de déterminer le ratio critique d'exercice anticipé y_{call}^c et le coefficient A_2 .

Puisque $f(y) = A_2 y^{u_2}$ et $f'(y) = A_2 (u_2 / y) y^{u_2}$, les conditions aux bornes (3.68) et (3.69) impliquent que y_{call}^c est la solution implicite de l'équation suivante :

$$y_{call}^c - 1 = c(F = y_{call}^c, \tau_0, X = 1) + \left(\frac{y_{call}^c}{u_2} \right) \left[1 - \frac{\partial c(F = y_{call}^c, \tau_0, X = 1)}{\partial F} \right] \quad (3.75)$$

avec A_2 donné par :

$$A_2 = \left(\frac{y_{call}^c}{u_2} \right) \left[1 - \frac{\partial c(F = y_{call}^c, \tau_0, X = 1)}{\partial F} \right] \quad (3.76)$$

Pour des paramètres donnés, y_{call}^c peut être déterminé à partir de l'équation (3.75), via la méthode Newton-Raphson, en utilisant la solution de l'équation (3.56) pour la valeur européenne d'une option d'achat et ses dérivées partielles par rapport au prix à terme.

Les expressions (3.73), (3.75), et (3.76) nous permettent donc d'approximer la prime d'exercice anticipée, et finalement d'aboutir à une formule d'évaluation d'options d'achat américaines sur contrat à terme :

$$C(F, \tau_0, X) = \begin{cases} c(F, \tau_0, X) + X A_2 \left[\frac{F / X}{y_{call}^c} \right]^{u_2} & \text{pour } F/X < y_{call}^c \\ F - X & \text{pour } F/X \geq y_{call}^c \end{cases} \quad (3.77)$$

D'une façon similaire, le même développement peut être appliqué au cas des options de vente américaines afin d'aboutir sur les formules d'évaluation suivantes :

$$\begin{aligned}
 P(F, \tau_0, X) &= p(F, \tau_0, X) + XA_1 \left[\frac{F/X}{y_{put}^c} \right]^{u_1} && \text{pour } F/X > y_{put}^c \\
 &= X - F && \text{pour } F/X \leq y_{put}^c
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

avec

$$A_1 = - \left(\frac{y_{put}^c}{u_1} \right) \left[1 + \frac{\partial p(F = y_{put}^c, \tau_0, X = 1)}{\partial F} \right]$$

u_1 est la racine négative de l'équation (3.73)

y_{put}^c est le ratio critique du prix à terme sur le prix d'exercice au-dessous duquel l'option de vente est exercée immédiatement ($y_{put}^c \leq 1$). Celui-ci est obtenu implicitement à partir de l'équation suivante :

$$1 - y_{put}^c = p(F = y_{put}^c, \tau_0, X = 1) - \left(\frac{y_{put}^c}{u_1} \right) \left[1 + \frac{\partial p(F = y_{put}^c, \tau_0, X = 1)}{\partial F} \right] \tag{3.79}$$

Comme mentionné auparavant, les paramètres u_1 , u_2 et y_{call}^c , y_{put}^c peuvent être déterminés rapidement en utilisant la méthode Newton-Raphson pour des paramètres r , λ^* , $\bar{\kappa}^*$, ω , et $\bar{\sigma}_F^2(\tau_1)$ donnés, ainsi que pour un temps restant à faire jusqu'à l'échéance de l'option τ_0 fixé. C'est la rapidité de calcul obtenue par l'utilisation de la méthode Newton-Raphson qui confère à cette approximation quadratique son caractère opérationnel.

3.5 Conclusion

Le modèle d'évaluation d'options américaines développé ci-dessus en s'inspirant de l'étude de Bates nous permet en fin de compte d'évaluer de façon quasi-analytique des options américaines dont le sous-jacent suit un processus mixte de diffusion avec sauts et possède un bénéfice de détention stochastique, deux caractéristiques propres à la plupart des actifs énergétiques. Avant les travaux de Bates, ceci n'était alors possible qu'en recourant à de lourds modèles numériques nécessitant des temps de calcul élevés afin d'obtenir une estimation assez précise.

Bien évidemment, l'approximation quadratique utilisée pour déterminer la prime d'exercice anticipée des options américaines est la source d'une certaine erreur lors de l'évaluation de ces mêmes options. Toutefois, nous démontreront dans la partie méthodologie de notre étude, à l'aide d'un modèle binomial modifié afin de tenir compte de l'existence de sauts dans les prix du sous-jacent, que la précision obtenue avec notre modèle intégrant l'approximation quadratique pour la prime d'exercice anticipé est tout à fait acceptable dans le cadre d'opérations quotidiennes sur les marchés.

Aussi c'est pourquoi le modèle d'évaluation d'options développé dans le cadre de cette étude représente une bonne alternative aux modèles numériques. En effet, celui-ci permet de réduire de beaucoup les temps de calcul lors de l'évaluation de prix d'options américaines sur contrat à terme, tout en gardant une précision acceptable. Chose doublement appréciée lors d'opérations de négociation, où rapidité et précision d'évaluation sont gages de succès.

CHAPITRE 4 : MÉTHODOLOGIE ET ANALYSE DES RÉSULTATS

Introduction

Maintenant que le modèle d'évaluation d'options américaines sur contrat à terme a été développé, nous allons évaluer la performance de celui-ci en terme de précision et de temps de calcul. Nous allons également examiner le comportement du modèle suite à des variations de ses paramètres et ainsi observer si celui-ci respecte l'ensemble de la théorie des options.

Pour la conduite de cette analyse empirique, nous avons choisi de nous baser sur des paramètres réalistes des marchés énergétiques estimés à l'aide d'un filtre de Kalman à partir des prix à terme du gaz naturel.

La précision et la rapidité de calcul de notre modèle ont été évalués en utilisant un modèle binomial d'évaluation d'options développé par Amin (1993). Pour ce faire, nous avons donc comparé les temps de calcul et les prix d'options américaines obtenus à l'aide de notre modèle avec ceux obtenus à l'aide du modèle d'Amin.

Ce chapitre se compose de trois sections : dans la première section nous estimons à l'aide d'un filtre de Kalman les paramètres du modèle des prix à terme pour le gaz naturel. Dans la deuxième section, nous évaluons la performance de notre modèle. Et finalement, la troisième section est consacrée à la présentation et à l'interprétation des différents résultats obtenus au cours de l'analyse de sensibilité du modèle.

4.1 Estimation de paramètres : espace état et filtre de Kalman

Une des principales difficultés rencontrées lors de l'implantation d'un modèle d'évaluation pour les produits énergétiques et de façon générale les denrées, réside dans l'absence de facteurs ou de variables d'états directement observables. Dans la plupart des cas, le prix au comptant d'un produit énergétique est tellement incertain que c'est le prix à terme correspondant, avec la plus courte maturité, qui est utilisé comme une approximation du prix au comptant. Le problème relié à l'estimation du bénéfice de détention instantané est encore plus complexe. En général, deux prix à terme de différentes maturités sont utilisés pour déterminer le bénéfice de détention¹². Quant aux contrats à terme, ceux-ci sont transigés sur la plupart des marchés et leurs prix sont donc plus facilement observables.

L'espace État-Mesure est la procédure adéquate pour gérer des situations pour lesquelles les variables d'état ne sont pas observables, mais sont connues pour être générées par un processus de Markov. Une fois que le modèle a été projeté dans l'espace État-Mesure, le filtre de Kalman peut y être appliqué afin d'estimer les paramètres du modèle et déterminer la série temporelle des variables d'état non observables.

Pour une discussion plus détaillée de l'espace État-Mesure ainsi que du filtre de Kalman voir le chapitre 3 du livre de Harvey (1989).

4.1.1 L'espace État-Mesure

L'approche État-Mesure est vu comme une formulation où la variable observée est une fonction linéaire de variables d'état à laquelle on rajoute une perturbation de moyenne nulle et de variance constante. Les variables d'état suivent à leur tour une équation aux différences d'ordre p dont les paramètres sont inconnus. Le profil temporel des variables d'états ainsi que les paramètres qui les lient sont inférés à partir des observations disponibles.

¹² Voir par exemple Gibson et Schwartz (1990b)

L'espace État-Mesure s'applique donc à une série temporelle multivariée de variables observables, dans notre cas des prix à terme de différentes maturités, reliée à un vecteur de variables d'état non observables, soit, toujours dans notre cas, un prix au comptant et un bénéfice net de détention, via une équation de mesure. Dans notre contexte, l'équation de mesure est obtenue à partir de l'équation (3.35) pour les prix à terme à laquelle est rajoutée une série de perturbations de corrélations sérielles et sérielles croisées nulles et de moyenne zéro. L'ajout de ces perturbations permet de prendre en compte un certain nombre d'imperfections relatives aux données, comme par exemple l'écart de prix achat-vente, les limites de prix, la non simultanéité des observations et les erreurs dans les données. Cette structure pour les erreurs de mesure est imposée afin que les corrélations sérielles et sérielles croisées du logarithme des prix puisse être attribuées aux variations des variables d'état non observables.

En s'inspirant de l'étude de Schwartz (1997), commençons tout d'abord par réécrire la solution pour les prix à terme de l'équation (3.35) sous la forme suivante :

$$F(S(t), \delta(t), \tau_1) = S \exp \left[A(\tau_1) - \delta \frac{1 - e^{-\kappa_c \tau_1}}{\kappa_c} \right] \quad (4.1)$$

avec

$$A(\tau_1) = \left(r - \left(\alpha_c - \frac{\lambda_c}{\kappa_c} \sigma_c \right) + \frac{1}{2} \frac{\sigma_c^2}{\kappa_c^2} - \frac{\sigma_s \sigma_c \rho_{sc}}{\kappa_c} \right) \tau_1 + \frac{1}{4} \frac{\sigma_c^2}{\kappa_c^3} \frac{1 - e^{-2\kappa_c \tau_1}}{\kappa_c^3} \\ + \left(\left(\alpha_c - \frac{\lambda_c}{\kappa_c} \sigma_c \right) \kappa_c + \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} - \frac{\sigma_c^2}{\kappa_c} \right) \frac{1 - e^{-\kappa_c \tau_1}}{\kappa_c^2}$$

En prenant le logarithme de l'équation (4.1) on obtient :

$$\ln F(S(t), \delta(t), \tau_1) = \ln S - \delta \frac{1 - e^{-\kappa_c \tau_1}}{\kappa_c} + A(\tau_1) \quad (4.2)$$

À partir de l'équation (4.2), l'équation de mesure s'exprime sous la forme suivante :

$$Y(t) = \varphi(t) + \Gamma(t)[G(t), \delta(t)]^T + \xi(t) \quad (4.3)$$

avec

$$G(t) = [\ln S(t)]$$

$$Y(t) = [\ln F(\tau_i)] \quad i = 1, \dots, N \quad \text{vecteur d'observations } N \times 1$$

$$\varphi(t) = [A(\tau_i)] \quad i = 1, \dots, N \quad \text{vecteur } N \times 1$$

$$\Gamma(t) = \left[1, -\frac{1 - e^{-\kappa_c \tau_i}}{\kappa_c} \right] \quad i = 1, \dots, N \quad \text{matrice } N \times 2$$

$\xi(t)$, vecteur $N \times 1$ de perturbations avec corrélations sérielles nulles.

$$E(\xi(t)) = 0, \quad \text{Var}(\xi(t)) = R = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\xi_2}^2 \end{bmatrix}$$

Nous assumons ici une structure de variance-covariance diagonale pour les erreurs de mesure.

Les variables d'état non observables sont générées à partir de l'équation de transition, qui dans notre contexte est une version en temps discret des processus stochastiques décrivant l'évolution du logarithme des prix au comptant de l'actif sous-jacent ainsi que son bénéfice net de détention.

En appliquant le lemme d'Itô à l'équation (3.3) avec la définition de la nouvelle variable $G(t)$ on obtient :

$$dG = \left(\mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) dt + \sigma_s dZ_s \quad (4.4)$$

En considérant les équations de diffusion (3.2) et (4.4) pour le bénéfice net de détention et le logarithme des prix au comptant de l'actif sous-jacent, l'équation de transition prend donc la forme suivante¹³ :

$$[G(t), \delta(t)]^T = \zeta(t) + \Theta(t)[G(t-1), \delta(t-1)]^T + \eta(t) \quad (4.5)$$

avec

$$\zeta(t) = \left[\left(\mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) \Delta t, \kappa_c \alpha_c \Delta t \right]^T$$

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \kappa_c \Delta t \end{bmatrix}$$

$\eta(t)$, perturbations indépendantes avec corrélations sérielles nulles.

$$E(\eta(t)) = 0, \quad \text{Var}(\eta(t)) = H = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 \Delta t & \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \Delta t \\ \sigma_s \sigma_c \rho_{sc} \Delta t & \sigma_c^2 \Delta t \end{bmatrix}$$

4.1.2 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est une procédure récursive permettant de déterminer l'estimateur optimal d'un vecteur d'état au temps t à partir de l'information disponible à ce même temps t . Le filtre assure la mise à jour de l'estimé du vecteur d'état à chaque fois qu'une nouvelle information devient disponible. Il permet également d'obtenir, à partir du maximum de vraisemblance, l'estimation des paramètres inconnus d'un modèle en décomposant conditionnellement l'erreur de prévision par rapport à l'ensemble de l'information disponible.

¹³ L'équation de transition exacte pour $\delta(t)$ est la suivante :

$$\delta(t) = \alpha_c (1 - e^{-\kappa_c \Delta t}) + e^{-\kappa_c \Delta t} \delta(t-1) + \eta(t)$$

Ainsi, nous avons remplacé $(1 - e^{-\kappa_c \Delta t})$ par $\kappa_c \Delta t$. Cette approximation linéaire a été utilisée dans toutes nos estimations afin d'éviter les problèmes d'instabilité lors des procédures d'optimisation. L'erreur ainsi introduite est de l'ordre de 3E-08, donc pratiquement négligeable.

Pour plus de commodité dans le développement qui va suivre, nous allons effectuer un léger changement de notation. La dépendance par rapport au temps de l'ensemble des variables va maintenant être dénotée par un indice petit t .

Reprenons donc nos équations de mesure et de transition, respectivement équation (4.3) et (4.5). Les variables G_t et δ_t ne sont donc pas observables. Le filtre de Kalman va nous permettre de déduire les estimés G_t^e et δ_t^e de G_t et δ_t en fonction de l'information disponible à la date t .

$$\left[G_{t+1|t}^e, \delta_{t+1|t}^e \right]^T \equiv E \left[\left[G_{t+1}, \delta_{t+1} \right]^T \mid \mathfrak{R}_t \right] \quad \text{Avec} \quad \mathfrak{R}_t \equiv (Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1) \quad (4.6)$$

$E \left[\left[G_{t+1}, \delta_{t+1} \right]^T \mid \mathfrak{R}_t \right]$ représente la projection orthogonale de $\left[G_{t+1}, \delta_{t+1} \right]^T$ sur \mathfrak{R}_t . Le filtre détermine ces estimés de façon récursive en générant successivement les $\left[G_{1|0}^e, \delta_{1|0}^e \right]^T$, $\left[G_{2|1}^e, \delta_{2|1}^e \right]^T, \dots, \left[G_{T|T-1}^e, \delta_{T|T-1}^e \right]^T$ et associe à chacune de ces prévisions une matrice d'erreur quadratique moyenne Φ définie comme suit :

$$\Phi_{t+1|t} = E \left[\left(\left[G_{t+1}, \delta_{t+1} \right]^T - \left[G_{t+1|t}^e, \delta_{t+1|t}^e \right]^T \right) \left(\left[G_{t+1}, \delta_{t+1} \right]^T - \left[G_{t+1|t}^e, \delta_{t+1|t}^e \right]^T \right)^T \right] \quad (4.7)$$

La récursion commence alors par l'amorçage du filtre avec des valeurs initiales pour les variables d'état $\left[G_{0|0}^e, \delta_{0|0}^e \right]^T$ ainsi que pour la matrice d'erreurs quadratiques moyennes $\Phi_{0|0}$ qui leur est associée. $\left[G_{0|0}^e, \delta_{0|0}^e \right]^T$ représente la prévision de $\left[G_0, \delta_0 \right]^T$ en l'absence d'observation pour Y_t , qui n'est autre que la moyenne non conditionnelle de $\left[G_0, \delta_0 \right]^T$ à laquelle on va associer l'erreur quadratique moyenne $\Phi_{0|0} = mI$, où m est un scalaire positif élevé¹⁴.

¹⁴ Voir la section Initial conditions and convergence pp. 120 du livre de Harvey (1989).

Une fois le filtre amorcé, l'étape suivante consiste à calculer la prévision de $\left[G_{t|t-1}^e, \delta_{t|t-1}^e \right]^T$:

$$\left[G_{t|t-1}^e, \delta_{t|t-1}^e \right]^T = \zeta_t + \Theta_t \left[G_{t-1|t-1}^e, \delta_{t-1|t-1}^e \right]^T \quad (4.8)$$

équations de
prédiction

$$\Phi_{t|t-1} = \Theta_t \Phi_{t-1|t-1} \Theta_t^T + H \quad (4.9)$$

Puis lorsqu'une nouvelle observation Y_t arrive, le filtre met à jour les prévisions :

$$e_t = Y_t - \varphi_t - \Gamma_t \left[G_{t|t-1}^e, \delta_{t|t-1}^e \right]^T \quad (4.10)$$

$$\Lambda_t = \Gamma_t \Phi_{t|t-1} \Gamma_t^T + R \quad (4.11)$$

$$\left[G_{t|t}^e, \delta_{t|t}^e \right]^T = \left[G_{t|t-1}^e, \delta_{t|t-1}^e \right]^T + \Phi_{t|t-1} \Gamma_t \Lambda_t^{-1} e_t \quad (4.12)$$

équations de
mise à jour

$$\Phi_{t|t} = \Phi_{t|t-1} - \Phi_{t|t-1} \Gamma_t^T \Lambda_t^{-1} \Gamma_t \Phi_{t|t-1} \quad (4.13)$$

A partir de cette nouvelle information, le filtre retourne aux équations (4.8) et (4.9) afin de calculer une nouvelle prédiction pour un incrément de temps supplémentaire. Et ainsi de suite jusqu'à ce que l'ensemble des observations disponibles ait été pris en compte.

La figure 2 ci-dessous offre une représentation d'ensemble du processus itératif du filtre de Kalman.

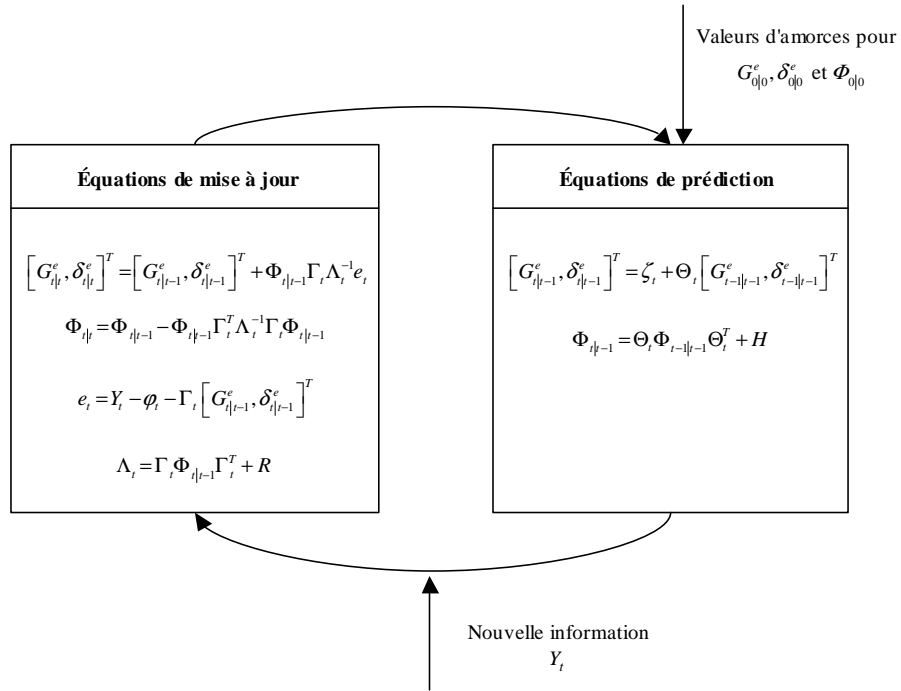


Figure 2. Représentation d'ensemble de la mécanique du filtre de Kalman

De façon complémentaire, le filtre de Kalman présente aussi l'avantage de permettre l'évaluation du logarithme de la fonction de vraisemblance associée aux données, notamment grâce à la décomposition de l'erreur de prédiction.

Pour ce faire, on peut réécrire l'équation de mesure (4.3) sous la forme suivante :

$$Y_t = \varphi_t + \Gamma_t [G_{t|t-1}^e, \delta_{t|t-1}^e] + \Gamma_t ([G_t, \delta_t] - [G_{t|t-1}^e, \delta_{t|t-1}^e]) + \xi_t \quad (4.14)$$

Si le vecteur d'état initial $[G_0, \delta_0]^T$ et les innovations $\{\xi_t$ et $\eta_t\}_{t=1}^T$ sont observables et suivent des lois gaussiennes multivariées, nous pouvons alors considérer que les prévisions générées par le filtre sont optimales, la fonction de densité utilisée pour caractériser la vraisemblance étant elle-même une fonction de densité conditionnellement gaussienne. En outre, si $[G_0, \delta_0]^T$ et $\{\xi_t$ et $\eta_t\}_{t=1}^T$ sont gaussiens, alors la distribution de Y_t conditionnellement à \mathfrak{R}_{t-1} est aussi une gaussienne. Le filtre générera donc des erreurs quadratiques minimales.

Toutefois, en pratique, nous ne possédons aucune information sur les valeurs initiales du vecteur d'état, pas plus que sur les innovations passées et présentes. Aussi, le modèle ne suivra pas une loi gaussienne conditionnelle. Néanmoins, nous traiterons la loi de distribution comme si celle-ci était une gaussienne. Le filtre sera alors quasi-optimal plutôt qu'optimal.

En considérant donc la distribution conditionnelle de Y_t comme étant normale, on peut voir, à partir de l'équation (4.14), que sa moyenne correspond à :

$$E_{t-1}(Y_t) = Y_{t|t-1}^e = \Gamma_t \left[G_{t|t}^e, \delta_{t|t}^e \right] \quad (4.15)$$

avec une matrice A_t de variance-covariance donnée par l'équation (4.11).

Ainsi pour un modèle gaussien, le logarithme de la fonction de vraisemblance s'exprime de la façon suivante :

$$\log L(Y_1, \dots, Y_n; \Xi) = -\frac{NT}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[\log |\Lambda_t| - e_t^T \Lambda_t^{-1} e_t \right] \quad (4.16)$$

avec

T : Nombre d'observations par série considérée

N : Nombre de séries d'observations considérées

Le vecteur $T \times 1$ e_t pouvant être interprété comme un vecteur d'erreurs de prédiction, l'expression (4.16) est donc aussi connue sous le nom de la forme décomposée en erreurs de prédiction de la vraisemblance. A_t et e_t peuvent toujours être obtenus à partir du filtre de Kalman.

Il ne reste maintenant plus qu'à maximiser le logarithme de la fonction de vraisemblance de l'équation (4.16) par rapport aux paramètres inconnus Ξ en utilisant une procédure d'optimisation classique.

4.1.3 La base de données

Afin de pouvoir estimer à l'aide du filtre de Kalman les paramètres relatifs au modèle d'évaluation des contrats à terme, nous avons mis en place une procédure de collecte de données sur une des plate-formes d'informations financières Reuters de la salle des marchés de l'École des Hautes Études Commerciales de Montréal.

Les données ainsi collectées correspondent à un ensemble de prix à terme pour le gaz naturel livraison Henry Hub traités sur le New York Mercantile Exchange (NYMEX). La période de collecte s'étend du 23 juillet 2001 au 30 août 2001. Les données sont intra-quotidiennes avec une fréquence de dix minutes.

Toutefois, nous avons constaté que les contrats à terme d'échéance supérieure à six mois étaient très peu liquides et risquaient alors de conduire à l'estimation de paramètres erronés. C'est pourquoi nous avons choisi de considérer uniquement les contrats à terme ayant pour échéance août, septembre, octobre, novembre, décembre 2001 ainsi que janvier 2002. Parmi ces contrats, les contrats d'août et septembre ont également été mis de côté, ceux-ci arrivant à terme durant la période d'observation.

Notre échantillon se compose donc finalement de quatre contrats à terme pour un total de 4000 observations.

4.1.4 Processus d'optimisation et résultats

Dans la problématique qui est la nôtre, nous avons choisi de considérer mutuellement deux contrats à terme lors de chaque optimisation. Le vecteur Y_t sera donc constitué du logarithme des prix à terme pour deux maturités différentes. Comme nous souhaitons déterminer à chaque instant le prix au comptant ainsi que le bénéfice net de détention du gaz naturel, la dimension du vecteur d'état à chaque instant sera de 2×1 . Le système à estimer s'écrira donc, en vertu des développements théoriques exposés plus haut, comme suit :

$$\begin{bmatrix} \ln F(t, T_1) \\ \ln F(t, T_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\tau_1) \\ A(\tau_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1-e^{-\kappa_c \tau_1}}{\kappa_c} \\ 1 & -\frac{1-e^{-\kappa_c \tau_2}}{\kappa_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln S(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

La dynamique des variables d'état est donnée par l'équation de transition suivante :

$$\begin{bmatrix} \ln S(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) \Delta t \\ \kappa_c \alpha_c \Delta t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \kappa_c \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln S(t-1) \\ \delta(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Le processus d'estimation des paramètres du modèle des prix à terme consiste donc à maximiser le logarithme de la fonction de vraisemblance de l'équation (4.16), obtenu à partir du filtre de Kalman, par rapport à ces mêmes paramètres. Nous avons pour ce faire choisi d'utiliser l'algorithme de Broyden, Fletcher, Goldfarb, et Shanno (BFGS) combiné à une procédure mixte quadratique-cubique de recherche de ligne.

