# La $\mathcal{G}$-stabilité des suites de variables aléatoires et le théorème limite central pour les suites de martingales.

par

Sofiane Grira

thèse présentée au Département de mathématiques et d'informatique
en vue de l'obtention du grade de docteur ès sciences (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, juillet 2005

# DÉDICACE

*À ma très chère mère.*

# SOMMAIRE

Le présent travail consiste à élaborer des versions du théorème de limite centrale pour les martingales. Nous avons en premier lieu introduit les notions de convergence stable et mélangeante ensuite on a obtenu la version classique du théorème de limite centrale pour le cas des martingales à carré intégrable et continues et finalement on a déduit une version stable.

# REMERCIEMENTS

Je voudrais exprimer tout d'abord mes remerciements aux professeurs qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Je remercie spécialement les professeurs Jean Vaillancourt, mon directeur de recherche, et Bruno Rémillard mon co-directeur de recherche qui m'ont appuyé par leurs conseils, leurs soutiens scientifiques et financiers , leur grande disponibilité et la confiance qu'ils m'ont accordée durant toute la période de la recherche. Ceci m'a été d'une aide précieuse et m'a permis d'orienter et de poursuivre mon travail dans d'excellentes conditions. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail.

Je remercie aussi le conseil de recherches en sciences naturelles et en genie du Canada, l'Institut des sciences mathématiques de Montréal, et la mission universitaire de Tunisie pour leur soutien financier qu'elles m'ont accordé.

Je veux exprimer ma gratitude à tout le personel du Département de mathématiques et informatique de l'Université de Sherbrooke pour son affabilité et sa sympathie.

Je remercie enfin mon père, ma mère et ma femme qui m'ont beaucoup aidé , et tous les amis qui m'ont soutenu et aidé à mener à bien mon travail.

# TABLE DES MATIÈRES

# INTRODUCTION

Le concept de stabilité a été introduit par Rényi (1963). Cette notion de convergence qui est une convergence intermédière entre la convergence en loi et la convergence en probabilité intervient dans plusieurs domaines, tel que les équations differentielles stochastiques (Jacod et Mémin [26]), les processus de Markov (Baxter et Chacon [4]) et dans les théorèmes limites de martingales. La théorie de la convergence stable fournit une approche élégante et particulière à la théorie de la limite centrale pour les martingales.

Dans cette thèse nous allons voir la théorie de la convergence stable en détail. Nous mentionnons entre autres les résultats de Rényi [41], Mogyorody [33] et Aldous et Eagleson [3]. Ces résultats seront énoncés dans le premier chapitre dans le cas de $I\!R^d$ puis généralisés dans le cas d'un espace polonais dans le deuxième chapitre .

De nombreux mathématiciens se sont intéressés aux théorèmes de limite centrale pour les martingales. Parmi eux Brown [5], McLeish [32], Hall et Heyde [22], Rebolledo [39], Feigin [18] et bien d'autres.

Hall et Heyde [22] ont montré des théorèmes de limite centrale stable pour les martingales dans le cas discret. Dans le troisième chapitre le travail que nous avons effectué se situe dans le même cadre que les résultats de Hall et Heyde [22] mais dans le cas des martingales continues. Les approches que nous avons suivies sont différentes de celles suivies par les autres. Nous avons montré une version stable du théorème de limite centrale pour les martingales à carré intégrable et continues.

Enfin, dans le quatrième chapitre nous présentons quelques exemples d'applications du théorème de limite centrale que nous avons montré dans le troisième chapitre .

# CHAPITRE 1

# $\mathcal{G}$-STABILITÉ ET $\mathcal{G}$-MÉLANGE DANS $I\!R^d$

Dans ce chapitre on introduit les notions de stabilité et de mélange dans $I\!R^d$ qui sont dûes à Rényi [41]. Aussi on verra la relation entre ces modes de convergence avec les autres modes de convergence connus.
On renvoie à l'appendice pour les notations de base.

## 1.1 La $\mathcal{G}$-stabilité d'événements

**Définition 1.1.1 (Rényi [40] )** *Soit $\{A_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'événements définis sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On dit que la suite $\{A_n\}_{n\geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable si pour tout $B \in \mathcal{G}$*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(A_n \cap B) = Q(B)$$

*existe .*

Si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ on dira tout simplement que la suite $\{A_n\}_{n\geq 1}$ est stable.
Il est clair que la stabilité entraîne la $\mathcal{G}$-stabilité pour tout $\mathcal{G}$.

**Théorème 1.1.2 (Rényi [41] )** *Soit $\{A_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'événements telle que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(A_n \cap A_k) = \lambda_k$$

*existe pour tout $k \geq 1$. Alors la suite $\{A_n\}_{n\geq 1}$ est stable.*

Démonstration: Soit $\alpha_n = I\!I_{A_n}$. On a par hypothèse que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E[\alpha_n\alpha_k] = \lambda_k.$$

Notons par $L^2_\star$ le plus petit sous-espace linéaire de $L^2$ qui contient tous les $\alpha_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Montrons que $\lim_{n\longrightarrow\infty} E[\alpha_n\xi]$ existe pour tout $\xi \in L^2_\star$. Soit $\xi_0 = \sum_{k=0}^{N} c_k\alpha_k$ avec $c_0, \ldots, c_N$ des constantes. Alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E[\alpha_n\xi_0] = \sum_{k=0}^{N} c_k\lambda_k.$$

D'autre part $\forall\xi_1 \in L^2_\star,\ \xi_1$ peut être approximée par $\xi_0$ par rapport à la norme de $L^2$ tel que

$$E[(\xi_1 - \xi_0)^2] < \varepsilon^2$$

$\Longrightarrow$

$$|E[\xi_1\alpha_n] - E[\xi_0\alpha_n]| < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$

$$\limsup_{n\to\infty} E[\xi_1\alpha_n] \leq \sum_{k=0}^{N} c_k\lambda_k + \varepsilon$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} E[\xi_1\alpha_n] \geq \sum_{k=0}^{N} c_k\lambda_k - \varepsilon$$

donc

$$\left|\limsup_{n\to\infty} E[\xi_1\alpha_n] - \liminf_{n\to\infty} E[\xi_1\alpha_n]\right| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique que la limite de $E[\alpha_n\xi_1]$ existe pour tout $\xi_1 \in L^2_\star$. Prenons maintenant $\xi \in L^2$, $\xi$ peut s'écrire sous la forme

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

où $\xi_1 \in L^2_\star$ et $\xi_2$ est orthogonale à tout éléments de $L^2_\star$. On a donc

$$E[\xi_2\alpha_n] = 0, \text{ pour tout } n = 0, 1, \ldots$$

Alors

$$E[\alpha_n \xi] = E[\alpha_n \xi_1].$$

Comme on a déjà montré que $\lim_{n \longrightarrow \infty} E[\alpha_n \xi_1]$ existe pour tout $\xi_1 \in L^2_\star$ alors la limite existe pour tout $\xi \in L^2$. Soit $\beta = I\!I_B$ pour tout $B \in \mathcal{F}$, on a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(A_n \cap B) = \lim_{n \longrightarrow \infty} E(\alpha_n \beta)$$

qui existe d'après ce qui précède. **Q.E.D.**

**Corollaire 1.1.3** *Soit $\{A_n\}_{n \geq 1}$ une suite d'événements. Alors la suite est stable si et seulement si*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(A_n \cap A_k) = \lambda_k$$

*existe pour tout $k \geq 1$.*

DÉMONSTRATION: La suffisance est prouvée d'après le théorème 1.1.2. La nécessité vient de la définition de la convergence stable. **Q.E.D.**

**Lemme 1.1.4** *Soit $\{A_n\}_{n \geq 1}$ une suite d'événements. Soit $\mathcal{A}$ un $\pi$-système tel que $\Omega \in \mathcal{A}$, et pour tout $B \in \mathcal{A}$, $P(A_n \cap B)$ converge. Alors la suite $\{A_n\}_{n \geq 1}$ est $\sigma\{\mathcal{A}\}$-stable.*

DÉMONSTRATION: Soit $\mathcal{H} = \{B \in \sigma\{\mathcal{A}\};\ P(A_n \cap B) \text{ converge }\}$. Montrons que $\mathcal{H}$ est un $\lambda$-système. Il est clair que $\Omega \in \mathcal{H}$. D'autre part si $B \in \mathcal{H}$ alors

$$P(A_n \cap B^c) = P(A_n) - P(A_n \cap B)$$

converge et donc $B^c \in \mathcal{H}$. Par conséquent, si $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{H}$, alors $B \setminus A \in \mathcal{H}$. Enfin si $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{H}$ et $B_n \uparrow$, alors $B \in \mathcal{H}$, car $P(A_n \cap B)$ converge puisque c'est une suite de Cauchy. En effet, pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut trouver $k$ tel que $P(B \setminus B_k) < \varepsilon/3$. On peut donc trouver $n_0$ tel que pour tout $m, n \geq n_0$, on a

$$|P(A_n \cap B) - P(A_m \cap B)| \leq 2P(B \setminus B_k) + |P(A_n \cap B_k) - P(A_m \cap B_k)| < \varepsilon.$$

Donc on a montré que $\mathcal{H}$ est un $\lambda$-système qui contient un $\pi$-système $\mathcal{A}$, et d'après le théorème A.2.11, $\mathcal{H}$ contient la sigma-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$. **Q.E.D.**

**Exemple 1.1.5 (Rényi [40])** *Soit $\alpha(x)$ une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. On définit $A_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left] \frac{k}{n}, \frac{k+\alpha(k/n)}{n} \right]$. Alors $A_n$ est une suite d'événements stable pour la mesure de Lebesgue $P$. En effet, si $I$ est un intervalle de la forme $I = (c,d]$, alors*

$$P(A_n \cap I) = \sum_{c<\frac{k}{n}<d} \alpha(k/n)\frac{1}{n} + O(1/n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_c^d \alpha(x)dx.$$

*Par conséquent,*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n \cap A_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+\alpha(j/k)}{k}} \alpha(x)dx,$$

*pour tout $k \geq 1$. Donc d'après le théorème 1.1.2, la suite $A_n$ est stable.*

**Théorème 1.1.6 (Rényi [41])** *Toute suite d'événements $\{A_n\}_{n\geq 1}$ contient une sous-suite stable.*

Démonstration: Soit $\alpha_n = I\!I_{A_n} \in L^2(\Omega)$. Comme $\alpha_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ alors d'après le théorème (A.6.6) il existe une sous-suite $\{n_k\}$ tel que $\alpha_{n_k}$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers $\alpha$. Et donc pour tout $Y \in L^2(\Omega)$

$$E[\alpha_{n_k} Y] \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} E[\alpha Y].$$

En particulier, si on prend $Y = I\!I_B$, où $B$ est un ensemble $\mathcal{F}$-mesurable, alors on aura

$$E[I\!I_{A_{n_k}} I\!I_B] = P(A_{n_k} \cap B) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} E[\alpha I\!I_B]$$

d'où la stabilité de la suite $\{A_{n_k}\}$. **Q.E.D.**

## 1.2 Suites $\mathcal{G}$-stables de variables aléatoires dans $I\!R^d$

**Définition 1.2.1** *Soit $X, X_1, \ldots$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $I\!R^d$. On dit que la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge en loi vers $X$ s'il existe un sous-ensemble $D \subset I\!R^d$ dense dans $I\!R^d$ tel que pour tout $x \in D$, $F_n(x) = P(X_n \leq x)$ converge vers $F(x) = P(X \leq x)$.*

**Définition 1.2.2 (Rényi [41])** *Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $I\!R^d$, définie sur un espace de probabilité commun $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui converge en loi vers une variable aléatoire $X$ et soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On dit que la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable (stable si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$) s'il existe un sous-ensemble $D \subset I\!R^d$ dense dans $I\!R^d$ telle que pour tout $x \in D$ et pour tout ensemble $\mathcal{G}$-mesurable $B$ , la limite*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(\{X_n \leq x\} \cap B) \tag{1}$$

*existe.*

**Remarque 1.2.3** *La définition de la $\mathcal{G}$-stabilité est cohérente avec celle donnée précédemment car la suite d'événements $\{A_n\}_{n\geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable si et seulement si la suite $\{I\!I_{A_n}\}_{n\geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable. En effet, si la suite d'événements $\{A_n\}_{n\geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable, alors $P(A_n)$ converge vers $p \in (0,1)$ et la suite $\{I\!I_{A_n}\}_{n\geq 1}$ converge en loi. De plus pour tout $0 \leq x < 1$, et pour tout $B \in \mathcal{G}$, $P(\{I\!I_{A_n} \leq x\} \cap B) = P(B) - P(A_n \cap B)$ qui converge par hypothèse. Comme $P(\{I\!I_{A_n} \leq x\} \cap B)$ converge vers $0$ si $x < 0$ et converge vers $P(B)$ si $x \geq 1$, la suite $\{I\!I_{A_n}\}_{n\geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable. D'un autre côté, si $\{I\!I_{A_n}\}_{n\geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable, alors $\{I\!I_{A_n}\}_{n\geq 1}$ converge en loi, ce qui implique que $P(A_n)$ converge. De plus pour tout $x \in (0,1) \cap D$, $P(A_n \cap B) = P(B) - P(\{I\!I_{A_n} \leq x\} \cap B)$ qui converge par hypothèse. Donc la suite $\{A_n\}_{n\geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable.*

Une autre définition qui lui est équivalente est la suivante:
la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable s'il existe un sous-ensemble $D \subset I\!R^d$ dense dans $I\!R^d$ telle que pour tout $x \in D$ la suite d'événements $\{X_n \leq x\}$ est $\mathcal{G}$-stable et $X_n$ converge en loi vers une variable aléatoire $X$.

**Remarque 1.2.4** *Voici quelques exemples montrant l'importance des hypothèses pour $\mathcal{G}$-stabilité.*

1. *On peut avoir une suite qui ne converge pas en loi mais dont la suite des probabilités conditionnelles converge. Par exemple, si on prend la suite* $X_n = n$ *qui ne converge pas faiblement, on a* $\forall q \in \mathbb{R}\ \ P(\{X_n \leq q\} \cap B) = 0$ *si* $n > q$. *On ne peut donc pas enlever la condition de convergence en loi dans la définition 1, sans la remplacer par une autre condition (minimalement la tension).*

2. *Soit* $X$ *et* $X'$ *deux variables aléatoires, indépendantes, identiquement distribuées et non dégénérées, c'est-à-dire qu'il existe au moins un* $x \in \mathbb{R}^d$ *tel que* $0 < P(X \leq x) < 1$. *Soit*

$$Z_n = \begin{cases} X & \text{si } n \text{ impair} \\ X' & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

*On voit bien que* $Z_n$ *converge en loi vers la loi de* $X$ *mais la suite n'est pas stable. En effet, en choisissant* $B = \{X \leq x\}$, *on obtient*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(Z_n \leq x, X \leq x) = \begin{cases} P(X \leq x, X \leq x) & = P(X \leq x), \\ & \text{si } n \text{ est impair} \\ & \\ P(X' \leq x, X \leq x) & = P(X' \leq x)P(X \leq x), \\ & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

*ce qui implique*

$$P(X \leq x) = P(X' \leq x)P(X \leq x)$$

*d'où*
$P(X \leq x) = 0$ *ou* $P(X' \leq x) = 1$ *ce qui est absurde car alors* $X$ *et* $X'$ *sont dégénéré.*

3. *Si* $X_n$ *converge en probabilité vers* $X$, *dénoté par* $X_n \xrightarrow{P} X$, *alors la suite* $X_n$ *est stable.*

*Soit* $C = \bigotimes_{j=1}^{d} C_j$, *où* $C_j$ *est l'ensemble des points de continuité de la fonction de répartition de* $X^{(j)}$. *Alors* $C$ *est dense dans* $\mathbb{R}^d$. *Posons* $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

*Comme*

$$
\begin{aligned}
|P(\{X_n \le y\} \cap B) - P(\{X \le y\} \cap B)| &\le P(\{X_n \le y\} \Delta \{X \le y\}) \\
\le \sum_{j=1}^{d} P\left(\{X_n^{(j)} \le y^{(j)}\} \Delta \{X^{(j)} \le y^{(j)}\}\right)
\end{aligned}
$$

*tend vers* 0 *pour tout* $y \in C$ *et pour tout* $B \in \mathcal{F}$*, on en déduit que la suite est stable.*

**Lemme 1.2.5** *L'ensemble* $D$ *de la définition 1.2.2 peut être remplacé par*

$$\bigcap_{B \in \mathcal{G}} \{x \in I\!R^d : F_B \textit{ est continue en } x\} = \{x \in I\!R^d : F \textit{ est continue en } x\},$$

*où* $F_B(x) = P(\{X \le x\} \cap B)$ *et* $F$ *est la fonction de répartition de* $X$*.*

DÉMONSTRATION: Notons par $D_1 = \bigcap_{B \in \mathcal{G}} \{x \in I\!R^d : F_B \text{ est continue en } x\}$ et par $D_2 = \{x \in I\!R^d : F \text{ est continue en } x\}$. Soit $x \in D_1$ alors on a pour tout $B \in \mathcal{G}, F_B$ est continue en $x$, en particulier pour $B = \Omega$ on a que $F_B = F$ est continue en $x$. Réciproquement soit $x \in D_2$ donc $F$ est continue en $x$ ce qui implique d'après la remarque A.3.5 que $P(X \in \partial A) = 0$ où $A = ]-\infty, x]$. Et donc pour tout $B \in \mathcal{G}, P(\{X \in \partial A\} \cap B) = 0$. Posons $Q_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ avec $P(B) > 0$. Comme

$$Q_B(X \in \partial A) = 0,$$

alors d'après la remarque A.3.5 en prenant $P = Q_B$ on aura que $F_B$ est continue en $x$ et donc $x \in D_1$. **Q.E.D.**

**Lemme 1.2.6** *L'ensemble* $D$ *de la définition 1.2.2 peut être choisi dénombrable.*

DÉMONSTRATION: Soit $D_2 = \{x \in I\!R^d : P(X \le x) \text{ est continue en } x\}$ qui est un ouvert de $I\!R^d$. Il suffit de prendre $D_3 = D_2 \cap \mathbb{Q}^d$. En effet soient $\varepsilon > 0$ et $x \in I\!R^d$ fixés. Comme $D_2$ est dense alors il existe $y \in D_2$ tel que $|x - y| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Or $D_2$ est un ouvert alors d'après le théorème A.2.1 il peut être recouvert avec un ensemble dénombrable de boules ouvertes, c'est-à-dire $D_2 \subset \cup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j)$, donc il existe $1 \leq i < \infty$ tel que $y \in B(x_i, r_i)$ et donc on peut trouver $q \in \mathbb{Q}^d \cap B(x_i, r_i)$ tel que $|y - q| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ce qui implique que $|q - x| < \varepsilon$. **Q.E.D.**

**Théorème 1.2.7** *Toute suite tendue de variables aléatoires $\{X_n\}_{n\geq 1}$, à valeurs dans $I\!R^d$ construites sur un espace de probabilité commun $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, contient une sous-suite stable.*

Démonstration: Comme $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est tendue alors elle contient une sous-suite (qu'on notera dorénavant $\{X_m : m \geq 1\}$) telle que $\{X_m\}$ converge en loi. Soit $\{x_k : k \geq 1\}$ un ensemble dénombrable dense dans $I\!R^d$. Alors d'après le théorème (1.1.6)

$$A_m^1 = \{X_m \leq x_1\} \text{ pour } m \geq 1$$

contient une sous-suite $\{m_j^1 : j \geq 1\}$ tel que la suite $\{A_{m_j^1} : j \geq 1\}$ est stable. Considérons

$$A_j^2 = \{X_{m_j^1} \leq x_2\} \text{ pour } j \geq 1$$

par le même argument elle contient une sous-suite $\{m_j^2 : j \geq 1\}$ tel que la suite $\{A_{m_j^2} : j \geq 1\}$ est stable. En répétant le même procédé indéfiniment on obtient une sous-suite $\{m_1^1, m_2^2, m_3^3, \ldots\}$ tel que la suite $\{A_{m_k^k}^j : k \geq 1\}$ est stable $\forall j \geq 1$ et donc la suite $\{X_{m_k^k} : k \geq 1\}$ est stable. **Q.E.D.**

**Définition 1.2.8** *Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires intégrables sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $I\!R^d$. On dit que $\{X_n\}$ converge faiblement dans $L^1$ vers une variable aléatoire intégrable $X$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $I\!R^d$ si pour toute variable aléatoire $Y$ mesurable et bornée à valeurs dans $I\!R$,*

$$E[X_n Y] \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} E[XY].$$

*On note cette convergence par*

$$X_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} X \quad \textit{(faible dans } L^1).$$

*Si $X_n$ et $X$ sont à valeurs complexe, posons $X_n = X_n^1 + iX_n^2$ et $X = X^1 + iX^2$ où $X_n^1, X_n^2, X^1, X^2 \in I\!R$. Et alors on dit que $\{X_n\}$ converge faiblement dans $L^1$ vers $X$ si $X_n^1$ converge faiblement dans $L^1$ vers $X^1$ et $X_n^2$ converge faiblement dans $L^1$ vers $X^2$.*

**Remarque 1.2.9** *La convergence faible dans $L^1$ n'implique pas la convergence $\mathcal{G}$-stable. Voici un contre-exemple.*
*Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \mu)$ où $\mathcal{B}_{[0,1]}$ sont les boréliens sur $[0,1]$, $\mu$ est la mesure de Lebesgue, et $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Et soit $X_n(t) = \sin(2\pi nt)$. On a, pour tout variable aléatoire $Y$ bornée*

$$E[X_nY] = \int_0^1 Y(t)\sin(2\pi nt)d\mu(t) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

*et donc $X_n$ converge faiblement dans $L^1$ vers 0. Mais $X_n$ ne converge pas en loi vers 0 et donc ne converge pas $\mathcal{G}$-stablement. En effet pour tout $f$ continue bornée on a*

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\sin(2\pi nt))dt = \frac{1}{n}\int_0^n f(\sin(2\pi u))du &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f(\sin(2\pi u))du \\ &= \int_0^1 f(\sin(2\pi u))du.\end{aligned}$$

*Donc $X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sin(2\pi U)$ où $U$ est de loi uniforme sur $(0,1)$.*

Le résultat suivant, une sorte de théorème portemanteau pour la convergence stable, est dû à Aldous et Eagleson [3].