Le processus d'estimation commence donc par l'introduction dans le filtre de Kalman des paramètres initiaux du modèle de prix à terme afin de calculer le logarithme de la fonction de vraisemblance de l'équation (4.16). C'est alors qu'entre en jeu la procédure d'optimisation qui elle va modifier de façon itérative les paramètres initiaux du modèle de prix à terme jusqu'à l'atteinte du maximum du logarithme de la fonction de vraisemblance.

La figure 3 ci-dessous représente une vue d'ensemble du processus d'estimation des paramètres du modèle des prix à terme.

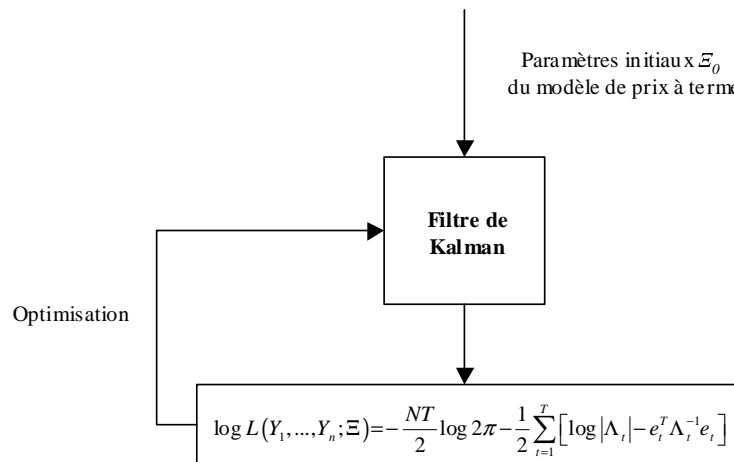


Figure 3. Représentation d'ensemble du processus d'estimation des paramètres du modèle des prix à terme. Le filtre de Kalman est ici identique à la représentation de la figure 2 présentée auparavant.

La procédure d'optimisation ainsi que le filtre de Kalman ont été programmés à l'aide du logiciel Matlab. Une des premières difficultés rencontrées au cours de leur implantation a été l'inversion de certaines matrices dans la procédure de récursion du filtre de Kalman. En effet, lors de l'inversion de la matrice Λ_t , le logiciel Matlab garde en mémoire un certain nombre de chiffres significatifs puis arrondi les autres. Ces arrondis peuvent alors produire des matrices non singulières et ainsi nous faire passer dans un monde imaginaire. Pour éviter ce problème, nous avons remplacé les équations (4.12) et (4.13) du filtre de Kalman par les expressions équivalentes suivantes :

$$\begin{bmatrix} G_{t|t}^e & \delta_{t|t}^e \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} G_{t|t-1}^e & \delta_{t|t-1}^e \end{bmatrix}^T + \Phi_{t|t} \Gamma_t^T R^{-1} e_t \quad (4.19)$$

$$\Phi_{t|t}^{-1} = \Phi_{t|t-1}^{-1} + \Gamma_t^T R^{-1} \Gamma_t \quad (4.20)$$

Si R ne dépend pas du temps, comme c'est le cas ici, on constate alors que la représentation utilisant R^{-1} au lieu de Λ_t^{-1} est plus précise et permet d'éviter les erreurs provenant d'approximations lors de l'inversion de la matrice A_t .

Une deuxième difficulté que nous avons rencontré concernait les bornes de certains paramètres. En effet, le paramètre κ_c de retour vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention, tout comme chaque écart-type considéré, sont impérativement bornés positifs. Le coefficient de corrélation ρ_{sc} entre les prix au comptant et le bénéfice net de détention est quant à lui compris dans l'intervalle $[-1,1]$. Afin de respecter ces bornes, nous avons donc choisi de considérer lors de chaque estimation le logarithme du paramètre κ_c et des écarts-type, ainsi que l'arcsinus du coefficient de corrélation.

Finalement, la troisième et dernière difficulté à laquelle nous ayons eu à faire face correspondait aux problèmes traditionnels des méthodes numériques d'optimisation. La technique d'optimisation de BFGS s'avère être une méthode fortement tributaire de la valeur initiale des paramètres qui amorcent la procédure d'optimisation. C'est pourquoi le choix d'une bonne séquence de départ est un élément essentiel à l'atteinte d'un optimum. Après maints essais, il s'est avéré que les meilleurs résultats que nous ayons pu obtenir l'on été en utilisant comme valeurs de départ les paramètres estimés par Schwartz (1997) lors de son étude sur le pétrole. Ceci étant somme toute assez logique, puisque le prix du gaz naturel est fortement corrélé à celui du pétrole. Toutefois, même avec l'utilisation de ces paramètres de départ, rien ne nous garantit que l'optimum trouvé est un optimum global.

Pour chaque estimation, nous avons assumé un taux d'intérêt sans risque constant égal à 3.5 %, ce qui représente approximativement la moyenne du mois de juillet et du mois d'août du taux de trois mois des bons du trésor américain. Ce paramètre intervient dans l'équation de mesure (4.3) au travers du terme $A(\tau_t)$ défini dans l'équation (4.1). En observant l'équation (3.23), on peut remarquer que n'importe quelle variation du taux d'intérêt à travers le temps sera absorbée par des variations du bénéfice net de détention. C'est pourquoi le bénéfice net de détention instantané estimé sera alors un composite entre le bénéfice net de détention actuel et des déviations du taux d'intérêt par rapport à sa valeur de 3.5 % assumée constante.

Les résultats obtenus pour le gaz naturel sont présentés à la table I ci-dessous.

Table I
Paramètres du modèle des prix à terme estimés
à partir du prix de contrats à terme sur le gaz naturel

Contrats	Octobre-Novembre			Décembre-Janvier		
Période	23/07/01 au 10/08/01	10/08/01 au 31/08/01	23/07/01 au 31/08/01	23/07/01 au 10/08/01	10/08/01 au 31/08/01	23/07/01 au 31/08/01
Nombre d'observations	500	500	1000	500	500	1000
μ_s	0.1567 3.4943	0.2251 3.9441	0.1843 5.4097	0.1838 3.9408	0.1183 2.6011	0.1493 4.7155
κ_c	1.3333 27.2383	1.3506 27.6110	1.3486 39.3109	1.3504 23.7448	1.1728 20.7433	1.2654 34.2694
α_c	0.1005 2.2462	0.0866 1.9095	0.0949 2.9873	0.0680 1.4924	0.1164 2.5976	0.0972 3.0722
σ_s	0.6590 21.0663	0.9536 29.9754	0.8350 37.1108	0.5572 17.1825	0.7165 19.1009	0.6533 29.7969
σ_c	1.0418 16.8067	1.6923 22.9143	1.4688 29.2676	0.5832 9.8907	0.8765 12.5469	0.7712 19.6198
ρ_{sc}	0.9384 17.6619	0.8874 16.2810	0.9106 25.8972	0.9177 13.0946	0.9062 13.1690	0.9216 22.2640
λ_c	0.2069 4.6264	0.0067 0.0858	0.1502 4.5055	0.1846 4.1163	0.1759 3.9297	0.1801 5.6921
σ_{ξ_i}	0.0025 0.0650	0.0010 0.0029	0.0018 0.0227	0.0024 0.0568	0.0029 0.0861	0.0026 0.0855
σ_{ξ_i}	0.0021 0.0422	0.0052 0.1815	0.0040 0.1697	0.0019 0.0355	0.0020 0.0337	0.0020 0.0528

Afin de distinguer les différences possibles suivant les périodes de temps considérées ou les contrats considérés, les estimations ont été conduites sur différentes périodes de temps et pour deux paires différentes de contrats à terme.

On constate au travers de la table I que pour chaque cas analysé, la vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention κ_c , ainsi que le coefficient de corrélation entre les prix au comptant et le bénéfice net de détention ρ_{sc} sont positifs et assez élevés. La valeur positive du coefficient de corrélation se justifie aisément en observant que lors d'un déséquilibre entre l'offre et la demande, par exemple en situation de pénurie, les prix au comptant de n'importe quel actif énergétique augmentent. C'est aussi dans cette situation qu'il devient intéressant de détenir physiquement ce même actif. Ainsi le bénéfice de détention de l'actif augmente en même temps que son prix, nous conduisant alors vers un coefficient de corrélation positif entre ces deux quantités. On constate aussi que le taux de rendement instantané espéré des prix au comptant μ_s , que le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention α_c , et que la prime de risque associée au bénéfice net de détention λ_c sont également positifs.

En petits caractères figurent sur la table I les valeurs des tests de Student avec un niveau de confiance de 95%. On peut constater que tous les paramètres, mise à part les écarts-types des erreurs de mesure, sont dans l'ensemble significativement différents de zéro et que les ordres de grandeur qui leurs sont associés semblent à première vue plausibles. On observe toutefois quelques problèmes récurrents d'estimation pour le paramètre de niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention. Compte tenu de l'intervalle de temps sur lequel s'étalent nos observations (1 mois), il est alors difficile d'aller estimer un tel paramètre de niveau d'équilibre à long terme. On peut aussi remarquer au travers de la table I que, conformément à ce que l'on observe sur les marchés, la volatilité du rendement des prix à terme des actifs énergétiques est beaucoup plus élevée que celle propre aux actifs financiers classiques.

La figure 4 ci-dessous nous présente les deux variables d'état estimées avec le premier ensemble de données (contrat d'octobre et de novembre 2001) pour la période totale d'échantillonnage (1000 points), ainsi que le prix à terme pour le mois d'octobre 2001.

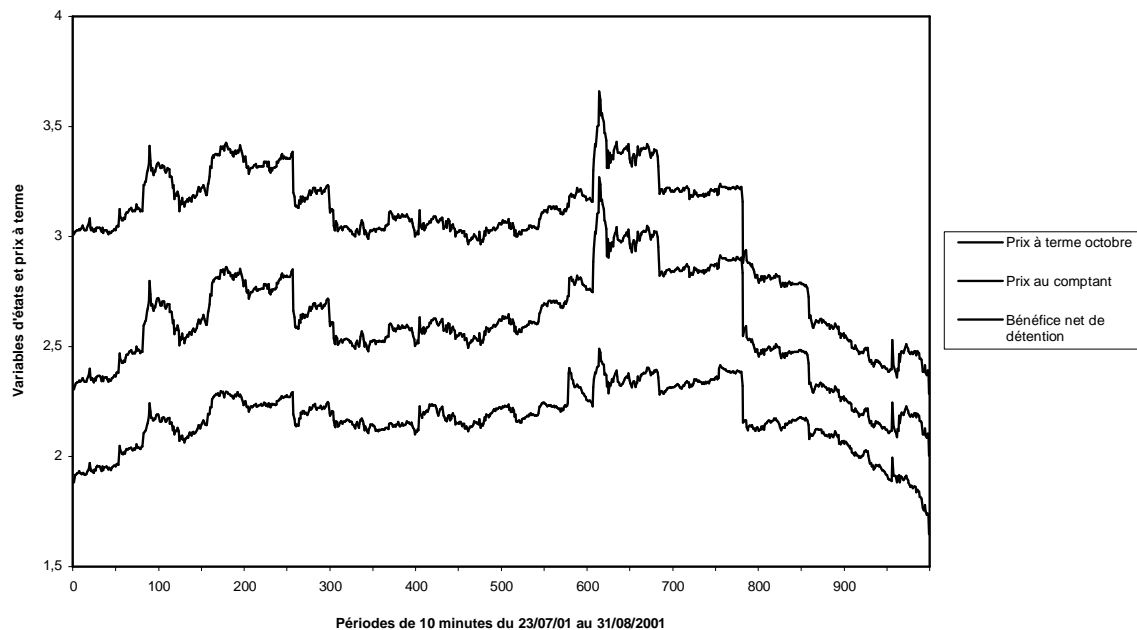


Figure 4. Graphique des variables d'états estimées et du prix du contrat à terme d'octobre 2001.

Cette figure illustre l'évolution intraquotidienne (fréquence de dix minutes) des variables d'états estimées, soit le prix au comptant du gaz naturel et son bénéfice net de détention, ainsi que le prix du contrat à terme d'octobre 2001 pour une période allant du 23/07/01 au 31/08/01. L'ordre dans lequel sont présentées les courbes correspond à l'ordre de la légende. Le bénéfice net de détention reporté ici est un composite entre le bénéfice net de détention et des déviations du taux d'intérêt par rapport à sa valeur de 3.5 % supposée constante. De plus un montant fixe de 3.5 a été rajouté au bénéfice net de détention afin de le ramener sur la même échelle que les autres variables.

La forte corrélation (0.92 en moyenne) entre les deux variables d'état¹⁵ estimées et la similitude des trajectoires entre le prix au comptant et le prix à terme s'observent aisément sur la figure. Si nous avions choisi le contrat à terme avec la plus proche maturité, l'écart entre ces deux trajectoires se serait considérablement atténué. On constate aussi que le prix à terme est systématiquement supérieur au prix au comptant. Cela semble être cohérent avec le fait que le coût de détention est positif en tout temps pour la période considérée.

¹⁵ Un montant fixe de 3.5 a été rajouté à chaque valeur du bénéfice net de détention afin de le ramener sur la même échelle que les autres variables.

Toutefois, il est important de faire remarquer que la période d'observation que nous considérons ici s'étale sur un mois uniquement. Il est possible que durant ce mois le bénéfice net de détention du gaz naturel ait été négatif, mais il serait bien évidemment étrange que celui-ci reste uniquement négatif sur une plus longue période d'observation étant donné la valeur positive prise par son niveau d'équilibre à long terme α_c et l'existence d'un phénomène de retour vers ce niveau d'équilibre du bénéfice net de détention. Il nous est malheureusement impossible compte tenu de la période considérée d'observer ce phénomène de retour vers un niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention. La période d'observation étant en effet trop courte pour pouvoir déceler un tel phénomène.

Les erreurs de prédiction¹⁶ obtenues à partir du prix des contrats à terme d'octobre et de novembre 2001 pour l'échantillon total des observations sont exposées dans la figure 5 ci-dessous.

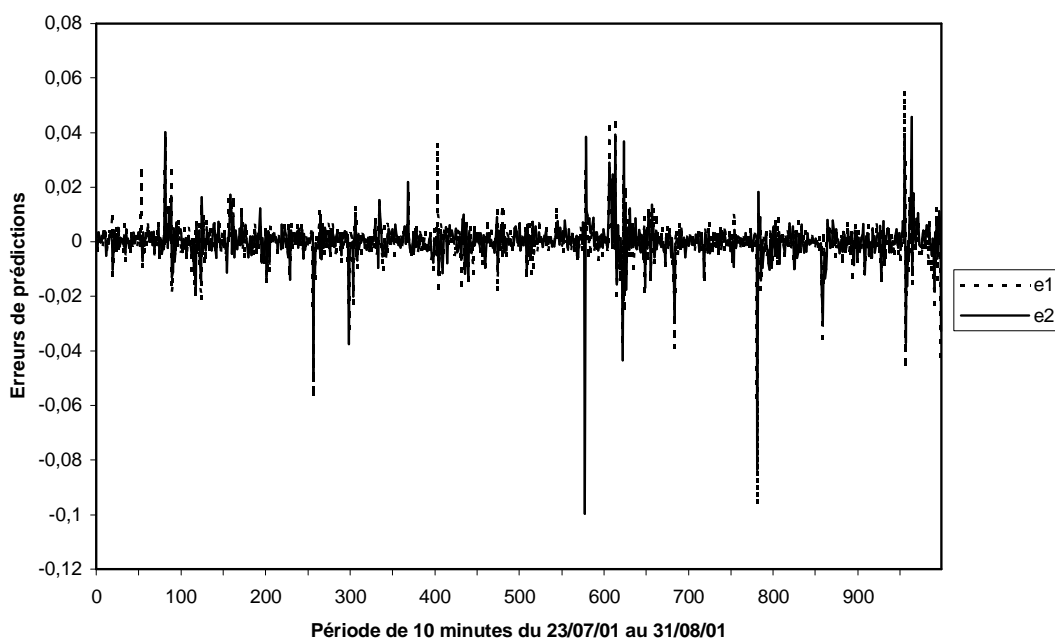


Figure 5. Graphique des erreurs de prédiction pour les contrats à terme d'octobre et de novembre 2001. Cette figure illustre les erreurs de prédiction intraquotidiennes (fréquence de dix minutes) obtenues à partir du prix des contrats à terme d'octobre et de novembre 2001 utilisés lors de l'estimation des paramètres du modèle de prix à terme, et ce pour une période allant du 23/07/01 au 31/08/01.

¹⁶ Aussi appelées innovations puisqu'elles représentent les nouvelles informations contenues dans la dernière observation.

Bien que l'erreur de prédiction moyenne soit assez petite, -0.00003 , la déviation absolue moyenne des erreurs de prédiction est quant à elle égale à 0.004 . Cela représente approximativement 0.4% du logarithme de la moyenne des prix à terme d'octobre durant le mois d'août 2001, reflétant ainsi certaines des importantes déviations observées sur la figure.

Des tests d'autocorrélation de Box-Pierce et Ljung-Box avec un temps de retard ont été conduits sur les erreurs de prédiction. Ceux-ci nous ont indiqué qu'il semblerait exister une certaine autocorrélation entre les erreurs de prédiction, pouvant à priori provenir de l'existence de quelques erreurs dans les données. Toutefois nous avons jugé que l'impact de ces erreurs sur l'estimation des paramètres était probablement très faible et donc négligeable.

Maintenant muni de l'ensemble des paramètres concernant les prix à terme, nous allons pouvoir poursuivre l'analyse de notre modèle d'évaluation d'options américaines sur contrats à terme en utilisant des paramètres estimés réalistes, et de ce fait rester au plus proche des conditions rencontrées sur les marchés énergétiques.

4.2 Évaluation de la performance du modèle d'évaluation d'options américaines sur contrat à terme

Comme nous l'avons mentionné dans la partie consacrée au développement du modèle d'évaluation d'options américaines, l'approximation quadratique utilisée pour évaluer la prime d'exercice anticipé introduit une erreur d'estimation lorsque l'on cherche à évaluer de telles options, mais en même temps nous permet de réduire considérablement les temps de calcul. L'objectif dans cette section est donc de déterminer l'ordre de grandeur de cette erreur d'estimation ainsi que le gain en temps de calcul amené par notre modèle, et ce afin d'en justifier l'utilisation lors d'opérations quotidiennes de négociation dans un contexte de bénéfice de détention stochastique et de sauts dans les prix au comptant.

Pour ce faire, il nous fallait un modèle de comparaison qui nous donnerait, à partir des mêmes hypothèses de base, des prix d'options américaines similaires à celles évaluées avec notre modèle. Nous avons en conséquence choisi un modèle d'évaluation d'options développé par Amin (1993). Notre choix a été guidé par la facilité d'implantation de ce modèle, ainsi que par son lien de parenté avec les modèles binomiaux bien connus de Cox, Ross, et Rubinstein (1979).

L'utilisation de ce modèle d'évaluation numérique nous a donc permis de se donner des valeurs de référence, en terme de temps de calcul et de prix d'options américaines, pouvant être directement comparées aux mêmes valeurs obtenues en utilisant notre modèle d'évaluation. De cette façon, nous avons pu quantifier le gain en temps de calcul ainsi que l'ordre de grandeur de l'erreur d'estimation introduite par l'approximation quadratique utilisée dans notre modèle. Toutefois, il faudra garder à l'esprit lors de l'analyse des résultats ainsi obtenus que le modèle d'Amin n'en reste pas moins un modèle numérique, et que par conséquent, les prix d'options qu'il nous a fourni ne sont pas des prix exacts mais approximatifs. Le modèle d'Amin ne doit donc pas être utilisé en tant que référence absolue, mais plutôt comme un modèle permettant une certaine comparaison entre les différents temps de calculs et prix d'options obtenus.

4.2.1 Le modèle d'évaluation d'Amin (1993)

Le modèle d'Amin est un modèle en temps discret pour l'évaluation d'options dont le sous-jacent suit un processus mixte de diffusion avec sauts. Celui-ci est construit en superposant des sauts multivariés au modèle binomial de Cox, Ross, et Rubinstein (1979), conduisant ainsi à un modèle avec un processus limite mixte de diffusion avec sauts. Ce modèle peut tenir compte d'une volatilité dépendante du temps pour le sous-jacent et également intégrer la caractéristique d'exercice anticipé des options américaines.

Les principales étapes du développement du modèle d'Amin adapté à notre cadre d'étude sont présentées en annexe.

Une fois l'approximation discrète sous la mesure neutre au risque du processus continu initial établie, les options sont alors évaluées récursivement par programmation dynamique simplement en actualisant avec un taux sans risque leurs flux monétaires espérés sur l'espace discret ainsi développé, de façon tout à fait identique au modèle binomial de Cox, Ross, et Rubinstein. Toutefois, lors de l'implantation de ce modèle, il sera nécessaire de tronquer verticalement l'espace d'états discret pour des valeurs extrêmes des variables d'état afin de s'assurer que celui-ci soit fini.

4.2.2 Implantation du modèle et résultats

Avec le modèle en temps discret, le prix de l'option à chaque état est donc obtenu en intégrant sous la mesure neutre au risque les prix de l'option à la date suivante sur toute la distribution des prix à terme, puis en actualisant au taux sans risque. Le calcul de cette intégrale par rapport aux deux états locaux ne requière que peu d'effort. Par contre, le même calcul relativement à la distribution des sauts de Poisson peut être assez astreignant si l'on approxime la distribution des sauts en utilisant chaque point à la prochaine date de la grille discrète. Étant donné M états possibles à chaque date, les calculs à entreprendre à chaque date discrète sont alors de l'ordre de M^2 , comparativement à l'ordre M pour le modèle binomial de Cox, Ross, et Rubinstein. Toutefois, en pratique ce fardeau computationnel pourra être réduit en tronquant la distribution de sauts comme expliqué ci-dessous.

Le modèle a donc été implanté à l'aide du logiciel Matlab de la façon suivante. Avec n le nombre d'incrément de temps désiré et M le nombre de nœuds dans l'espace d'états à chaque incrément de temps (le nombre de points sur l'axe vertical de la figure 6 en annexe), nous avons fixé M tel que $M = 2n + 1$. Cela conduit à considérer n points de chaque coté de l'état zéro à chaque date. De plus, pour chaque nœud nous avons tronqué la distribution de sauts à la date suivante, et ce de chaque coté, au plus proche des deux points suivants : (a) le point pour lequel l'espace d'état entier est établi à cette date (état M ou $-M$) ou (b) le point n nœuds plus loin. En utilisant la notation développée en annexe, la distribution de sauts de Poisson pour l'état j est tronquée au niveau de l'état $\text{Min}(n, j + n)$ vers le haut et de l'état $\text{Max}(-n, j - n)$ vers le bas. La masse de probabilité extérieure à la région de troncation de chaque coté de l'axe vertical est alors entièrement assignée aux deux points de troncation déterminés ci-dessus. Ainsi, pour les deux points extrêmes de troncation sur l'axe vertical, l'expression de la fonction de masse de probabilité de l'équation (A.7) devient :

$$\begin{aligned}
 dN_n(l_{\text{tronqhaut}}) &= 1 - N\left(\beta h_n - \left(l_{\text{tronqhaut}} + \frac{1}{2}\right) \sigma_F \sqrt{h_n}\right) && \text{vers le haut} \\
 dN_n(l_{\text{tronqbas}}) &= N\left(\beta h_n + \left(l_{\text{tronqbas}} + \frac{1}{2}\right) \sigma_F \sqrt{h_n}\right) && \text{vers le bas}
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

De cette façon, l'ensemble de la fonction de masse de probabilité des sauts de Poisson est prise en compte.

Afin de limiter les temps de calcul, nous avons également introduit une nouvelle simplification. En effet, la distribution de sauts de Poisson peut être tronquée en dehors de l'intervalle $\ln(1+\kappa_n^*) \in [-3\omega, 3\omega]$, sa masse de probabilité devenant alors négligeable. Toutefois, nous avons légèrement élargi cet intervalle afin que ces points extrêmes correspondent à des points de l'espace d'états discret. C'est pourquoi la distribution de sauts est donc tronquée en dehors de l'intervalle $[\beta h_n + \zeta \sigma_F \sqrt{h_n}, \beta h_n - \zeta \sigma_F \sqrt{h_n}]$, où ζ représente le plus petit entier non négatif de tel sorte que cet intervalle comprenne $[-3\omega, 3\omega]$.

Enfin finalement, les valeurs de l'option sur les points verticaux extrêmes de la grille (états $\pm n$) à chaque date peuvent être associées à l'une des deux valeurs suivantes : soit à la valeur intrinsèque de l'option, soit à la valeur de l'option européenne obtenue en utilisant les formules analytiques des équations (3.55) ou (3.56). Empiriquement, ces deux conditions aux bornes conduisent la plupart du temps à des valeurs identiques.

La table II suivante nous présente les différents résultats obtenus lors des simulations.

Table II

Valeurs théoriques d'options sur contrat à terme dont les prix au comptant suivent un processus mixte de diffusion avec sauts en présence d'un bénéfice de détention stochastique.

Options d'achat européennes				Options de vente européennes		
Prix d'exercice	Formule analytique ¹⁷	Modèle d'Amin	Différence	Formule analytique ¹⁷	Modèle d'Amin	Différence
X = 2.5	1.0144	1.0193	-0.0049	0.0203	0.0199	0.0004
X = 3.0	0.6050	0.6090	-0.0040	0.1079	0.1067	0.0012
X = 3.5	0.3146	0.3174	-0.0028	0.3146	0.3122	0.0024
X = 4.0	0.1450	0.1466	-0.0016	0.6421	0.6385	0.0036
X = 4.5	0.0607	0.0615	-0.0008	1.0549	1.0504	0.0045
$\lambda^* = 0.00$	0.3080	0.3081	-0.0001	0.3080	0.3081	-0.0001
$\lambda^* = 0.25$	0.3084	0.3085	-0.0001	0.3084	0.3083	0.0001
$\lambda^* = 1.00$	0.3094	0.3099	-0.0005	0.3094	0.3089	0.0005
$\lambda^* = 5.00$	0.3146	0.3174	-0.0028	0.3146	0.3122	0.0024
$\lambda^* = 10.0$	0.3211	0.3266	-0.0055	0.3211	0.3162	0.0049
$\lambda^* = 50.0$	0.3689	0.3973	-0.0284	0.3689	0.3448	0.0241
$\bar{\kappa}^* = -0.10$	0.3390	0.3106	0.0284	0.3390	0.3624	-0.0234
$\bar{\kappa}^* = -0.01$	0.3146	0.3117	0.0029	0.3146	0.3169	-0.0023
$\bar{\kappa}^* = 0.00$	0.3144	0.3143	0.0001	0.3144	0.3143	0.0001
$\bar{\kappa}^* = 0.01$	0.3146	0.3174	-0.0028	0.3146	0.3122	0.0024
$\bar{\kappa}^* = 0.10$	0.3373	0.3666	-0.0293	0.3373	0.3137	0.0236
$\omega = 0.01$	0.3086	0.3091	-0.0005	0.3086	0.3079	0.0007
$\omega = 0.05$	0.3146	0.3174	-0.0028	0.3146	0.3122	0.0024
$\omega = 0.10$	0.3322	0.3350	-0.0028	0.3322	0.3298	0.0024
$\omega = 0.15$	0.3581	0.3610	-0.0029	0.3581	0.3557	0.0024

¹⁷ Les prix des options européennes ont été calculés en utilisant les formules analytique des expressions (3.56) et (3.57), où la somme infinie de termes a été tronquée. La méthode de troncation utilisée consiste à déterminer les sommets unimodaux des termes de sommation de l'option d'achat et de l'option de vente, puis d'étendre la sommation dans chaque direction à partir des sommets ainsi déterminés jusqu'à ce que les termes additionnels n'améliorent plus la précision ou bien que mille termes aient été atteints.

Options d'achat américaines

Prix d'exercice	Modèle d'Amin	Modèle d'Amin corrigé avec variable de contrôle	Modèle avec approximation quadratique ¹⁸	Différences
X = 2.5	1.0195	1.0146	1.0166	-0.0020
X = 3.0	0.6090	0.6050	0.6057	-0.0007
X = 3.5	0.3174	0.3146	0.3150	-0.0004
X = 4.0	0.1466	0.1450	0.1452	-0.0002
X = 4.5	0.0615	0.0607	0.0608	-0.0001
$\lambda^* = 0.00$	0.3083	0.3082	0.3083	-0.0001
$\lambda^* = 0.25$	0.3088	0.3087	0.3087	0.0000
$\lambda^* = 1.00$	0.3101	0.3096	0.3097	-0.0001
$\lambda^* = 5.00$	0.3174	0.3146	0.3150	-0.0004
$\lambda^* = 10.0$	0.3266	0.3211	0.3214	-0.0003
$\lambda^* = 50.0$	0.3973	0.3689	0.3692	-0.0003
$\bar{\kappa}^* = -0.10$	0.3170	0.3454	0.3392	0.0062
$\bar{\kappa}^* = -0.01$	0.3124	0.3153	0.3149	0.0004
$\bar{\kappa}^* = 0.00$	0.3145	0.3146	0.3147	-0.0001
$\bar{\kappa}^* = 0.01$	0.3174	0.3146	0.3150	-0.0004
$\bar{\kappa}^* = 0.10$	0.3666	0.3373	0.3377	-0.0004
$\omega = 0.01$	0.3092	0.3087	0.3089	-0.0002
$\omega = 0.05$	0.3174	0.3146	0.3150	-0.0004
$\omega = 0.10$	0.3350	0.3322	0.3326	-0.0004
$\omega = 0.15$	0.3610	0.3581	0.3585	-0.0004

¹⁸ Les prix des options d'achat américaines selon le modèle avec approximation quadratique ont été calculés à partir de l'expression (3.77).

Options de vente américaines

Prix d'exercice	Modèle d'Amin	Modèle d'Amin corrigé avec variable de contrôle	Modèle avec approximation quadratique ¹⁹	Différences
X = 2.5	0.0200	0.0204	0.0203	0.0001
X = 3.0	0.1069	0.1081	0.1080	0.0001
X = 3.5	0.3128	0.3152	0.3149	0.0003
X = 4.0	0.6401	0.6437	0.6429	0.0008
X = 4.5	1.0540	1.0585	1.0565	0.0020
$\lambda^* = 0.00$	0.3083	0.3082	0.3083	-0.0001
$\lambda^* = 0.25$	0.3085	0.3086	0.3087	-0.0001
$\lambda^* = 1.00$	0.3092	0.3097	0.3097	0.0000
$\lambda^* = 5.00$	0.3128	0.3152	0.3149	0.0003
$\lambda^* = 10.0$	0.3172	0.3221	0.3214	0.0007
$\lambda^* = 50.0$	0.3498	0.3739	0.3692	0.0047
$\bar{\kappa}^* = -0.10$	0.3624	0.3390	0.3394	-0.0004
$\bar{\kappa}^* = -0.01$	0.3169	0.3146	0.3149	-0.0003
$\bar{\kappa}^* = 0.00$	0.3145	0.3146	0.3147	-0.0001
$\bar{\kappa}^* = 0.01$	0.3128	0.3152	0.3149	0.0003
$\bar{\kappa}^* = 0.10$	0.3182	0.3418	0.3376	0.0042
$\omega = 0.01$	0.3083	0.3090	0.3089	0.0001
$\omega = 0.05$	0.3128	0.3152	0.3149	0.0003
$\omega = 0.10$	0.3303	0.3327	0.3325	0.0002
$\omega = 0.15$	0.3561	0.3585	0.3585	0.0000

Paramètres : $F = 3.5^{20}$ (\$/MMBtu), $r = 0.035$, $T_0 = 2$ mois, $T_1 = 4$ mois, $\sigma_s = 0.75^{21}$, $\sigma_c = 1.1^{21}$, $\rho_{sc} = 0.92^{21}$, $\kappa_c = 1.32^{21}$, $X = 3.5$ (\$/MMBtu), $\lambda^* = 5^{21}$ (sauts/année), $\bar{\kappa}^* = 1\%^{21}$, $\omega = 0.05^{21}$.

¹⁹ Les prix des options de vente américaines selon le modèle avec approximation quadratique ont été calculés à partir de l'expression (3.78).

²⁰ Prix du contrat à terme de décembre 2001 le 01/08/2001.

²¹ Ces paramètres correspondent approximativement à la moyenne des paramètres estimés à partir de l'échantillon du 23/07/01 au 31/08/01, soit 1000 points, pour les quatre contrats à terme considérés lors de la phase d'estimation des paramètres.

Afin d'estimer l'erreur amenée par l'approximation quadratique utilisée dans notre modèle d'évaluation d'options américaines, nous avons associé au modèle d'Amin une variable de contrôle. Cette technique peut être utilisée avec des arbres d'évaluation lorsque une option similaire à celle à évaluer possède une solution analytique, et permet ainsi d'améliorer la précision des résultats. Dans le cas qui nous concerne, la variable de contrôle est représentée par la valeur d'une option européenne v obtenue à partir des expressions analytiques (3.56) et (3.57). Cette même option est alors évaluée avec le modèle d'Amin dans sa forme européenne puis dans sa forme américaine, pour respectivement conduire aux valeurs d'options v_{Amin} et V_{Amin} . Nous assumons dès lors pour le modèle d'Amin que l'erreur d'évaluation de l'option américaine V_{Amin} est identique à l'erreur d'évaluation de l'option européenne v_{Amin} , qui elle est connue. Aussi la valeur de l'option américaine selon le modèle d'Amin ajustée avec la variable de contrôle sera égale à $V_{Amin} + (v - v_{Amin})$.

À la lecture de la table II, on constate tout d'abord que quelque soit le modèle d'évaluation utilisé, le nôtre ou celui d'Amin, les valeurs des options américaines sont en tout temps supérieures ou égales aux valeurs d'options similaires de type européen. Ce qui est évidemment conforme à la théorie des options.

On observe également au travers de la table II que l'erreur d'approximation maximale obtenue pour les options américaines est égale à 0.0062 \$/MMBtu pour un cas où le paramètre $\bar{\kappa}^*$ d'amplitude aléatoire moyenne des sauts est égal à -0.1. Or, nous avons constaté que le modèle d'Amin devient imprécis et conduit à des erreurs d'évaluation plus importantes lorsqu'on atteint des valeurs extrêmes des paramètres de sauts, par exemple lorsque la fréquence moyenne d'arrivée des sauts λ^* est égale à 50 ou lorsque le paramètre $\bar{\kappa}^*$ d'amplitude aléatoire moyenne des sauts est égal à -0.1 ou 0.1. L'erreur d'approximation maximale dont on fait allusion ci-dessus est précisément obtenue avec une valeur extrême du paramètre de sauts $\bar{\kappa}^*$. Si l'on fait abstraction de ces valeurs extrêmes et que l'on se concentre sur les valeurs centrales des paramètres de sauts, on observe alors plutôt une erreur maximale de 0.002 \$/MMBtu. L'erreur maximale d'estimation est donc égale, selon les valeurs centrales de la table II, à deux incréments minimum de prix du gaz naturel.

En observant le marché NYMEX, on peut se rendre compte que l'écart cours acheteur-cours vendeur pour les options américaines sur contrat à terme concernant le gaz naturel avec une échéance de quatre mois s'élève environ à 0.02 \$/MMBtu en moyenne. On constate donc que l'erreur d'approximation maximale de notre modèle, qui elle s'élève à 0.002 \$/MMBtu, est tout à fait acceptable dans le cadre d'opérations quotidiennes de négociation, et sera même complètement absorbée par l'ensemble des imperfections de marchés lorsque celles-ci seront prises en compte.

En comparant, toujours selon la table II, les valeurs obtenues avec notre modèle pour les options de type européen et américain, on remarque que les primes d'exercice anticipé restent faibles (entre 0 et 0.0022 \$/MMBtu) et que les variations des paramètres de sauts n'ont pratiquement pas d'influence sur elles. Il nous est alors apparu pertinent d'évaluer la précision de notre modèle dans des cas où la prime d'exercice anticipé prendrait des valeurs plus élevée.

Pour ce faire, nous avons fait varier dans notre modèle de façon importante le prix à terme tout en gardant les paramètres par défaut de la table II. De plus, nous avons choisi de considérer uniquement des options d'achat, car compte tenu des valeurs disponibles sur le marché pour les prix d'exercice des options (ensemble de prix centrés autour de 3.5 \$/MMBtu), les options d'achat nous permettait d'envisager de plus grandes variations des prix à terme. En effet, dans le cas des options de vente, il faut baisser les prix à terme pour augmenter la prime d'exercice anticipé. Or avec un prix d'exercice fixé par exemple à 3.5 \$/MMBtu, on se retrouve vite limité par l'atteinte de la borne théorique inférieure des prix à terme qui est égale à zéro. Tandis que dans le cas des options d'achat, il n'existe aucune limite à l'augmentation des prix à terme.

La table III ci-dessous représente les valeurs ainsi obtenues.

Table III

Valeurs théoriques d'options d'achat sur contrat à terme lors d'une augmentation importante des prix à terme.

Options d'achat					
Prix à terme	Formule analytique ¹⁷	Modèle avec approximation quadratique ¹⁸	Prime d'exercice anticipé	Modèle d'Amin corrigé avec variable de contrôle	Différences
$F = 6$	2.4943	2.5000	0.0057	2.5000	0.0000
$F = 10$	6.4622	6.5000	0.0378	6.5000	0.0000
$F = 20$	16.4040	16.5000	0.0960	16.5000	0.0000
$F = 50$	46.2295	46.5000	0.2705	46.5000	0.0000
$F = 100$	95.9387	96.5000	0.5613	96.5000	0.0000

La table III nous permet de remarquer que plus il devient intéressant d'exercer les options américaines, c'est-à-dire plus la prime d'exercice anticipé augmente, et plus notre modèle devient précis. On constate donc que notre modèle approche de façon asymptotique les valeurs exactes des options américaines.

L'erreur d'approximation évaluée dans les deux tables ci-dessus est d'autant plus acceptable si l'on compare les deux modèles en terme de temps de calcul. En effet, notre modèle utilisant l'approximation quadratique pour évaluer la prime d'exercice anticipé ne met en moyenne que 30 secondes pour évaluer le prix d'une option américaine. Le temps de calcul de ce modèle dépend essentiellement de la vitesse avec laquelle la méthode Newton-Raphson va converger vers les solutions des polynômes des équations (3.73), (3.75) et (3.79), ainsi que de la somme tronquée de termes selon la note de bas de page numéro 15. Cette somme tronquée dépasse en fait rarement les 200 termes. Le temps de calcul du modèle avec approximation quadratique reste donc sensiblement constant et inférieur à la minute quelque soient les évaluations considérées.

Le temps de calcul du modèle d'Amin quant à lui dépend fortement du nombre d'intervalles de temps choisi, dont dépend également la précision des calculs. En effet, en diminuant le nombre d'intervalles de temps pour le modèle d'Amin, on réduit non seulement le temps de calcul mais malheureusement également la précision des résultats comme nous le démontre la table IV ci-dessous.

Table IV
Temps de calcul et précision du modèle d'évaluation d'options d'Amin

Modèle d'Amin			
Nombre d'intervalles de temps	Valeur de l'option européenne	Précision du résultat ²²	Temps de calcul (secondes)
10	0.3474	0.0300	1
100	0.3353	0.0179	22
500	0.3262	0.0088	1070
1000	0.3174	0.0028	5400

Sans tenir compte de la troncation de la distribution de sauts de Poisson en dehors de l'intervalle $[-3\omega, 3\omega]$, et étant donné les M états possibles à chaque date, les calculs à entreprendre à chaque date discrète sont donc de l'ordre de M^2 , c'est-à-dire 4'004'001 itérations si l'on considère 1000 intervalles de temps. Cette lourdeur de calcul représente un des défauts du modèle d'Amin. Ainsi avec les 1000 intervalles de temps que l'on considère pour chaque estimation des tables II et III, le modèle d'Amin prend 1 heure et 30 minutes pour évaluer une option que celle-ci soit européenne ou américaine.

²² La précision des résultats est déterminée ici en comparant la valeur au pair de l'option d'achat européenne de la table II (0.3146 \$/MMBtu), obtenue à partir de la formule analytique de l'équation (3.56), avec la valeur de la même option obtenue avec le modèle d'Amin lorsque le nombre d'intervalles de temps varie.

Soit environ 180 fois plus de temps que le modèle avec approximation quadratique, les temps de calcul ayant été évalués sur une station de travail Sun Ultra 10²³.

Toutefois, le nombre d'états à évaluer dans le modèle d'Amin pourra être ramener à l'ordre M en sélectionnant judicieusement un petit nombre de points pour approximer la distribution de sauts de Poisson. La méthode de Newton-Cotes (voir Abramowitz et Stegun (1965)) pourra par exemple être utilisée pour accomplir une telle tâche. Mais même avec l'utilisation d'une telle méthode numérique, nous doutons fortement que le modèle d'Amin puisse approcher les temps de calcul du modèle avec approximation quadratique.

Le modèle d'évaluation d'options américaines avec approximation quadratique est donc, sans aucun doute possible, supérieur au modèle d'Amin lorsqu'on essaye de concilier précision et vitesse de calcul.

Bien que le modèle d'Amin nous ait permis d'évaluer l'ordre de grandeur de l'erreur d'estimation engendrée par notre modèle d'évaluation d'options américaines, il s'est avéré imprécis dans certains cas extrêmes. Par exemple, on remarque à partir la table II que pour une valeur λ^* de la fréquence moyenne d'arrivée des sauts égale à 50 sauts par année, l'erreur d'évaluation du modèle d'Amin pour les options européennes par rapport à la formule analytique s'élève à -0.0284 \$/MMBtu pour les options d'achat et 0.0240 pour les options de vente. De même pour des valeurs $\bar{\kappa}^*$ d'amplitude aléatoire moyenne des sauts égales à -0.1 ou 0.1 , on constate des erreurs d'évaluation de 0.0284 et -0.0293 pour les options d'achats et de -0.0234 et 0.0236 pour les options de vente.

²³ Les temps de calcul indiqués ici et dans la table IV sont toutefois à considérer avec quelques réserves, et sont plutôt mentionnés dans cette étude en tant qu'illustration. En effet, les modèles d'évaluation ont été programmés à l'aide du logiciel Matlab qui n'est pas spécifiquement conçu pour une programmation optimale mais plutôt comme un logiciel possédant des fonctions prédéfinies pouvant être utilisées tel quel. En utilisant un langage de programmation plus puissant, comme par exemple le C++, il sera dès lors possible d'optimiser la programmation et ainsi d'abaisser les temps de calcul des deux modèles.

Un des moyens de remédier à ce problème d'imprécision du modèle d'Amin aurait été d'augmenter le nombre d'intervalles de temps du modèle, mais cela bien évidemment au détriment du temps de calcul, ou mieux encore de se tourner vers une méthode aux différences finies, plus précise, mais qui quant à elle aurait demandé un effort de programmation soutenu, ainsi qu'une importante puissance de calcul. L'objectif n'étant pas ici d'évaluer avec précision l'erreur d'estimation mais plutôt de se faire une idée sur son ordre de grandeur afin de pouvoir juger de la pertinence de l'utilisation de notre modèle d'évaluation dans une salle de négociation, nous n'avons en conséquence pas poussé plus loin nos investigations; les résultats obtenus ci-dessus répondant déjà de manière satisfaisante à l'objectif fixé.

Nous pouvons donc conclure cette section en affirmant que l'utilisation de notre modèle d'évaluation d'options américaines avec approximation quadratique est tout à fait justifiée dans le cadre d'opérations de marché, et que celui-ci représente un bon compromis entre précision et temps de calcul, son erreur d'estimation pouvant être considérée dans la plupart des cas comme négligeable.

Maintenant que l'efficacité de notre modèle d'évaluation d'options américaines sur contrats à terme a été démontrée, nous allons passer à la dernière étape de notre étude, c'est-à-dire à l'analyse de sensibilité du modèle.

4.3 Analyse de sensibilité

Dans cette dernière partie de notre recherche, nous avons évalué la sensibilité de notre modèle d'évaluation d'options américaines sur contrat à terme par rapport à chacun des paramètres le définissant, et ce afin de pouvoir déterminer si celui-ci réponds de manière conforme à chacune des caractéristiques que l'on est en droit d'attendre de n'importe quel modèle d'évaluation d'options. Nous nous sommes tout d'abord concentrés sur les indices classiques de sensibilité des prix d'options, plus communément appelés les "lettres grecques", puis par la suite sur les indices de sensibilité par rapport aux paramètres de sauts, paramètres propres aux modèles d'évaluation considérant la présence de sauts dans la dynamique des prix du bien sous-jacent.

L'analyse paramétrique effectuée ici vise donc à démontrer comment, selon notre modèle d'évaluation, le prix d'une option américaine sur contrat à terme réagit suite à un changement de valeur d'un des paramètres apparaissant dans le modèle. L'analyse a par conséquent été conduite en faisant varier chaque paramètre du modèle un à un ou deux à deux, tout en gardant les autres constants.

Les valeurs par défaut qui sous-tendent chaque représentation graphique de cette section sont les suivantes :

- Prix à terme F	=	3.5 (\$/MMBtu)
- Prix d'exercice de l'option X	=	3.5 (\$/MMBtu)
- Taux d'intérêt sans risque r	=	0.035
- Date d'échéance de l'option T_0	=	2 mois
- Date d'échéance du contrat à terme T_1	=	4 mois
- temps de mesure t	=	0
- Écart-type instantané du taux de rendement des prix au comptant σ_s	=	0.75
- Écart-type des changements du bénéfice net de détention σ_c	=	1.1
- Coefficient de corrélation entre les prix au comptant et le bénéfice net de détention ρ_{sc}	=	0.92
- Vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention κ_c	=	1.32

Les valeurs des paramètres ci-dessus correspondent soit à des valeurs observées sur les marchés ou soit aux valeurs approximatives moyennes des paramètres estimés à l'aide du filtre de Kalman. Ce sont donc des valeurs réalistes. Seuls les paramètres ci-dessus reliés aux sauts dans la dynamique des prix ont été déterminés de façon arbitraire. Ceux-ci auraient pu être déterminés de façon implicite à partir de notre modèle d'évaluation d'options et des prix observés sur les marchés. L'estimation implicite de paramètres se base en effet sur le fait que les options sont des actifs d'anticipation des conditions de marché et qu'en conséquence, celles-ci contiennent de l'information sur les distributions futures de prix.

Toutefois, il s'avère, comme le fait remarquer Bates (1996a), que cette façon implicite de procéder en minimisant la somme des erreurs au carré entre les prix d'options observées et ceux calculés à partir du modèle peut conduire à deux ensembles différents de paramètres possédant des moments et des sommes d'erreurs au carré identiques. Le modèle étant faiblement identifié, les paramètres implicites de sauts seront donc non informatifs. C'est pourquoi plutôt que de procéder à une estimation implicite, nous avons préféré, dans l'optique d'une analyse de sensibilité du modèle, déterminer arbitrairement ces paramètres. (Néanmoins, ceux-ci s'inspirent tout de même de ceux utilisés par Bates (1991) dans sa table II pp. 1028-1029).

- Fréquence moyenne des sauts de Poisson ajustée pour le risque λ^* = 5 (sauts/année)
- Amplitude aléatoire moyenne des sauts de Poisson ajustée pour le risque $\bar{\kappa}^*$ = 1 %
- Écart-type de la distribution de l'amplitude des sauts de Poisson ω = 0.05

Toutes les figures relatives aux sections qui vont suivre sont présentées dans l'annexe 2 du présent document.

4.3.1 Les indices classiques de sensibilité

Le coefficient delta

Le coefficient delta représente la mesure de la variation du prix de l'option suite à une variation du prix de l'actif sous-jacent, dans notre cas un contrat à terme. On s'attend à ce qu'une option d'achat possède un coefficient delta positif compris dans l'intervalle $[0,1]$ et qu'une option de vente possède un coefficient delta négatif compris dans l'intervalle $[-1,0]$. C'est effectivement ce que prédit notre modèle lorsqu'on observe les figure 7 et 8. On constate aussi que les coefficients delta varient eux-même en fonction du prix du sous-jacent, ce qui est conforme à nos attentes.

Le coefficient thêta

Le coefficient thêta mesure les variations de prix d'une option suite à l'écoulement du temps. À la différence des autres facteurs, le temps n'est pas un facteur de risque. Le coefficient thêta d'une option est généralement négatif, reflétant le fait qu'une option est un actif périssable. En effet, au fur et à mesure que la date d'échéance approche, l'option perd de sa valeur. Toutefois, dans le cas des options américaines, le coefficient thêta est toujours négatif. Puisque celles-ci donnent à leur détenteur le droit d'exercer prématurément, la valeur d'une option américaine à court terme est donc sans aucune ambiguïté possible inférieure à la valeur d'une option similaire à long terme, les possibilités d'exercice prématuré du détenteur de l'option à court terme étant restreintes dans le temps. Les graphiques des figures 9 et 10 sont effectivement conformes au comportement décrit ci-dessus.

On constate également que lorsque les options sont à parité comme c'est le cas ici, le coefficient thêta diminue graduellement en fonction du rapprochement de l'échéance, pour diminuer brusquement quelques temps avant l'échéance. Le phénomène d'effritement temporel des primes d'options caractérise surtout les options à parité de court terme. Intuitivement, ces options possèdent des paiements finaux très incertains. La date d'échéance approchant avec un prix sous-jacent proche du prix d'exercice, l'option peut facilement basculer en jeu ou hors jeu.

Toutefois, dans le cas qui nous concerne, cette perte de valeur des options avec l'écoulement du temps se trouve être renforcée. En effet, dans notre modèle le temps influence de façon directe la valeur des options mais aussi de façon indirecte au travers de son effet sur la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et son intégrale le long de la durée de vie des options, qui sont elles-mêmes fonctions du temps selon notre cadre d'analyse.

Comme on peut l'observer sur les figures 46, 47 et 48, l'écoulement du temps amène une augmentation de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme, engendrée par une augmentation de la variance, et une diminution de la valeur de son intégrale, l'augmentation de la variance ne suffisant pas à compenser la diminution de la période d'intégration. Cette augmentation de la variance du rendement des prix à terme et de sa moyenne à mesure que l'on se rapproche de l'échéance de ces mêmes prix à terme s'observe également empiriquement sur les marchés.

L'influence conjuguée du temps sur cette moyenne et sur l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme a pour effet résultant d'accélérer la diminution de valeur des options. Le temps affecte donc deux fois les options, et en conséquence, les valeurs de celles-ci diminueront plus rapidement que dans le cas d'un modèle classique d'évaluation tel que celui de Black.