**Théorème 1.2.10 (Aldous et Eagleson [3])** *Supposons que $Y_n \xrightarrow{d} Y$, où tous les $Y_n$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ . Alors il y a équivalence entre les conditions suivantes.*

*(a) La suite $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable.*

*(b) Pour tout variable aléatoire fixée $X$, $\mathcal{G}$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$, la suite de vecteurs $\{(Y_n, X)\}_{n\geq 1}$ converge en loi.*

*(c) Pour tout variable aléatoire réelle fixée $X, \mathcal{G}$-mesurable, on a que la suite aléatoire de vecteurs $(Y_n, X)$ converge $\mathcal{G}$-stablement.*

*Si de plus $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ alors les énoncés précédents sont équivalents à*

(d) *Pour chaque $t \in I\!\!R^d$ fixé, la suite de variables aléatoires à valeurs complexes $\{e^{it^T Y_n}\}$ converge faiblement dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

DÉMONSTRATION: Montrons que (a) entraîne (b).
Il suffit de prendre $B = \{X \leq x\}$ et on aura

$$\begin{aligned}\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \leq y\} \cap B) &= \lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \leq y\} \cap \{X \leq x\}) \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} P((Y_n, X) \leq (y, x))\end{aligned}$$

qui existe par hypothèse, pour tout choix de $x \in I\!\!R$ et tout $y$ dans un sous-ensemble $D$ dense de $I\!\!R^d$. Comme $D \times I\!\!R$ est dense dans $I\!\!R^d \times I\!\!R$, alors on a la convergence de la paire $(Y_n, X)$ car la suite est tendue et la limite $\lim_{n \longrightarrow \infty} P((Y_n, X) \leq (y, x))$ est donc une fonction de répartition (on sait qu'il existe une loi possédant ces marges).
(b) entraîne (a)
Soit $B \in \mathcal{G}$, en prenant $X = I\!\!I_B$, on a que la suite $(Y_n, I_B)$ converge en loi, donc il existe un ensemble $D \subset I\!\!R^{d+1}$ dense tel que

$$\forall (y, x) \in D, \lim_{n \longrightarrow \infty} P(Y_n \leq y, I\!\!I_B \leq x)$$

existe. On termine en observant que $\pi_{I\!\!R^d} \circ D \subset I\!\!R^d$ est dense dans $I\!\!R^d$ où $\pi_{I\!\!R^d} \circ D$ est la projection de $D$ sur $I\!\!R^d$ et en concluant pour tout $y \in \pi_{I\!\!R^d} \circ D$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \leq y\} \cap B)$$

existe.
c) $\Longrightarrow$ b) évident.
a) $\Longrightarrow$ c)
Soit $D \subset I\!\!R^d$ dense dans pour lequel il y a convergence stable de $Y_n$ et soit $I\!\!R^d$ l'ensemble des points de continuité de $X$. Posons $D^\star = D \times I\!\!R^d \subset I\!\!R^d \times I\!\!R^d$ et notons que l'inclusion est dense la encore. Soient $B' = \{X \leq x\}$ et $B_1 = B \cap B'$ pour un $B \in \mathcal{G}$ quelconque. Comme $Y_n$ est $\mathcal{G}$-stable, alors pour tout $y \in D$ et $B_1 \in \mathcal{G}$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \leq y\} \cap B_1)$$

existe. Donc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \leq y\} \cap B \cap B')$$

existe. Ce qui implique pour tout $(y,x) \in D^\star$ et $B \in \mathcal{G}$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \leq y\} \cap \{X \leq x\} \cap B)$$

existe.
Enfin montrons que (b) entraîne (d), puis que (d) entraîne (a) lorsque $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.
Posons $P(Y_n \leq x|B) = Q_B(Y_n \leq x)$. Si $Y_n$ est stable, alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(Y_n \leq x|B)$$

existe pour tout $B$ $\mathcal{F}$-mesurable vérifiant $P(B) > 0$ et $x \in D$ dense. Notons que cette limite. est une fonction de répartition, ce qui implique

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_B e^{it^\top Y_n} dP = P(B) \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} e^{it^\top y} Q_B(dy)$$

existe pour tout $t \in \mathbb{R}^d$. Et comme de plus la suite $\{e^{it^\top Y_n}\}$ est bornée alors elle est faiblement de Cauchy dans $L^1$ ( théorème A.6.5). Or l'espace $L^1$ est faiblement complet (théorème A.6.4) donc la suite $\{e^{it^\top Y_n}\}$ converge faiblement dans $L^1$.
Réciproquement posons

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_B e^{it^\top Y_n} dP = \int_B \phi(t,\omega) dP.$$

Comme $Y_n \xrightarrow{d} Y$ alors la suite $\{Y_n\}$ est tendue et donc de même pour la suite $\{Y_n \mathbb{I}_B\}$. Donc il existe une sous-suite $\{n_k\}$ tel que

$$\lim_{n_k \longrightarrow \infty} E[e^{it^\top Y_{n_k}}|B] = E[\phi(t,\omega)|B] = \frac{E[\phi(t,\omega)\mathbb{I}_B]}{P(B)} = \psi(t).$$

Vérifions que $\psi(t)$ est une fonction caractéristique ce qui entraîne la convergence de la loi conditionnée en $B$ de $Y_n$. D'abord comme $\phi(0,\omega) = 1$ presque partout alors $\psi(0) = 1$. Ensuite, comme $\phi$ est continue en 0 alors $\psi$ l'est aussi car d'après le théorème (A.6.7) $\phi$ est bornée et donc par le théorème (A.2.6) $\psi$ est continue en 0. Enfin pour tout ensemble fini de vecteurs $t_i \in \mathbb{R}^d$ et de nombres complexes $z_j$, $1 \leq j \leq m$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m z_j \overline{z_k} \psi(t_j - t_k) &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m z_j \overline{z_k} \frac{1}{P(B)} \lim_{n \to \infty} E\left[e^{it_j^\top Y_n} e^{-it_k^\top Y_n} \mathbb{I}_B\right] \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{P(B)} E\left[\left|\sum_{j=1}^m e^{it_j^\top Y_n}\right|^2 \mathbb{I}_B\right] \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Et donc d'après le théorème de Bochner A.2.5, $\psi(t)$ est une fonction caractéristique. **Q.E.D.**

**Remarque 1.2.11** *La condition $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ est nécessaire pour (d). En effet si on prend par exemple $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ et $X_n$ une suite de variables aléatoires positive tel que $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ et $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. On a que*

$$E[X_n^p] = \frac{1}{n} \to 0, \; p > 0$$

*donc la suite converge en moyenne, donc en loi et la condition (a) est vérifiée. D'autre part si pour t fixé on prend $B \in \sigma(e^{it^\top X_1}, ^{itX_2}, \ldots, ) \subset \mathcal{F}$ on a que $E[e^{it^\top X_n}|B] = e^{it^\top X_n}$ mais $X_n$ ne converge pas presque sûrement vers 0 et donc (d) n'est pas vrai.*

**Théorème 1.2.12 (Mogyorodi [33])** *Soient $\{X_n\}_{n\geq 1}$ et $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telles que $X_n - Y_n$ converge en loi vers zéro. Si l'une d'elles est $\mathcal{G}$-stable alors l'autre l'est aussi.*

Démonstration: Supposons que la suite $\{X_n\}$ est $\mathcal{G}$-stable. Alors d'après le théorème (1.2.10) b) on a pour tout $Y$ variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable $(X_n, Y)$ converge en loi. Or pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|(X_n, Y) - (Y_n, Y)| > \varepsilon) = P(|X_n - Y_n| > \varepsilon) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

par hypothèse. D'où d'après le lemme (A.2.4) on a la convergence en loi de $(Y_n, Y)$, ce qui entraîne d'après le théorème 1.2.10, la $\mathcal{G}$-stabilité de la suite $Y_n$. **Q.E.D.**

**Théorème 1.2.13 (Mogyorodi et Katai [34])** *Soient $Y_n$ une suite de variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ qui converge $\mathcal{G}$-stablement, g une fonction continue de $\mathbb{R}^{d+1}$ dans $\mathbb{R}$ et $X$ une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors la suite $\{g(Y_n, X)\}_{n\geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable.*

DÉMONSTRATION: Soit $Z$ une autre variable aléatoire à valeurs dans $I\!R$ $\mathcal{G}$-mesurable. D'après le théorème (1.2.10) c), $(Y_n, X)$ converge $\mathcal{G}$-stablement et donc d'après le théorème (1.2.10) b), $(Y_n, X, Z)$ converge conjointement en loi .
Soit $h : I\!R^{d+2} \longrightarrow I\!R^2 \quad (x, y, z) \mapsto (g(x, y), z)$.
Comme $g$ est continue, $h$ l'est aussi donc d'après le théorème A.3.4 $h(Y_n, X, Z) = (g(Y_n, X), Z)$ converge conjointement en loi d'où d'après le théorème (1.2.10) on obtient la $\mathcal{G}$-stabilité de la suite $g(Y_n, X)$. **Q.E.D.**

**Théorème 1.2.14** *Il y a équivalence entre:*
*a) la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable;*
*b) pour toute variable aléatoire réelle $Z$, $\mathcal{G}$-mesurable et dans $L^1$, et pour tout $f : I\!R^d \longrightarrow I\!R$ continue et bornée,*

$$\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)Z]$$

*existe.*

Autrement dit c'est la convergence faible dans $L^\infty$.

DÉMONSTRATION: Comme $Z \in L^1$ alors il existe des constantes $\alpha_{i,k}$ $(1 \leq i \leq n)$ et des ensembles $B_{i,k}$ $(1 \leq i \leq m_k)$, $\mathcal{G}$-mesurables tel que

$$E\left|Z - \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_{i,k} I\!I_{B_{i,k}}\right| \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

et comme $f$ est bornée alors on a

$$E\left|f(X_n)Z - f(X_n)\sum_{i=1}^{m_k} \alpha_{i,k} I\!I_{B_{i,k}}\right| \leq \|f\|_\infty \, E\left|Z - \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_{i,k} I\!I_{B_{i,k}}\right| \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc pour tout $Z \in L^1$

$$\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)Z]$$

existe si et seulement si elle

$$\lim_{n\to\infty} E[f(X_n) I\!I_B]$$

existe pour tout $B \in \mathcal{G}$. Ce qui est équivalent à pour tout $B \in \mathcal{G}$ tel que $P(B) > 0$ et $f$ continue bornée

$$\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)|B] = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dP(X_n \leq x|B)$$

existe. Or cette dernière est équivalente d'après le théorème A.3.3 à l'existence de

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(X_n \leq x|B)$$

pour tous les $x$ dans un ensemble dense dans $\mathbb{R}^d$. **Q.E.D.**

On remarque que les résultats énoncés jusqu'à présent ne nous donnent pas la limite explicitement ce qui n'est pas très utile en pratique. Dans la suite on essayera d'améliorer ces résultats en identifiant les limites de convergence stable des suites de variables aléatoires. Les théorèmes suivants viendront donc préciser les trois précédents.

## 1.3 Convergence $\mathcal{G}$-stable dans $\mathbb{R}^d$

**Définition 1.3.1 (Aldous et Eagleson [3])** *Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, définies sur un espace de probabilité commun $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui convergent en loi vers une variable aléatoire $X$ de loi $F$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.*
*On dit que la suite $X_n$ converge vers $X$ $\mathcal{G}$-stablement s'il existe un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^d$ dense dans $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout $x \in D$ et pour tout ensemble $\mathcal{G}$-mesurable $B$*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(\{X_n \leq x\} \cap B) = P(\{X \leq x\} \cap B). \tag{2}$$

*On écrit alors $X_n \xrightarrow{d} X$ ($\mathcal{G}-$stable).*

**Remarque 1.3.2** *Dans le cas particulier où $X_n = \mathbb{I}_{A_n}$, on dira que la suite $A_n$ converge $\mathcal{G}$-stablement vers $A$ si pour tout $B \in \mathcal{G}$, $P(A_n \cap B)$ converge vers $P(A \cap B)$.*

**Remarque 1.3.3** *Si $X$ est $\mathcal{G}$-mesurable alors la limite de $X_n$ est unique. En effet supposons qu'il existe une autre limite $Y$ qui est $\mathcal{G}$-mesurable alors on aura,presque sûrement, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$*

$$E[e^{itX}|\mathcal{G}] = E[e^{itY}|\mathcal{G}]$$

*or* $X$ *et* $Y$ *sont* $\mathcal{G}-$ *mesurable alors*

$$e^{itX} = e^{itY} \ \textit{presque sûrement}$$

*d'où*

$$X = Y \ \textit{presque sûrement.}$$

Voici un exemple où $X$ n'est pas $\mathcal{G}$-mesurable et la limite n'est pas unique. Considèrons $X_n = \sin(2\pi nu)$ qui a la même loi que $X = \sin(2\pi U)$ où $U$ est de loi uniforme sur $(0,1)$ et $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$.

**Théorème 1.3.4 (Aldous et Eagleson [3])** *Supposons que* $Y_n \xrightarrow{d} Y$*, où tous les* $Y_n$ *sont des variables aléatoires dans* $\mathbb{R}^d$ *bâties sur le même espace* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*et* $\mathcal{G}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *. Alors il y a équivalence entre les conditions suivantes*
*a)* $Y_n \xrightarrow{d} Y$ $(\mathcal{G} - \textit{stable})$*;*
*b) Pour tout variable aléatoire fixée* $X$ *,* $\mathcal{G}$*-mesurable à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$*, on a*

$$(Y_n, X) \xrightarrow{d} (Y, X);$$

*c) Pour tout variable aléatoire fixée* $X, \mathcal{G}$*-mesurable, à valeurs dans* $\mathbb{R}^k$ *on a*

$$(Y_n, X) \xrightarrow{d} (Y, X); \ \ (\mathcal{G} - \textit{stable})$$

*Si de plus* $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ *alors les énoncés précédents sont équivalent à*
*d) Pour chaque* $t \in \mathbb{R}^d$ *fixé,*

$$\exp(it^T Y_n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \exp(it^T Y) \ \ (\textit{faible dans } L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)).$$

Démonstration: a) entraîne b)
Soit $(x, y)$ un point de continuité de la fonction de répartition de $(X, Y)$. Alors

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \ \ \text{(stable)},$$

$\Longleftrightarrow$ pour tout $y \in D$ l'ensemble dense associé à la stabilité de $\{Y_n\}$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \leq y\} \cap B) = P(\{Y \leq y\} \cap B)$$

Prenons $B = \{X \leq x\}$ et on aura

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \leq y\} \cap \{X \leq x\}) = P(\{Y \leq y\} \cap \{X \leq x\})$$

sur $D \times I\!R$.
a) $\Longrightarrow$ d)

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \;\; (\mathcal{F} - \text{stable})$$

$\Longrightarrow$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \leq x\} \cap B) = P(\{Y \leq x\} \cap B)$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{n \longrightarrow \infty} E[e^{itY_n}|B] = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{I\!R} e^{iux} dP(Y_n \leq x|B) &= \int_{I\!R} e^{iux} dP(Y \leq x|B) \\ &= E[e^{iuY}|B] \end{aligned}$$

pour tout $t \in I\!R^d$.
c) $\Longrightarrow$ b) évident.
a) $\Longrightarrow$ c)
Étant donné $x \in I\!R$ et $B \in \mathcal{G}$, posons $B' = \{X \leq x\}$ et $B_1 = B \cap B'$ . Comme

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \;\; (\mathcal{G} - \text{stable})$$

alors pour tout $y \in D$ dense associé à $\{Y_n\}$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \leq y\} \cap B_1) = P(\{Y \leq y\} \cap B_1)$$

existe pour tout $B_1 \in \mathcal{G}$. Donc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \leq y\} \cap B \cap B') = P(\{Y \leq y\} \cap B \cap B')$$

existe pour tout $B \in \mathcal{G}$. Ce qui implique

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \leq y\} \cap \{X \leq x\} \cap B) = P(\{Y \leq y\} \cap \{X \leq x\} \cap B)$$

existe pour tout $B \in \mathcal{G}$.
d) $\Longrightarrow$ b)
On a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E[exp(itY_n)Z] = E[E[e^{itY}|\mathcal{F}]Z],$$

pour tout $Z$ $\mathcal{G}$-mesurable bornée. Il suffit de prendre $Z = e^{iuX}, u \in I\!R$ et on aura

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E[exp(itY_n)Z] = E[exp(itY)Z] = E[e^{itY}e^{iuX}].$$

b) $\Longrightarrow$ a)
Il suffit de prendre $X = I\!I_B$, avec $B$ $\mathcal{G}$-mesurable. On aura donc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(Y_n \leq y, I\!I_B = 1) = P(Y \leq y, I\!I_B = 1).$$

**Q.E.D.**

**Théorème 1.3.5 (Aldous et Eagleson [3])** *Supposons que* $Y_n \xrightarrow{d} Y$ *(*$\mathcal{G}$*-stable), où tous les* $Y_n$ *sont des variables aléatoires dans* $I\!R^d$ *et bâties sur le même espace* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et* $\mathcal{G}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *. Soient* $X$ *une variable aléatoire* $\mathcal{G}$*-mesurable à valeurs dans* $I\!R$ *et* $g$ *une fonction continue de* $I\!R^{d+1}$ *dans* $I\!R$*. Alors*

$$g(Y_n, X) \longrightarrow g(Y, X) \ \ (\mathcal{G} - stable)$$

Démonstration: Soit $Z$ une autre variable aléatoire à valeurs dans $I\!R$, $\mathcal{G}$-mesurable. Alors d'après le théorème 1.3.4b), $(Y_n, X, Z)$ converge conjointement en loi vers $(Y, X, Z)$. Soit $h : I\!R^{d+2} \longrightarrow I\!R^2 \ \ (x, y, z) \mapsto (g(x, y), z)$.
Comme $g$ est continue, $h$ l'est aussi donc d'après le théorème A.3.4
$h(Y_n, X, Z) = (g(Y_n, X), Z)$ converge conjointement en loi vers $(g(Y, X), Z))$
d'où d'après le théorème 1.3.4 on obtient la convergence $\mathcal{G}$-stable de la suite $g(Y_n, X)$ vers $g(Y, X)$. **Q.E.D.**

**Théorème 1.3.6** *Soit $X_n, Y_n$ deux suites de variables aléatoires définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $X$ une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ . Si*

$$X_n \xrightarrow{d} X \ \ (\mathcal{G} - stable),$$

*et*

$$|X_n - Y_n| \xrightarrow{d} 0$$

*alors*

$$Y_n \xrightarrow{d} X \ \ (\mathcal{G} - stable).$$

DÉMONSTRATION: La preuve du théorème 1.2.12 permet de conclure ici, lorsqu'on remarque que l'égalité (4) a comme valeur commune $P(\{X \leq x\} \cap B)$. **Q.E.D.**

**Théorème 1.3.7 (Mogyorodi [33])** *Soient $X_n, Y_n, X, Y$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,$\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $g$ une fonction de $\mathbb{R}^{2d}$ dans $\mathbb{R}$ continue. Supposons que $X_n \xrightarrow{P} X$ et que $X$ est $\mathcal{G}$-mesurable. Si*

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \ \ (\mathcal{G} - stable),$$

*alors*

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} g(X, Y) \ \ (\mathcal{G} - stable).$$

DÉMONSTRATION: Montrons d'abord que $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$. Comme

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \ \ (\mathcal{G} - \text{stable}),$$

on aura d'après le théorème 1.3.4 pour tout $X$ $\mathcal{G}$-mesurable

$$(Y_n, X) \xrightarrow{d} (Y, X), \ \ (\mathcal{G} - \text{stable})$$

et ensuite

$$P(|(Y_n, X_n) - (Y_n, X)| > \varepsilon) = P(|X_n - X| > \varepsilon) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

car $X_n \xrightarrow{P} X$. Et donc d'après le théorème 1.3.6 on conclut que

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y) \ \ (\mathcal{G} - \text{stable}).$$

Ce qui implique d'après le théorème (1.3.4) b) que pour tout variable aléatoire $Z$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ $\mathcal{G}$-mesurable on a

$$((X_n, Y_n), Z) \xrightarrow{d} ((X, Y), Z).$$

Soit $h : \mathbb{R}^{2d+1} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'application définie par $(x, y, z) \mapsto (g(x, y), z)$. Comme $g$ est continue, $h$ l'est aussi donc d'après le théorème A.3.4
$h((Y_n, X_n), Z) = (g(Y_n, X_n), Z)$ converge conjointement en loi vers
$(g(Y, X), Z))$. D'où d'après le théorème (1.3.4) on obtient le résultat voulu. **Q.E.D.**

**Remarque 1.3.8** *Si $X_n$ converge $\mathcal{G}$-stablement vers $X$ et $Y_n$ converge $\mathcal{G}$-stablement vers $Y$ alors on n'a pas forcément que le couple $(X_n, Y_n)$ converge $\mathcal{G}$-stablement vers $(X, Y)$. En effet il suffit de prendre $X_n = 2 - X$ avec $X \sim B(2, p)$ et $Y_n = X$. Et donc si $(X_n, X)$ converge $\mathcal{G}$-stablement vers $(X, X)$ alors $X_n - X$ converge en probabilité vers $0$ ce qui est absurde.*

**Théorème 1.3.9** *Il y a équivalence entre:*
*a) $X_n \xrightarrow{d} X$ ($\mathcal{G}$-stable)*
*b) pour toute variable aléatoire réelle $Z$ $\mathcal{G}$-mesurable et dans $L^1$ et pour tout $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée,*

$$E[f(X_n)Z] \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} E[f(X)Z].$$

Démonstration: Identique à celle du théorème (1.2.14) en identifiant la limite de $P(\{X_n \leq x\} \cap B)$ qui est égale à $P(\{X \leq x\} \cap B)$. **Q.E.D.**

## 1.4 Relation entre la convergence $\mathcal{G}$-stable et autres types de convergence dans $I\!R^d$

On a déjà vu au début du chapitre que la convergence stable entraîne la convergence en loi et que la convergence en probabilité entraîne la convergence stable. Les résultats suivants nous donnerons plus de précisions sur la relation entre la convergence stable et les autres modes de convergence.