Il nous paraît intéressant à ce niveau de coupler les deux coefficients de sensibilité vus jusqu'à présent afin d'obtenir l'évolution du prix de l'option en fonction du prix de l'actif sous-jacent et de l'écoulement du temps. On constate sur les graphiques des figures 11 et 12 que les comportements de l'option d'achat et de l'option de vente sont tout à fait conformes à la définition des contrats d'options.

Néanmoins, on observe pour les deux types d'options une sensible augmentation de leur valeur à mesure que le temps s'écoule et que le prix du sous-jacent s'approche à la hausse ou à la baisse du prix d'exercice, augmentation qui n'est pas si prononcée dans le contexte du modèle de Black. Cette augmentation de valeur est en partie attribuable à l'intégration de sauts dans notre modèle d'évaluation. En effet comme mentionné plus haut, lorsque la date d'échéance de l'option approche et que le prix de l'actif sous-jacent est proche du prix d'exercice de celle-ci, le paiement final de l'option est fortement incertain. Ceci est d'autant plus vrai que l'arrivée de sauts dans les prix du sous-jacent peuvent encore plus facilement faire basculer les options en jeu ou hors jeu. Cette incertitude au niveau du paiement final vient donc augmenter la valeur des options.

Le coefficient de sensibilité par rapport à la date d'échéance de l'option

En général, dans la théorie classique, ce coefficient de sensibilité n'existe pas car la date d'échéance de l'option est intimement reliée à l'écoulement du temps au travers du temps restant à courir jusqu'à l'échéance de l'option τ_0 qui intervient directement dans l'évaluation de celle-ci. Aussi lorsqu'on rapproche la date d'échéance de l'option, cela revient tout simplement à augmenter le temps écoulé, et inversement lorsqu'on éloigne celle-ci. Or cette observation n'est plus vraie dans le cas qui nous concerne car le temps et la date d'échéance de l'option influencent de façon différente la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et son intégrale, qui toutes deux interviennent dans notre modèle d'évaluation. C'est pourquoi il est pertinent ici de se pencher sur ce coefficient de sensibilité.

On observe également un double effet de la date d'échéance des options sur leurs valeurs (voir figures 13 et 14). Un effet direct tout comme pour l'écoulement du temps mais de manière opposée, c'est-à-dire qu'une augmentation de la date d'échéance de l'option amène inexorablement une augmentation de la valeur de celle-ci, puis un effet indirect venant renforcer le premier au travers de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et au travers de son intégrale le long de la durée de vie de l'option. L'augmentation de la date d'échéance fait augmenter la moyenne de la variance du rendement des prix à terme ainsi que son intégrale (voir figures 49 et 50), qui à leur tour font augmenter la valeur des options (voir figures 17 et 18). L'effet général ainsi décrit est conforme à nos attentes mais est de toute évidence plus important que l'effet attendu dans un cas de modèle classique considérant le bénéfice net de détention comme constant.

Le coefficient rhô

Le coefficient rhô représente la sensibilité du prix d'une option par rapport à une variation du taux d'intérêt sans risque r . Dans le cas des options sur contrat à terme qui nous concerne, le taux d'intérêt sans risque n'intervient que pour l'actualisation des flux monétaires futurs. Aussi lorsque celui-ci augmente, il devient évident que le prix des options va diminuer en conséquence, conduisant alors à un coefficient de sensibilité rhô négatif quelque soit le type d'options considéré. Et c'est précisément le phénomène observé sur les graphiques des figures 15 et 16.

Le coefficient vega

Le coefficient vega mesure les variations de prix d'une option par rapport aux variations de la volatilité du rendement de l'actif sous-jacent. Il est intéressant de noter que dans notre cas la variance du rendement des prix à terme est une fonction du temps ainsi que de certains paramètres comme le démontre l'équation (3.45), et que ce sont plutôt la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et son intégrale le long de la durée de vie de l'option (équation (3.59)) qui interviennent dans notre modèle d'évaluation. C'est pourquoi nous définirons le coefficient vega comme la sensibilité des options par rapport à des variations communes de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et de son intégrale le long de la durée de vie de l'option, ces deux effets étant difficilement isolables l'un de l'autre.

Ainsi, nous nous concentrerons tout d'abord sur l'effet des variations de la moyenne de la variance et de son intégrale sur la valeur des options, pour ensuite aborder l'effet sur ces mêmes variables des paramètres qui les définissent.

La valeur des options est donc exposée aux variations de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et aux variations de l'intégrale de cette même variance le long de la durée de vie des options. Le coefficient vega est positif pour les options d'achat aussi bien que pour les options de vente. De plus comme on l'observe sur les graphiques des figures 17 et 18, les options d'achat et de vente sont des fonctions monotones croissantes de la moyenne de la variance et de son intégrale, et cela quelque soit le degré d'enjeu de celles-ci. Une augmentation de ces deux quantités conduit de toute évidence à une augmentation de la valeur des options, augmentation liée à une plus grande incertitude.

Les graphiques des figures 17 et 18 représentent donc l'effet sur les prix d'option de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sous-jacents. Toutefois, l'effet sur ces mêmes options de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie des options est lui-même implicitement inclus dans ces graphiques. En effet, il est difficile de dissocier ces deux effets, et lorsque l'intervalle d'intégration reste constant, une augmentation de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme se traduit également par une augmentation de l'intégrale de cette même variance le long de la durée de vie des options. L'augmentation de l'intégrale de la variance vient alors renforcer l'effet de la moyenne de la variance des prix à terme sur la valeur des options.

La moyenne de la variance du rendement des prix à terme et son intégrale sont elles-mêmes fonctions d'un certain nombre de paramètres. L'analyse des effets sur ces valeurs d'une variation des paramètres les caractérisant nous a permis de mettre en évidence un certain nombre de phénomènes inattendus.

Tout d'abord, si l'on considère en premier lieu la volatilité σ_s du rendement des prix au comptant sous-jacents aux prix à terme, on constate sur le graphique de la figure 37 qu'il n'existe pas une relation d'équivalence entre celle-ci et la volatilité σ_F du rendement des prix à terme, mais plutôt une relation convexe que l'on observe également avec la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et son intégrale (figures 38 et 39). On remarque en effet qu'avec l'augmentation de la volatilité du rendement des prix au comptant, la volatilité du rendement des prix à terme diminue tout d'abord puis finit par augmenter. Le minimum absolu de la volatilité du rendement des prix à terme par rapport à la volatilité du rendement des prix au comptant étant atteint au point :

$$\sigma_s' = \sigma_c \rho_{sc} \left(\frac{1 - e^{-\kappa_c \tau_1}}{\kappa_c} \right) \quad (4.22)$$

On voit donc que contrairement à ce que l'on aurait pu penser, une augmentation de la volatilité du rendement des prix au comptant ne se traduit pas automatiquement par une augmentation de la volatilité du rendement des prix à terme. Aussi, à la différence d'un modèle d'évaluation considérant le bénéfice de détention comme constant, on ne peut considérer pour notre modèle la volatilité des prix au comptant comme étant égale à la volatilité des prix à terme, la relation les liant l'une à l'autre étant de nature plus complexe comme exprimée ci-dessous :

$$\sigma_F(\sigma_s, \sigma_c, \rho_{sc}, \kappa_c, \tau_1) = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_c^2 H_c^2(\tau_1) - 2\sigma_s \sigma_c \rho_{sc} H_c(\tau_1)} \quad (4.23)$$

La relation convexe liant la volatilité du rendement des prix au comptant à la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et à son intégrale se transmet bien évidemment également aux options comme on le voit sur les graphiques des figures 19 et 20.

Abordons maintenant l'effet des paramètres relatifs à l'intégration d'un bénéfice de détention stochastique dans notre modèle, soit σ_c la volatilité du bénéfice net de détention, κ_c la vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention et ρ_{sc} le coefficient de corrélation entre les prix au comptant et ce même bénéfice net de détention. Les graphiques des figures 21 à 26 et 40 à 45 nous présentent l'ensemble des effets de ces paramètres sur la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et son intégrale, ainsi que sur la valeur des options. Ces effets se traduisent de différentes façons sur la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et son intégrale, reflétant ainsi une plus grande richesse de comportements possibles pour les prix d'options comparativement à un modèle où le bénéfice de détention serait considéré comme constant.

Trois paramètres nous reste maintenant à considérer, à savoir le temps t , la date d'échéance de l'option T_0 , et la date d'échéance du contrat à terme T_1 .

Comme on l'a vu ci-dessus, l'écoulement du temps exerce un double effet. L'influence du temps sur la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et son intégrale, qui constitue l'effet indirect sur le prix des options, s'observe à partir des figures 47 et 48. Lorsque le temps s'écoule, la variance du rendement des prix à terme augmente (figure 46) et devient égale à la variance du rendement des prix au comptant une fois la date d'échéance du contrat à terme atteinte (voir expression (3.45)). À cet instant précis, les prix à terme sont alors égaux aux prix au comptant de par la définition même des contrats à terme, et la volatilité des prix à terme devient donc égale à la volatilité des prix au comptant.

L'augmentation de la variance du rendement des prix à terme se traduit également par une augmentation de sa moyenne (voir figure 47). Mais dans un même temps, suite à la diminution de l'intervalle d'intégration, l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option va diminuer jusqu'à zéro à la date d'échéance de cette même option (voir figure 48). L'effet du temps sur la moyenne de la variance ne suffisant pas à compenser l'effet sur son intégrale ainsi que l'effet direct sur la valeur des options, c'est bel et bien une diminution de la valeur des options que l'on observe avec l'écoulement du temps (voir figures 9 et 10).

En ce qui concerne la date d'échéance de l'option, on voit sur les figures 49 et 50 que celle-ci est positivement corrélée avec la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et son intégrale, venant ainsi, comme on l'a déjà mentionné, renforcer de façon indirecte son effet sur la valeur des options (figures 13 et 14).

Finalement pour la date d'échéance du contrat à terme, on remarque sur les graphiques des figures 51 et 52 que la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et son intégrale diminuent à mesure que la date d'échéance s'éloigne. Ce comportement est cohérent avec ce que l'on observe en pratique sur les marchés, où la volatilité des contrats à court terme est plus élevée que celle des contrats à plus long terme.

Toutefois, comme on le remarque sur les graphiques, les relations entre la date d'échéance des contrats à terme et la moyenne de la variance, ainsi que son intégrale, ne sont pas linéaires. On observe plutôt des fonctions convexes où la moyenne de la variance et son intégrale diminuent fortement dès le début de l'augmentation de la date d'échéance des contrats à terme, puis se stabilisent, et enfin augmentent très légèrement. On constate donc que les termes en exponentielle de l'expression de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et de l'expression de son intégrale (équation (3.59)) influencent fortement ces relations.

Le même comportement s'observe aussi sur les graphiques des figures 27 et 28 concernant la valeur des options. Ce phénomène vient donc enrichir de façon supplémentaire le comportement de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme ainsi que son intégrale, et au travers d'elles, l'évolution même de la valeur des options.

4.3.2 Les indices de sensibilité par rapport aux paramètres de sauts

Attardons nous maintenant à l'effet sur la valeur des options de variations des paramètres de sauts. Intuitivement, la présence de sauts dans la dynamique des prix à terme introduit une plus grande incertitude quant à leur valeur à l'échéance des options, faisant ainsi augmenter la valeur des options quel qu'en soit le type considéré, option d'achat ou de vente. Et c'est effectivement ce que l'on observe sur l'ensemble des figures 29 à 36.

On constate donc que l'introduction de sauts dans le modèle amène un effet non négligeable sur la valeur des options considérées. En effet, toutes choses étant égales par ailleurs, on voit sur les graphiques des figures 29 et 30 que le prix d'une option d'achat ou de vente passe d'approximativement 0.31 (\$/MMBtu) en absence de sauts à 0.42 (\$/MMBtu) lorsque la fréquence moyenne ajustée pour le risque de ceux-ci s'élève à 100 par année. Soit une augmentation de plus de 35 %.

On remarque également sur les graphiques des figures 30 et 31 que, conformément au processus postulé par Bates (1991), l'amplitude aléatoire moyenne des sauts ajustée pour le risque produit un effet asymétrique sur la valeur des options. Effectivement, toutes choses étant une fois de plus égales par ailleurs, le prix d'une options d'achat ou de vente s'élève approximativement à 0.41 (\$/MMBtu) lorsque la valeur de l'amplitude aléatoire moyenne des sauts ajustée pour le risque est fixée -0.2 alors que le prix de l'option n'est que de 0.39 (\$/MMBtu) lorsque cette même amplitude est égale à 0.2. Soit une différence d'environ 5%.

4.3.3 Conclusion

Le modèle d'évaluation d'options américaines sur contrat à terme développé tout au long de cette étude répond de façon conforme à toutes les attentes que l'on était en droit de formuler à l'encontre du comportement que se doit de respecter n'importe quel modèle d'évaluation d'options. Toutefois un certain nombre de caractéristiques lui sont propres.

Tout d'abord, on constate que par rapport au modèle classique d'évaluation d'options sur contrat à terme de Black, certains effets d'une variation de paramètres se trouvent amplifiés. Ceci est notamment la cas pour le temps et la date d'échéance de l'option, pour qui un effet indirect apparaît au travers de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et de son intégrale le long de la durée de vie des options, venant ainsi amplifier l'effet direct constaté sur la valeur des options.

On constate aussi que suite à l'intégration d'un bénéfice de détention stochastique dans notre modèle, la volatilité du rendement des prix à terme ne peut plus être considérée comme étant égale à la volatilité du rendement des prix au comptant comme c'est le cas dans le modèle classique d'évaluation d'options sur contrat à terme de Black. Selon notre cadre d'analyse, la volatilité du rendement des prix à terme est en effet une fonction complexe de la volatilité du rendement des prix au comptant. En considérant ces deux volatilités comme étant identiques, ce que fait implicitement tout modèle qui considère le bénéfice de détention comme constant, on limite la palettes des comportements possibles de la volatilité du rendement des prix à terme, simplifiant par la même considérablement la dynamique des prix d'options.

Le bénéfice de détention joue donc un rôle prépondérant et complexe dans l'évaluation des options sur contrat à terme, et celui-ci doit être expressément considéré comme stochastique si l'on veut réconcilier théorie et évidence empirique dans le cas des produits énergétiques.

Enfin, l'existence de sauts est quant à elle une des principales caractéristiques des prix au comptant et à terme des actifs énergétiques. Tout modèle d'évaluation de biens conditionnels aux produits énergétiques se doit donc, dans un souci de représenter le plus fidèlement possible la réalité, d'incorporer la présence de ces sauts dans les prix. Et ce d'autant plus que comme nous l'avons graphiquement démontré, leur existence à un effet non négligeable sur la valeur des options ainsi évaluées.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons donc développé dans ce travail de recherche, en s'inspirant des modèles d'Hilliard et Reis (1998) et de Bates (1991), un modèle d'évaluation d'options sur contrat à terme pour produits énergétiques.

Ce modèle intègre les principales caractéristiques rencontrées sur les marchés énergétiques, à savoir des signes marqués de discontinuités dans les prix au comptant, représentées par des sauts de Poisson, et l'existence d'un bénéfice de détention stochastique. De plus la majorité des options transigées sur ces marchés étant de type américain, notre modèle tient également compte de la prime d'exercice anticipé propre à ce type d'options.

Notre étude nous permet de constater que la présence d'un bénéfice de détention stochastique et l'existence de sauts dans les prix au comptant influencent de façon non négligeable le comportement des options. Aussi il nous apparaît évident que ces deux caractéristiques se doivent d'être prises en compte lors de l'évaluation d'actifs conditionnels aux produits énergétiques, leur mise à l'écart pouvant en effet conduire à une description trop simpliste de la réalité des marchés et en conséquence à d'importantes erreurs d'évaluation.

Finalement, dans l'optique de recherches futures, notons que le modèle pourrait être enrichi par l'introduction d'une troisième variable d'état. En effet, certains indices semblent nous indiquer que les prix des produits énergétiques possèdent une volatilité qui dépend du temps. Aussi l'introduction dans le modèle d'une volatilité stochastique pour le rendement des prix au comptant amènerait une dimension supplémentaire à celui-ci, le rapprochant ainsi toujours plus des caractéristiques observées sur les marchés. Ce modèle plus général nous permettrait alors sans aucun doute d'améliorer une fois encore la précision de nos calculs.

ANNEXES

Annexe 1 : Le modèle d'évaluation en temps discret d'Amin (1993)

Le modèle d'évaluation d'options d'Amin est construit de façon à garantir que la séquence du processus en temps discret des prix à terme converge faiblement vers le processus mixte de diffusion avec sauts en temps continu obtenu dans notre analyse pour ces mêmes prix à terme.

En partant de l'équation neutre au risque (3.44) pour les prix à terme :

$$\frac{dF}{F} = -\bar{\kappa}^* \lambda^* dt + \sigma_F dZ_F + \kappa^* dq^* \quad (\text{A.1})$$

mais en considérant pour le moment la volatilité des prix à terme σ_F comme une constante, on peut montrer que la version neutre au risque du processus de diffusion en temps continu des prix à terme s'énonce de la façon suivante :

$$\frac{F(t)}{F(0)} = \exp \left[\int_0^t \left(-\bar{\kappa}^* \lambda^* - \frac{1}{2} \sigma_F^2 \right) dv + \int_0^t \sigma_F dZ_F(v) + \sum_{j=1}^{NJ(t)} \ln(1 + \kappa^*(j)) \right] \quad (\text{A.2})$$

avec

$NJ(t)$ = Nombre total de sauts de Poisson jusqu'au temps t

Par commodité, nous allons maintenant passer dans une échelle logarithmique, avec les valeurs de toutes les variables d'état spécifiées en terme de leur logarithme.

Nous définissons donc la tendance du logarithme des prix à terme de l'équation (A.2) par :

$$\beta = -\bar{\kappa}^* \lambda^* - \frac{1}{2} \sigma_F^2 \quad (\text{A.3})$$

Ainsi que le logarithme de l'expression (A.2) pour les prix à terme par :

$$\theta^c(t) = \ln \left[\frac{F(t)}{F(0)} \right] = \int_0^t \beta(v) dv + \int_0^t \sigma_F dZ_F(v) + \sum_{j=1}^{NJ(t)} \ln(1 + \kappa^*(j)) \quad (\text{A.4})$$

où l'exposant petit c du processus $\theta^c(t)$ indique que l'on considère un processus en temps continu.

Nous allons maintenant construire, en s'inspirant de l'étude d'Amin (1993), un processus en temps discret qui va pouvoir être considéré comme une approximation convenable de processus $\theta^c(t)$ en temps continu.

1. Espace d'états discret du processus d'approximation

Tout comme dans le modèle de Cox, Ross et Rubinstein (1979), l'espace d'états pour le modèle discret est choisi de façon à ce que la composante de diffusion du processus puisse être facilement approximée par la construction d'un processus binomial dans ce même espace. A partir de cet espace d'états, on approxime alors la composante de sauts du processus continu en définissant un processus de sauts en temps discret. Ce processus de sauts en temps discret est incrémenté à chaque période avec une probabilité égale à la fréquence moyenne d'arrivée des sauts du processus en temps continu multiplié par la largeur de chaque intervalle de temps. En outre, la distribution de l'incrément de ce processus en temps discret est construite en discrétisant la distribution de sauts en temps continu sur l'espace d'état du processus binomial de base. Finalement le processus en temps discret complet est obtenu en combinant le processus binomial et le processus de sauts en temps discret.

Définissons n comme le nombre d'intervalles de temps désiré. Pour chaque entier positif n fixé, on partitionne alors l'intervalle de transaction $[0, \tau_0]$ en n sous intervalles de temps de longueur $h_n = \frac{\tau_0}{n}$. L'indice n dénotant la dépendance par rapport à la valeur particulière de n choisie.

Considérons maintenant le processus stochastique en temps discret θ_n défini sur l'espace d'états Ω_n dépeint à la figure 6 ci-dessous.

Temps = 0	Temps = h_n	Temps = ih_n

	$\ln \frac{F_3(h_n)}{F(0)} = \beta h_n + 3\sigma_F \sqrt{h_n}$	$\ln \frac{F_3(ih_n)}{F(0)} = i\beta h_n + 3\sigma_F \sqrt{h_n}$
	$\ln \frac{F_2(h_n)}{F(0)} = \beta h_n + 2\sigma_F \sqrt{h_n}$	$\ln \frac{F_2(ih_n)}{F(0)} = i\beta h_n + 2\sigma_F \sqrt{h_n}$
	$\ln \frac{F_1(h_n)}{F(0)} = \beta h_n + 1\sigma_F \sqrt{h_n}$	$\ln \frac{F_1(ih_n)}{F(0)} = i\beta h_n + 1\sigma_F \sqrt{h_n}$
0	$\ln \frac{F_0(h_n)}{F(0)} = \beta h_n$	$\ln \frac{F_0(ih_n)}{F(0)} = i\beta h_n$
	$\ln \frac{F_{-1}(h_n)}{F(0)} = \beta h_n - 1\sigma_F \sqrt{h_n}$	$\ln \frac{F_{-1}(ih_n)}{F(0)} = i\beta h_n - 1\sigma_F \sqrt{h_n}$
	$\ln \frac{F_{-2}(h_n)}{F(0)} = \beta h_n - 2\sigma_F \sqrt{h_n}$	$\ln \frac{F_{-2}(ih_n)}{F(0)} = i\beta h_n - 2\sigma_F \sqrt{h_n}$
	$\ln \frac{F_{-3}(h_n)}{F(0)} = \beta h_n - 3\sigma_F \sqrt{h_n}$	$\ln \frac{F_{-3}(ih_n)}{F(0)} = i\beta h_n - 3\sigma_F \sqrt{h_n}$

Figure 6. Espace d'états (Ω_n) de l'approximation discrète de la distribution des prix à terme pour un paramètre de discrétisation n fixe. Cette figure illustre l'espace d'états du modèle discret au temps h_n et à un temps quelconque ih_n . Le prix à terme à chaque incrément de temps est déterminé par sa valeur au temps zéro multipliée par l'exponentielle de la valeur de la variable d'état obtenue sur la grille de la figure.

La mesure de probabilité de transition Ψ_n dans cet espace d'états restant pour le moment non spécifiée.

L'espace d'états Ω_n , restreint à une date fixe ih_n , représente donc une grille dont les points verticaux consécutifs sont séparés par une quantité $\sigma_F \sqrt{h_n}$. De plus cette grille à la date ih_n est décalée vers le haut de la quantité βh_n relativement à la même grille à la date $(i-1)h_n$. À chaque date, cet espace d'états représente le rendement des prix à terme relativement à la date 0. Le prix à terme à la date ih_n et dans l'état j est par conséquent égale à :

$$F_j(ih_n) = F(0) e^{(\beta ih_n + j \sigma_F \sqrt{h_n})} \quad (\text{A.5})$$

L'espace d'états défini ci-dessus est légèrement différent de celui de Cox, Ross, et Rubinstein (1979), et correspond plutôt à celui suggéré pour la première fois par Jarrow et Rudd (1983). Cet espace d'états est un peu plus intuitif car il permet effectivement une séparation directe des composantes de tendance et de variance tout comme dans le processus de diffusion en temps continu. Néanmoins, avec quelques modifications mineures, il serait aussi possible de travailler avec l'espace d'état de Cox, Ross, et Rubinstein.

2. Probabilités de transition

Une fois cet espace d'états défini, il nous reste donc à déterminer les probabilités de transition d'un état à un autre pour θ_n , de telle manière que celles-ci servent à l'approximation de θ^c sous la mesure réelle \mathcal{P} . Pour chaque paramètre n fixé, représentons ces probabilités de transition par la mesure de probabilité Ψ_n . La théorie développée dans la section précédente va nous permettre de construire la mesure de probabilité neutre au risque Ψ_n^* correspondante.

Commençons par spécifier les probabilités de transition des états locaux, c'est-à-dire ne tenant pas compte des sauts de Poisson du processus.

Définissons $\theta_{1,n}(0)=0$ et $\psi_n \in (0,1)$. Conditionnellement à un changement de prix local, les probabilités de transitions de θ_n sont données par :

$$\begin{aligned} \text{Pr ob} \left[\theta_n(t+h_n) - \theta_n(t) = \beta h_n + \sigma_F \sqrt{h_n} \right] &= \psi_n \\ \text{Pr ob} \left[\theta_n(t+h_n) - \theta_n(t) = \beta h_n - \sigma_F \sqrt{h_n} \right] &= 1 - \psi_n \end{aligned} \tag{A.6}$$

Pour le moment laissons la probabilité ψ_n non spécifiée.

Maintenant, considérons l'approximation de la composante de sauts de Poisson. Pour la composante de sauts du processus en temps continu, la probabilité qu'un saut unique se produise durant l'intervalle de temps h_n est égale à $\lambda^* h_n + o(h_n)^{24}$. La probabilité que plusieurs sauts se produisent dans le même intervalle de temps h_n est quant à elle égale à $o(h_n)$. Nous assumons donc, pour le modèle en temps discret, que la probabilité d'occurrence d'un saut de Poisson à n'importe quel moment $t \in [0, h_n, \dots, \tau_0 - h_n]$ est égale à λh_n , et qu'il est impossible que des sauts simultanés se produisent quelque soit la date discrète considérée.