**Théorème 1.4.1** *Soient* $(X, X_1, X_2, \dots,)$ *une suite de variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *à valeurs dans* $I\!R^d$ *et supposons que* $X$ *est* $\mathcal{G}$*-mesurable. Alors on a équivalence entre les affirmations suivantes:*
*i)* $X_n$ *converge en probabilité vers* $X$*.*
*ii)* $X_n$ *converge vers* $X$ *(*$\mathcal{G}$*-stable) .*

Démonstration: Montrons d'abords que ii)$\Longrightarrow$ i).

$$X_n \xrightarrow{d} X \ \ (\mathcal{G} - stable)$$

comme $X$ est $\mathcal{G}$-mesurable alors d'après le théorème (1.3.4)

$$(X_n, X) \xrightarrow{d} (X, X)$$

$\Longrightarrow$

$$|X_n - X| \xrightarrow{d} 0$$

d'où

$$|X_n - X| \xrightarrow{P} 0.$$

Montrons maintenant i)$\Longrightarrow$ ii).
Comme $X_n$ converge en probabilité vers $X$ alors pour toute variable aléatoire $Y$ $\mathcal{G}$-mesurable on a

$$(X_n, Y) \xrightarrow{P} (X, Y).$$

Ce qui implique d'après le théorème 1.3.4 que $X_n$ converge $\mathcal{G}$-stablement vers $X$. **Q.E.D.**

**Remarque 1.4.2** *Si $X$ n'est pas $\mathcal{G}$-mesurable alors le théorème précédent est faux. Voici un contre-exemple. Soient $X \sim B(2,p)$ et $X_n = X - 2$, $\forall n \geq 1$ deux variables aléatoires bâties sur $\Omega = \{0,1,2\}$ avec $\mathcal{F} = \{\mathcal{P}(\Omega)\}$ et $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{0,2\}\}$. Alors $|X_n - X| = 2$ et donc $X_n$ ne converge pas en probabilité vers $X$, même si $X_n$ converge $\mathcal{G}$-stablement vers $X$.*

**Corollaire 1.4.3** *Soit $(X, X_1, X_2, \ldots)$ une suite de variables aléatoires intégrables définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $I\!R^d$ et supposons que $X$ est $\mathcal{G}$-mesurable. Alors il y a équivalence entre*
*(i) $X_n$ converge stablement vers $X$ et $\{|X_n|\}$ est uniformément intégrable.*
*(ii) $X_n$ converge dans $L^1$ vers $X$.*

Démonstration: D'après le théorème précédent on a que $X_n$ converge en probabilité vers $X$. Or comme $\{|X_n|\}$ est uniformément intégrable et $E|X| < +\infty$ donc $|X_n - X|$ est uniformément intégrable. Alors

$$E|X_n - X| \leq \varepsilon + E(|X_n - X| I\!I_{(\varepsilon,\infty)}(|X_n - X|)).$$

Comme $\lim_{n\longrightarrow\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ et $|X_n - X|$ est uniformément intégrable alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} E(|X_n - X| I\!I_{(\varepsilon,\infty)}(|X_n - X|) = 0$.
La réciproque est triviale. **Q.E.D.**

## 1.5 La $\mathcal{G}$-stabilité avec une densité $\alpha$ dans $I\!R^d$

Nous allons exhiber une première représentation explicite de la limite apparaissant dans la définition 1.2.2.

**Lemme 1.5.1 (Rényi [40] )** *Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite $\mathcal{G}$-stable et $D$ un sous-ensemble dense dans $I\!R^d$ tel que*

$$Q_x(B) = \lim_{n\to\infty} P(\{X_n \leq x\} \cap B)$$

*pour tout point $x \in D$ et pour tout $B \in \mathcal{G}$. Alors pour tout $x \in D$ tel que $Q_x(\Omega) > 0$, $\dfrac{Q_x(B)}{Q_x(\Omega)}$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{G}$ absolument continue par rapport à $P$ et $Q_x(B)$ peut être représentée sous la forme*

$$Q_x(B) = \int_B \alpha(x,\omega)dP(\omega)$$

*où $\alpha(x,.)$ est une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable telle que $0 \leq \alpha(x,\omega) \leq 1$ presque sûrement en $\omega$, pour chaque $x \in D$ tel que $Q_x(\Omega) > 0$.*

DÉMONSTRATION: Soit $x \in D$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x) = Q_x(\Omega) > 0.$$

Alors, il existe $n_1$ tel que $P(X_n \leq x) > 0$ pour tout $n \geq n_1$. Il s'ensuit que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(B|X_n \leq x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{P(B \cap \{X_n \leq x\})}{P(X_n \leq x)} = \frac{Q_x(B)}{Q_x(\Omega)}.$$

Et donc la limite des mesures de probabilités existe pour tout $B \in \mathcal{G}$ et $x \in D$. D'autre part si $P(B) = 0$ alors $Q_x(B) = 0$ est donc $Q_x$ est absolument continue par rapport à $P$. Enfin comme

$$0 \leq P(\{X_n \leq x\} \cap B) \leq P(B)$$

alors

$$0 \leq Q_x(B) \leq P(B)$$

et donc, pour chaque $x \in D$, on a

$$0 \leq \alpha(x,\omega) = \frac{dQ_x}{dP}(\omega) \leq 1 \quad p.s \text{ en } \omega.$$

**Q.E.D.**

D'où émerge une définition plus pratique de la convergence stable, équivalente à la définition 1.2.2.

**Définition 1.5.2 (Mogyorodi [33])** *Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ qui converge en loi vers une variable aléatoire $X$ de loi $F$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.*

*On dit que la suite est $\mathcal{G}$-stable avec densité $\alpha$ s'il existe un sous-ensemble $D \subset I\!R^d$ dense dans $I\!R^d$ tel que pour tout $x \in D$ et pour tout ensemble $B \in \mathcal{G}$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{X_n \leq x\} \cap B) = \int_B \alpha(x,\omega)dP(\omega),$$

*où $\alpha(x,\cdot)$ une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable presque sûrement à valeurs dans $(0,1]$.*

**Remarque 1.5.3** *Comme dans la définition 1.2.2, on peut choisir ici*

$$D = \{x \in I\!R^d;\ F \text{ est continue en } x\}.$$

*La fonction $\alpha$ est appelée la densité locale de la suite $\mathcal{G}$-stable $X_n$. Il est important de noter que ce n'est pas nécessairement une densité de probabilité puisque la masse totale qui résulte de son intégration sur tout $\Omega$ peut être inférieure à 1. Notons que $F(x) = \int_\Omega \alpha(x,\omega)dP$ pour tout $x$ qui est un point de continuité de l'intégrale.*

**Remarque 1.5.4** *En notant par $\alpha_n = \alpha_n(x,\omega) = I\!I_{\{X_n(\omega)\leq x\}}$ la définition précédente peut s'écrire sous la forme suivante:*
*$X_n$ converge $\mathcal{G}$-stablement avec la densité $\alpha$ si $\alpha_n$ converge faiblement dans $L^\infty(\Omega,\mathcal{G},P)$ vers $\alpha$.*

**Théorème 1.5.5 (Rényi [40])** *Soit $X_n$ une suite aléatoire $\mathcal{G}$-stable avec densité $\alpha$ sur l'espace $S = (\Omega,\mathcal{F},P)$. Soit $P^\star$ une autre mesure de probabilité sur $\mathcal{F}$, qui est absolument continue par rapport à $P$. Alors la suite $X_n$ est $\mathcal{G}$-stable sur l'espace de probabilité $S^\star = (\Omega,\mathcal{F},P^\star)$ avec la même densité $\alpha$.*

Démonstration: Soit

$$\lambda = \frac{dP^\star}{dP} \in L^1(P)$$

la dérivée de Radon-Nikodym de $P^\star$ par rapport à $P$. Alors on a pour tout $B \in \mathcal{G}$

$$P^\star(B) = \int_B \lambda dP = E[\lambda I\!I_B]$$

donc on aura

$$\begin{aligned} P^\star(\{X_n \leq x\} \cap B) &= \int_{\{X_n\leq x\}\cap B} \lambda dP \\ &= E[\lambda I\!I_{\{X_n\leq x\}\cap B\}}] \\ &= E[\lambda \alpha_n(x,.) I\!I_B] \end{aligned}$$

or d'après la remarque précédente $\alpha_n$ converge faiblement vers $\alpha$ dans $L^\infty$ et donc

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P^\star(\{X_n \leq x\} \cap B) = E[\lambda\alpha(x,.)\mathbb{I}_B] = \int_B \alpha(x,.)dP^\star.$$

Notons par $E^\star$ l'espérance sur l'espace de probabilité $S^\star = (\Omega, \mathcal{F}, P^\star)$ on aura

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P^\star(\{X_n \leq x\} \cap B) = E^\star[\alpha(x,.)\mathbb{I}_B].$$

**Q.E.D.**

Le théorème suivant va nous clarifier le lien entre la convergence stable vers une densité $\alpha$ (définition 1.5.2) ou tout simplement stable (définition 1.2.2) avec la convergence stable vers une variable aléatoire (définition 1.3.1).

**Théorème 1.5.6 (Daley et Vere-Jones [12])** *Soit $\{X_n\}$ une suite définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ qui est $\mathcal{G}$-stable avec une densité $\alpha$. et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{E}', P')$, une application mesurable $T : (\Omega', \mathcal{E}') \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$, et une variable aléatoire $X'$ définie sur $(\Omega', \mathcal{E}')$ tel que si $\mathcal{G}' = T^{-1}\mathcal{G}$ et $X'_n(\omega') = X_n(T\omega')$ alors $X'_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} X'$ ($\mathcal{G}'$-stable).*

Démonstration: Posons $\Omega' = \Omega \times \mathbb{R}^d$ et soit $\mathcal{E}' = \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
Posons $A = ]-\infty, x_1[\times \ldots \times ]-\infty, x_d[$ et définissons $L$ par $L : \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0,1]$,

$$L(B, A) = \lim_{n\longrightarrow\infty} P(\{X_n \in A\} \cap B).$$

$L$ est une application bien définie car la suite $\{X_n\}$ est $\mathcal{G}$-stable. On a bien que $L(\Omega, \mathbb{R}^d) = \lim_{n\longrightarrow\infty} P(\{X_n \in \mathbb{R}^d\} \cap \Omega) = 1$. De plus,

$$\forall B \in \mathcal{G}, \quad B \longmapsto L(B, A) = \lim_{n\longrightarrow\infty} P(\{X_n \in A\} \cap B)$$

est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$; et aussi

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad A \longmapsto L(B, A) = \lim_{n\longrightarrow\infty} P(\{X_n \in A\} \cap B)$$

est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{G})$.
Donc d'après le lemme (A.5.1) il existe une unique mesure de probabilité $P'$ sur $(\Omega \times \mathbb{R}^d, \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que

$$P'(B \times A) = L(B, A) \;\; \forall (B, A) \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Soit $T : (\Omega \times I\!R^d, \mathcal{G} \otimes \mathcal{B}(I\!R^d)) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{G}) \quad T(\omega, x) = \omega$, $T$ est bien une application $\mathcal{G}$-mesurable. On définit $\mathcal{G}' = T^{-1}\mathcal{G} = \{B \times I\!R^d, B \in \mathcal{G}\}$. On définit aussi $X'(x, \omega) = x$. Alors pour tout $B' = B \times I\!R^d \in \mathcal{G}'$, on a

$$P'(\{X'_n \in A\} \cap B') = P(\{X_n \in A\} \cap B) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} P'(B \times A)$$

or

$$\begin{aligned} B \times A &= (\Omega \cap B) \times (A \cap I\!R^d) = (\Omega \times A) \cap (B \times I\!R^d) \\ &= (\{X' \in A\}) \cap (B \times I\!R^d) = \{X' \in A\} \cap B' \end{aligned}$$

d'où $P'(B \times A) = P'(\{X' \in A\} \cap B')$ et donc $X'_n$ converge vers $X'$ ($\mathcal{G}'$-stable). **Q.E.D.**

## 1.6 Convergence $\mathcal{G}$-mélangeante dans $I\!R^d$

### 1.6.1 Convergence $\mathcal{G}$-mélangeante d'évévenements

**Définition 1.6.1 (Rényi [40] )** *Soit $\{A_n\}$ une suite d'événements définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On dit que $\{A_n\}$ est $\mathcal{G}$-mélangeante avec densité $\alpha$ si pour tout $B \in \mathcal{G}$*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(A_n \cap B) = \alpha P(B),$$

*où $\alpha$ est une constante qui ne dépend pas de $B$ et $0 \leq \alpha \leq 1$.*

Si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ on dira que $A_n$ est mélangeante avec densité $\alpha$.

**Exemple 1.6.2 (Rényi [40] )** *Soit $T$ une transformation mesurable mélangeante définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, c'est à dire*

$$\forall A, B \in \mathcal{F} \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{T^{-n}A\} \cap B) = P(A)P(B).$$

*Et soient $A_1$ un événement tel que $P(A_1) = \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ et $A_{n+1} = T^{-n}A_1, (n = 1, 2, \ldots)$. Alors la suite $\{A_n\}$ est mélangeante avec densité $\alpha$.*
*En effet*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{T^{-n}A_1\} \cap B) = P(A_1)P(B) = cP(B).$$

**Remarque 1.6.3** *Il est évident que si la suite $\{A_n\}$ est mélangeante alors elle est stable. La réciproque est fausse. Voici un contre-exemple* **(Stoyanov [49] )***.*
*Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, $B_1 \in \mathcal{F}$ et $B_2 = B_1^c$. Considérons deux espaces, $(\Omega, \mathcal{F}, P_1)$ et $(\Omega, \mathcal{F}, P_2)$ où*

$$P_1(A) = P(A|B_1), \quad P_2(A) = P(A|B_2) \;\; \forall A \in \mathcal{F}.$$

*Soit $\{A'_n\}$ une suite mélangeante dans $(\Omega, \mathcal{F}, P_1)$ avec une densité $\lambda_1$, et $\{A''_n\}$ une suite mélangeante dans $(\Omega, \mathcal{F}, P_2)$, avec une densité $\lambda_2$ où $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$.*
*Posons $A_n = A'_n \cap B_1 + A''_n \cap B_2$. Alors pour tout $B \in \mathcal{F}$ on a*

$$\begin{aligned} P(A_n \cap B) &= P(A'_n \cap B_1 \cap B) + P(A''_n \cap B_2 \cap B) \\ &= P(B_1)P(A'_n \cap B|B_1) + P(B_2)P(A''_n \cap B|B_2). \\ &= P(B_1)P_1(A'_n \cap B) + P(B_2)P_2(A''_n \cap B). \end{aligned}$$

*Comme $\{A'_n\}$ et $\{A''_n\}$ sont deux suites mélangeante alors*

$$\begin{aligned} \lim_{n \longrightarrow \infty} P(A_n \cap B) &= P(B_1)\lambda_1 P_1(B) + P(B_2)\lambda_2 P_2(B) \\ &= \lambda_1 P(B \cap B_1) + \lambda_2 P(B \cap B_2) \\ &= \int_B \alpha dP \;\; \text{avec } \alpha(\omega) \\ &= \lambda_1 \text{ si } \omega \in B_1 \text{ et } \alpha(\omega) = \lambda_2 \text{ si } \omega \in B_2. \end{aligned}$$

*Il s'ensuit que $\{A_n\}$ est une suite stable mais pas mélangeante car $\alpha$ n'est pas une constante mais elle prend deux valeurs différentes.*

**Remarque 1.6.4** *Si on prend la sous-tribu $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ alors on remarque que $A_n$ est $\mathcal{G}$-mélangeante.*

### 1.6.2 Convergence $\mathcal{G}$-mélangeante de variables aléatoires dans $I\!R^d$

**Définition 1.6.5 (Eagleson [16])** *Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $I\!R^d$ qui converge en loi vers une variable aléatoire $X$ de loi*

$F$. *On dit que cette convergence est $\mathcal{G}$-mélangeante s'il existe un sous-ensemble $D \subset I\!R^d$ dense dans $I\!R^d$ telle que pour tout $x \in D$ et pour tout ensemble $\mathcal{G}$-mesurable $B$,*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{X_n \leq x\} \cap B) = P(B)F(x).$$

On note cette convergence par

$$X_n \xrightarrow{d} X \;\; (\mathcal{G}\text{-mélangeante}).$$

**Remarque:** Si $\alpha(x, \omega)$ définie dans la définition (1.5.2) est une constante qui est égale à $F(x)$ pour tout $\omega \in \Omega$ alors $\{X_n\}$ est une suite $\mathcal{G}$-mélangeante.

**Exemples**

1) Soit $\{X_j\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance nulle et de variance égale à un. Alors $\{Y_n\} = \{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} X_j\}$ est une suite mélangeante [42].

2) Les chaînes de Markov dites ergodiques sont mélangeantes [43].

3) On a montré déjà que la convergence en probabilité entraîne la convergence stable. Il n'en est pas de même pour le mélange, comme on peut voir en prenant $X_n = X \sim B(p)$ et $B = \{X = 1\}$ et $x = \frac{1}{2}$.

4) Une suite qui est $\mathcal{G}$-mélangeante n'est pas forcément mélangeante. En effet reprenons l'exemple $X_n = X \sim B(p)$ et $B = \{X = 1\}$ et $x = \frac{1}{2}$ avec $\mathcal{G} = \{\Omega, \emptyset\}$ et on a bien que $X_n$ est $\mathcal{G}$-mélangeante mais pas $\mathcal{F}$-mélangeante.

**Théorème 1.6.6 (Aldous et Eagleson [3])** *Supposons que $Y_n \xrightarrow{d} Y$, où tous les $Y_n$ sont sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $I\!R^d$. Alors il y a équivalence entre les conditions suivantes*

*a) $Y_n \xrightarrow{d} Y$ ($\mathcal{G}$-mélangeante);*

*b) Pour tout variable aléatoire fixée $X, \mathcal{G}$-mesurable à valeurs dans $I\!R$, on a*

$$(Y_n, X) \xrightarrow{d} (Y^{\star}, X),$$

*où $Y^\star$ a la même loi que $Y$ et est indépendante de $\mathcal{G}$.*
*c) Pour tout variable aléatoire fixée $X, \mathcal{G}$-mesurable à valeurs dans $I\!R$, on a*

$$(Y_n, X) \xrightarrow{d} (Y^\star, X), \quad (\mathcal{G} - stable)$$

*où $Y^\star$ a la même loi que $Y$ et est indépendante de $\mathcal{G}$.*
*Si de plus $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ alors les énoncés précédents sont équivalents à*
*d) Pour chaque $t \in I\!R^d$ fixé,*

$$exp(it^T Y_n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} E[exp(it^T Y)] \ \ (faible\ dans\ \ L^1).$$

DÉMONSTRATION: a) $\Longrightarrow$ b)
Soit $(x, y)$ un point de continuité de la fonction de répartition de $(X, Y)$. Alors

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \ \ (\mathcal{G} - \text{mélangeante }),$$

$\Longleftrightarrow$ pour tout $y \in D$ l'ensemble dense associé à la stabilité de $\{Y_n\}$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \le y\} \cap B) = P(\{Y \le y\})P(B)$$

Prenons $B = \{X \le x\}$ et on aura

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \le y\} \cap \{X \le x\}) &= P(\{Y \le y\})P(\{X \le x\}) \\
&= P(\{Y^\star \le y\})P(\{X \le x\}) \\
&= P(Y^\star \le y, X \le x)
\end{aligned}$$

sur $D \times I\!R$.
b)$\Longrightarrow$ a)
Soit $B$ un ensemble $\mathcal{G}$-mesurable. On a que

$$(Y_n, I_B) \Longrightarrow Z_\infty = (Z^1_\infty, Z^2_\infty)$$

avec $Z^1_\infty$ et $Z^2_\infty$ indépendant, donc $Y_n \Longrightarrow Z^1_\infty$. Soit $(y,x) \in C_{Z^1_\infty} \times (I\!R \setminus \{(0,1)\})$ où $C_{Z^1_\infty}$ est l'ensemble des points de continuité de $Z^1_\infty$. On a que (pour $x = 2$ puis $x = \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} P(Y_n \leq y, I_B = 1) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} P(Y_n \leq y, I_B \leq 2) \\
&\quad - \lim_{n\longrightarrow\infty} P(Y_n \leq y, I_B \leq \frac{1}{2}) \\
&= P(Z_\infty \in ]-\infty, y] \times \{1\}),
\end{aligned}$$

ce qui entraîne le $\mathcal{G}$-mélange.
a) $\Longleftrightarrow$ d)

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \ \text{ (mélangeante)}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E[exp(itY_n)|B] = E[exp(itY)]$$

pour tout $B$ $\mathcal{F}$-mesurable et tel que $P(B) > 0$ et $t \in I\!R^d$ fixé

$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E[exp(itY_n)1_B] = E[exp(itY)]P(B).$$

b)$\Longleftrightarrow$ c) d'après le théorème 1.3.4. **Q.E.D.**

**Théorème 1.6.7 (Eagleson [16])** *Soient $X_n, Y_n, X, Y$ des variables aléatoires définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, à valeurs dans $I\!R^d$ et $g$ une fonction de $I\!R^{2d}$ dans $I\!R$ continue. Supposons que $X_n \xrightarrow{P} X$. Si*

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \ \text{ ($\mathcal{G}$-mélangeante)},$$

*alors*

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} g(X, Y^\star) \ \ (\mathcal{G} - stable),$$

*où $Y^\star$ a la même loi que $Y$ et indépendante de $\mathcal{G}$.*

Démonstration: Montrons d'abords que $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y^\star)$. Comme

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \ \ (\mathcal{G}\text{-mélangeante}),$$

on aura d'après le théorème 1.6.6 b) pour tout $X$ $\mathcal{G}$-mesurable

$$(Y_n, X) \xrightarrow{d} (Y^\star, X),$$

et comme

$$P(|(Y_n, X_n) - (Y_n, X)| > \varepsilon) = P(|X_n - X| > \varepsilon) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

car $X_n \xrightarrow{P} X$. Et donc d'après le lemme (A.2.4) on conclut que

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y^\star),$$

et donc par le théorème 1.3.4 on a que $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y^\star)$ $(\mathcal{G} - \text{stable})$ ce qui implique d'après le théorème 1.3.4) b) que pour tout variable aléatoire $Z$ $\mathcal{G}$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$ on a

$$((X_n, Y_n), Z) \xrightarrow{d} ((X, Y^\star), Z).$$

Soit $h : \mathbb{R}^{2d+1} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x, y, z) \mapsto (g(x, y), z)$.
Comme $g$ est continue, $h$ l'est aussi donc d'après le théorème A.3.4
$h((X_n, Y_n), Z) = (g(X_n, Y_n), Z)$ converge conjointement en loi vers
$(g(X, Y^\star), Z))$. D'où d'après le théorème 1.3.4 on obtient le résultat voulu. **Q.E.D.**

# CHAPITRE 2

# $\mathcal{G}$- STABILITÉ ET $\mathcal{G}$-MÉLANGE DANS UN ESPACE POLONAIS

Dans ce chapitre on va généraliser les résultats du chapitre 1 dans le cas où $(E, \rho)$ est un espace polonais.
Dans toute la suite on dénotera par $E$ un espace polonais, c'est-à-dire un espace métrique complet et séparable, par $\mathcal{B}$ sa tribu de Borel et $\rho$ sa métrique, par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Toute les notations sont explicitée en annexe.

## 2.1 $\mathcal{G}$-stabilité de suite de variables aléatoires dans $E$

**Définition 2.1.1** *On dit que $X_n$ converge en loi vers $X$ dans $E$ si*

$$P(X_n \in A) \to P(X \in A)$$

*pour tout $A \in \mathcal{B}$ tel que $P(X \in \partial A) = 0$.*

**Définition 2.1.2** *Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $E$, définie sur un espace de probabilité commun $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui converge en loi vers une variable aléatoire $X$ et soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On dit que la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable (stable* *si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$) si pour tout ensemble $\mathcal{G}$-mesurable $B$ et pour tout $A \in \mathcal{B}$ avec $P(X \in \partial A) = 0$, la limite*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{X_n \in A\} \cap B) \tag{3}$$

*existe.*

**Remarque 2.1.3** *Si on prend $E = I\!R^d$ on retrouve la définition 1.2.2. En effet soient $x = (x_1, \ldots, x_d) \in I\!R^d$ et $A = ]-\infty, x_1] \times \ldots \times ]-\infty, x_d] = (-\infty, x]$, tel que $P(X \in \partial A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{d} \{X^{(i)} = x_i\} \cap \{X \in A\}\right) = 0$. Comme $A$ est un ensemble de $P$-continuité, ceci est équivalent d'après la remarque A.3.5 à $F(y) = P(X \leq y)$ continue en $x$ or l'ensemble des points de continuité de $X$ est dense dans $I\!R^d$ (car il contient un ensemble dense $C_{F_1} \times C_{F_2} \times \ldots \times C_{F_d}$ où les $C_{F_i}$ sont les ensembles de continuité de $P(X \leq x_i)$. Notons par $D$ cet ensemble. On a donc pour tout $x \in D$, et pour tout $B$ $\mathcal{G}$-mesurable*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{X_n \leq x\} \cap B)$$

*existe.*

**Théorème 2.1.4** *Soient $E_1$ et $E_2$ deux espaces polonais. Supposons que $Y_n \xrightarrow{d} Y$, où tous les $Y_n$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $E_1$ définie sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ . Alors il y a équivalence entre les conditions suivantes*
*a) La suite $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ est $\mathcal{G}$-stable.*
*b) Pour tout variable aléatoire fixée $X, \mathcal{G}$-mesurable à valeurs dans $E_2$, on a que la suite aléatoire de vecteurs $(Y_n, X)$ converge conjointement en loi .*
*c) Pour tout variable aléatoire fixée $X, \mathcal{G}$-mesurable à valeurs dans $E_2$, on a que la suite aléatoire de vecteurs $(Y_n, X)$ converge $\mathcal{G}$-stablement.*

Démonstration: Montrons que a)$\Longrightarrow$ b).
Posons $B = X^{-1}(U)$ avec $U \in \mathcal{B}(I\!R)$ tel que $P(X \in \partial U) = 0$. On a pour tout $A \in \mathcal{B}$ tel

que $P(Y \in \partial A) = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow \infty} P((Y_n, X) \in A \times U) &= \lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \in A\} \cap X^{-1}(U)) \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \in A\} \cap B)
\end{aligned}$$

qui existe d'après a) avec $P((Y, X) \in \partial(A \times U)) = 0$ puisque

$$\partial(A \times U) \subset (E_1 \times \partial U) \cup (\partial A \times E_2)$$

et donc

$$P((Y, X) \in \partial(A \times U)) \leq P(X \in \partial U) + P(Y \in \partial A) = 0.$$

Comme la suite $(Y_n, X)$ est tendue, et on sait qu'il existe une loi limite possédant ces marges on a la convergence de la paire $(Y_n, X)$ d'après le théorème A.3.8.

b)$\Longrightarrow$ a).

Il suffit de prendre $X = I\!I_B$ avec $B$ $\mathcal{G}$-mesurable. On aura donc pour tout $A \in \mathcal{B}$ avec $P(Y \in \partial A) = 0$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(Y_n \in A, I\!I_B = 1)$$

existe d'où la stabilité de $Y_n$.

b)$\Longrightarrow$ c).

b) implique la convergence en loi du triplet $(Y_n, X, Z)$ avec $Z$ une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable à valeurs dans $E_2$ ce qui implique d'après ce qui précéde la stabilité du couple $(Y_n, X)$.

c)$\Longrightarrow$ b) est évident. **Q.E.D.**

**Théorème 2.1.5** *Soient $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$ deux suites de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(E, \rho)$ telle que $\rho(X_n, Y_n)$ converge en loi vers zéro. Si l'une d'elles est $\mathcal{G}$-stable alors l'autre l'est aussi.*

DÉMONSTRATION: Identique à celle du théorème 1.2.12.

**Théorème 2.1.6** *Soient $E_1, E_2$ et $E_3$ trois espaces polonais. Et soient $Y_n$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $E$ qui converge $\mathcal{G}$-stablement, $g$ une fonction continue de $E_1 \times E_2$ dans $E_3$ et $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $E_2$ $\mathcal{G}$-mesurable. Alors la suite $g(Y_n, X)$ est $\mathcal{G}$-stable.*

DÉMONSTRATION: Identique à celle du théorème 1.2.13.

**Théorème 2.1.7** *Il y a équivalence entre:*
*a) La suite $\{X_n\}$ est $\mathcal{G}$-stable.*
*b) pour toute variable aléatoire réelle $Z$ $\mathcal{G}$-mesurable et dans $L^1$ et pour tout $f : E \longrightarrow I\!R$ continue et bornée,*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E[f(X_n)Z] \ \text{ existe.}$$

DÉMONSTRATION: Comme $Z \in L^1$ alors il existe des constantes $\alpha_{i,k}$ $(1 \leq i \leq n)$ et des ensembles $B_{i,k}$ $(1 \leq i \leq m_k)$, $\mathcal{G}$-mesurables tel que

$$E\left|Z - \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_{i,k} I\!I_{B_{i,k}}\right| \underset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

et comme $f$ est bornée alors on a

$$E\left|f(X_n)Z - f(X_n)\sum_{i=1}^{m_k} \alpha_{i,k} I\!I_{B_{i,k}}\right| \leq \|f\|_\infty \, E\left|Z - \sum_{i=1}^{m_k} \alpha_{i,k} I\!I_{B_{i,k}}\right| \underset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc pour tout $Z \in L^1$

$$\lim_{n \to \infty} E[f(X_n)Z]$$

existe si et seulement si elle

$$\lim_{n \to \infty} E[f(X_n) I\!I_B]$$

existe pour tout $B \in \mathcal{G}$. Ce qui est équivalent à pour tout $B \in \mathcal{G}$ tel que $P(B) > 0$ et $f$ continue bornée

$$\lim_{n \to \infty} E[f(X_n)|B] = \lim_{n \to \infty} \int_E f(x) dP(X_n \in A|B)$$

existe. Or cette dernière est équivalente d'après le théorème A.3.3 à l'existence de

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(X_n \in A|B)$$

pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(X \in \partial A) = 0$. **Q.E.D.**

## 2.2 Convergence $\mathcal{G}$-stable vers une variable aléatoire dans $E$

**Définition 2.2.1** *Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $E$, définies sur un espace de probabilité commun $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui converge en loi vers une variable aléatoire $X$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ . On dit que $X_n$ converge $\mathcal{G}$-stablement vers $X$ si pour tout ensemble $\mathcal{G}$-mesurable $B$ , et pour tout $A \in \mathcal{B}$ avec $P(X \in \partial A) = 0$,*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(\{X_n \in A\} \cap B) = P(\{X \in A\} \cap B) \tag{4}$$

*On note cette convergence par*

$$X_n \xrightarrow{d} X \ \ (\mathcal{G} - stable).$$

**Théorème 2.2.2** *Supposons que $Y_n \xrightarrow{d} Y$, où tous les $Y_n$ sont des variables aléatoires dans $E$ et bâties sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ . Alors il y a équivalence entre les conditions suivantes*
*a) $Y_n \xrightarrow{d} Y \ \ (\mathcal{G} - stable)$;*
*b) Pour tout variable aléatoire fixée $X$ à valeurs dans $I\!R$, $\mathcal{G}$-mesurable, on a*

$$(Y_n, X) \xrightarrow{d} (Y, X);$$

*c) Pour tout variable aléatoire fixée $X, \mathcal{G}$-mesurable, on a*

$$(Y_n, X) \xrightarrow{d} (Y, X); \ \ (\mathcal{G} - stable)$$

DÉMONSTRATION: a) $\Longrightarrow$ b)

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \ \ (\mathcal{G}-\text{stable})$$

$\Longleftrightarrow$ pour tout $A \in \mathcal{B}$ avec $P(Y \in \partial A) = 0, B \in \mathcal{G}$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \in A\} \cap B) = P(\{Y \in A\} \cap B).$$

Prenons $B = \{X \in A_1\}$ avec $A_1 \in \mathcal{B}(I\!R)$ et $P(X \in \partial A_1) = 0$, on aura

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(\{Y_n \in A\} \cap \{X \in A_1\}) = P(\{Y \in A\} \cap \{X \in A_1\}),$$

avec $P((Y,X) \in \partial(A_1 \times A_2)) = 0$ car $P((Y,X) \in \partial(A \times A_1)) \leq P(X \in \partial A_1) = 0$ ou $P((Y,X) \in \partial(A \times A_1)) \leq P(Y \in \partial A) = 0$.
Et donc le théorème A.3.8 nous permet de conclure la convergence en loi du couple $(Y_n, X)$ vers $(Y, X)$.
b) $\Longrightarrow$ a)
Il suffit de prendre $X = I\!I_B$, avec $B$ $\mathcal{G}$-mesurable. On aura donc pour tout $A \in \mathcal{B}$ avec $P(Y \in \partial A) = 0$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(Y_n \in A, I\!I_B = 1) = P(Y \in A, I\!I_B = 1).$$

b) $\Longrightarrow$ c) évident.
b) implique pour toute variable aléatoire $Z$ $\mathcal{G}$-mesurable

$$(Y_n, X, Z) \xrightarrow{d} (Y, X, Z).$$

Comme on a montré que b) implique a) alors on a

$$(Y_n, X) \xrightarrow{d} (Y, X); \ \ (\mathcal{G}-\text{stable}).$$

c) $\Longrightarrow$ b) évident.

**Théorème 2.2.3** *Soient $E_1, E_2$ et $E_3$ trois espaces polonais. Supposons que $Y_n \xrightarrow{d} Y$ ($\mathcal{G}$-stable), où tous les $Y_n$ sont des variables aléatoires dans $E_1$ bâties sur le même espace*

*$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ . Soient $X$ une variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable à valeurs dans $E_2$ et $g$ une fonction continue de $E_1 \times E_2$ dans $E_3$. Alors*

$$g(Y_n, X) \xrightarrow{d} g(Y, X) \ \ (\mathcal{G} - stable)$$

Démonstration: Identique à celle du théorème 1.3.5.

**Théorème 2.2.4** *Soient $X_n, Y_n$ deux suites de variables aléatoires définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(E, \rho)$, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $X$ une autre variable aléatoire à valeurs dans $E$ . Si*

$$X_n \xrightarrow{d} X \ \ (\mathcal{G} - stable),$$

*et*

$$\rho(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} 0$$

*alors*

$$Y_n \xrightarrow{d} X \ \ (\mathcal{G} - stable).$$

Démonstration: Identique à celle du théorème 1.3.6.

**Théorème 2.2.5** *Soient $E_1, E_2$ et $E_3$ trois espace polonais. Et soient $X_n, X$ des variables aléatoires à valeurs dans $E_1$ et $Y_n, Y$ des variables aléatoires à valeurs dans $E_2$ toutes définie sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,$\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $g$ une fonction de $E_1 \times E_2$ dans $E_3$ continue. Supposons que $X_n \xrightarrow{P} X$ et $X$ est $\mathcal{G}$-mesurable. Si*

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \ \ (\mathcal{G} - stable),$$

*alors*

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} g(X, Y) \ \ (\mathcal{G} - stable).$$

Démonstration: Identique à celle du théorème 1.3.7.

**Théorème 2.2.6** *Il y a équivalence entre:*
*a)* $X_n \xrightarrow{d} X$ *($\mathcal{G}$-stable)*
*b) pour toute variable aléatoire réelle* $Z$ $\mathcal{G}$*-mesurable et dans* $L^1$ *et pour tout* $f : E \longrightarrow I\!R$ *continue et bornée,*

$$E[f(X_n)Z] \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} E[f(X)Z].$$

DÉMONSTRATION: Identique à celle du théorème 2.1.7 en identifiant la limite de $P(\{X_n \in A\} \cap B)$ qui est égale à $P(\{X \in A\} \cap B)$.

## 2.3 Relation entre la convergence $\mathcal{G}$-stable et autre type de convergence dans $E$

**Théorème 2.3.1** *Soit* $(X, X_1, X_2, \ldots, )$ *une suite de variables aléatoires définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *à valeurs dans* $E$ *et supposons que* $X$ *est* $\mathcal{G}$*-mesurable. Alors on a équivalence entre les affirmations suivantes:*
*i)* $X_n$ *converge en probabilité vers* $X$*.*
*ii)* $X_n$ *converge vers* $X$ *($\mathcal{G}$-stable).*

DÉMONSTRATION: Identique à celle du théorème 1.4.1.

**Corollaire 2.3.2** *Soit* $(X, X_1, X_2, \ldots)$ *une suite de variables aléatoires intégrables définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *à valeurs dans un espace de Banach* $(E, \|.\|)$ *et supposons que* $X$ *est* $\mathcal{G}$*-mesurable. Alors il y a équivalence entre*
*(i)* $X_n$ *converge stablement vers* $X$ *et* $\{\|X_n\|\}$ *est uniformément intégrable.*
*(ii)* $X_n$ *converge fortement dans* $L^1$ *vers* $X$*.*

DÉMONSTRATION: Identique à celle du théorème 1.4.3.

**Corollaire 2.3.3 (Mordecki [37])** *Soient* $X_n$ *et* $X$ *deux variables aléatoires à valeurs dans* $E$*. Et notons par* $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ *l'ensemble des mesures de probabilité* $\tilde{P}$ *absolument continue*

*par rapport à $P$ Alors on a équivalence entre*
*(i) $X_n$ converge $\mathcal{G}$-stable vers $X$;*
*(ii) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}(\tilde{P})} X \quad \forall \tilde{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$.*

DÉMONSTRATION: (i)$\Longrightarrow$ (ii) est évident.
Réciproquement il suffit d'appliquer le théorème 2.2.6 avec

$$Z = \frac{d\tilde{P}}{dP}.$$

## 2.4 La $\mathcal{G}$-stabilité avec une densité $\alpha$ dans $E$

Le but de cette section est de montrer un résultat analogue au théorème 2.2.5 dans le cas où $Y_n$ est une suite $\mathcal{G}$-stable avec densité $\alpha$. Pour cela on aura besoin d'introduire les suites bi-probabilité. La référence principale pour cette section est Fischler [19].