À chaque temps discret, nous approximations la distribution de sauts verticalement en la morcelant sur des intervalles d'égale largeur qui ne se recoupent pas, de façon à ce que chaque intervalle soit centrer autour d'un point de l'espace d'états discrets Ω_n à cette date. Par la suite, on assigne la totalité de la masse de probabilité de chacun de ces intervalles au point de l'espace Ω_n contenu dans chacun de ceux-ci. Il existe toutefois une exception à cette règle pour le cas de l'intervalle contenant l'état zéro. En effet, dans le but de faire la différence entre les sauts de Poisson et les sauts locaux du modèle binomial, l'intervalle contenant l'état zéro est choisi de façon plus large. Nous allons revenir sur ce point par la suite.

De façon complémentaire, définissons la fonction de densité cumulative de $(1+\kappa^*)$, sous la mesure de probabilité Ψ^c , par $N(x)$ pour $x \in R$, où N représente la fonction de densité cumulative d'une loi normale standardisée. Définissons aussi $(1+\kappa_n^*(t))$ pour $t \in [0, h_n, \dots, \tau_0 - h_n]$ comme l'amplitude des sauts pour le processus en temps discret et N_n comme sa distribution de probabilité sous la mesure Ψ_n .

En tenant compte du fait que N_n est une distribution discrète, nous pouvons spécifier sa fonction de masse de probabilité comme suit :

Pour chaque entier l non compris dans l'ensemble $\{-1,0,1\}$ définissons :

$$dN_n(l) = N\left(\beta h_n + \left(l + \frac{1}{2}\right)\sigma_F\sqrt{h_n}\right) - N\left(\beta h_n + \left(l - \frac{1}{2}\right)\sigma_F\sqrt{h_n}\right) \quad (\text{A.7})$$

Les probabilités représentées par dN_n correspondent à une discrétisation sur l'espace d'états Ω_n de la distribution de sauts en temps continu. Toutefois, la masse de probabilité de N sur la région $\left[\beta h_n - (1+1/2)\sigma_F\sqrt{h_n}, \beta h_n + (1+1/2)\sigma_F\sqrt{h_n}\right]$ reste à être assignée aux points $l \in \{-1,0,1\}$. Nous avons choisis d'assigner toute la masse de probabilité au point correspondant à $l = 0$ et en conséquence d'assumer $dN_n(l)$ égal à zéro pour $l = \pm 1$.

$$dN_n(0) = N\left(\beta h_n + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sigma_F\sqrt{h_n}\right) - N\left(\beta h_n + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\sigma_F\sqrt{h_n}\right) \quad (\text{A.8})$$

$$dN_n(\pm 1) = 0$$

N_n est définie de cette façon afin d'exclure que la distribution de sauts de Poisson puisse avoir une masse positive sur chacun des états correspondant à un saut de prix local. Toutefois, dans le cas limite où $n \rightarrow \infty$, cela n'a pas d'importance de définir la distribution de sauts de Poisson comme ci-dessus, ou par rapport à chaque point de l'espace d'états Ω_n .

La probabilité de distribution de $\ln(1 + \kappa^*)$ sous Ψ_n est maintenant complètement spécifiée par

$$\text{Prob}\left[\ln(1 + \kappa^*(t)) = \beta h_n + l\sigma_F\sqrt{h_n}\right] = dN_n(l) \quad \text{pour chaque entier } l \quad (\text{A.9})$$

²⁴ Une fonction $f(h)$ est dénommée $o(h)$ si $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)/h = 0$

Finalement, en se rappelant qu'à chaque période la probabilité d'occurrence d'un saut de Poisson est égale à $\lambda^* h_n$, on obtient les probabilités de transition de $\theta_n(t)$ en combinant les sauts de Poisson avec les sauts liés aux changements locaux de prix :

$$\begin{aligned} \text{Pr ob} \left[\theta_n(t+h_n) - \theta_n(t) = \beta h_n + \sigma_F \sqrt{h_n} \right] &= \psi_n (1 - \lambda^* h_n) \\ \text{Pr ob} \left[\theta_n(t+h_n) - \theta_n(t) = \beta h_n - \sigma_F \sqrt{h_n} \right] &= (1 - \psi_n) (1 - \lambda^* h_n) \\ \text{Pr ob} \left[\theta_n(t+h_n) - \theta_n(t) = \beta h_n + l \sigma_F \sqrt{h_n}; l \neq \pm 1 \right] &= \lambda^* h_n dN_n(l) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Afin de compléter la formulation en temps discret, nous avons maintenant besoin de spécifier la valeur de ψ_n . La théorie développée dans l'article d'Amin (1993) implique que la valeur actuelle de ψ_n est irrelevante dans l'évaluation d'options et que par conséquent, celle-ci peut être remplacée par ψ_n^* définie ci-dessous :

$$\psi_n^* = \frac{1 - \lambda^* h_n E_{(1+\kappa_n^*)} [1 + \kappa_n^*] - e^{(\beta h_n - \sigma_F \sqrt{h_n})}}{1 - \lambda^* h_n} \frac{e^{(\beta h_n + \sigma_F \sqrt{h_n})} - e^{(\beta h_n - \sigma_F \sqrt{h_n})}}{e^{(\beta h_n + \sigma_F \sqrt{h_n})} - e^{(\beta h_n - \sigma_F \sqrt{h_n})}} \quad (\text{A.11})$$

avec par construction²⁵ :

$$E_{(1+\kappa_n^*)} [1 + \kappa_n^*] = \bar{\kappa}^* + 1 + O(h_n) \quad (\text{A.12})$$

Pratiquement, nous pouvons assumer $O(h_n)$ comme étant égal à zéro lorsque n est suffisamment grand.

Avec cette dernière définition, la formulation en temps discret avec une volatilité des prix à terme constante est maintenant complète. Une dernière étape nous reste donc à franchir, à savoir l'intégration d'une volatilité dépendante du temps pour les prix à terme.

²⁵ Une fonction $f(x)$ est définie comme $O(x)$ si $f(x) / x$ reste bornée lorsque $x \rightarrow 0$

3. Volatilité des prix à terme dépendante du temps

Dans cette section, nous généralisons le modèle en temps discret développé ci-dessus afin de permettre à la volatilité des prix à terme d'être une fonction du temps.

Conformément à la racine de l'équation (3.45), nous assumons donc maintenant une volatilité dépendante du temps pour les prix à terme et non plus constante comme auparavant.

$$\sigma_F(\sigma_s, \sigma_c, \rho_{sc}, \kappa_c, \tau_1) = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_c^2 H_c^2(\tau_1) - 2\sigma_s \sigma_c \rho_{sc} H_c(\tau_1)} \quad (\text{A.13})$$

L'intuition derrière la modification à apporter au modèle afin de tenir compte d'une volatilité dépendante du temps a été avancée par Amin (1991) dans l'une de ses études. L'astuce consiste à permettre des intervalles de temps variables de manière à ce que ceux-ci annulent la variabilité des termes de volatilité.

Réécrivons le logarithme du processus de diffusion en temps discret des prix à terme, obtenu à partir de sa forme en temps continu (équation (A.4)), sous forme de différences finies et en mettant de côté le terme de sommation pour les sauts de Poisson.

$$\ln \left[\frac{F(nh_n)}{F((n-1)h_n)} \right] = \beta((n-1)h_n)h_n + \sigma_F((n-1)h_n)\sqrt{h_n}\tilde{W}_F((n-1)h_n) \quad (\text{A.14})$$

où

$\tilde{W}_F((n-1)h_n)$ est une variable aléatoire provenant d'une distribution normale standardisée.

Afin de simplifier l'exposé, nous introduisons ici un changement de notation. Au lieu d'indexer la variable d'état et ses paramètres selon le temps du calendrier, nous allons les indexer par (i) , le nombre d'intervalles variables de temps écoulés depuis le temps $t = 0$.

L'équation (A.14) devient donc :

$$\ln \left[\frac{F(i)}{F(i-1)} \right] = \beta(i)h_n(i) + \sigma_F(i)\sqrt{h_n(i)}\tilde{W}_F(i) \quad (\text{A.15})$$

Le modèle spécifié dans l'équation (A.15) est indépendant des trajectoires si et seulement si le produit $\sigma_F(i)\sqrt{h_n(i)}$ reste constant pour l'ensemble des i . Ainsi pour respecter cette condition nous devons donc autoriser des intervalles de temps $h_n(i)$ de tailles variables.

C'est pourquoi nous définissons :

$$h_{avg} = \frac{n}{\tau_0} \quad \text{et} \quad \vartheta^2 = \left[\frac{\int_0^{\tau_0} \sigma_F^2(t) dt}{\tau_0} \right] \quad (\text{A.16})$$

où l'intégrale doit être interprétée au sens d'une intégrale de Riemann.

Maintenant en posant :

$$h(i) = \frac{\vartheta^2 h_{avg}}{\sigma_F^2(i)} \quad (\text{A.17})$$

on constate que le produit $\sigma_F(i)\sqrt{h_n(i)}$ reste constant en tout temps, et respecte donc ainsi la propriété d'indépendance par rapport aux trajectoires.

La formulation en temps discret tient maintenant compte de toute les caractéristiques de notre cadre d'analyse et va donc pouvoir être implantée afin de permettre l'évaluation d'options américaines sur contrats à terme.

Annexe 2 : Les graphiques relatifs à l'analyse de sensibilité du modèle

1. Évolution de la valeur des options

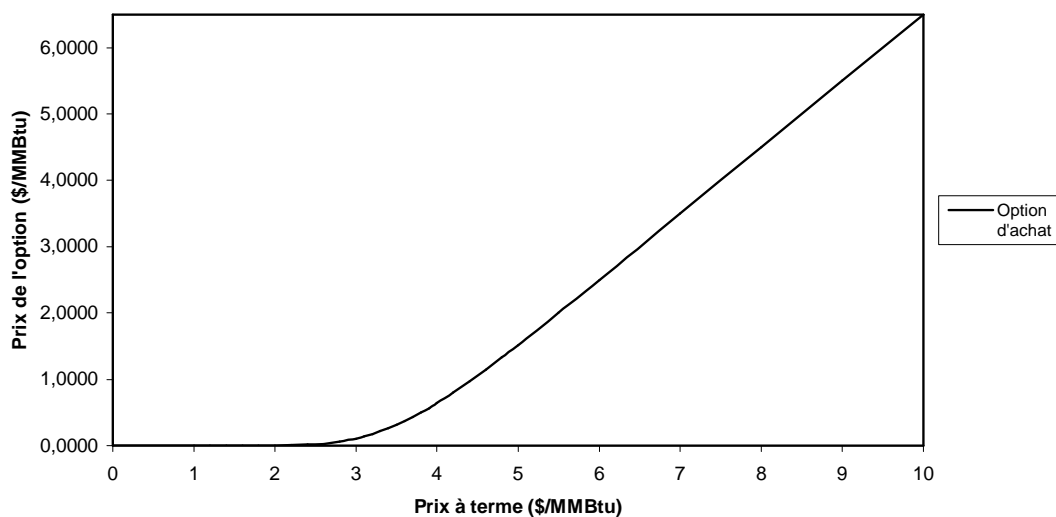


Figure 7. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction du prix à terme sous-jacent.

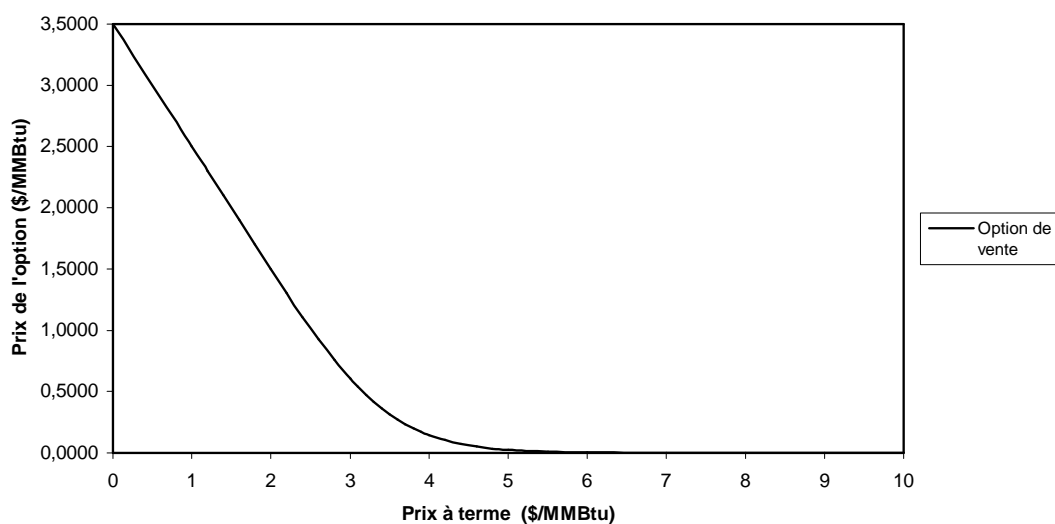


Figure 8. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction du prix à terme sous-jacent.

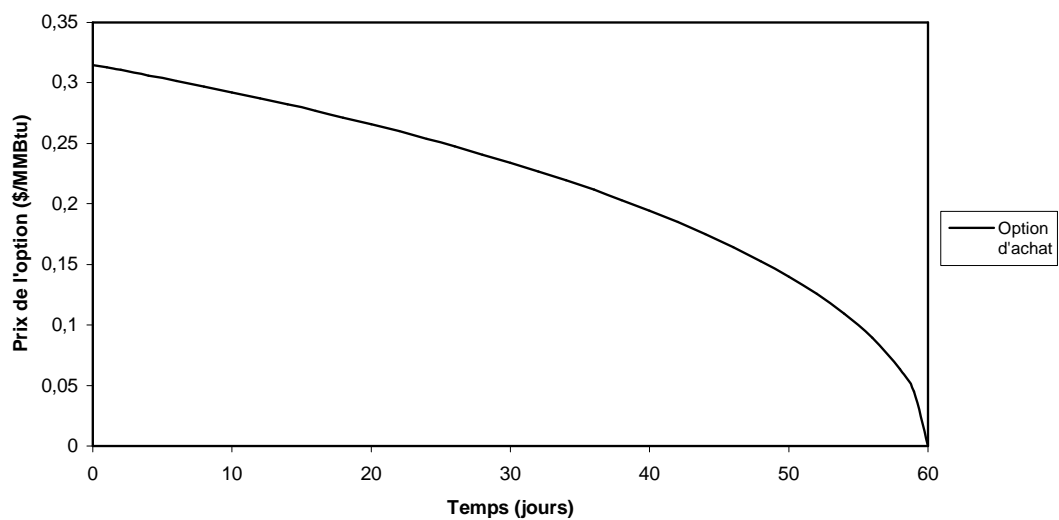


Figure 9. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de l'écoulement du temps.

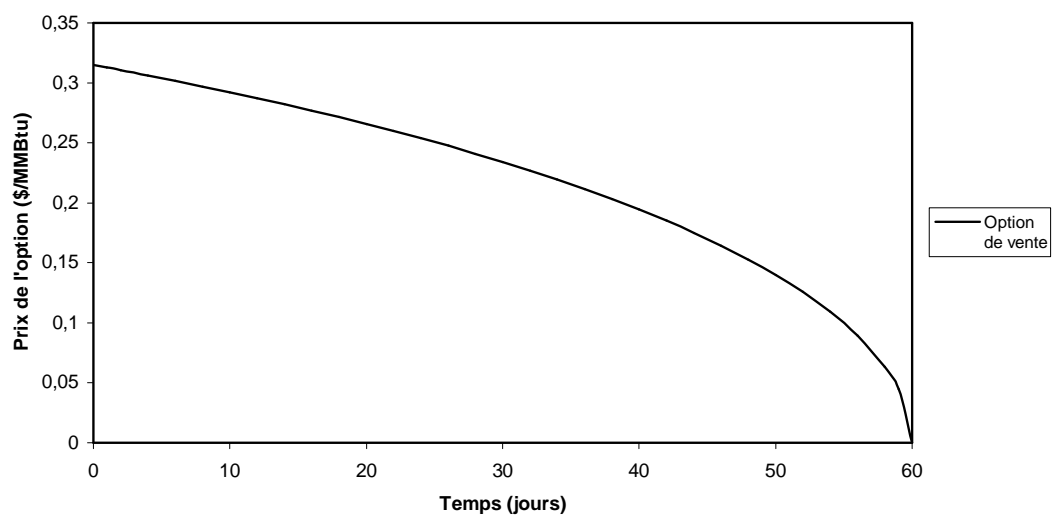


Figure 10. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de l'écoulement du temps.

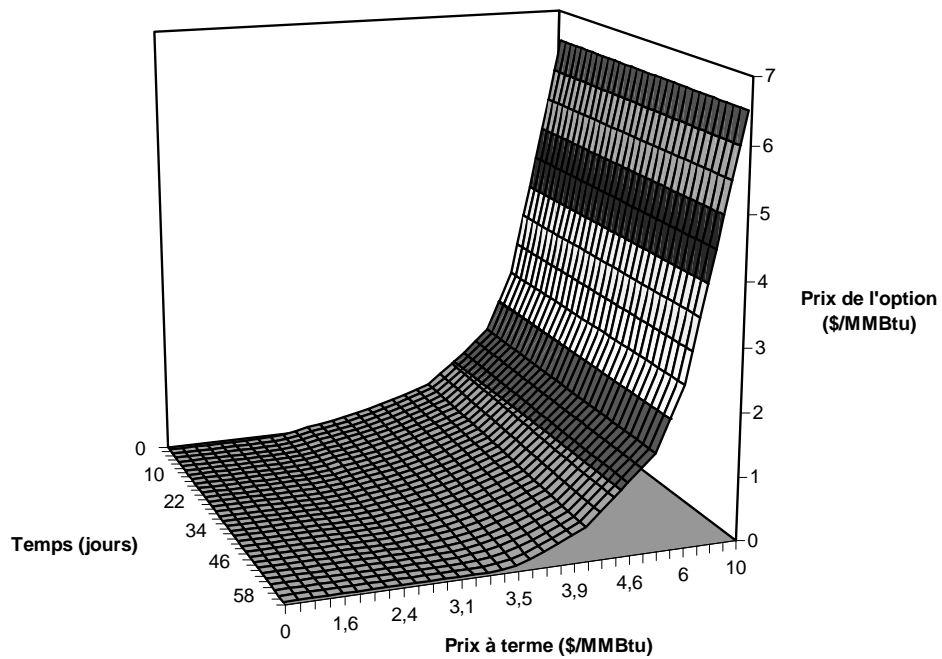


Figure 11. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de l'écoulement du temps et du prix à terme sous-jacent.

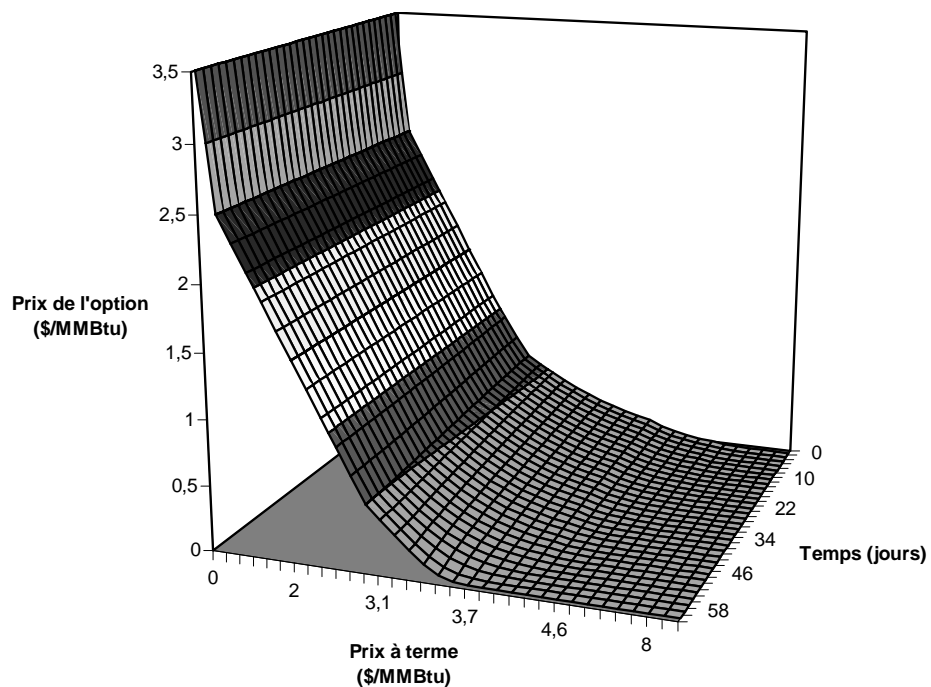


Figure 12. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de l'écoulement du temps et du prix à terme sous-jacent.

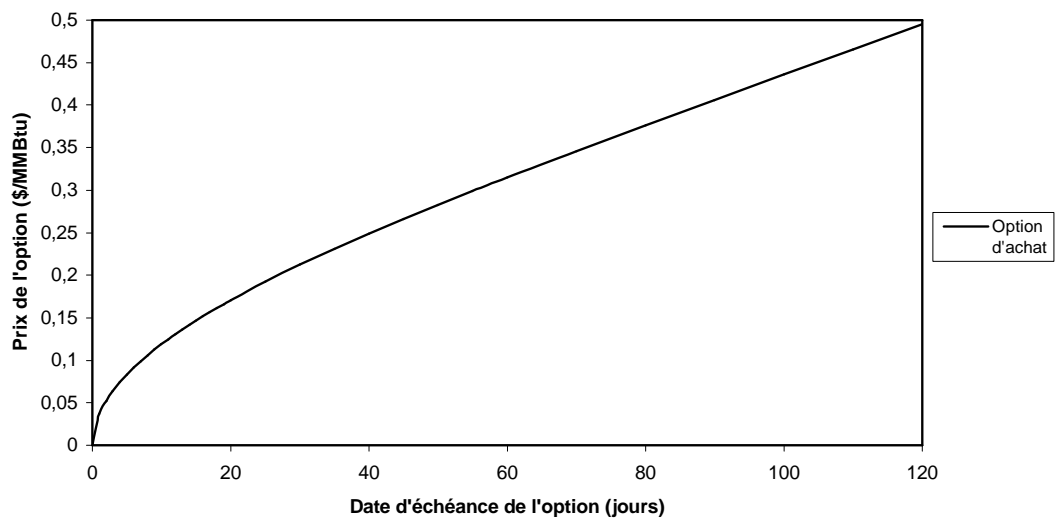


Figure 13. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de la date d'échéance de l'option.

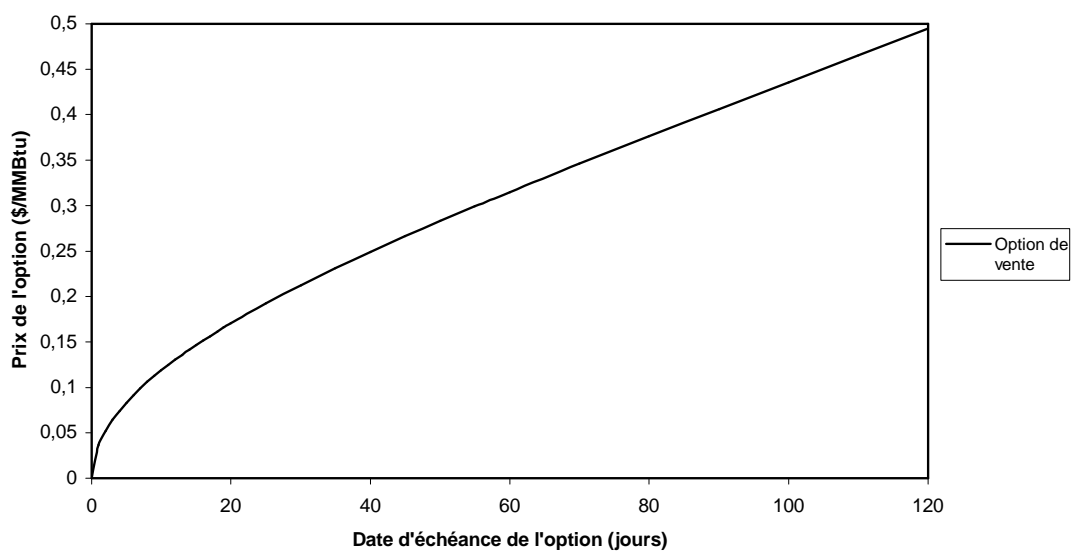


Figure 14. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de la date d'échéance de l'option.

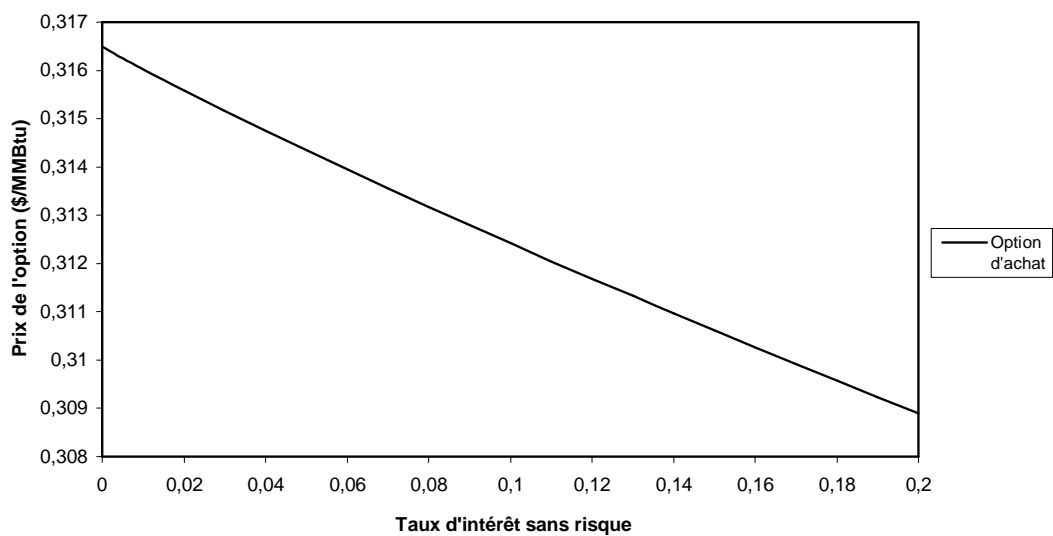


Figure 15. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction du taux d'intérêt sans risque.