### 2.4.1 Suite $\mathcal{G}$-stable de bi-probabilités

**Définition 2.4.1** *Nous appellerons par suite bi-probabilité une application $P(\cdot,\cdot) : \mathcal{B} \times \mathcal{G} \longrightarrow I\!R$ telle que pour chaque $B \in \mathcal{G}$ et $A \in \mathcal{B}$ $P(.,B)$ et $P(A,.)$ sont des mesures sur $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$ respectivement et telle que $P(E,\Omega) = 1$.*

**Définition 2.4.2** *Une suite $\{P_n\}$ de bi-probabilités est appelée $\mathcal{G}$-stable s'il existe une mesure aléatoire $\alpha(.,.) : \Omega \times \mathcal{B} \longrightarrow I\!R$ telle que pour chaque $B \in \mathcal{G}$,*

$$P_n(.,B) \Longrightarrow R(.,B) = \int_B \alpha(\omega,.)dP(\omega);$$

*(dans le sens de la convergence faible) c'est à dire, pour tout $B \in \mathcal{F}$, on a*

$$P_n(A,B) \longrightarrow R(A,B) \text{ si } R(\partial A,B) = 0;$$

*$\partial B$ étant la frontière du borélien $B$.*

**Définition 2.4.3** *Soit $\{P_\alpha(.) : \alpha \in I\}$ une collection de probabilités et $f$ une transformation; la probabilité engendrée par $P_\alpha$ et $f$ est désignée par $P_\alpha^f(D) = P(f^{-1}(D))$ pour tout $D$ telle que $f$ est définie.*

**Théorème 2.4.4 (Fischler [19])** *Soit $\{P_n\}$ est une suite de bi-probabilités $\mathcal{G}$-stable avec densité $\alpha$ et soit $g$ est une transformation de $E$ dans $E$ telle qu'il existe un ensemble négligeable $N$ telle que $\alpha(\omega, D_g) = 0$ sur $N^c$ où $D_g$ est l'ensemble des points de discontinuité de $f$. Alors les bi-probabilités $\{P_n^g\}$ sont elles aussi $\mathcal{G}$-stable avec densité $\alpha^g$.*

Démonstration: Soit $B$ fixé. Alors on a

$$R(D_g, B) = \int_B \alpha(\omega, D_g) dP(\omega) = \int_{B-N} \alpha(\omega, D_g) dP(\omega) = 0.$$

Si $R(E, B) = 0$ alors c'est évident. Si $R(E, B) > 0$ alors $\dfrac{R(., B)}{R(E, B)}$ est une probabilité. Et comme $P_n(E, B) \to R(E, B)$ alors il existe $n_0$ telle que pour tout $n > n_0$ $P_n(E, B) \neq 0$ et donc $\dfrac{P_n(., B)}{P_n(E, B)}$ est aussi une probabilité à partir du rang $n_0$. Donc

$$\frac{P_n(., B)}{P_n(E, B)} \Longrightarrow \frac{R(., B)}{R(E, B)}$$

ce qui implique d'après le théorème A.3.4,

$$\frac{P_n^g(., B)}{P_n^g(E, B)} \Longrightarrow \frac{R^g(., B)}{R^g(E, B)}.$$

Mais

$$R^g(A, B) = R(g^{-1}(A), B) = \int_B \alpha(\omega, g^{-1}(A)) dP(\omega) = \int_B \alpha^g(\omega, A) dP(\omega).$$

**Q.E.D.**

Le prochain résultat nous dit quand on a le droit de remplacer l'événement $B$, dans la définition d'une suite stable, par une suite d'événements.
Notons par $Q_n^A(.)$ pour $P_n(A, .)$.

**Lemme 2.4.5 (Fischler [19])** *Si $\{P_n\}$ est $\mathcal{G}$-stable avec une densité $\alpha$ et si $F_n, F \in \mathcal{G}$ sont tels que $Q_n^E(F_n \triangle F) \longrightarrow 0$ alors*

$$P_n(A, F_n) \longrightarrow \int_F \alpha(\omega, A) dP(\omega), \text{ si } R(\partial A, F) = 0.$$

Démonstration: On a

$$\begin{aligned}|P_n(A,F_n)-P_n(A,F)| &= \left|\int_\Omega I_{F_n}(\omega)dQ_n^A(\omega)-\int_\Omega I_F(\omega)dQ_n^A(\omega)\right|\\ &\leq \int_\Omega |I_{F_n}-I_F|dQ_n^A=\int_\Omega I_{F_n\triangle F}dQ_n^A\\ &= Q_n^A(F_n\triangle F)\leq Q_n^E(F_n\triangle F)\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

**Q.E.D.**

Venons-en au cas spécial qui nous intéresse.

### 2.4.2 La $\mathcal{G}$-stabilité avec une densité $\alpha$ dans $E$

**Définition 2.4.6** *On dit qu'une suite de variables aléatoires $\{X_n\}, X_n : \Omega \longrightarrow E$, est $\mathcal{G}$-stable avec une densité $\alpha$ si pour tout $A \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{G}$,*

$$P(\{X_n\in A\}\cap B)\longrightarrow R_\alpha(A,B)=\int_B \alpha(\omega,A)dP(\omega), \quad \textit{quand } R_\alpha(\partial A,B)=0.$$

*Si on écrit $P_n(A,B)=P(\{X_n\in A\}\cap B)$ alors $\{P_n\}$ est $\mathcal{G}$-stable.*

**Lemme 2.4.7** *Si $X_n \xrightarrow{P} X$, alors on a*

$$P[(X_n\in A)\triangle(X\in A)]\longrightarrow 0$$

*pour tout Borélien $A$ tel que $P(X\in\partial A)=0$.*

Démonstration: Voir [6].

On a immédiatement:

**Lemme 2.4.8 (Fischler [19])** *Si $X_n \xrightarrow{P} X$, si $\{Y_n\}$ est $\mathcal{G}$-stable alors, on a pour tout $A\in\mathcal{B}, Q_n^E(F_n\triangle F)\longrightarrow 0$ où $F_n=\{X_n\in A\}$ et $F=\{X\in A\}$.*

**Définition 2.4.9** *Soit $\mathcal{B}^2$ la tribu de Borel de $E\times E$. Si $D\in\mathcal{B}^2$, et $X$ est une variable aléatoire de $\Omega$ dans $E$, la section aléatoire de $D$ par $X$ est désignée par $D_{X(.)}$ et définie par*

$$D_{X(.)}=\{y : y\in E, (y,X(\omega))\in D\}.$$

**Lemme 2.4.10 (Fischler [19])** *Si $\{Y_n\}$ est stable avec une densité $\alpha$ et si $X_n \xrightarrow{P} X$, alors les bi-probabilités $\{P_n\}$, définies sur $\mathcal{B}^2 \otimes \mathcal{F}$ par*

$$P_n\left(D, X_n^{-1}(B)\right) = P\left(\{(Y_n, X_n) \in D\} \cap B\right),$$

*sont aussi stables avec une densité $\nu$ définie par $\nu(\omega, D) = \alpha(\omega, D_{X(\omega)})$.*

Démonstration: Il faut démontrer que pour tout $B \in \mathcal{F}$ et $D \in \mathcal{B}^2$ avec $R_\nu(\partial D, B) = 0$ on a $P_n\left(D, X_n^{-1}(B)\right) \longrightarrow R_\nu(D, B)$. L'idée de la démonstration est d'utiliser un résultat de Kolmogorov et Prohorov (voir [6] théorème 2.2, corollaire 1 et démonstration du théorème 3.1) qui démontre que pour le produit cartésien de deux espaces il suffit de montrer la convergence pour les pavés avec frontière de probabilité zéro.
Supposons d'abord que $D = E_1 \times E_2$, avec $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$. La valeur de $D_{X(\omega)}$ dans ce cas est

$$D_{X(\omega)} = \begin{cases} E_1 & \text{si } \omega \in F^2 = \{X \in E_2\} \\ \emptyset & \text{si } \omega \notin F^2 \end{cases}$$

Ainsi on a

$$P_n\left(D, X_n^{-1}(B)\right) = P\left(\{Y_n \in E_1\} \cap \{X_n \in E_2\} \cap B\right) = P_n\left(E_1 \cap \{F_n^2 \cap B\}\right),$$

où $F_n^2 = \{X_n \in E_2\}$.

Comme $X_n \xrightarrow{P} X$ et $\{Y_n\}$ est $\mathcal{G}$-stable avec une densité $\alpha$ donc d'après le lemme 2.4.8 on a

$$P_n\left(A \cap \{F_n^2 \cap B\} \triangle \{F \cap B\}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On aimerait bien appliquer le lemme 2.4.5 avec $F_n = F_n^2 \cap B$ pour en conclure que

$$P_n\left(D, X_n^{-1}(B)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{F^2 \cap B} \alpha(\omega, E_1) dP(\omega) = \int_B \alpha(\omega, D_{X(\omega)}) dP(\omega) = R_\nu(D, B).$$

Cependant on doit vérifier que

$$R(\partial E_1, F^2 \cap B) = 0 \text{ si } R_\nu(\partial D, B) = 0.$$

soient $D \in \mathcal{B}^2$ et $D_a$ la section de $D$ en $a$, c'est à dire

$$D_a = \{y : y \in E, (y, a) \in D\},$$

alors $\partial(D_a) \subset (\partial D)_a$. En effet, soient $x \in \partial(D_a), x_n^1 \in D_a$ et $x_n^2 \notin D_a$ tel que $x_n^1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ et $x_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ et donc on a

$$z_n^1 = (x_n^1, a) \in D, \quad z_n^2 = (x_n^2, a) \notin \overline{D}.$$

Or

$$z_n^1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x, a) \text{ et } z_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x, a)$$

et donc $(x, a) \in \partial D$. En particulier si $D = E_1 \times E_2$ alors $\partial E_1 \subset (\partial D)_a$. Et enfin on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= R_\nu(\partial D, B \cap F_2) \\ &= \int_{B\cap F_2} \alpha(\omega, [\partial D]_{X(\omega)}) dP(\omega) \\ &\geq \int_{B\cap F_2} \alpha(\omega, \partial E_1) dP(\omega) = R_\nu(\partial E_1, B \cap F_2). \end{aligned}$$

**Q.E.D.**

**Théorème 2.4.11 (Fischler [19])** *Si $\{Y_n\}$ est $\mathcal{G}$-stable avec une densité $\alpha$ et si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $g$ est une transformation de $E \times E$ dans $E$ telle qu'il existe un ensemble négligeable $N$ telle que $\nu(\omega, D_g) = 0$ sur $N^c$ où $D_g$ est l'ensemble des points de discontinuité de $f$ alors $\{g(Y_n, X_n)\}$ est aussi $\mathcal{G}$-stable avec une densité $\nu^g$ où $\nu$ est définie dans le lemme 2.4.10.*

Démonstration: D'après le lemme 2.4.10 on a que $P(\{(Y_n, X_n) \in D\} \cap B)$ est $\mathcal{G}$-stable avec une densité $\nu$, ce qui implique donc d'après le théorème 2.4.4 que

$$P^g(\{(Y_n, X_n) \in D\} \cap B)$$

est $\mathcal{G}$-stable avec une densité $\nu^g$. **Q.E.D.**

**Théorème 2.4.12** *Soit $X_n$ une suite aléatoire $\mathcal{G}$-stable avec densité $\alpha$ sur l'espace $S = (\Omega, \mathcal{F}, P)$. Soit $P^\star$ une autre mesure de probabilité sur $\mathcal{F}$, qui est absolument continue par rapport à $P$. Alors la suite $X_n$ est $\mathcal{G}$-stable sur l'espace de probabilité $S^\star = (\Omega, \mathcal{F}, P^\star)$ avec la même densité $\alpha$.*

DÉMONSTRATION: Identique à celle du théorème 1.5.5.

**Théorème 2.4.13** *Soit $\{X_n\}$ une suite définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $E$ qui est $\mathcal{G}$-stable avec une densité $\alpha$. et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{E}', P')$, une application mesurable $T : (\Omega', \mathcal{E}') \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F})$, et une variable aléatoire $X'$ définie sur $(\Omega', \mathcal{E}')$ tel que si $\mathcal{G}' = T^{-1}\mathcal{G}$ et $X'_n(\omega') = X_n(T\omega')$ alors $X'_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} X'$ ($\mathcal{G}'$-stable).*

DÉMONSTRATION: Identique à celle du théorème 1.5.6.

## 2.5 Suites de variables aléatoires $\mathcal{G}$-mélangeante dans $E$

**Définition 2.5.1** *Une suite $Y_n$ de variable aléatoire de $\Omega$ dans $E$ est dite $\mathcal{G}$-mélangeante si pour tout $B \in \mathcal{G}$ et $A \in \mathcal{B}$ avec $P(Y \in \partial A) = 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{Y_n \in A\} \cap B) = P(B)P(Y \in A).$$

**Théorème 2.5.2** *Supposons que $Y_n \xrightarrow{d} Y$, où tous les $Y_n$ sont sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $E$. Alors il y a équivalence entre les conditions suivantes*
*a) $Y_n \xrightarrow{d} Y$ ($\mathcal{G}$-mélangeante);*
*b) Pour toute variable aléatoire fixée $X, \mathcal{G}$-mesurable, on a*

$$(Y_n, X) \xrightarrow{d} (Y^\star, X),$$

*où $Y^\star$ a la même loi que $Y$ et indépendante de $\mathcal{G}$.*
*c) Pour toute variable aléatoire fixée $X, \mathcal{G}$-mesurable, on a*

$$(Y_n, X) \xrightarrow{d} (Y^\star, X),\ (\mathcal{G} - stable)$$

*où $Y^\star$ a la même loi que $Y$ et indépendante de $\mathcal{G}$.*

DÉMONSTRATION: a) $\Longrightarrow$ b).
Soient $A_1 \in \mathcal{B}, A_2 \in \mathcal{B}(I\!R)$ avec $P(Y \in \partial A_1) = 0$ et $P(X \in \partial A_2) = 0$. On a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P((Y_n, X) \in A_1 \times A_2) &= \lim_{n\to\infty} P(Y_n \in A_1, X \in A_2)\\ &= P(Y \in A_1)P(X \in A_2) \text{ d'après a)}\\ &= P(Y^\star \in A_1)P(X \in A_2) \ \text{ car } Y^\star \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y\\ &= P(Y^\star \in A_1, X \in A_2)\end{aligned}$$

car $Y^\star$ est indépendante de $\mathcal{G}$.
Et $P((Y^\star, X) \in \partial(A_1 \times A_2)) = 0$ car $P(Y^\star \in \partial A_1) = P(Y \in \partial A_1) = 0$ et $P(X \in \partial A_2) = 0$.
D'où d'après le théorème A.3.8 on obtient la convergence en loi de $(Y_n, X)$ vers $(Y, X)$.
b) $\Longrightarrow$ a).
Il suffit de prendre $X = I\!I_B$ avec et on aura

$$(Y_n, I\!I_B) \Longrightarrow Z = (Y^\star, I\!I_B)$$

ce qui implique pour tout $A \in \mathcal{B}$ avec $P(Y^\star \in \partial A) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \in A, I\!I_B = 1) = P(Z \in A \times \{1\}) = P(Y^\star)P(\{1\})$$

car $Y^\star$ est indépendante de $\mathcal{G}$ et $P((Y^\star, X) \in \partial(A \times \{1\}) = 0$ car $P(Y^\star \in \partial A) = P(Y \in \partial A) = 0$.
c) $\Longleftrightarrow$ a) d'après le théorème 1.3.4. **Q.E.D.**

**Théorème 2.5.3** *Soient $X_n, Y_n$ deux suites de variables aléatoires réelles, $X, Y$ deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace, et $g$ une fonction de $E \times E$ dans $I\!R$ continue. Supposons que $X_n \xrightarrow{P} X$. Si*

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \ \ (\mathcal{G} - \textit{mélangeante}),$$

*alors*

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} g(X, Y^\star) \ \ (\mathcal{G} - stable),$$

*où* $Y^\star$ *a la même loi que* $Y$ *et indépendante de* $\mathcal{G}$*.*

DÉMONSTRATION: Identique à celle du théorème 1.6.7.

# CHAPITRE 3

# THÉORÈME DE LA LIMITE CENTRALE

## 3.1 Introduction

Ce chapitre est motivé par l'ensemble des travaux portant sur le théorème de limite centrale pour les martingales, travaux initié par le premier théorème de ce genre dû à Lévy(1935), suite à l'article de Bernstein(1927). Soit $\{S_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une martingale de carré intégrable, et d'espérance nulle. Et on note par $X_n = S_n - S_{n-1},\ n \geq 2$, et $X_1 = S_1$ la différence de martingale. Lévy a introduit la variance conditionnelle pour les martingales

$$V_n^2 = \sum_1^n E(X_i^2 | \mathcal{F}_{i-1}), \tag{5}$$

qui joue un rôle important dans la théorie limite des martingales. Le résultat de Lévy nécessitait l'hypothèse forte que pour tout $n$, $V_n^2$ est constante presque sûrement. Plus tard Billingsley(1961) et Ibragimov(1963) ont établi le théorème de limite centrale pour des martingales de différences stationnaires et ergodiques. Pour de telles martingales la condition de variance conditionnelle devient asymptotiquement constante:

$$s_n^{-2} V_n^2 \xrightarrow{P} 1,$$

où $s_n^2 = E(V_n^2) = E(S_n^2)$.
D'autre améliorations ont été réalisées par Rosén(1967), Dvoretzky(1969,1971, 1972), Loynes(1969,1970) et Bergstr$\ddot{o}$m(1970). Brown(1971) a montré que c'est la condition 5 qui est cruciale et non l'ergodicité ou la stationnarité. McLeish(1974) a introduit une élégante méthode de preuve qui a abouti à un nouveau théorème de limite centrale et de nouveaux principes d'invariances. Les conditions de principes d'invariances de McLeish ont été un petit peu affaiblies par Aldous(1978). Les principes d'invariances de martingales ont été étudiés en détails par Drogin(1972), Rootzén(1977,1980) et G$\ddot{a}$nssler et H$\ddot{a}$nsler(1980). Durrett et Resnick(1978) ont présenté une approche unifiée pour obtenir des principes d'invariance pour la convergence à plusieurs classes de distributions. Aldous et Eagleson(1978) ont trouvé des conditions suffisantes pour qu'une martingale converge stablement vers un mélange de distributions normales. Le fait de savoir que la convergence est stable peut être utile pour plusieurs raisons:
a) Si une martingale converge stablement alors elle converge toujours si on fait un changement de mesure absolument continue.
b) Si la convergence du théorème de limite centrale est stable alors si on normalise aléatoirement on obtient encore un théorème de limite centrale.
c) Si la limite est stable le théorème de limite centrale peut être étendu à des indices aléatoires. Fischler (1976) a prouvé un théorème de limite fonctionnelle pour des indices aléatoires en utilisant l'idée de changement de temps aléatoire comme dans Billingsley(1968).
Pour le cas des martingales cádlàg Rebolledo [39] (1980) a montré, pour des martingales locales à saut borné, que si

$$< M_n >_t \xrightarrow{P} A(t)$$

où $A$ est une fonction réelle, continue et croissante, alors

$$M_n \xrightarrow{d} M.$$

## 3.2 Théorème de la limite centrale pour des martingales continues

Soit $\mathcal{C} = C([0,\infty); I\!R)$ l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Ceci est équivalent à dire que $\mathcal{C}$ est la limite projective des espaces de Banach $\{C[0,n]; I\!R)\}_{n\geq 1}$ munis de la norme sup. Soit aussi $D$ l'espace des fonctions càdlàg sur $[0,\infty)$ muni de la topologie de Skorohod définie par

$$d(x,y) = \inf_{\lambda\in\Lambda}\left[\gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty e^{-u} d(x,y,\lambda,u)du\right],$$

où

$$d(x,y,\lambda,u) = \sup_{t\geq 0} q(x(t\wedge u), y(\lambda(t)\wedge u))$$

avec $q(x,y) = \min(|x-y,1)$, $\Lambda$ est l'ensemble des fonctions continues, croissante de $[0,\infty)$ dans $[0,\infty)$ et Lipschitz tel que

$$\gamma(\lambda) = \sup_{s>t\geq 0} |\log \frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}| < \infty.$$

Finalement dénotons pas $\mathcal{M}$ l'espace des martingales de carré intégrables à valeurs dans $\mathcal{C}$.

**Théorème 3.2.1** *Soit $\{M_n\}$ une suite dans $\mathcal{M}$. Si $M_n$ est tendue dans $\mathcal{C}$ alors $<M_n>$ est aussi tendue dans $\mathcal{C}$. Si $M_n(0)$ est aussi tendue, alors on a l'équivalence.*

Démonstration: Supposons que la suite $M_n$ est tendue dans $\mathcal{C}$.

Appliquons le critère d'Aldous (lemme A.4.2) pour montrer la tension de la suite $<M_n>$. La condition (i) du critère d'Aldous est triviallement satisfaite car $<M_n>_0 = 0$ et $<M_n> \in \mathcal{C}$.

Pour vérifier la condition (ii), on appliquera le lemme A.4.4 avec

$$X(t) = <M_n>_{t+\tau_n} - <M_n>_{\tau_n}$$

et

$$Y(t) = \sup_{0\leq s\leq t} \{M_n(s+\tau_n) - M_n(\tau_n)\}^2,$$

où $\tau_n$ est un temps d'arrêt uniformément borné par $T$ pour tout $n$. Il faut noter que pour tout temps d'arrêt prévisible $\tau$, on a $E(X_\tau) \leq E(Y_\tau)$.

Soit $\delta_n$ une suite de nombres positifs bornés par 1 et tendant vers zéro. D'après le lemme A.4.4, on a, pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} P(<M_n>_{\tau_n+\delta_n} - <M_n>_{\tau_n} \geq \varepsilon) &\leq P\left(|M_n(\tau_n+\delta_n) - M_n(\tau_n)| \geq \sqrt{\eta}\right) \\ &\quad + \frac{\eta}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{\eta}{\varepsilon^2} + P\left\{w(M_n, \delta_n, [0, T+1]) > \sqrt{\eta}\right\}, \end{aligned}$$

où

$$w(x, \delta, [a,b]) = \sup_{|t-s|\leq \delta, s,t \in [a,b]} |x(t) - x(s)|.$$

Comme $M_n$ est tendue dans $\mathcal{C}$, alors $P\left\{w(M_n, \delta_n, [0,T+1]) > \sqrt{\eta}\right\}$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Posons $\eta = \varepsilon^3$. Alors

$$\limsup_{n\to\infty} P\left\{<M_n>_{\tau_n+\delta_n} - <M_n>_{\tau_n} \geq \varepsilon\right\} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la condition (ii) du lemme (A.4.2) est vérifiée. La suite $<M_n>$ est donc tendue dans $\mathcal{C}$.

Réciproquement supposons que la suite $<M_n>$ est tendue et que $M_n(0)$ est tendue. Comme $M_n$ est continue, la condition (i) du lemme (A.4.2) est vérifiée.

En posant

$$X = \{M_n(s+\tau_n) - M_n(\tau_n)\}^2$$

et

$$Y = <M_n>_{s+\tau_n} - <M_n>_{\tau_n},$$

on a bien $E(X_\tau) \leq E(Y_\tau)$, pour tout temps d'arrêt prévisible $\tau$.

D'après le lemme A.4.4, on a, pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} P\left\{|M_n(\tau_n+\delta_n) - M_n(\tau_n)| \geq \varepsilon\right\} &\leq P\left\{< M_n >_{\tau_n+\delta_n} - <M_n>_{\tau_n} > \eta\right\} \\ &\quad + \frac{\eta}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon, \delta, \eta > 0$. Or

$$<M_n>_{\tau_n+\delta_n} - <M_n>_{\tau_n} > \leq w\left(<M_n>, \delta_n, [0, T+1]\right)$$

qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ car $<M_n>$ est tendue. En choisissant $\eta = \varepsilon^3$, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} P\left\{|M_n(\tau_n+\delta_n) - M_n(\tau_n)| \geq \varepsilon\right\} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la condition (ii) du lemme (A.4.2) est vérifiée. D'où la tension de la suite $M_n$. **Q.E.D.**

Dans la suite on va énoncer un théorème de la convergence en loi d'une martingale avec sa varition quadratique en faisant l'hypothèse que la martingale converge en loi. Plus tard nous allons comparer ce résultat avec le théorème principal de cette section.

Mordecki [37] a montré qu'il y a une équivalence entre la convergence stable d'une martingale $X_n$ vers une martingale $X$ continue et à accroissement conditionnel indépendant et la convergence en probabilité de la variance quadratique de $X_n$ vers la variance quadratique de $X$ pour tout $t \geq 0$. Le théorème suivant est un cas particulier du théorème 1 de [37].

**Théorème 3.2.2** *Soit $M_n$ une suite de martingales continues à carré intégrable définie sur la base stochastique $B^n = (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{F}^n, P)$, avec $\mathrm{F}^n = (\mathcal{F}_t^n : t \geq 0)$. Considerons la probabilité de transition $Q(\omega, d\gamma)$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $\big(\mathcal{C}(I\!R^d), C(I\!R^d)\big)$ où $C(I\!R^d)$ est la tribu de $\mathcal{C}(I\!R^d)$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$ le processus canonique sur $\mathcal{C}(I\!R^d)$ définie par $X_t(\gamma) = \gamma_t$ est une martingale continue. Soit $M$ une martingale continue définie sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathrm{F}}, \overline{P})$ où $\overline{\Omega} = \Omega \times \mathcal{C}(I\!R^d)$, $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes C(I\!R^d)$, $\overline{P}(d\omega, d\gamma) = P(d\omega)Q(\omega, d\gamma)$, $\overline{\mathrm{F}} = \big(\cap_{s>t}(\mathcal{F} \otimes C(I\!R^d) : t \geq 0\big)$. Si*

$$M_n \xrightarrow{d} M \quad (\mathcal{F} - stable)$$

*alors*

$$(M_n, < M_n >) \xrightarrow{d} (M, < M >) \quad (\mathcal{F} - stable).$$

Démonstration: D'après le théorème (2.3.3) il suffit de montrer que

$$(M_n, < M_n >) \xrightarrow{\mathcal{L}(\tilde{P})} (M, < M >).$$

Comme

$$M_n \xrightarrow{d} M \quad (\mathcal{F} - stable)$$

alors d'après le théorème (2.3.3) on a

$$M_n \xrightarrow{\mathcal{L}(\tilde{P})} M.$$

Or on sait que la variation quadratique est invariante par tout changement de mesure absolument continue [27], et donc en appliquant le théorème (A.7.9) sous $\tilde{P}$ on obtient que

$$(M_n, < M_n >) \xrightarrow{\mathcal{L}(\tilde{P})} (M, < M >).$$

Dans toute la suite toutes les martingales et les mouvements browniens sont réels.

**Théorème 3.2.3** *Soit $\{B_n\}_{n\geq 1}$ une suite de mouvements browniens pour leurs filtrations naturelles $\mathcal{F}_n(t) = \sigma(B_n(s); s \leq t)$. Soit $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ une suite de $L^2$-martingales continues telle que $M_n(0)$ est tendue. Supposons que*
*(i) Pour tout $t > 0$, il existe $p = p(t) > 2$ tel que $\sup_n E(|M_n(t)|^p) < \infty$,*
*(ii) $<M_n>$ est tendue sur $\mathcal{C}$,*
*(iii) $<M_n, B_n>$ converge en loi vers $0$ dans $\mathcal{C}$.*

*Alors la suite $(M_n, <M_n>, <M_n, B_n>, B_n)_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}^4$ et l'ensemble des points limites de $(M_n, <M_n>, <M_n, B_n>, B_n)$ est de la forme $(M, A, 0, B)$, où $B$ est un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t = \sigma(B(s); s \leq t)$, $(M(t), \mathcal{F}_t; t \geq 0)$ est une $L^2$-martingale et $A =<M>$. De plus $M = W \circ A$, où $W$ est un mouvement brownien indépendant de $A$ et de la filtration $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$.*

**Corollaire 3.2.4** *Soit $\{B_n\}$ une suite de mouvement browniens pour leurs filtrations naturelles $\mathcal{F}_n(t) = \sigma(B_n(s); s \leq t)$. Et soit $\{M_n(t), \mathcal{F}_n(t); t \geq 0\}_{n\geq 1}$ une suite de $L^2$-martingales continues tel que $M_n(0) = 0$. Supposons que*
*(i) Pour tout $t > 0$, il existe $p = p(t) > 2$ tel que $\sup_n E(|M_n(t)|^p) < \infty$,*
*(ii) $<M_n>$ converge en loi dans $\mathcal{C}$ vers $A$,*
*(iii) $< M_n, B_n >\Longrightarrow 0$ dans $\mathcal{C}$.*

*Alors la suite $(M_n, < M_n >)_{n\geq 1}$ converge en loi vers $(M, A)$ où $M = W \circ A$ avec $W$ un mouvement brownien indépendant de $A$ et de la filtration $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$.*

**Corollaire 3.2.5** *Soit $B$ un mouvement brownien pour sa filtration naturelle $\mathcal{F}(t) = \sigma(B(s); s \leq t)$. Et soient $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une famille de $\sigma$-algèbre telle que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}$ et $(M_n, \mathcal{F}_n)$ une suite de $L^2$-martingales continues tel que $M_n(0) = 0$. Supposons que*
*(i) Pour tout $t > 0$, il existe $p = p(t) > 2$ tel que $\sup_n E(|M_n(t)|^p) < \infty$,*
*(ii) $<M_n>$ converge en probabilité vers $A$,*
*(iii) $< M_n, B > \Longrightarrow 0$ dans $\mathcal{C}$.*

*Alors la suite $(M_n, <M_n>)_{n\geq 1}$ converge stablement vers $(M, A)$ où $M = W \circ A$ avec $W$ un mouvement brownien indépendant de $A$ et de la filtration $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$.*

**Remarque 3.2.6** *Le résultat du corollaire 3.2.4 est plus intéressant que le théorème 3.2.2 car en pratique on a de l'information sur la variation quadratique d'une martingale et on veut savoir le comportement de la martingale elle même. De plus les conditions du corollaire 3.2.4 sont faciles à vérifier.*

Démonstration du théorème 3.2.3: Soit

$$Z_n = (M_n, <M_n>, <M_n, B_n>, B_n).$$

Comme $B_n$ et $<M_n, B_n>$ convergent en loi dans $\mathcal{C}$, alors ils sont tendus. De plus, par hypothèse $M_n(0)$ est tendue et $<M_n>$ est tendue dans $\mathcal{C}$. Donc d'après le théorème 3.2.1, $M_n$ l'est aussi. Par conséquent, $Z_n$ est une suite tendue dans $\mathcal{C}^4$ car le produit d'ensembles compacts est compact.
D'après le théorème de Skorohod A.4.5, il existe une sous-suite $n_k$, un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}', P')$, des processus continus $\{Z'_{n_k}\}$ et $Z'$ définis sur $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ tels que $Z_{n_k} \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z'_{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ et

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} |Z'_{n_k}(t) - Z'(t)| = 0 \ \ p.s.,$$

pour tout $T > 0$.
Posons

$$Z'_{n_k} = (M'_{n_k}, A'_{n_k}, C'_{n_k}, B'_{n_k})$$

et

$$Z' = (M', A', C', B').$$

Nous allons montrer que $B'_{n_k}$ est un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{G}_{n_k}(t) = \sigma\{B'_{n_k}(s); 0 \le s \le t\}$, que $(M'_{n_k}(t), \mathcal{G}_{n_k}(t); t \ge 0)$ est une $L^2$-martingale avec $<M'_{n_k}>= A'_{n_k}$ et $<M'_{n_k}, B'_{n_k}>= C'_{n_k}$.
Le fait que $B'_{n_k}$ soit un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle vient du fait que $B'_{n_k}$ est continu et que la loi jointe de $B'_{n_k}(t_1)$ , $\ldots, B'_{n_k}(t_d)$ est la même que celle de $B_{n_k}(t_1), \ldots, B_{n_k}(t_d)$, pour $0 \le t_1 \le \cdots \le t_d$. La limite $B'$ est donc aussi un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{G}_t = \sigma\{B'(s) : s \le t\}$.
Soit $O$ une boule ouverte de $I\!\!R^d$ et définissons les événements

$$E_{n_k} = \{(B_{n_k}(s_1), \ldots, B_{n_k}(s_d)) \in O\}$$

et

$$E'_{n_k} = \{(B'_{n_k}(s_1), \ldots, B'_{n_k}(s_d)) \in O\},$$

où $0 \le s_1 \le s_2 \cdots, s_s \le s$.
Comme $Z'_{n_k} \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z_{n_k}$, alors si $s \le t$, on a

$$\begin{aligned} E\left[\left\{M'_{n_k}(t) - M'_{n_k}(s)\right\} I\!\!I_{E'_{n_k}}\right] &= E\left[\{M_{n_k}(t) - M_{n_k}(s)\} I\!\!I_{E_{n_k}}\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $M_{n_k}$ est une martingale. De la même façon, on montre que

$$E\left[\left\{(M'_{n_k})^2(t) - (M'_{n_k})^2(s) - A'_{n_k}(t) + A'_{n_k}(s)\right\} I\!\!I_{E'_{n_k}}\right] = 0,$$

et

$$E\left[\left\{M'_{n_k}(t)B'_{n_k}(t) - M'_{n_k}(s)B'_{n_k}(s) - C'_{n_k}(t) + C'_{n_k}(s)\right\} I\!\!I_{E'_{n_k}}\right] = 0.$$

Comme les événements $E_{n_k}$ et $E'_{n_k}$ définis ci-dessus génèrent respectivement $\mathcal{F}_{n_k}(s)$ et $\mathcal{G}_{n_k}(s)$, on en déduit que $(M'_{n_k}(t), \mathcal{F}_{n_k}(t); t \ge 0)$ est une martingale, que $< M'_{n_k} >= A'_{n_k}$ et $< M'_{n_k}, B'_{n_k} >= C'_{n_k}$.
Finalement, comme les $B'_{n_k}$ sont des mouvements browniens convergeant presque sûrement vers $B'$, $1_{E'_{n_k}}$ converge presque sûrement vers $1_{E'}$, où

$$E' = \{(B'(s_1), \ldots, B'(s_d)) \in O\}.$$

Puisque pour $t$ fixés, il existe $p > 2$ tel que $\sup_n E(|M_n(t)|^p) < \infty$, les suites

$$\left\{M'_{n_k}(t) - M'_{n_k}(s)\right\} I\!I_{E'_{n_k}},$$

$$\left\{(M'_{n_k})^2(t) - (M'_{n_k})^2(s) - A'_{n_k}(t) + A'_{n_k}(s)\right\} I\!I_{E'_{n_k}}$$

et

$$\left\{M'_{n_k}(t)B'_{n_k}(t) - M'_{n_k}(s)B'_{n_k}(s) - C'_{n_k}(t) + C'_{n_k}(s)\right\} I\!I_{E'_{n_k}}$$

sont uniformément intégrables. Pour ce faire, il suffit de montrer, d'après l'inégalité de Markov, que chacune des quantités est bornée en norme $L^r$, pour un certain $r > 1$. Pour ce faire, comme $Z_{n_k}$ et $Z_{n_k}$ ont même loi, on a

$$\sup_n \| \{M_{n_k}(t) - M_{n_k}(s)\} I\!I_{E_{n_k}} \|_p \leq \sup_n \|M_{n_k}(t)\|_p + \sup_n \|M_{n_k}(s)\|_p < \infty,$$

$$\begin{aligned}
&\sup_n \left\| \left\{M^2_{n_k}(t) - M^2_{n_k}(s) - A_{n_k}(t) + A_{n_k}(s)\right\} I\!I_{E_{n_k}} \right\|_{\frac{p}{2}} \\
&\quad \leq \sup_n \|M_{n_k}(t)\|^2 + \sup_n \|M_{n_k}(s)\|^2 \\
&\qquad + \sup_n \|A_{n_k}(t)\|_{\frac{p}{2}} + \sup_n \|A_{n_k}(s)\|_{\frac{p}{2}} \\
&\quad < \infty,
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy (théorème A.7.3). Finalement, utilisant le lemme A.7.2, on a

$$\begin{aligned}
&\sup_n \left\| \{M_{n_k}(t)B_{n_k}(t) - M_{n_k}(s)B_{n_k}(s) - C_{n_k}(t) + C_{n_k}(s)\} I\!I_{E'_{n_k}} \right\|_{\frac{p}{2}} \\
&\leq \sup_n \|M_{n_k}(t)B_{n_k}(t)\|_{\frac{p}{2}} + \sup_n \|M_{n_k}(s)B_{n_k}(s)\|_{\frac{p}{2}} \\
&\quad + \sup_n \|C_{n_k}(t)\|_{\frac{p}{2}} + \sup_n \|C_{n_k}(s)\|_{\frac{p}{2}} \\
&\leq \sup_n \|M_{n_k}(t)\|_p \sup_n \|B_{n_k}(t)\|_p + \sup_n \|M_{n_k}(s)\|_p \sup_n \|B_{n_k}(s)\|_p \\
&\quad + t \sup_n \|A_{n_k}(t)\|_{\frac{p}{2}} + s \sup_n \|A_{n_k}(s)\|_{\frac{p}{2}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Utilisant le lemme A.2.3, on peut conclure que

$$E[(M'(t) - M'(s))I\!I_{E'}] = \lim_{k\to\infty} E\left[\left\{M'_{n_k}(t) - M'_{n_k}(s)\right\} I\!I_{E'_{n_k}}\right] = 0,$$

$$E\left[\left\{(M')^2(t) - (M')^2(s) - A'(t) + A'(s)\right\})\mathbb{I}_{E'}\right]$$
$$= \lim_{k\to\infty} E\left[\left\{(M'_{n_k})^2(t) - (M'_{n_k})^2(s) - A'_{n_k}(t) + A'_{n_k}(s)\right\})\mathbb{I}_{E'_{n_k}}\right] = 0,$$

et

$$E\left[\{M'(t)B'(t) - M'(s)B'(s)\})\mathbb{I}_{E'}\right]$$
$$= \lim_{k\to\infty} E\left[\left\{M'_{n_k}(t)B'_{n_k})(t) - M'_{n_k}(s)B'_{n_k})(s) - C'_{n_k}(t) + C'_{n_k}(s)\right\} \mathbb{I}_{E'_{n_k}}\right] = 0.$$

Donc $(M'(t), \mathcal{G}_t; t \geq 0)$ est une $L^2$-martingale car les événements $E'$ définis précédemment génèrent $\mathcal{G}_s$. De la même façon, on obtient que $A' = <M'>$ et $<M', B'> = 0$.
Enfin il reste à montrer que $M' = W' \circ A'$, où $W'$ est un mouvement brownien indépendant de $A'$ et de la filtration $\mathcal{G}_t$, pour tout $t \geq 0$.
Comme $<M', B'> = 0$, d'après le théorème A.7.4, il existe un mouvement brownien $W'$ indépendant de $B'$ tel que $M'(t) = W'(< M' >_t) = W'(A'(t))$. Or $M'(t)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{G}_t$, et comme $A'(t) = <M'>_t$, il en résulte que $A'$ est aussi mesurable par rapport à $\mathcal{G}_t$. Donc $W'$ est indépendant de $A'$. On peut donc conclure que $Z_{n_k}$ converge en loi vers $(W' \circ A', A', 0, B')$. **Q.E.D.**

Démonstration du corollaire 3.2.4: L'hypothèse (ii) implique que $< M_n >$ est tendue dans $\mathcal{C}$. Et donc, d'après le théorème précédent, on sait que l'ensemble des points limites est de la forme $(M, A, 0, B)$. Comme $A$ est uniquement déterminé en loi, par conséquent la suite $M_n$ converge en loi vers $W \circ A$ où $W$ est un mouvement brownien indépendant de $A$ et de la filtration $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$. et par conséquent la suite $(M_n, <M_n>)$ converge en loi dans $\mathcal{C}^2$ vers $(W \circ A, A)$. **Q.E.D.**

Démonstration du corollaire 3.2.5: Soit $X = \mathbb{I}_{(B(t_1)\in U_1, \ldots, B(t_m)\in U_m)}$. Nous allons montrer que pour toute fonction continue et bornée sur $\mathcal{C}$,

$$E[f(M_{n_k})X] \to E[f(W \circ A)X].$$

Comme $(M_{n_k}, X) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (M'_{n_k}, \mathbb{I}_{(B'_{n_k}(t_1)\in U_1,\ldots,B'_{n_k}(t_m)\in U_m)})$ alors

$$\begin{aligned} E[f(M_{n_k})X] &= E[f(M'_{n_k})\mathbb{I}_{(B'_{n_k}(t_1)\in U_1,\ldots,B'_{n_k}(t_m)\in U_m)}] \\ &\to E[f(M')\mathbb{I}_{(B'(t_1)\in U_1,\ldots,B'(t_m)\in U_m)}] \\ &= E\left[f(W'\circ A')\mathbb{I}_{(B'(t_1)\in U_1,\ldots,B'(t_m)\in U_m)}\right], \end{aligned}$$

où $W'$ est un mouvement brownien indépendant de $A'$. Il reste donc à montrer

$$E\left[f(W'\circ A')\mathbb{I}_{(B'(t_1)\in U_1,\ldots,B'(t_m)\in U_m)}\right] = E\left[f(W\circ A)\mathbb{I}_{(B(t_1)\in U_1,\ldots,B(t_m)\in U_m)}\right].$$

Or $A_n$ converge en probabilité vers $A$ alors on a que

$$(A, B) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (A', B').$$

Et comme $W'$ est indépendant de $A'$ et $B'$ et $W$ est indépendant de $A$ et $B$ alors $(W', A', B') \stackrel{\mathcal{L}}{=} (W, A, B)$ ce qui implique que

$$E\left[f(W'\circ A')\mathbb{I}_{(B'(t_1)\in U_1,\ldots,B'(t_m)\in U_m)}\right] = E\left[f(W\circ A)\mathbb{I}_{(B(t_1)\in U_1,\ldots,B(t_m)\in U_m)}\right].$$

Comme la limite ne dépend pas de la suite, on conclut que $E(f(M_n)X)$ tend vers

$$E\left[f(W\circ A)X\right].$$

Comme les événements de la forme $(B(t_1) \in U_1, \ldots, B(t_m) \in U_m)$ engendrent $\mathcal{F}$, on peut conclure, d'après le théorème 1.3.9 que $M_n$ converge stablement vers $W\circ A$ et par conséquent $(M_n, < M_n >)$ converge stablement vers $(W\circ A, A)$. **Q.E.D.**

# CHAPITRE 4

# EXEMPLES D'APPLICATION

## 4.1 Exemple 1

Ikeda & Watanabe [24] se sont intéressés à étudier la convergence de la distribution

$$\frac{1}{u(\lambda)}\int_0^{\lambda t} f(X(s))ds$$

quand $\lambda$ tend vers l'infini, où $u$ est une fonction de normalisation et $f$ une fonction continue à support compacte. La convergence sera différente dépendament si

$$\overline{f} = \int_{I\!R} f(x)dx = 0 \text{ où } \overline{f} \neq 0.$$

Ikeda & Watanabe [24] ont étudié deux cas le premier $u(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ et $\overline{f} \neq 0$ et le deuxième cas, et c'est le cas qui nous intéresse et dont on va le démontrer, $u(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{4}}$ et $\overline{f} = 0$.