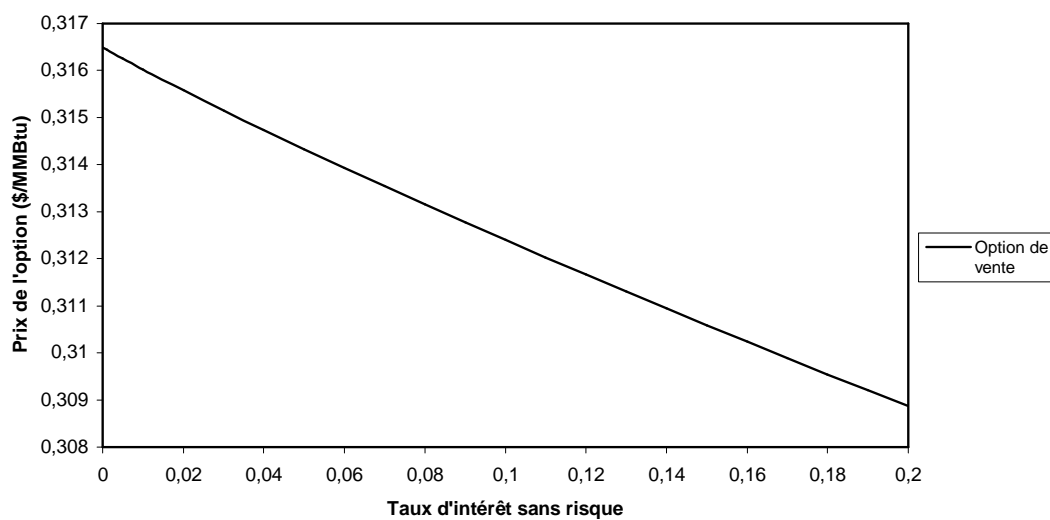


Figure 16. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction du taux d'intérêt sans risque.

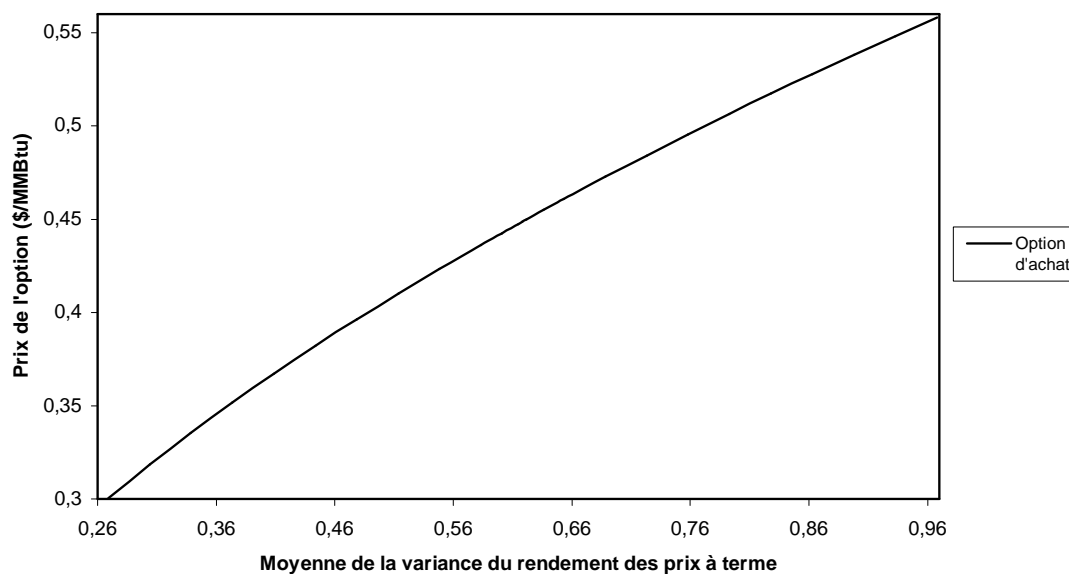


Figure 17. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sous-jacents. L'effet sur le prix de l'option de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option est implicitement inclus dans cette représentation.

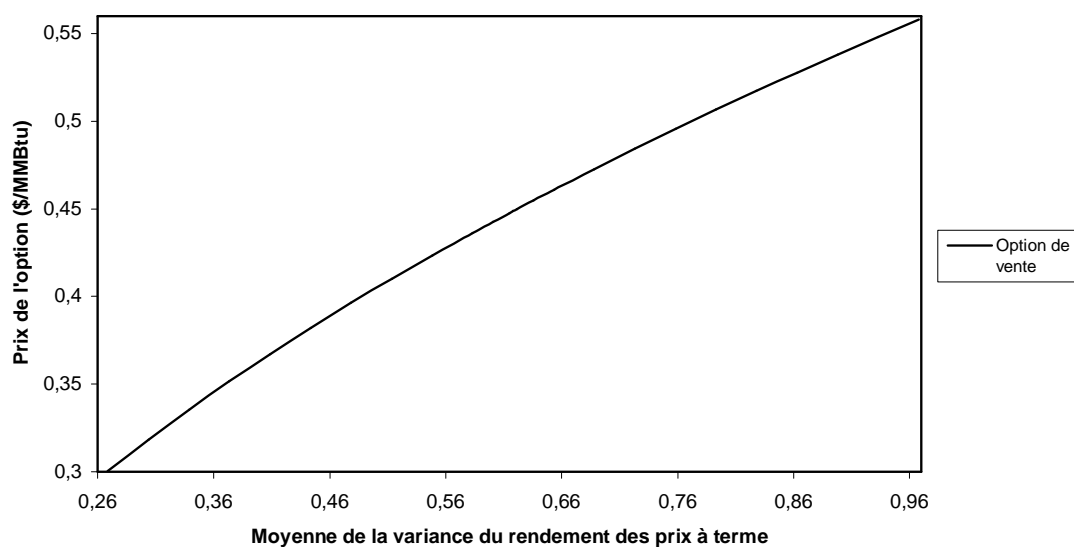


Figure 18. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sous-jacents. L'effet sur le prix de l'option de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option est implicitement inclus dans cette représentation.

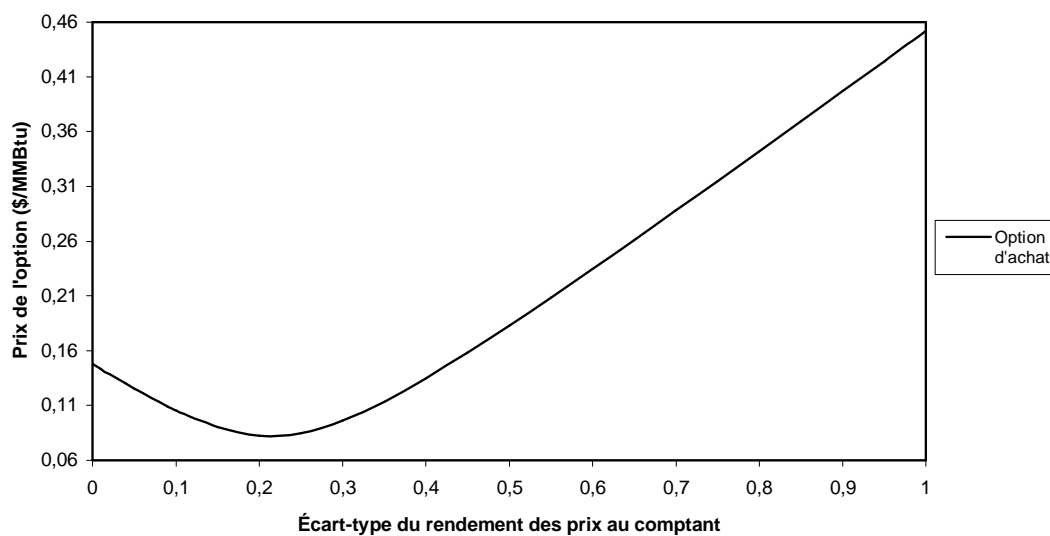


Figure 19. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de l'écart-type du rendement des prix au comptant sous-jacents aux prix à terme.

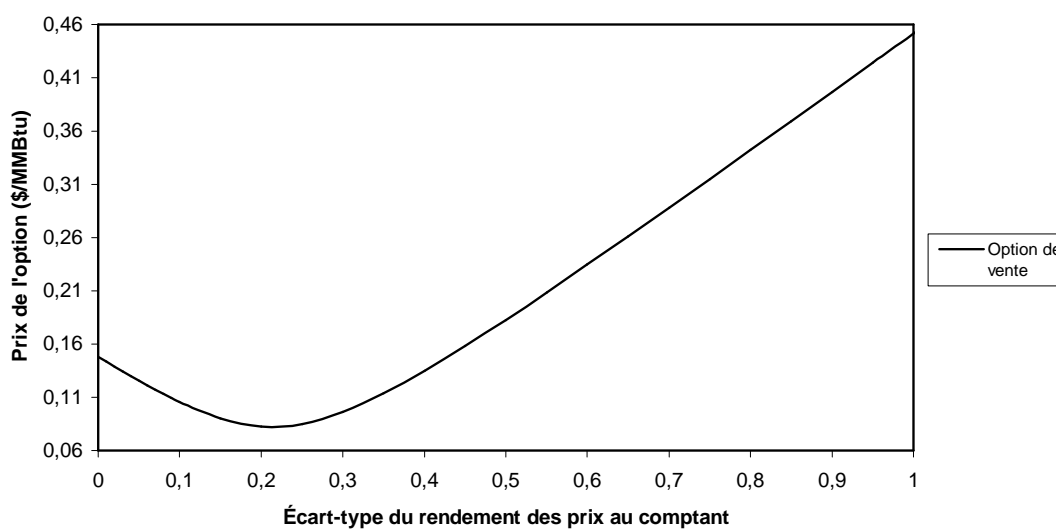


Figure 20. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de l'écart-type du rendement des prix au comptant sous-jacents aux prix à terme.

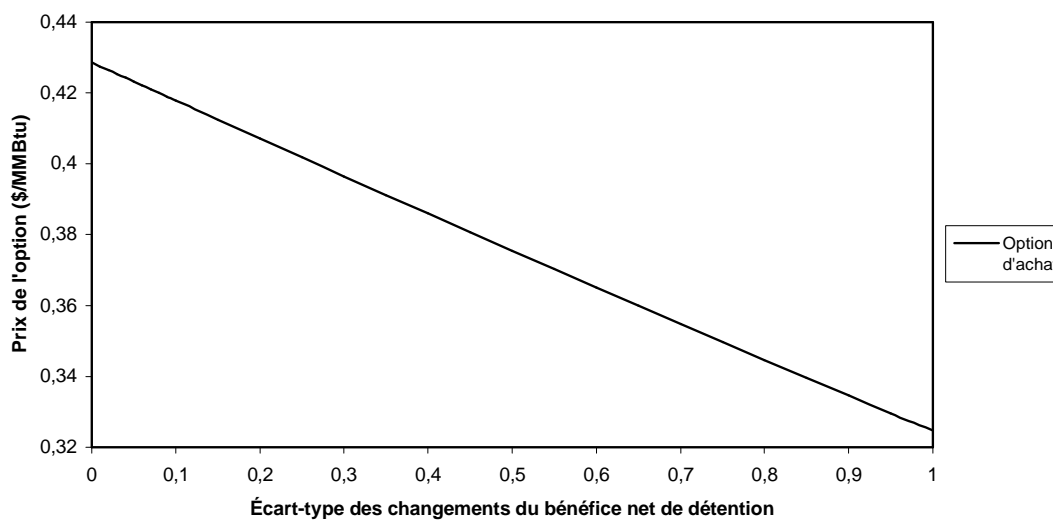


Figure 21. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de l'écart-type des changements du bénéfice net de détention.

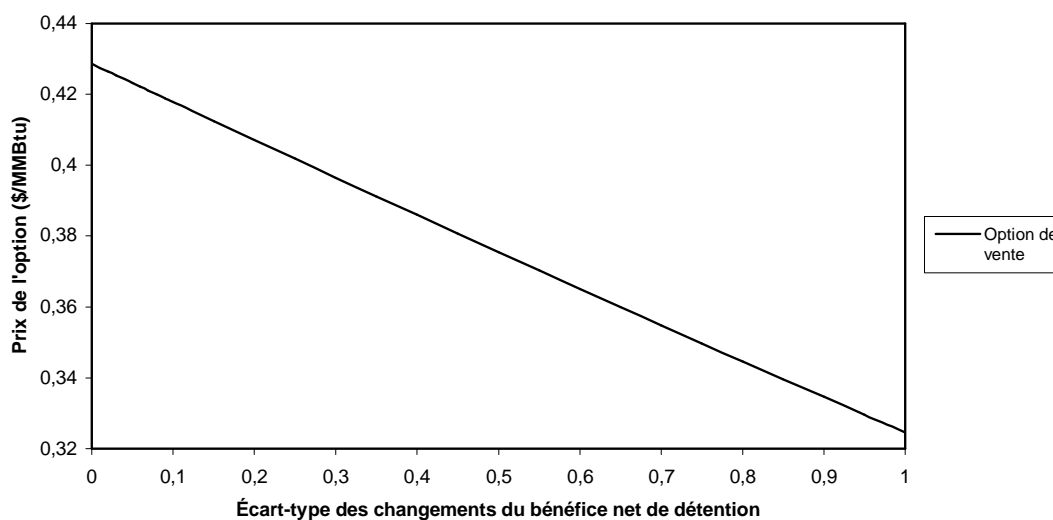


Figure 22. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de l'écart-type des changements du bénéfice net de détention.

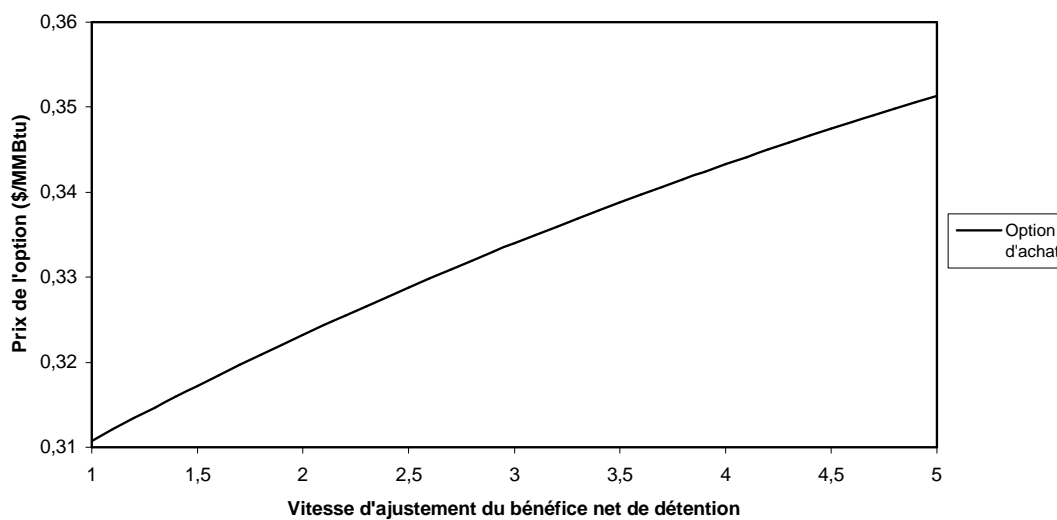


Figure 23. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de la vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention.

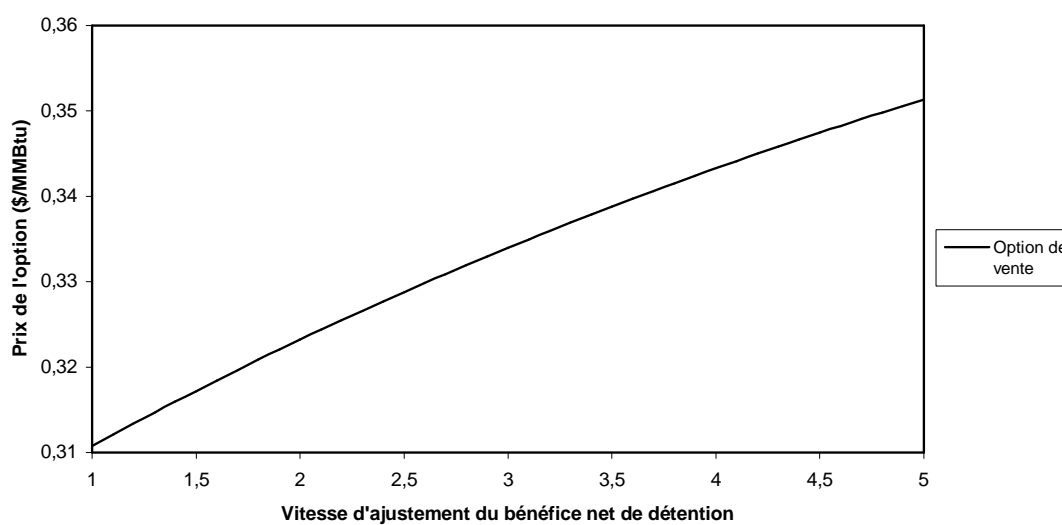


Figure 24. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de la vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention.

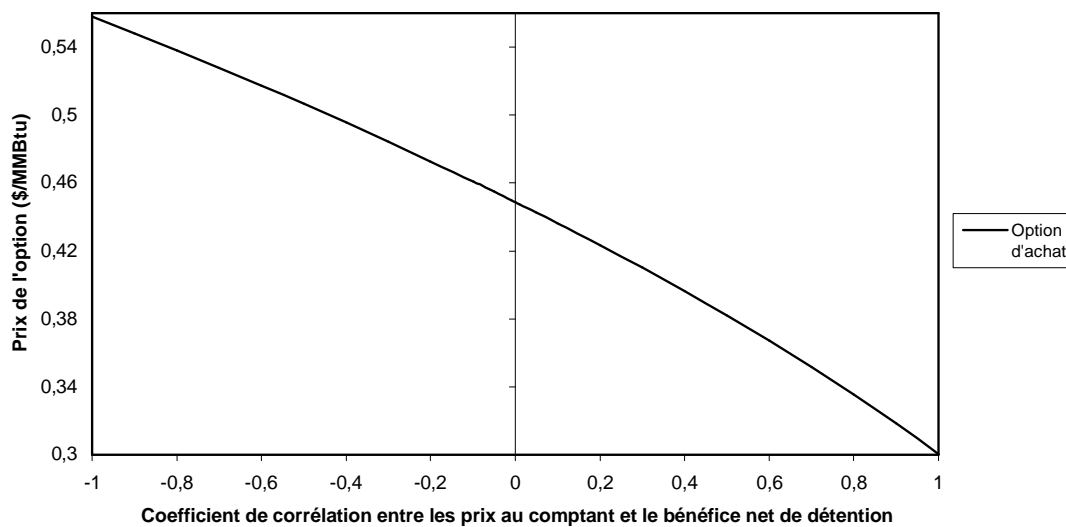


Figure 25. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction du coefficient de corrélation entre les prix au comptant sous-jacents aux prix à terme et le bénéfice net de détention.

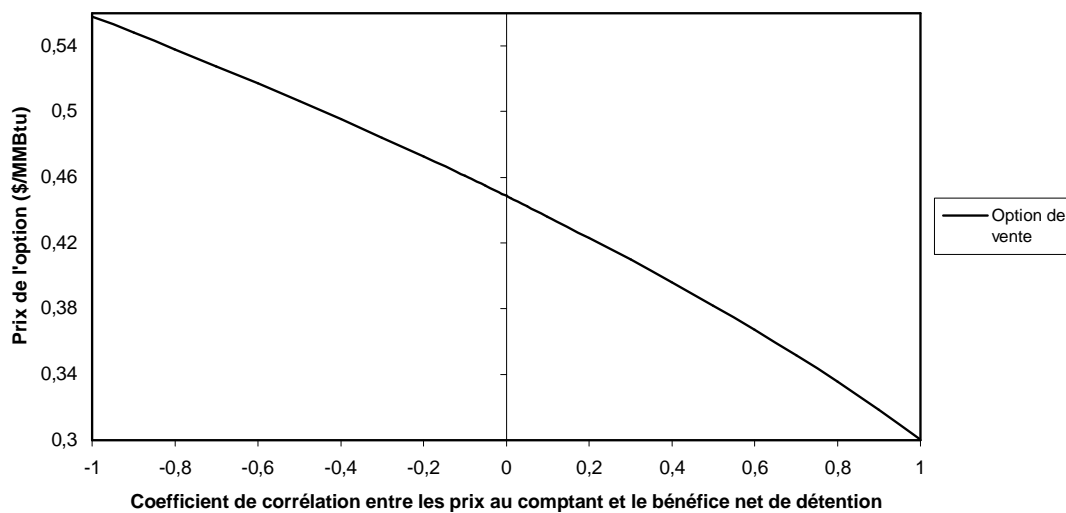


Figure 26. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction du coefficient de corrélation entre les prix au comptant sous-jacents aux prix à terme et le bénéfice net de détention.

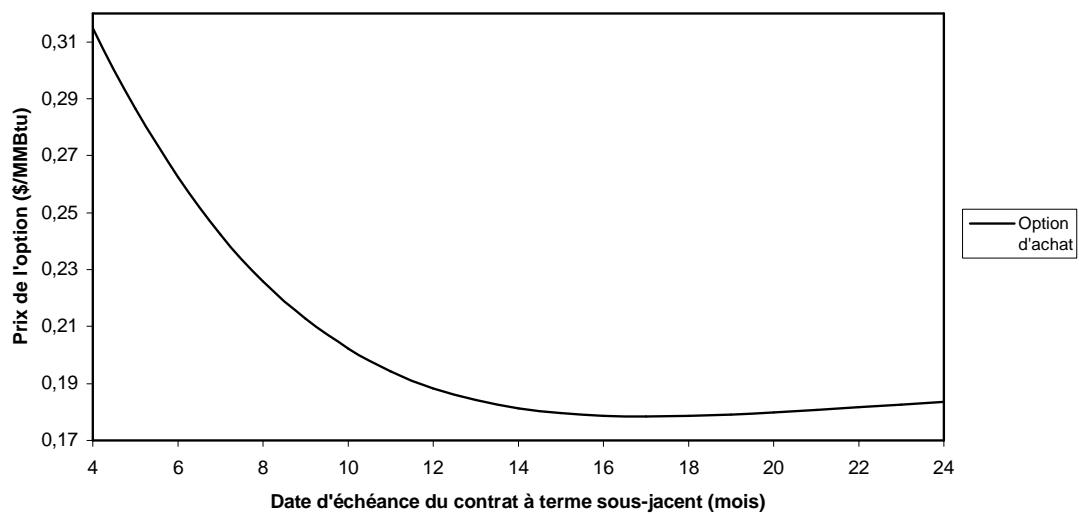


Figure 27. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de la date d'échéance du contrat à terme sous-jacent.

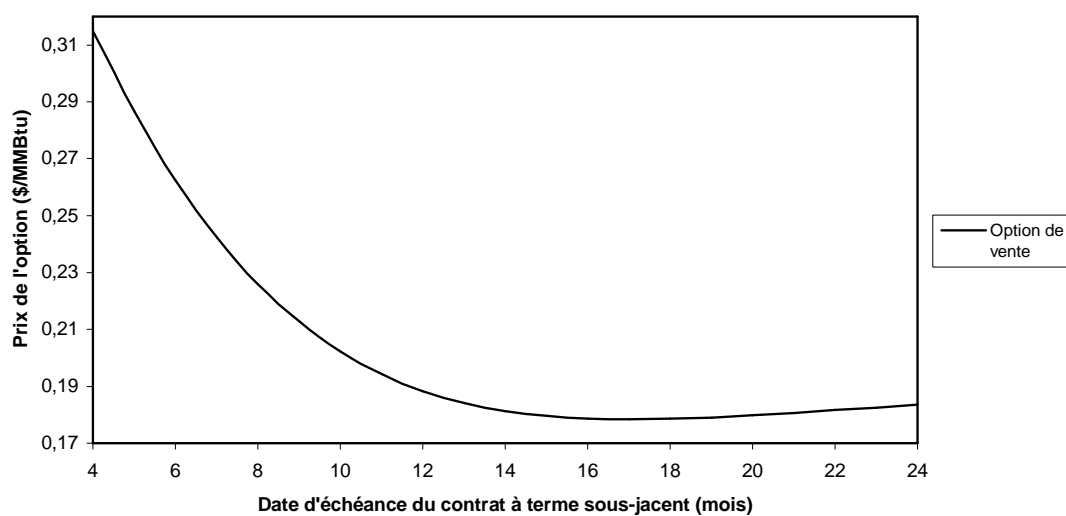


Figure 28. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de la date d'échéance du contrat à terme sous-jacent.

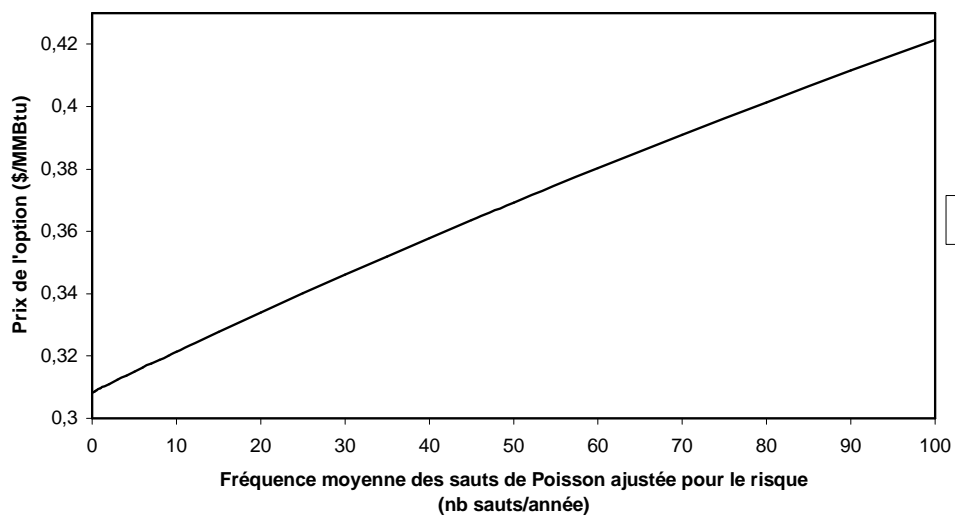


Figure 29. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de la fréquence moyenne des sauts de Poisson ajustée pour le risque.

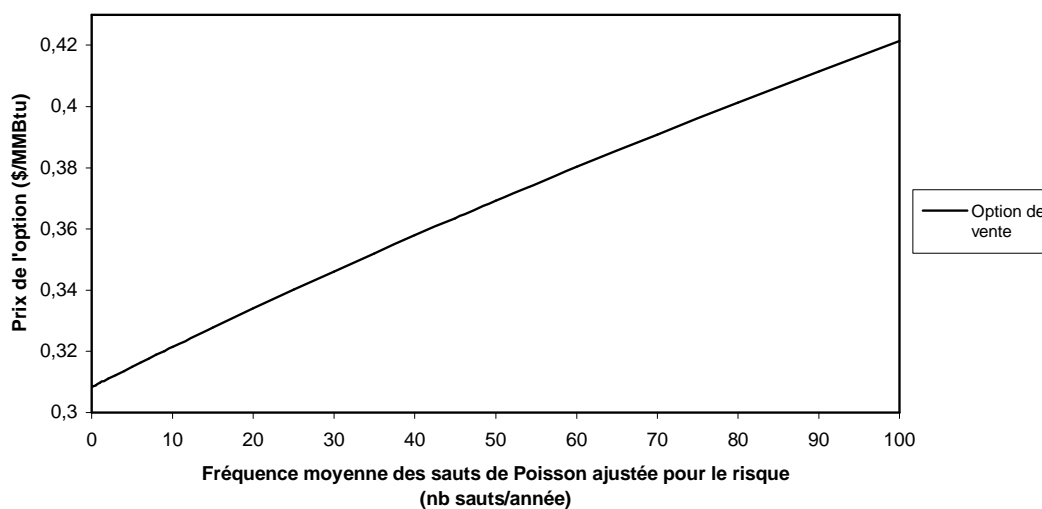


Figure 30. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de la fréquence moyenne des sauts de Poisson ajustée pour le risque.

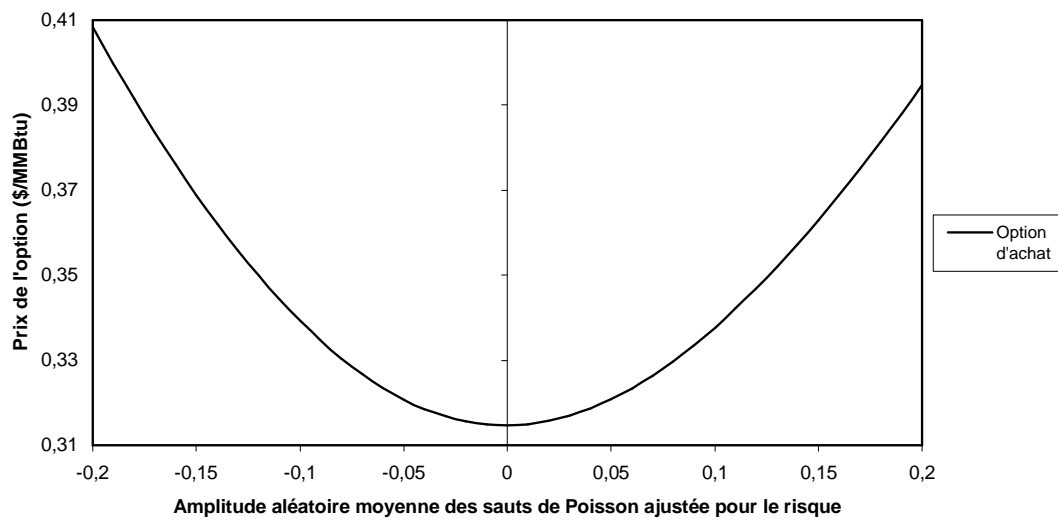


Figure 31. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de l'amplitude aléatoire moyenne des sauts de Poisson ajustée pour le risque.

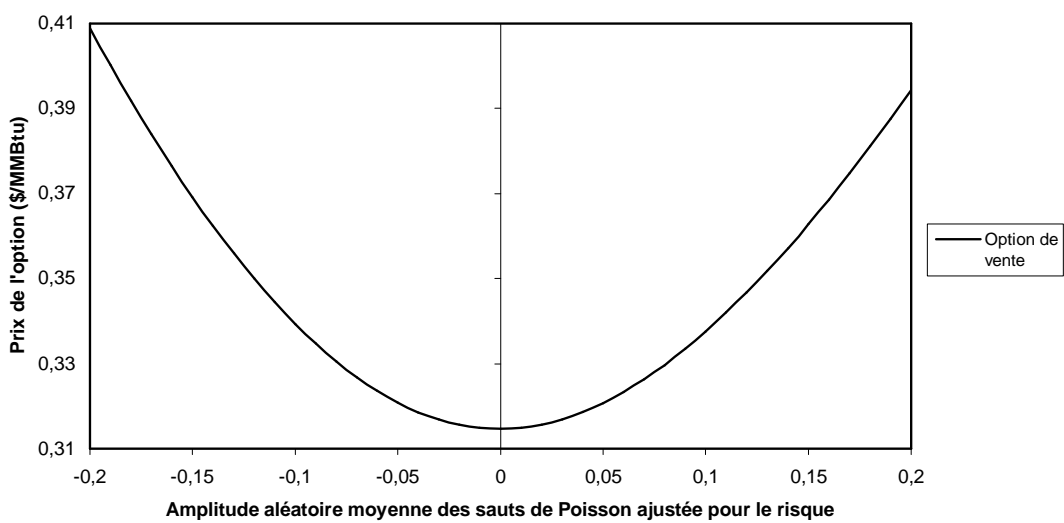


Figure 32. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de l'amplitude aléatoire moyenne des sauts de Poisson ajustée pour le risque.

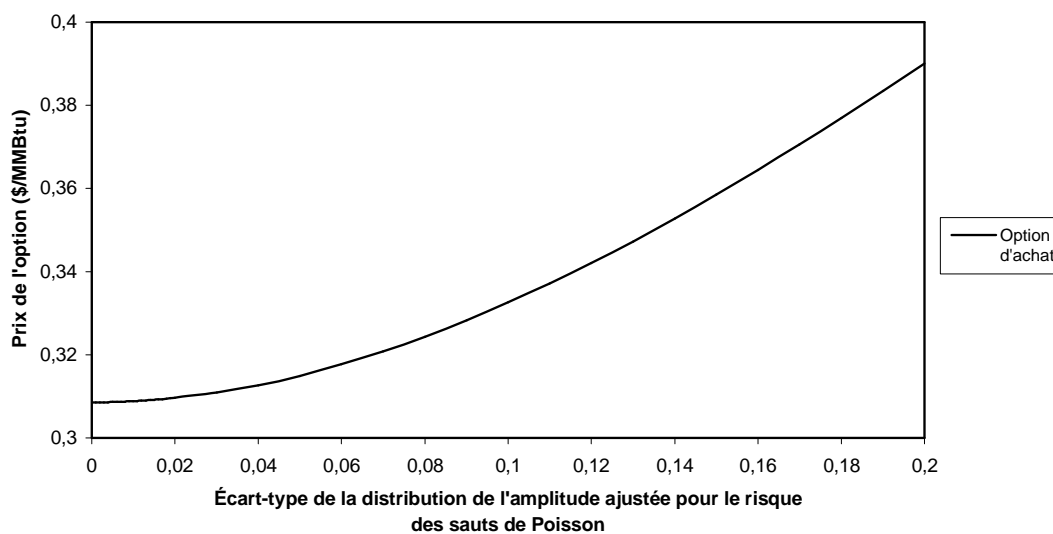


Figure 33. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de l'écart-type de la distribution de l'amplitude aléatoire des sauts de Poisson ajustée pour le risque.

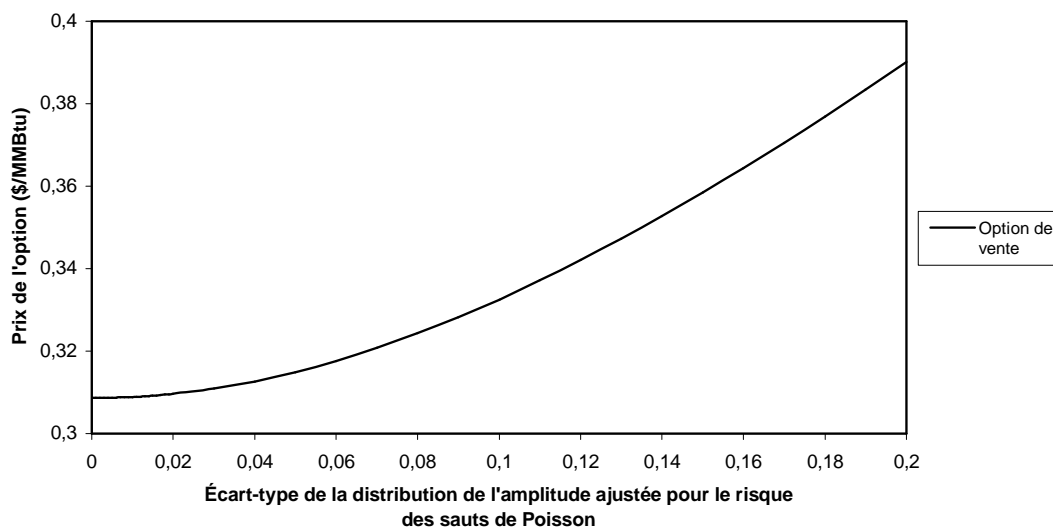


Figure 34. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de l'écart-type de la distribution de l'amplitude aléatoire des sauts de Poisson ajustée pour le risque.

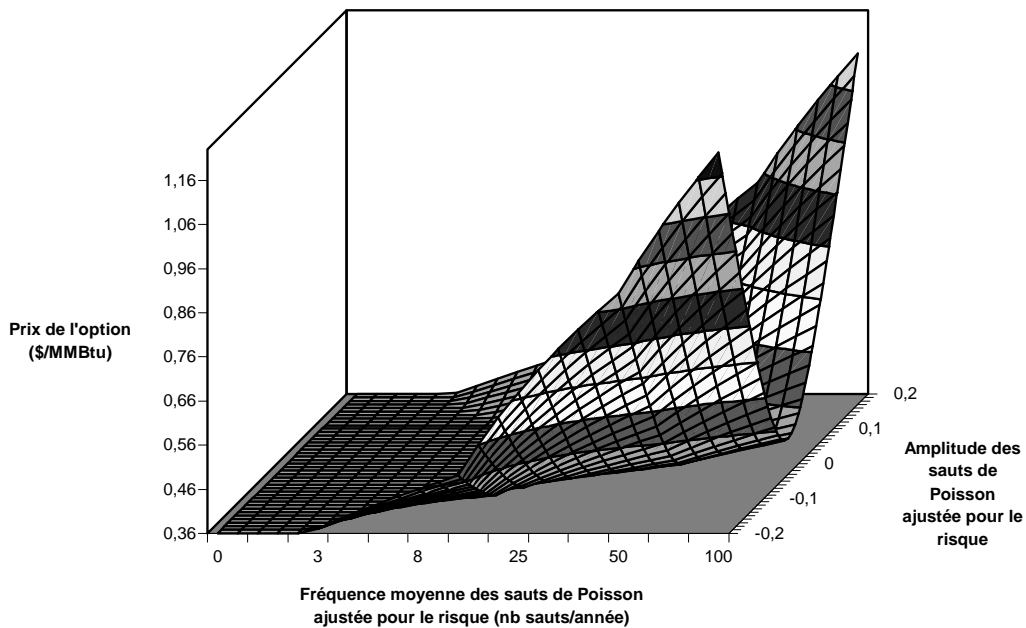


Figure 35. Graphique de l'évolution du prix d'une option d'achat américaine sur contrat à terme en fonction de la fréquence moyenne et de l'amplitude aléatoire moyenne des sauts de Poisson ajustées pour le risque.

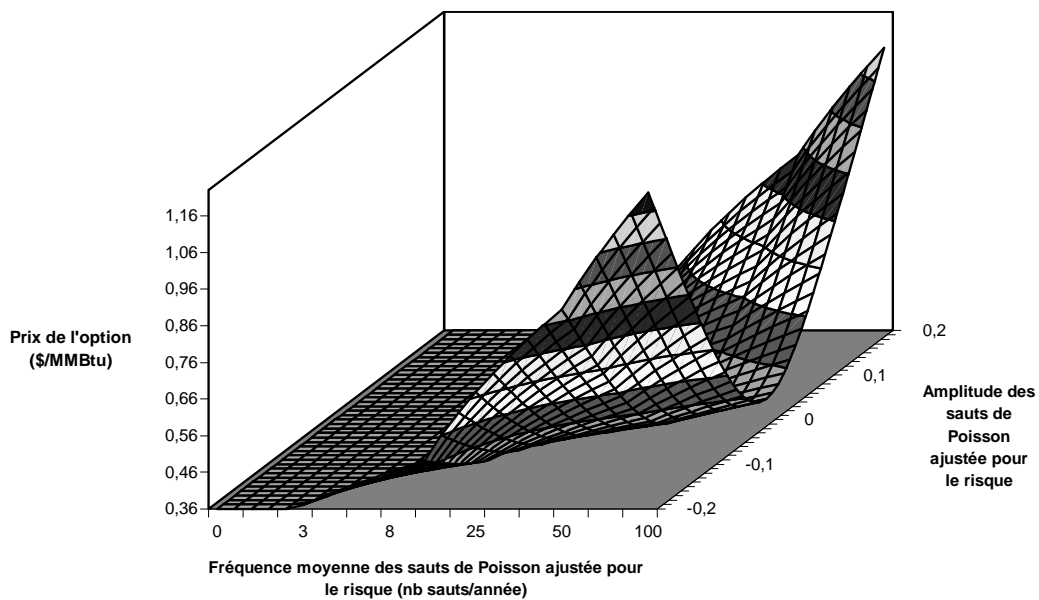


Figure 36. Graphique de l'évolution du prix d'une option de vente américaine sur contrat à terme en fonction de la fréquence moyenne et de l'amplitude aléatoire moyenne des sauts de Poisson ajustées pour le risque.

2. Évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme et de son intégrale le long de la durée de vie des options

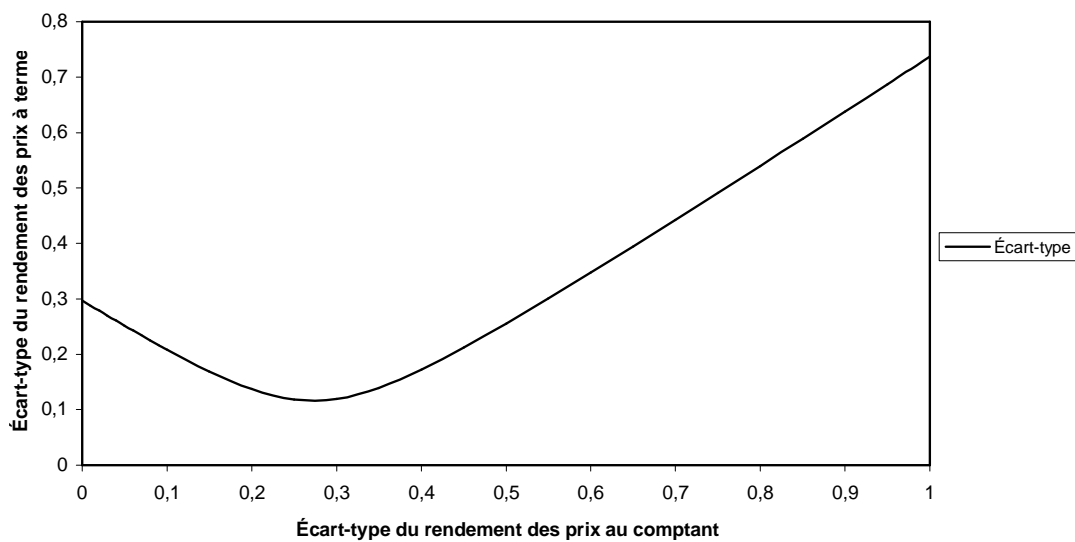


Figure 37. Graphique de l'évolution de l'écart-type du rendement des prix à terme en fonction de l'écart-type du rendement des prix au comptant sous-jacents aux prix à terme.

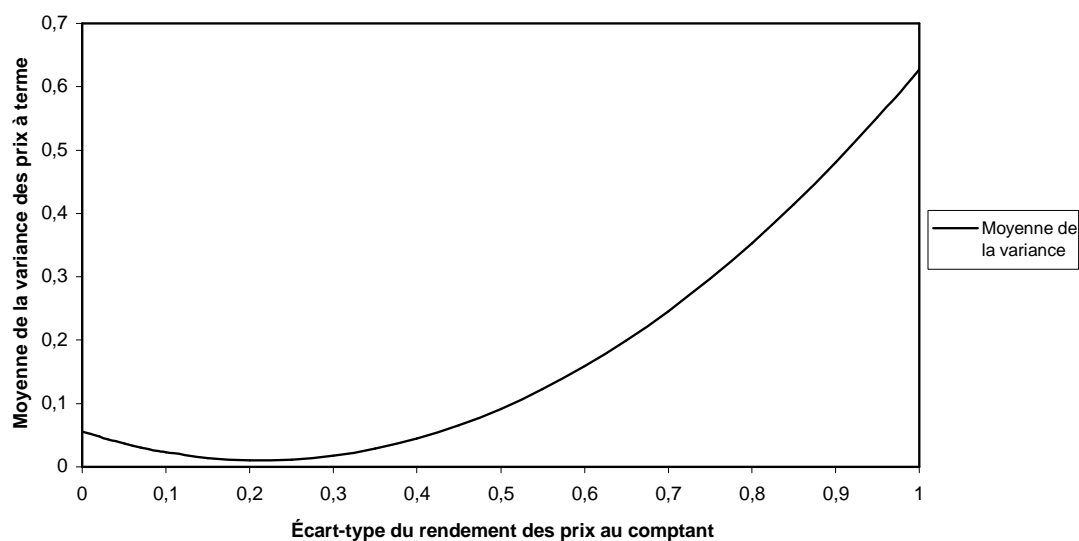


Figure 38. Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction de l'écart-type du rendement des prix au comptant sous-jacents aux prix à terme.

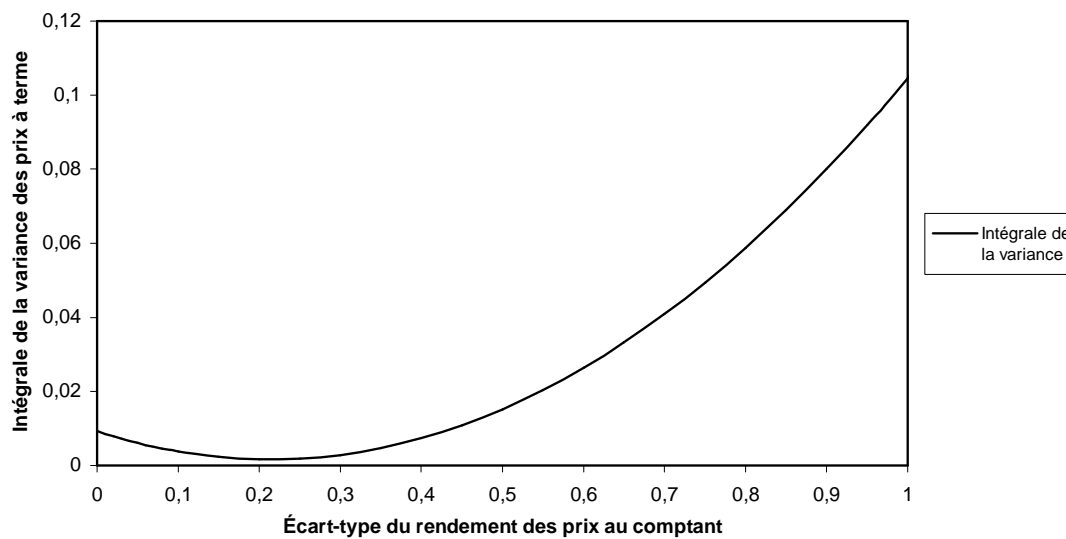


Figure 39. Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction de l'écart-type du rendement des prix au comptant sous-jacents aux prix à terme.

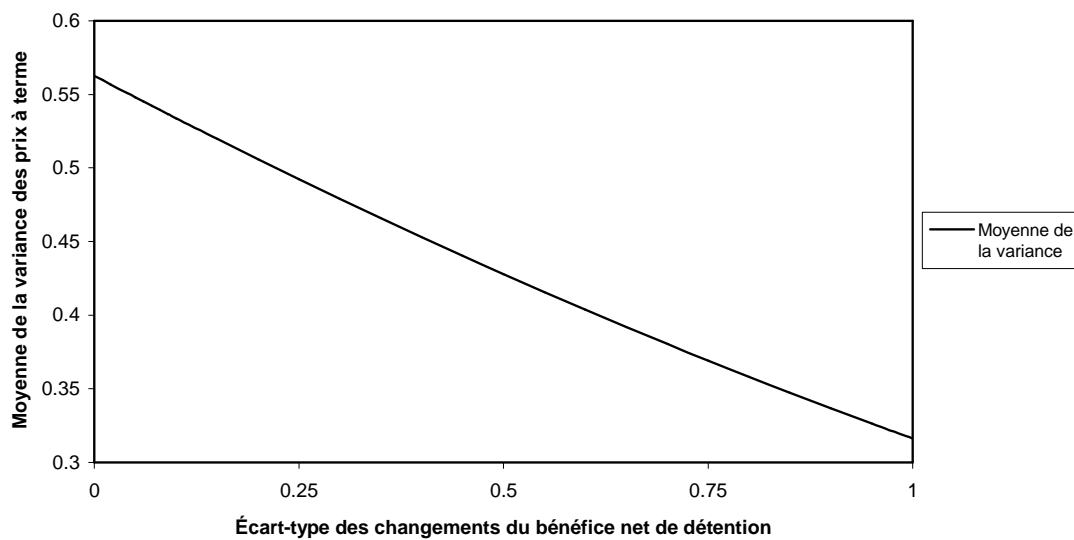


Figure 40. Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction de l'écart-type des changements du bénéfice net de détention.

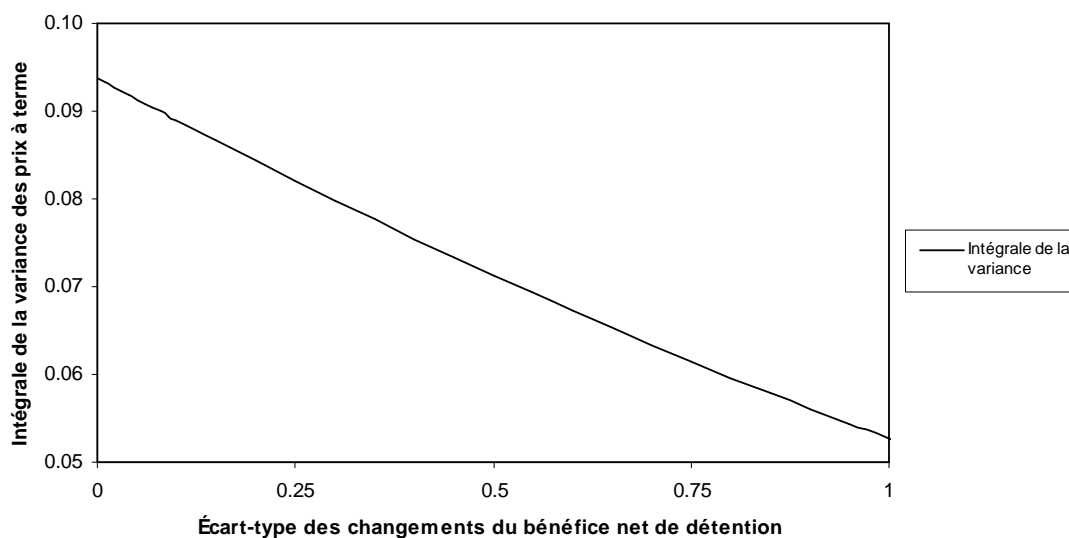


Figure 41. Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction de l'écart-type des changements du bénéfice net de détention.