Soit $B$ un mouvement brownien et soit $V$ une fonction continue telle que

$$V(x) = 0 \text{ pour } |x| \geq K > 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} V(y)dy = 0.$$

Posons

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} V(y)dy$$

et

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} F(y)dy.$$

Alors $F$ est continue et à support compact car

$$F(x) = 0 \text{ si } x \leq -K,$$

et

$$F(x) = F(K) = \int_{-\infty}^{\infty} V(y)dy = 0, \text{ si } x \geq K.$$

Donc $G$ est bien définie et est bornée. En effet,

$$G(x) = 0 \text{ si } x \leq -K,$$

et

$$G(x) = G(K) = \int_{-K}^{K} F(y)dy, \text{ si } x \geq K.$$

De plus, $G' = F$ et $G'' = V$. On va montrer la convergence en loi du processus $\frac{1}{2n^{1/4}} \int_0^{nt} V(B_s)ds$. D'après la formule d'Itô (Théorème A.7.8), on a

$$G(B_t) = G(0) + \int_0^t F(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t V(B_s)ds.$$

Comme $G$ est bornée, on a

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{1}{2n^{1/4}} \int_0^{nt} V(B_s)ds + \frac{1}{n^{1/4}} \int_0^{nt} F(B_s)dB_s \right| \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Posons

$$M_n(t) = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \int_0^{nt} F(B_s)dB_s = n^{\frac{1}{4}} \int_0^t F(\sqrt{n}B_n(s))dB_n(s).$$

où $B_n(u) = B(nu)/\sqrt{n}$, $u \geq 0$. On remarque que $B_n$ est un mouvement brownien et que $(M_n, \mathcal{F}_n(t))$ est une martingale de carré intégrable, où $\mathcal{F}_n(t) = \sigma\{B_n(s); 0 \leq s \leq t\}$. Vérifions les conditions du corollaire 3.2.4. Montrons d'abord la convergence en loi de $\langle M_n \rangle_t$. On a

$$\begin{aligned}
\langle M_n \rangle_t &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} F^2(B_s)ds = \sqrt{n} \int_0^t F^2(\sqrt{n}B_n(u))du \quad \text{(en posant } u = \frac{s}{n}) \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} \sqrt{n} \int_0^t F^2(\sqrt{n}B_u)du \quad \text{car } \{B\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{n^{-\frac{1}{2}}B_n\} \\
&= \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} F^2(\sqrt{n}x)\phi(t,x)dx \quad \text{d'après le théorème A.8.2,} \\
&= \langle M'_n \rangle_t,
\end{aligned}$$

où $M_n'(t) = n^{1/4}\int_0^t F(\sqrt{n}B_u)dB_u$ et où $\phi(t,x)$ est le temps local du mouvement brownien $B$ au point $x$ (voir définition A.8.1).
Donc

$$<M_n'>_t = \int_{I\!R} F^2(y)\phi(t,\frac{y}{\sqrt{n}})dy \to \phi(t,0)\int_{I\!R} F^2(y)dy \text{ quand } n\to\infty,$$

pour tout $t>0$.
Or la convergence presque sûre du processus croissant pour $t$ fixé implique la convergence en loi des lois multidimensionnelles, et comme $\phi(t,0)$ est continue sur $[0,\infty)$, ceci qui implique la tension (théorème A.4.6) et par conséquent la convergence dans $\mathcal{C}$. D'où

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{nt} F^2(B_s)ds \xrightarrow{d} \|F\|^2\phi(t,0)$$

où $\|F\|^2 = \displaystyle\int_{I\!R} F^2(x)dx$.
Calculons $\|F\|^2$. Comme $\bar{V} = \int_{-K}^K V(y)dy = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\|F\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x)dx \\
&= \int_{-K}^{K}\int_{-K}^{x}\int_{-K}^{x} V(y)V(z)dzdydx \\
&= \int_{-K}^{K}\int_{-K}^{K}\int_{\max(y,z)}^{K} V(y)V(z)dxdzdy \\
&= \int_{-K}^{K}\int_{-K}^{K}(K-\max(y,z))V(y)V(z)dzdy \\
&= -\int_{-K}^{K}\int_{-K}^{K}\max(y,z)V(y)V(z)dzdy \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-K}^{K}\int_{-K}^{K}(y+z+|y-z|)V(y)V(z)dzdy \\
&= 0+0-\frac{1}{2}\int_{-K}^{K}\int_{-K}^{K}|y-z|V(y)V(z)dzdy \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|y-z|V(y)V(z)dzdy,
\end{aligned}$$

car $\max(y,z) = \frac{y+z+|y-z|}{2}$.
Donc on a montré que $<M_n>_t$ converge en loi dans $\mathcal{C}$ vers $A_t = \|F\|^2\phi(t,0)$, où $\phi(t,0)/\sqrt{t}$

est de loi normale tronquée, dont la fonction de répartition est définie par

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy,\ x \geq 0,$$

d'après Darling & Kac [13] p(418) théorème 1 en prenant $h(s) = s^{-\frac{1}{2}}$, ce qui correspond au cas $\alpha = \frac{1}{2}$.

En effet, $B_t$ est un processus de Markov de transition

$$P_t(x, dy) = P_t(x, y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}dy,$$

et $F^2$ vérifie l'hypothèse (A) du théorème A.9.1.

Pour montrer cela, calculons $p_s(x, y)$. On a

$$\begin{aligned} p_s(x,y) = \int_0^\infty e^{-st}P_t(x,y)dt &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-st-\frac{(x-y)^2}{2t}}dt \\ &= \frac{e^{-\sqrt{2s}|x-y|}}{\sqrt{2s}} \end{aligned}$$

Donc en prenant $h(s) = s^{-1/2}$, on obtient que

$$\frac{1}{h(s)}\int F^2(y)p_s(x,y)dy \to C = \|F\|^2/\sqrt{2},$$

uniformément, pour tous les $x$ tels que $F(x) \neq 0$.

On en déduit que

$$\frac{1}{C\sqrt{nt}}\int_0^{nt} F^2(B(s))ds$$

converge en loi vers une loi de Mittag-Leffler d'indice $\alpha = 1/2$. De plus,

$$\lim_{n\to\infty} E\{<M_n, M_n>_t^k\} = t^{k/2}C^k k!/\Gamma(k/2+1).$$

D'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, e.g. théorème A.7.3, il existe une constante $b$ telle que

$$E[M_n^4] \leq bE[<M_n>^2].$$

De plus, d'après Darling & Kac [13] p(418), on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} E[<M_n>_t^2] = 2tC^2 = t\|F\|^4 \leq \infty.$$

Par conséquent, la condition (i) du corollaire 3.2.4 est vérifiée en prenant $p = 4$.
Enfin vérifions que $< M_n(t), B_n(t) >$ converge en loi vers zéro. On a

$$\begin{aligned}
< M_n(t), B_n(t) > &= n^{\frac{1}{4}} < \int_0^t F(\sqrt{n} B_n(s)) dB_n(s), \int_0^t dB_n(s) > \\
&= n^{\frac{1}{4}} \int_0^t F(\sqrt{n} B_n(s)) ds \\
&\overset{\mathcal{L}}{=} n^{\frac{1}{4}} \int_0^t F(\sqrt{n} B(s)) ds \\
&= n^{\frac{1}{4}} \int_{I\!R} F(\sqrt{n} x) \phi(t, x) dx \\
&= \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \int_{I\!R} F(y) \phi(t, \frac{y}{\sqrt{n}}) dy \to 0 \times \phi(t, 0) \int_{I\!R} F(y) dy.
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le corollaire 3.2.4 $M_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}$ vers un processus de la forme $W(A(t)) = B(\|F\| \phi(t, 0))$.

## 4.2 Exemple 2

Darling & Kac [13](1957) ont montré que la limite de la distribution

$$\frac{1}{u(t)} \int_0^t V(x(s)) ds \tag{6}$$

où $x$ est un processus de Markov avec transition stationnaire, $u(t)$ est une fonction de normalisation et $V$ une fonction non-négative est une distribution de Mittag-Leffler. Plus tard (1977) Kasahara [29] a amélioré ce résultat en supposant que la fonction $V$ est de signe quelconque et vérifiant $\int V(x)dx = 0$. Il a montré que la limite sera une distribution bilatérale de Mittag-Leffler [29]. Dans cet exemple on va montrer en utilisant le corollaire 3.2.4 la convergence de la distribution 6 pour $u(t) = \sqrt{\log t}$.
Soient $V : I\!R^2 \mapsto I\!R^2$ une fonction continue à support compact telle que

$$\int_{I\!R^2} V(x) dx = 0,$$

et $B$ un mouvement brownien à valeurs dans $I\!R^2$. Posons $\|V\|^2 = \int_{I\!R^2} |V(x)|^2 dx$, et

$$M_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\log n}} \int_0^{nt} V(B(s))^\top dB(s) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log n}} \int_0^t V(\sqrt{n} B_n(s))^\top dB_n(s),$$

où $B_n(s) = B(ns)/\sqrt{n}$.
Alors
$$<M_n>_t = \frac{1}{\log n}\int_0^{nt} |V(B_s)|^2 ds = \frac{n}{\log n}\int_0^{t} |V(\sqrt{n}B_n(s))|^2 ds.$$
Comme $B$ et $B_n$ sont des mouvements browniens, donc des $L^2$-martingales continues et $V$ est une fonction continue bornée alors d'après le lemme $A.7.5$, $M_n$ est une $L^2$-martingale continue.
Montrons que $<M_n>$ converge en loi dans $\mathcal{C}$ vers un processus constant $A$ de loi exponentielle. Pour cela on va utiliser les résultats de Darling & Kac [13]. Considérons $x_t = B_t$, qui est un processus de Markov de transition
$$P_t(x, dy) = P_t(x, y)dy = \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}} dy,$$
Montrons que $|V|^2$ vérifient l'hypothèse (A) du théorème A.9.1. Pour cela, calculons $p_s(x, y)$. On a
$$p_s(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_t(x, y)dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-st-\frac{\|x-y\|^2}{2t}}}{t} dt.$$
Calculons maintenant $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-st-\frac{a}{t}}}{t} dt$ avec $a = \frac{\|x-y\|^2}{2}$. Posons $u = \sqrt{\frac{s}{a}}t$. On a
$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{e^{-st-\frac{a}{t}}}{t} dt &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{sa}(u+\frac{1}{u})}}{u} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{sa}(e^y+e^{-y})} dy \;\text{ en posant }\; u = e^y \\ &= 2\int_0^{\infty} e^{-2\sqrt{sa}\cosh y} dy = 2K_0(2\sqrt{sa}),\end{aligned}$$
où $K_\nu$ est la fonction de Bessel d'ordre $\nu$ et de second type, d'expression
$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}z)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^{\infty} e^{-z\cosh\Phi}(\sinh\Phi)^{2\nu} d\Phi,$$
pour $\nu, z \in \mathbb{C}$ tel que $Rel(\nu + \frac{1}{2}) > 0$ et $|argz| < \frac{\pi}{2}$.
D'où
$$p_s(x, y) = \frac{1}{\pi} K_0(\sqrt{2s}\|x-y\|).$$

Or, d'après Abramowitz and Stegun [1, (9.6.8), p. 378]),

$$\lim_{z\to 0}\frac{K_0(z)}{\log 1/z}=1.$$

Donc

$$K_0(\sqrt{2s}\|x-y\|)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{s}-\frac{1}{\pi}\log\|x-y\|+O(1)\quad s\to 0.$$

Ceci implique

$$\int_{I\!R^2}p_s(x,y)|V(y)|^2dy\sim\left(\frac{\|V\|^2}{2\pi}\log\frac{1}{s}\right),\ \text{lorsque } s\to 0.$$

Donc, pour $h(s)=\frac{1}{2\pi}\log(1/s)$, $|V|^2$ vérifie l'hypothèse (A). Ce qui implique, en appliquant le théorème A.9.1 avec $\alpha=0$ et $L(1/s)=\frac{1}{2\pi}\log(1/s)$ que pour $t$ fixé, $<M_n>_t$ converge en loi vers $A$, de loi exponentielle d'espérance $\frac{\|V\|^2}{2\pi}$ pour $t>0$.
La suite $<M_n>_t$ ne peut pas être tendue sur $[0,\infty)$ car la limite est constante pour $t>0$. En $t=0$, la valeur devrait être 0. Il y a donc discontinuité. Par contre la suite est tendue sur $[s,\infty)$ pour $s>0$. Pour le prouver on va utiliser le théorème A.4.6. On a déjà montré que $<M_n>_t$ converge en loi vers $A$ pour $t>0$ de plus pour tout $0<s<t$ on a

$$\begin{aligned}E[<M_n>_t-<M_n>_s] &= E\left[\frac{1}{\log n}\int_{nt}^{ns}|V(B_u)|^2du\right]\\ &= \frac{1}{\log n}\int_{nt}^{ns}\frac{1}{2\pi u}\left(\int_{I\!R^2}|V(y)|^2e^{-\frac{\|y\|^2}{2u}}dy\right)du.\end{aligned}$$

Or, d'après Darling & Kac [13] p(418), $E(<M_n>_t)$ converge vers $E(A)=\frac{\|V\|^2}{2\pi}$, pour tout $t>0$. Donc $E[<M_n>_t-<M_n>_s]\to 0$.
Comme $<M_n>_t-<M_n>_s\geq 0$, on a donc

$$<M_n>_t-<M_n>_s\xrightarrow{P}0.$$

Donc, d'après le lemme A.2.4, on obtient la convergence multidimensionnelle de ($<M_n>_{t_1}$ $,<M_n>_{t_2},\ldots,<M_n>_{t_k}$) vers $(A,A,\ldots,A)$. Comme le processus $A$ est constant pour $t>0$, il est continu sur $(0,\infty)$, ce qui implique, d'après le théorème A.4.6, que $<M_n>$

est tendue sur $\mathcal{C}(s,\infty)$. Donc on a montré que $<M_n>$ converge vers $A$ dans $\mathcal{C}(s,\infty)$. D'autre part, d'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, e.g. théorème A.7.3, il existe une constante $b$ telle que

$$E[M_n^4] \leq bE[<M_n>^2].$$

Or d'après Darling & Kac [13] p(418), on a

$$\lim_{n\to\infty} E[<M_n>^2] = \frac{\|V\|^4}{2\pi^2} < \infty$$

et donc la condition (i) du corollaire 3.2.4 est vérifiée.
Enfin il reste à montrer que $< M_n(t), B_n(t) > \to 0$. On a

$$\begin{aligned} < M_n(t), B_n(t) > &= \frac{1}{\sqrt{n \log n}} < \int_0^{nt} V(B_s)^\top dB_s, \int_0^{nt} dB_s > \\ &= \frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\log n} \int_0^{nt} V(B_s) ds. \end{aligned}$$

Or Darling & Kac [13] p(418) ont montré que pour toute fonction $F$ non- négative vérifiant la condition (A),

$$\frac{1}{\log n} \int_0^{nt} F(B_s) ds$$

converge en loi vers une variable de loi exponentielle. Dans notre cas chacune des composantes de $V$ est de signe quelconque mais il suffit d'écrire $V_i = V_i^+ - V_i^-$ où $V_i^+ = \max(V_i, 0)$ et $V_i^- = \min(-V_i, 0)$, $i = 1, 2$. Comme $\frac{1}{\log n} \int_0^{nt} V_i^\pm(B_s) ds$ converge en loi, on en déduit que

$$\frac{1}{\sqrt{n \log n}} \int_0^{nt} V_i^\pm(B_s) ds$$

converge en probabilité vers 0 et donc chacune des composantes de $< M_n(t), B_n(t) >$ converge en loi vers 0.
Par conséquent d'après le corollaire 3.2.4 $M_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}([s,\infty])$ vers un processus constant de la forme $W(A)$ qui est distribué selon une loi double exponentielle.

En effet

$$
\begin{aligned}
E[e^{i\theta W(A)}] &= E\left[E[e^{i\theta W(A)}|A]\right] \\
&= E[e^{-\frac{\theta^2}{2}A}] \\
&= \frac{1}{1+\theta^2\frac{\|V\|^2}{4\pi}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta y}\frac{e^{-|y|/\beta}}{2\beta}dy,
\end{aligned}
$$

où $\beta = \frac{\|V\|}{2\sqrt{\pi}}$.

**Remarque 4.2.1** *Il est à noter que contrairement au cas $d = 1$,*

$$
<M'_n>_t = \frac{n}{\log n}\int_0^t V^2(\sqrt{n}B_u)du
$$

*ne converge pas en probabilité car le temps local n'existe pas en dimension 2.*

## 4.3 Exemple 3

Rootzén [46] a considéré l'approximation de l'intégrale d'Itô $\int_0^t \phi dB(s)$ où $B$ est mouvement brownien. Il a traité le cas spécial où $\phi(t) = f(B(t), t)$ et il a approximé l'intégrale $\int_0^t f(B(s), s)ds$. En dénotant par $d_n$ l'erreur de l'approximation Rootzén a montré sous certaines conditions sur $f$ que

$$
n^{\frac{1}{2}}d_n \xrightarrow{d} W \circ \tau
$$

où $W$ est un mouvement brownien indépendent de $\tau$ et

$$
\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial f(B(s), s)^2}{\partial s}ds.
$$

Dans cet exemple on redémontre un résultat de Rootzén [46] (théorème 2.1) comme conséquence du corollaire 3.2.4 pour une sous-classe de fonctions (on a ajouté l'hypothèse que $\sup_{x,t}|\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)| < \infty$).
Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en $x$ telle que

$$
\forall s, t \in [0, 1], \exists K > 0, \quad \text{tel que} \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x, s) - f(x, t)| \leq K|t - s|^{\frac{1}{2}}
$$

et $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ est continue et telle que $\sup_{x,t} |\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)| < \infty$. Et soit $B$ un mouvement brownien. Soient

$$\phi(t) = f(B(t), t)$$

et

$$\phi_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(B(\frac{i}{n}), \frac{i}{n}) I\!\!I_{\{\frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i+1}{n}\}}.$$

Posons

$$M_n(t) = \sqrt{n} \int_0^t (\phi(s) - \phi_n(s)) dB_s.$$

Alors

$$<\!M_n\!>_t = n \int_0^t (\phi(s) - \phi_n(s))^2 ds.$$

Rootzén [46] (p248) a montré que pour tout $t \in [0,1]$

$$<\!M_n\!>_t \xrightarrow[p]{} A_t = \frac{1}{2} \int_0^t (\frac{\partial f}{\partial x}(B_s, s))^2 ds.$$

En particulier $<\!M_n\!>$ converge en loi vers $A$ dans $\mathcal{C}([0,1])$. D'autre part

$$\begin{aligned} < M_n(t), B(t) > &= < \sqrt{n} \int_0^t (\phi(s) - \phi_n(s)) dB_s, \int_0^t dB(s) > \\ &= \sqrt{n} \int_0^t (\phi(s) - \phi_n(s)) ds. \end{aligned}$$

Or Rootzén [46] (p247) a montré que pour tout $t \in [0,1]$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \sqrt{n} \int_0^t (\phi(s) - \phi_n(s)) ds \xrightarrow{P} 0$$

et donc

$$< M_n(t), B(t) > \Longrightarrow 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Enfin montrons que $\sup_n E[M_n^4] < \infty$.

On a

$$< M_n >_t^2 = n^2 \left( \int_0^t (\phi - \phi_n)^2 ds \right)^2 \leq t n^2 \int_0^t (\phi - \phi_n)^4 ds.$$

Or

$$\begin{aligned}
n^2\int_0^t(\phi-\phi_n)^4 ds &= n^2\int_0^t\left[f(B(s),s)-\sum_{i=0}^{n-1} f(B(\frac{i}{n}),\frac{i}{n}\mathbb{I}_{\{\frac{i}{n}\leq s\leq\frac{i+1}{n}\}}\right]^4 ds\\
&\leq n^2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}\left[f(B(s),s)-f(B(\frac{i}{n}),\frac{i}{n})\right]^4 ds\\
&\leq 2^4 n^2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}\left(f(B(s),s)-f(B(s),\frac{i}{n})\right)^4\\
&+\left(f(B(s),\frac{i}{n})-f(B(\frac{i}{n}),\frac{i}{n})\right)^4\\
&\leq 2^4 n^2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} K(s-\frac{i}{n})^2+cst\ (B(s)-B(\frac{i}{n}))^4
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
E[< M_n >_t^2] &\leq 2^4\frac{1}{3}K+cst\ n^2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} E[(B(s)-B(\frac{i}{n}))^4]ds\\
&\leq cst+cst\ n^2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}(s-\frac{i}{n})^2 ds\\
&= cst+cst\ n^2\times n\times\frac{1}{3n^3}=cst<\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le corollaire 3.2.4 $M_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}([0,1])$ vers un processus de la forme $W(\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(B_s,s)^2 ds)$.