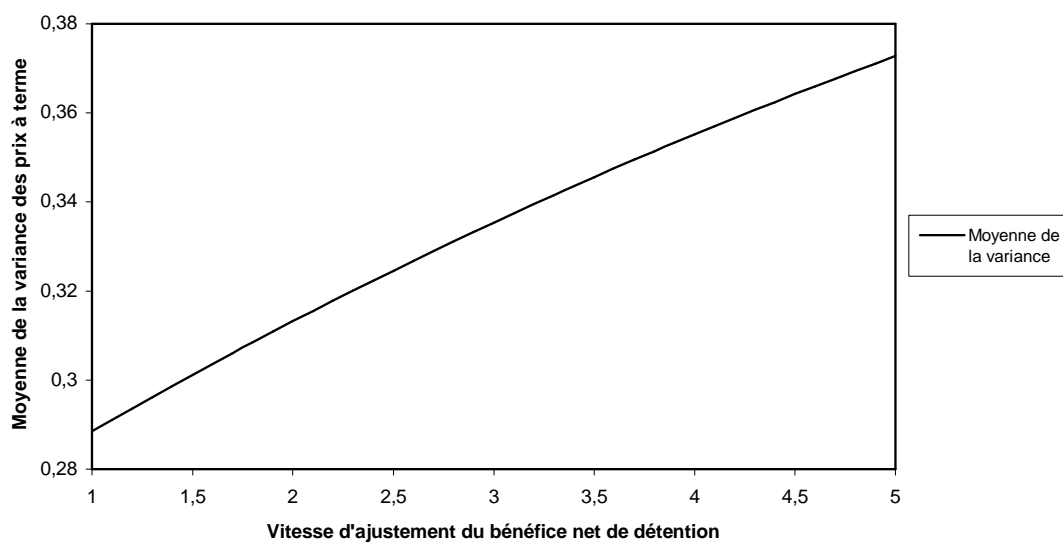


Figure 42. Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction de la vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention.

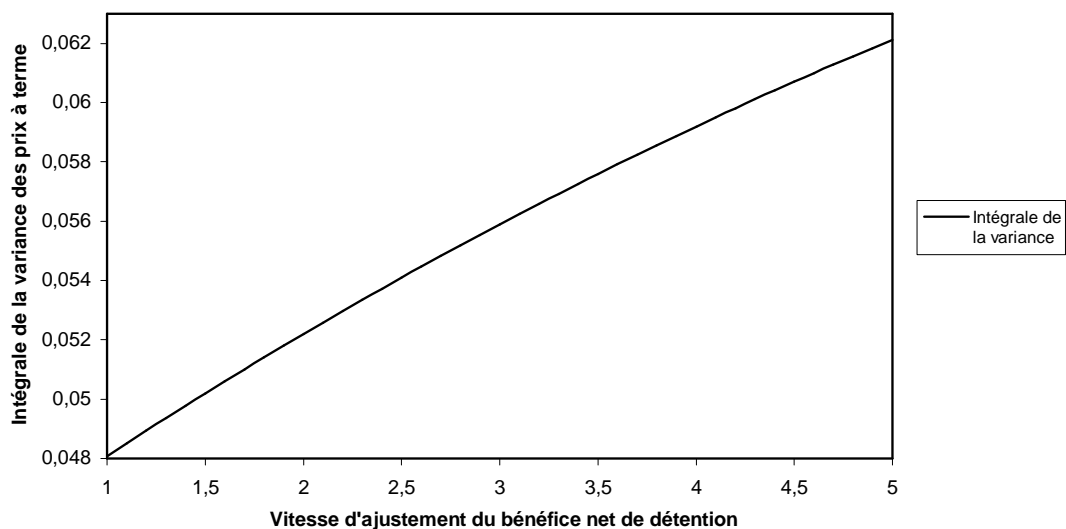


Figure 43. Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction de la vitesse d'ajustement vers le niveau d'équilibre à long terme du bénéfice net de détention.

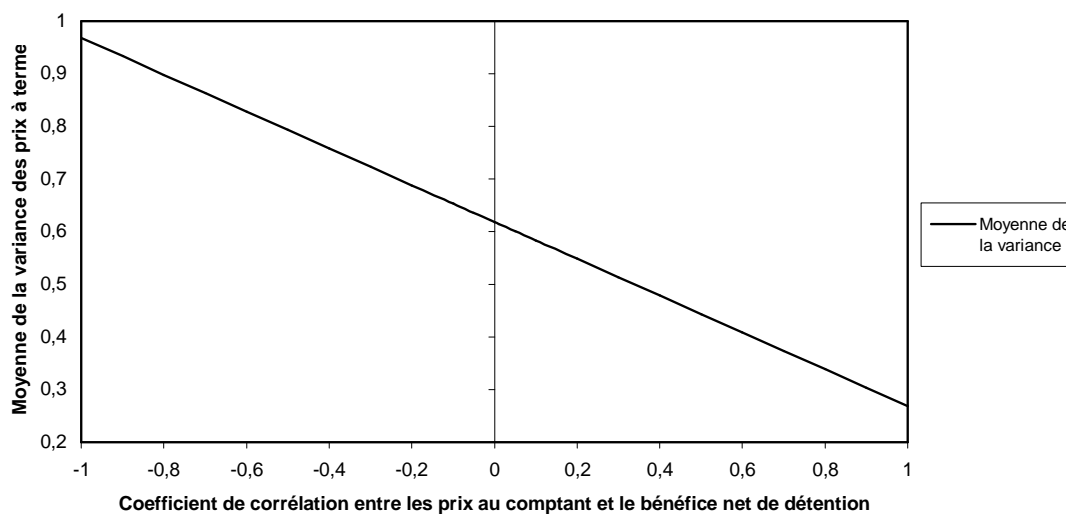


Figure 44. Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction du coefficient de corrélation entre les prix au comptant sous-jacents aux prix à terme et le bénéfice net de détention.

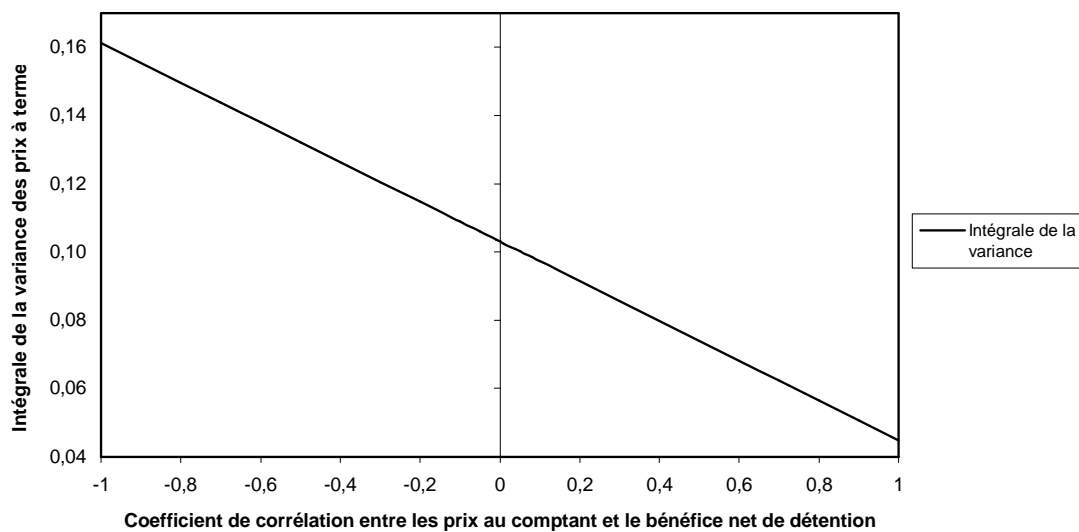


Figure 45. Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction du coefficient de corrélation entre les prix au comptant sous-jacents aux prix à terme et le bénéfice net de détention.

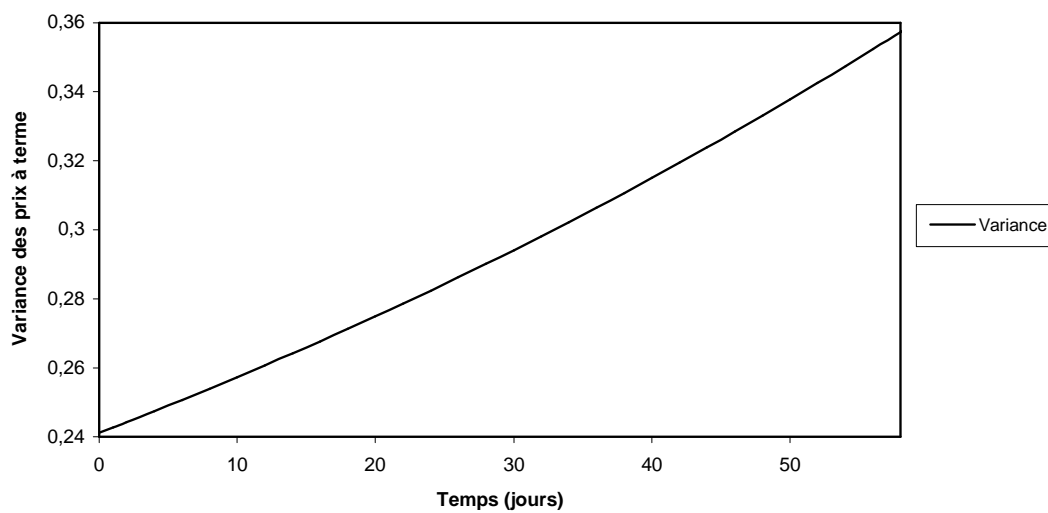


Figure 46. Graphique de l'évolution de la variance du rendement des prix à terme en fonction de l'écoulement du temps.

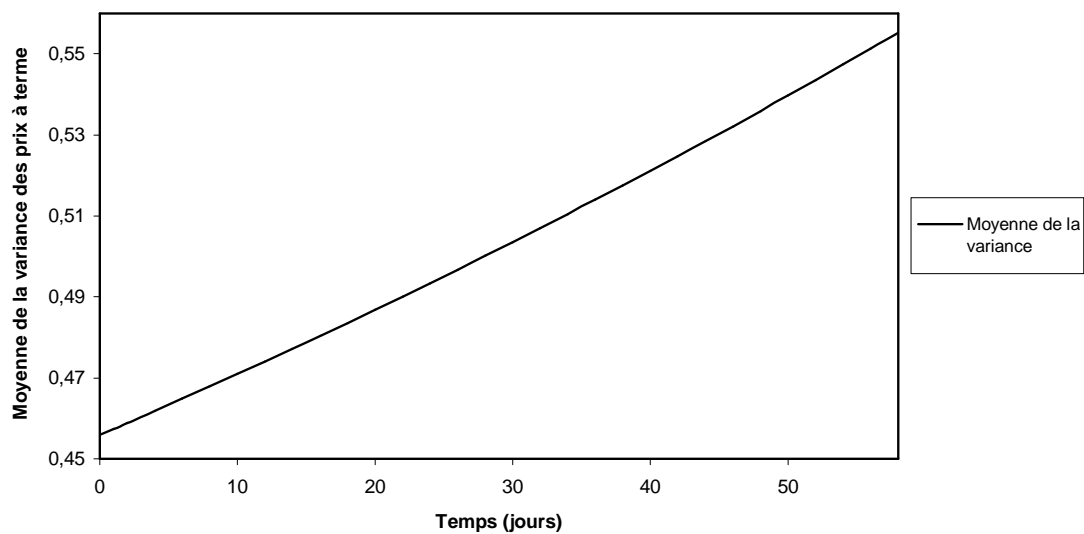


Figure 47. Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction de l'écoulement du temps.

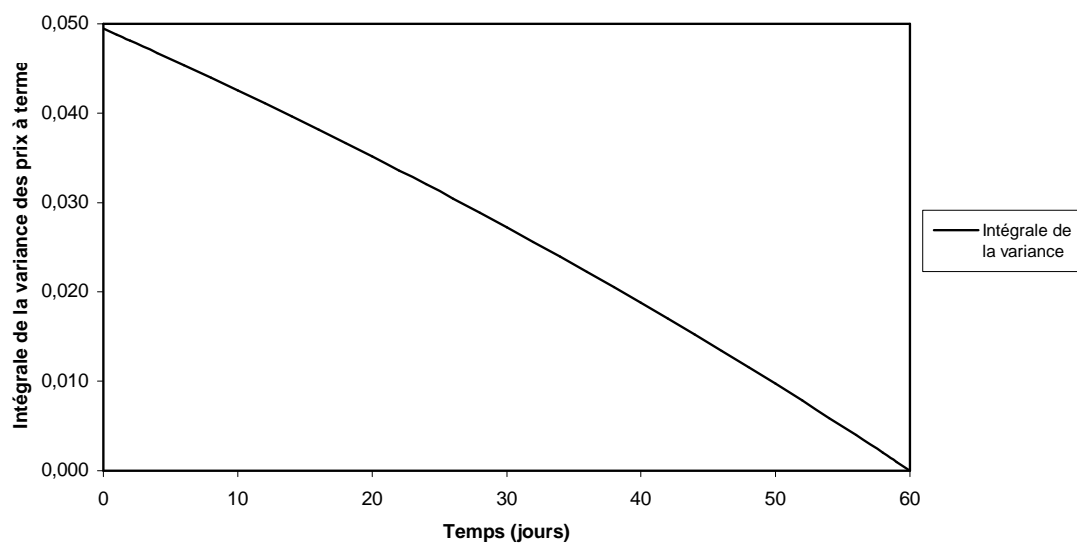


Figure 48. Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction de l'écoulement du temps.

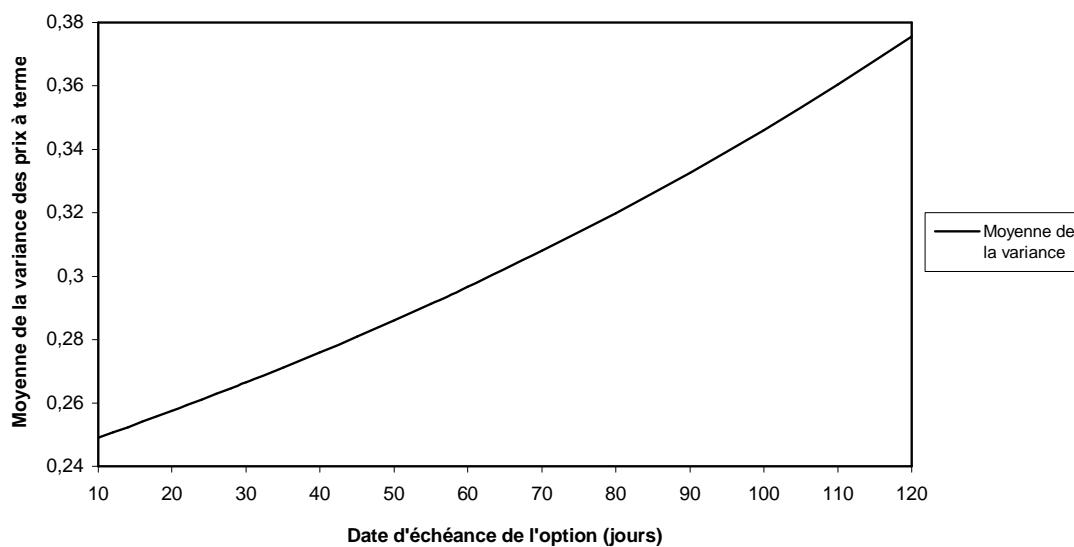


Figure 49. Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction de la date d'échéance de l'option.

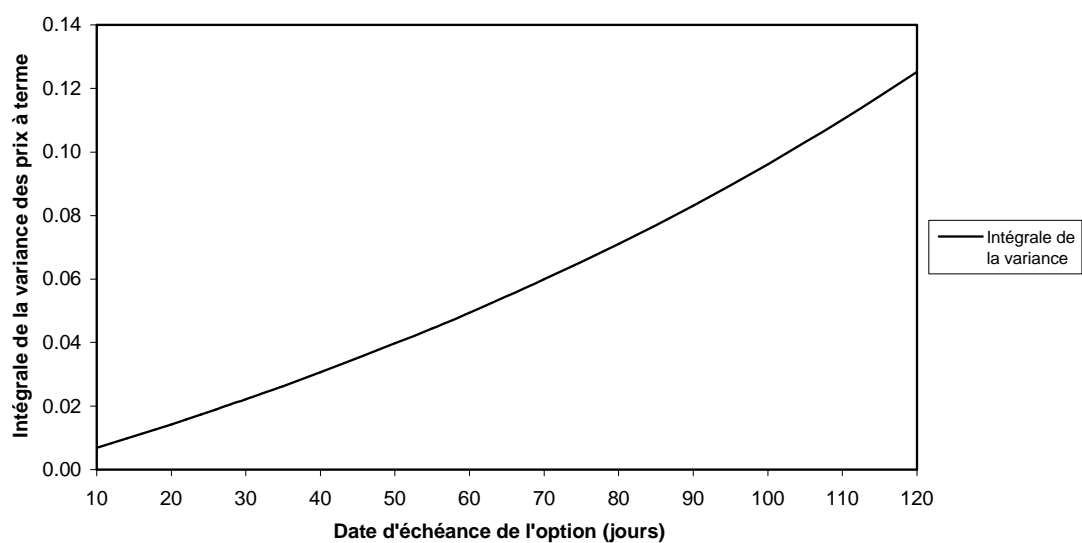


Figure 50. Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction de la date d'échéance de l'option.

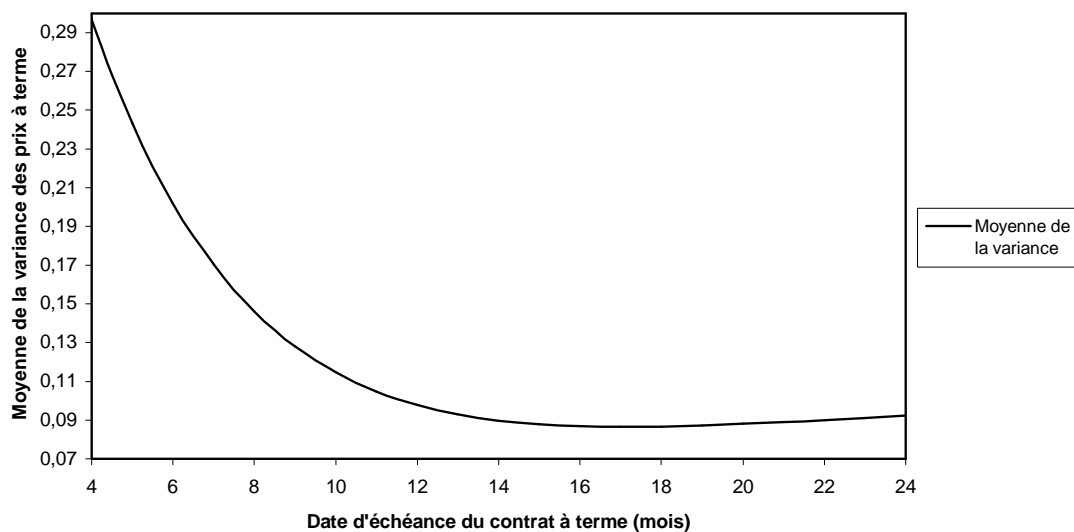


Figure 51. Graphique de l'évolution de la moyenne de la variance du rendement des prix à terme sur la durée de vie de l'option en fonction de la date d'échéance du contrat à terme sous-jacent.

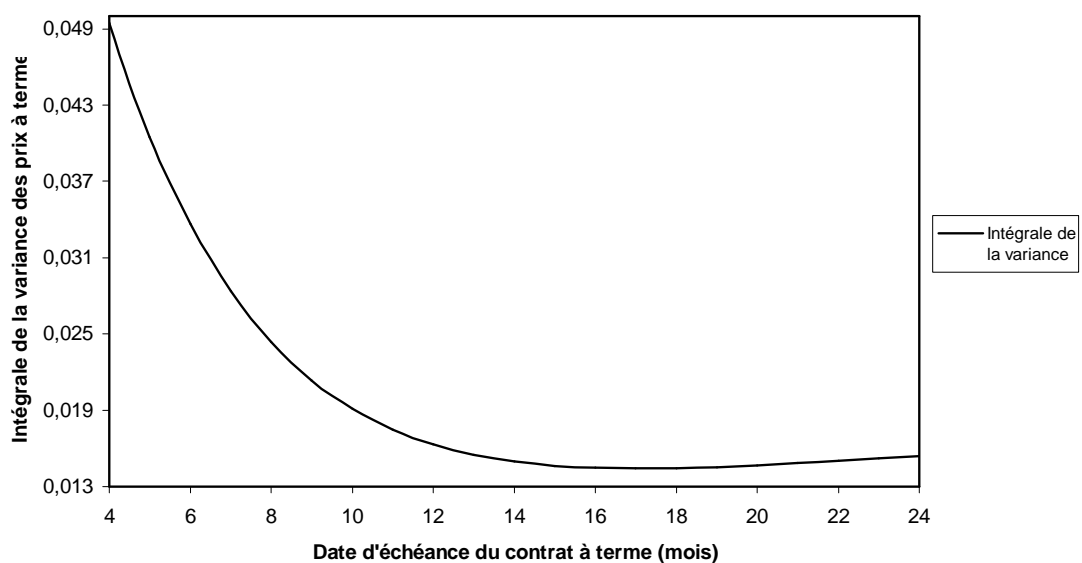


Figure 52. Graphique de l'évolution de l'intégrale de la variance du rendement des prix à terme le long de la durée de vie de l'option en fonction de la date d'échéance du contrat à terme sous-jacent.

BIBLIOGRAPHIE

- Abramowitz M., et Stegun I., (1965), "Handbook of mathematical functions"
Dover publications, New York.
- Amin K. I., (1991), "On the computation of continuous time option prices using discrete Approximations", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 26, pp. 477.
- Amin K. I., (1993), "Jump diffusion option valuation in discrete time"
Journal of Finance, Vol. 158, pp. 1833.
- Bakshi G., Cao C., et Chen Z., (1997), "Empirical performance of alternative option pricing models", *Journal of Finance*, Vol. 52, pp. 2003.
- Barone-Adesi G., et Whaley R.E., (1987), "Efficient analytic approximation of american option values", *Journal of Finance*, Vol. 42, pp. 301.
- Bates D. S., (1988), "Pricing options on jump-diffusion processes",
Working paper, University of Pennsylvania, Rodney L. White Center.
- Bates D. S., (1991), "The crash of '87 : was it expected? The evidence from options markets", *Journal of Finance*, Vol. 156, pp. 1009.
- Bates D. S., (1996a), "Dollar Jump Fears, 1984-1992 : Distributional abnormalities implicit in Currency futures options", *Journal of International Money and Finance*, Vol. 15, pp. 65.
- Bates D. S., (1996b), "Jumps and stochastic volatility : exchange rates processes implicit in Deutsch Mark options", *Review of Financial Studies*, Vol. 9, pp.69.

- Besssembinder H., Coughenour J. F., Seguin P. J., et Smoller M. M., (1995), "Mean reversion in equilibrium asset prices : evidence from the futures term structure", *Journal of Finance*, Vol. 50, pp. 361.
- Bjerksund P., (1991), "Contingent claims evaluation when the convenience yield is stochastic : analytic results", Working paper, Norwegian School of Economics and Business Administration.
- Black F., (1976), "The pricing of commodity contracts", *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, pp.167.
- Black F., et Scholes M., (1973), "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637.
- Brennan M. J., (1990), "The price of convenience and the valuation of commodity contingent claims", In *Stochastic Models and Options Values*, D. Lund and B. Oksental, eds. Amsterdam : Elsevier.
- Cortazar G., et Schwartz E. S., (1994), "The evaluation of commodity contingent claims", *Journal of Derivatives*, Vol. 1, pp. 27.
- Cox J. C., Ingersoll J. E., et Ross S. A., (1985), "An intertemporal general equilibrium model of asset Prices", *Econometrica*, Vol. 53, pp. 353.
- Cox J. C., Ross S. A., et Rubinstein M., (1979), "Option pricing : a simplified approach", *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, pp. 229.
- Duffie D., (1992), "Dynamic asset pricing theory", Princeton, NJ: Princeton Univ. Press.
- Duke Energy Corporation, (1999), "Energy desk book".
- Fama E., et French K., (1987), "Commodity futures prices : some evidence on forecast power, premiums, and the theory of storage", *Journal of Business*, Vol. 60, pp.55.

- Fama E., et French K., (1988), "Business cycles and the behaviour of metals prices", *Journal of Finance*, Vol. 43, pp. 1075.
- Gibson R., et Schwartz E. S., (1990a), "Valuation of long term oil-linked assets", In *Stochastic Models and Options Values*, D. Lund and B. Oksental, eds. Amsterdam : Elsevier.
- Gibson R., et Schwartz E. S., (1990b), "Stochastic convenience yield and the pricing of oil Contingent claims", *Journal of Finance*, Vol. 155, pp. 959.
- Harvey A. C., (1989), "Forecasting, structural time series models, and the Kalman filter", Cambridge University Press.
- Heath D., Jarrow R. A., et Morton A. J., "Bond pricing and the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation", *Econometrica*, Vol. 60, pp. 77.
- Hilliard J. E., et Reis J. A., (1998), "Valuation of commodity futures and options under stochastic convenience yields, interest rates, and jump diffusions in the spot", *Journal of financial and quantitative analysis*, Vol. 33, pp. 61.
- Hilliard J. E., et Reis J. A., (1999), "Jump Processes in commodity futures prices and options pricing", *American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 81, pp. 273.
- Hull J., (2000), "Options, futures and other derivatives", Fourth Ed., Prentice Hall.
- Hull J., et White A., (1987), "The pricing of options on assets with stochastic volatilities", *Journal of Finance*, Vol. 42, pp. 281.
- Jamshidian F., Fein M., (1990), "Closed-form solutions for oil futures and European options in the Gibson-Schwartz model : a note", Working paper, Merrill Lynch Capital Markets.