## 4.4 Exemple 4

Dans cet exemple on voudra étudier le comportement de l'estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$. Feigin [18] avait montré que si $M_t$ est une martingale de carré intégrable alors $\dfrac{M_t}{\sqrt{< M_t >}}$ converge en loi vers une normale. On montrera dans cet exemple qu'on pourra écrire $e^{\theta t}(\hat{\theta}_t-\theta)$ sous la forme $e^{\theta t}\dfrac{M_t}{< M_t >}$ qui converge en loi vers $Z$ qui est de loi de Cauchy.

Pour cet exemple on va supposer que l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est le cas classique de $\Omega = \mathcal{C}([0,1] : I\!R)$ sur lequel on sait qu'on peut construire un nombre arbitraire de mouvements brownien indépendant.
Considérons la classe des diffusions gaussiennes de dimension un qui sont solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = \theta X_t dt + dW_t, \quad X_0 = 0, \tag{7}$$

où $\theta > 0$ et $W$ est le mouvement brownien standard de dimension un. On a

$$d(e^{-\theta s} X_s) = e^{-\theta s}(dX_s - \theta X_s ds) = e^{-\theta s} dW_s$$

en intégrant entre 0 et $t$ on aura

$$e^{-\theta t} X_t = \int_0^t e^{-\theta s} dW_s \tag{8}$$

et donc la solution de l'équation (7) est

$$X_t = \int_0^t e^{\theta(t-s)} dW_s.$$

D'après le théorème A.10.2 cette solution est unique. Cette solution unique induit une mesure de probabilité $P_\theta$ (évidement unique ) sur $(\Omega, \mathcal{F})$ c'est à dire $P_\theta$ est l'image de $P'$ par l'application $\omega' \in \Omega' \to X(\omega') \in \Omega$.
On observe l'échantillon $X_s$ $s \in [0,t]$ de paramètre $\theta$. Comme $X_t$ est un processus continu (car W est continue) donc

$$A_t = \int_0^t X_s^2 ds < \infty \quad \forall t > 0.$$

Alors d'après le théorème A.10.3 en prenant $\theta^{(0)} = 0$ la fonction de vraisemblance est

$$L_t(\theta) = \frac{dP_\theta^t}{dP_{\theta^{(0)}}^t} = e^{(N_t\theta - \frac{1}{2}\theta^2 I_t)},$$

où

$$N_t = \int_0^t X_s dX_s$$

et
$$I_t = \int_0^t X_s^2 ds.$$
Calculons l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$.
$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log(L_t(\theta)) = N_t - \theta I_t$$
$\Longrightarrow$
$$\hat{\theta}_t = I_t^{-1} N_t.$$
D'autre part posons
$$H_t = e^{-\theta t} X_t = \int_0^t e^{-\theta s} dW_s$$
d'après 8. Or
$$E[H_t^2] = \int_0^t e^{-2\theta s} ds = \frac{1 - e^{-2\theta t}}{2\theta} \leq \frac{1}{2\theta} < \infty$$
ce qui implique d'après le théorème A.7.6 qu'il existe $H_\infty$ tel que
$$H_t = e^{-\theta t} X_t \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} H_\infty \quad p.s. \tag{9}$$
De plus $H_\infty$ est distribuée selon une loi normale $N(0, \frac{1}{2\theta})$. Appliquons la formule d'Itô pour $X_t$ avec $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, on aura donc
$$\frac{X_t^2}{2} = N_t + \frac{t}{2}$$
ce qui implique
$$N_t = \frac{1}{2}(e^{2\theta t} H_t^2 - t).$$
Donc
$$\begin{aligned} e^{\theta t}(\hat{\theta}_t - \theta) = e^{\theta t}(\frac{N_t}{I_t} - \theta) &= e^{\theta t} \left( \frac{\frac{1}{2} e^{2\theta t} H_t^2 - \frac{t}{2}}{I_t} - \theta \right) \\ &= \frac{e^{\theta t}}{2 I_t}(e^{2\theta t} H_t^2 - t - 2\theta I_t). \end{aligned}$$
Or
$$I_t = \int_0^t e^{2\theta s} H_s^2 ds \sim \frac{e^{2\theta t}}{2\theta} H_t^2 \sim \frac{e^{2\theta t}}{2\theta} H_\infty^2,$$

ce qui implique

$$e^{\theta t}(\hat{\theta}_t - \theta) \sim \frac{\theta e^{-\theta t}}{H_t^2}\left(e^{2\theta t}H_t^2 - t - 2\theta\int_0^t e^{2\theta s}H_s^2 ds\right).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{2\theta s}H_s^2 ds &= \int_0^t e^{2\theta s}(H_s - H_t + H_t)^2 ds\\ &= \int_0^t e^{2\theta s}(H_s - H_t)^2 ds + H_t^2\int_0^t e^{2\theta s}ds\\ &\quad +2H_t\int_0^t e^{2\theta s}(H_s - H_t)ds.\end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^t e^{2\theta s}ds = \frac{e^{2\theta t}-1}{2\theta} \sim e^{2\theta t}/(2\theta)$$

et

$$E\left\{\int_0^t e^{2\theta s}(H_s - H_t)^2 ds\right\} \sim \frac{t}{2\theta}.$$

D'où

$$e^{\theta t}(\hat{\theta}_t - \theta) \sim \frac{4\theta^2 e^{-\theta t}}{H_t}\int_0^t e^{2\theta s}(H_t - H_s)ds$$

Comme $H_t - H_s$ est distribuée selon une loi normale, alors

$$4\theta^2 e^{-\theta t}\int_0^t e^{2\theta s}(H_t - H_s)ds$$

converge en loi vers $Z$, distribuée selon une loi normale de moyenne nulle et de variance $2\theta^2$, car

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \mathrm{Var}\left(4\theta^2 e^{-\theta t}\int_0^t e^{2\theta s}(H_t - H_s)ds\right)\\ &= 16\theta^4 e^{-2\theta t}\int_0^t\int_0^t e^{2\theta s}e^{2\theta s'}\int_{\max(s,s')}^t e^{-2\theta u}du ds ds'\\ &= 8\theta^3 e^{-2\theta t}\int_0^t\int_0^t e^{2\theta(s+s')}\left(e^{-2\theta\max(s,s')} - e^{-2\theta t}\right)ds ds'\\ &= 16\theta^3 e^{-2\theta t}\int_0^t\int_0^s e^{2\theta s'}\left(1 - e^{-2\theta(t-s)}\right)ds' ds\\ &= 8\theta^2\int_0^t\left(1 - e^{-2\theta s}\right)\left(e^{-2\theta s} - e^{-2\theta t}\right)ds\\ &\to 2\theta^2.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}\left(H_t, 4\theta^2 e^{-\theta t}\int_0^t e^{2\theta s}(H_t - H_s)ds\right) &= 4\theta^2 e^{-\theta t}\int_0^t e^{2\theta s}\int_s^t e^{-2\theta u}duds \\
&= 2\theta e^{-\theta t}\int_0^t \left(1 - e^{-2\theta s}\right) ds \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

Comme $H_t$ converge presque sûrement vers $H_\infty$ et que $Z$ est indépendante de $H_\infty$, alors $e^{\theta t}(\hat{\theta}_t - \theta)$ converge en loi vers $Z/H_\infty$ qui est distribuée selon une loi de Cauchy de densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{2\theta\sqrt{\theta}}{1 + 4\theta^3 x^2}.$$

# CONCLUSION

Dans cette thèse nous avons établi des versions du théorème de limite centrale pour les martingales continues et à carré intègrable. En premier lieu nous avons montré la version classique du théorème de limite centrale en utilisant de nouvelles techniques avec des hypothèses faibles . Puis on a déduit une version stable du théorème de limite centrale.

En utilisant ces résultats et en s'inspirant des mêmes techniques utilisées il sera possible d'obtenir d'autre versions du théorème de limite centrale comme par exemple essayer de travailler avec des martingales qui ne sont pas nécessairement continues comme par exemple les martingales à sauts bornés.

# ANNEXE A

# DÉFINITIONS ET RÉSULTATS AUXILIAIRES

## A.1 Notation

Soient $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $y = (y_1, \ldots, y_d)$ deux éléments de $I\!R^d$. La notation $y \leq x$ veut dire $y_i \leq x_i \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, k$. On note aussi par $xy$ le produit scalaire dans $I\!R^d$ et pas $x^T$ la transposée du vecteur $x$.
On note par $X_n \xrightarrow{d} X$ toute variable aléatoire $X_n$ qui converge en loi vers $X$.
On note par $X_n \xrightarrow{P} X$ toute suite de variable aléatoire définie sur le même espace de probabilité qui converge en probabilité vers $X$.
Soit $(X_i, \mathcal{B}_i)$ $i = 1, \ldots, n$ n espaces mesurables. On appelle espace mesurable produit le couple $(X, \mathcal{B})$, où $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ et $\mathcal{B}$ est engendré par les "parallélipipèdes" de la forme $\prod B_i$ où $B_i \in \mathcal{B}_i$). La tribu $\mathcal{B}$ est noté par $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$

## A.2 Résultats généraux

**Théorème A.2.1** *(Lindelöf) Si $E$ est un espace topologique qui admet une base dénombrable, alors tout recouvrement ouvert contient un recouvrement dénombrable.*

Démonstration: Voir [23].

**Définition A.2.2** *Une famille de variables aléatoires* $\{X_n\}$ *est dite uniformément intégrable si:*

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n E[|X_n| \mathbb{I}_{\{|X_n|>c\}}] = 0.$$

**Lemme A.2.3** *Supposons* $X_n \xrightarrow{d} X$. *Si* $X_n$ *est uniformément intégrable, alors*

$$E[X_n] \to E[X].$$

DÉMONSTRATION: Voir [6].

**Lemme A.2.4** *Soient* $(S,\rho)$ *un espace métrique séparable, et* $X_n, Y_n$ *deux variables aléatoire qui ont même domaine de définition* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *pour tout* $n$ *à valeurs dans* $S$ *et* $X$ *une variable aléatoire à valeurs dans* $S$.
*Si* $X_n \xrightarrow{d} X$ *et* $\rho(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0$, *alors* $Y_n \xrightarrow{d} X$.

DÉMONSTRATION: Voir [6].

**Théorème A.2.5** *( Bochner) Soit* $f$ *une fonction définie sur* $\mathbb{R}^d$ *à valeurs complexe.*
$f$ *est la fonction caractéristique d'une fonction de répartition si et seulement si elle est continue en* $0$ *avec* $f(0) = 1$ *et si pour tout* $t_1, \ldots, t_d$ *des nombres dans* $\mathbb{R}^d$ *et pour tout* $z_1, \ldots, z_d$ *des nombres complexes on a*

$$\sum_{h=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} f(t_h - t_k) z_h \overline{z}_k \geq 0.$$

DÉMONSTRATION: Voir [9].

**Théorème A.2.6** *Soient* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré,* $Y$ *un espace métrique et* $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ *une application telle que, pour tout* $y \in Y$, *l 'application* $f(.,y) : X \to \mathbb{C}$ *est intégrable. Si pour tout* $x \in X$ *l'application* $f(x,.)$ *est continue sur* $Y$ *et s'il existe une fonction* $g : X \to [0, +\infty]$ *intégrable et vérifiant* $|f(x,.)| \leq g(x)$ *alors* $F(y) = \int_X f(x,y) d\mu(x)$ *est continue sur* $Y$.

Démonstration: Soient $a \in X$ et $x_n$ une suite qui converge vers a. Montrons que $F(x_n)$ converge vers $F(a)$. Soit $f_n$ une suite de fonction définie sur $X$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ avec $f_n(x) = f(x, t_n)$. $f_n(x)$ converge vers $f(x, a)$ car $f(x, .)$ est continue. Et comme $|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x)$ alors d'après le théorème de convergence dominée on a $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\nu(x) = \int_X f(x, a)d\nu(x)$ et donc $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = F(a)$.

**Théorème A.2.7** *(convergence dominée) Soit $X_n$ un suite de fonction mesurable définie sur un espace métrique $E$ qui converge presque sûrement vers $X$. Supposons qu'il existe une fonction $Y$ intégrable sur $E$ tel que $|X_n| \leq |Y|$. Alors*

$$\int_E X_n \to \int_E X.$$

Démonstration: Voir [31].

**Lemme A.2.8** *(Toeplitz) Soit $f$ une fonction localement intégrable telle que $f > 0$ et $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt = \infty$. Et soit $g$ une fonction localement intégrable tel que $\lim_{t\to\infty} g(t) = l$. Alors*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t f(s)g(s)ds}{\int_0^t f(s)ds} = l$$

Démonstration: On a par hypothèse

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall t > N \Longrightarrow |g(t) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
|\frac{\int_0^t f(s)g(s)ds}{\int_0^t f(s)ds} - l| &\leq \frac{\int_0^t f(s)|g(s) - l|ds}{\int_0^t f(s)ds} \\
&\leq \frac{\int_0^N f(s)|g(s) - l|ds}{\int_0^t f(s)ds} + \frac{\int_N^t f(s)|g(s) - l|ds}{\int_0^t f(s)ds} \\
&\leq \frac{\int_0^N f(s)|g(s) - l|ds}{\int_0^t f(s)ds} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\int_N^t f(s)ds}{\int_0^t f(s)ds}
\end{aligned}$$

or comme $f$ et $g$ sont localement intégrables alors

$$\int_0^N f(s)|g(s) - l|ds = cst$$

et donc

$$\frac{\int_0^N f(s)|g(s)-l|ds}{\int_0^t f(s)ds} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \tag{10}$$

De plus

$$\frac{\int_N^t f(s)ds}{\int_0^t f(s)ds} = 1 - \frac{\int_0^N f(s)ds}{\int_0^t f(s)ds}$$

et comme $f$ est localement intégrable alors

$$\int_0^N f(s)ds = cst$$

et donc

$$\frac{\int_0^N f(s)ds}{\int_0^t f(s)ds} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \tag{11}$$

(10) et (11) implique que

$$|\frac{\int_0^t f(s)g(s)ds}{\int_0^t f(s)ds} - l| \leq \varepsilon.$$

**Q.E.D.**

**Définition A.2.9** *Une classe $\mathcal{P}$ de sous-ensemble de $\Omega$ est un $\pi$-système si:*

$$A, B \in \mathcal{P} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{P}.$$

**Définition A.2.10** *Une classe $\mathcal{L}$ est un $\lambda$-système si:*
*(i) $\Omega \in \mathcal{L}$;*
*(ii) Si $A, B \in \mathcal{L}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{L}$;*
*(iii) Si $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{L}$ et $A_n \uparrow A$ alors $A \in \mathcal{L}$.*

**Théorème A.2.11** *Soient $\mathcal{P}$ un $\pi$-système, $\mathcal{L}$ un $\lambda$-système et $\sigma(\mathcal{P})$ la sigma-algèbre engendrée par $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ alors $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.*

DÉMONSTRATION: Voir [7].

## A.3 Convergence en loi

**Définition A.3.1** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité et soit* $A$ *un ensemble appartenant à* $\mathcal{F}$. *On définit la frontière de* $A$ *et on la note par* $\partial A$ *comme étant* $\overline{A} \setminus \dot{A}$ *où* $\overline{A}$ *et* $\dot{A}$ *sont respectivement la fermeture et l'interieur de* $A$.

**Définition A.3.2** *Soit* $(E, d)$ *un espace polonais et soit* $\mathcal{B}$ *la sigma-algèbre des borélines sur* $E$. *Une suite de mesures de probabilités* $P_n$ *sur* $(E, \mathcal{B})$ *converge en loi vers* $P$, *dénoté par* $P_n \Rightarrow P$, *si pour tout* $f \in C_b(E)$, $\int f dP_n \to \int f dP$.

**Théorème A.3.3** *Les énoncés suivants sont équivalents:*

*(a)* $P_n \Rightarrow P$.

*(b)* $\int f dP_n \to \int f dP$ *pour toute fonction* $f$ *bornée et uniformément continue.*

*(c)* $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F)$ *pour tout ensemble fermé* $F$.

*(d)* $\liminf_{n\to\infty} P_n(O) \geq P(O)$ *pour tout ensemble ouvert* $O$.

*(e)* $\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$ *pour tout ensemble de* $P$*-contnuité* $A \in \mathcal{B}$, *c'est-à-dire tel que* $A \in \mathcal{B}$ *et* $P(\partial A) = 0$.

DÉMONSTRATION: Voir [6].

**Théorème A.3.4** *Soit* $h$ *une fonction mesurable d'un espace métrique* $S$ *à valeurs dans un espace métrique* $S'$. *Et soit* $D_h$ *l'ensemble des points de discontinuité de* $h$.
*Si* $X_n \xrightarrow{d} X$ *et* $P\{X \in D_h\} = 0$, *alors* $h(X_n) \xrightarrow{d} h(X)$.

DÉMONSTRATION: Voir [6].

**Remarque A.3.5** *Dans* $I\!R^d$, *soit* $F$ *la fonction de répartion* $F$ *associée à* $P$, *c'est-à-dire* $F(y) = P((-\infty, y])$, $y \in I\!R^d$. *Alors un ensemble de la forme* $(-\infty, x]$ *est un ensemble de* $P$*-continuité si et seulement si* $F$ *est continue en* $x$ *car la frontière de* $(-\infty, x]$ *est donnée par* $(-\infty, x] \setminus (-\infty, x)$. *En effet* $\bigcup_{y<x}(-\infty, y] = (-\infty, x)$, *et donc la limite à gauche de* $F$ *en* $x$ *est* $P(-\infty, x)$. *La limite à droite est* $F(x)$ *car* $\bigcap_{y>x}(-\infty, y] = (-\infty, x]$.

**Remarque A.3.6** *Si $P_n \Rightarrow P$, alors $F_n(x)$ converge vers $F(x)$ en tout point de continuité de $F$. Réciproquement, cela entraîne $P_n \Rightarrow P$. En effet, on obtient que pour tout ensemble de $P$-continuité de la forme $(a,b]$, $P_n(a,b] \to P(a,b]$. Cette famille $\mathcal{U}$ est fermée pour les intersections finies et pour toute boule ouverte $B \ni x$, on peut trouver $A \in \mathcal{U}$ tel que $x \in A^0 \subset A \subset B$. D'après le corollaire 1 (Billingsley p. 14), cela implique que $P_n \Rightarrow P$.*

**Remarque A.3.7** *$F_n(x)$ converge vers $F(x)$ en tout point de continuité de $F$ si et seulement si il existe un ensemble dense $D$ tel que $F_n(x) \to F(x)$ pour tout $x \in D$. En effet, s'il existe un ensemble dense $D$ tel que $F_n(x) \to F(x)$ pour tout $x \in D$, alors pour tout $x$, on peut trouver deux suites $a_m < x < b_m$ tels que $a_m \to x$, $b_m \to x$ et $a_m, b_m \in D$. Donc*

$$F(a_m) = \lim_{n\to\infty} F_n(a_m) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} F_n(b_m) = F(b_m).$$

*Si $x$ est un point de continuité de $F$, $F(a_m) \to F(x)$ et $F(b_m) \to F(x)$. Donc $F_n(x) \to F(x)$. D'un autre côté, $D = \{x \in I\!R^d; F \text{ est continue en } x\}$ est dense. Si ce n'était pas le cas, il existerait un rectangle ouvert de la forme $(a,b)$ tel que $F$ est discontinue pour tout $x \in (a,b)$. En particulier, tous les nombres $x$ de la forme $(y, x_2, \ldots, x_d)$ avec $a_1 < y < b_1$ sont des points de discontinuité de $F$. Posons $G(y) = F(y, x_2, \ldots, x_d)$. Alors $G$ est non décroissante, bornée et l'ensemble des points de discontinuité de $G$ contient $(a_1, b_1)$, ce qui est absurde car cet ensemble est dénombrable. Donc $D$ est dense.*

Soient $S = S' \times S''$ le produit de deux espaces métriques et $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \times \mathcal{F}''$ où $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont les tribus respectives de $S, S'$ et $S''$. Et soient les deux distributions marginales de la mesure de probabilité $P$ définie par $P'(A') = P(A' \times S''), A' \in \mathcal{F}'$, et $P''(A'') = P(S' \times A''), A'' \in \mathcal{F}''$.

**Théorème A.3.8** *Si $S$ est un espace séparable alors une condition nécéssaire et suffisante pour que $P_n \Longrightarrow P$ est que $P_n(A' \times A'') \to P(A' \times A'')$ pour tout $A', A''$ tel que $P'(\partial A') = 0$ et $P''(\partial A'') = 0$ où $P'$ et $P''$ sont les disributions marginales de $P$.*

Démonstration: Voir [6].

## A.4 Tension d'une suite de variables aléatoires

**Définition A.4.1** *Soit $T$ un intervalle de $I\!R$. Soit $X_n$ une suite de processus continus sur $T$. On dit que $X_n$ est tendue dans $C(T)$ si:*

*(i) Il existe un $t \in T$ tel que*

$$\lim_{K\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(|X_n(t)| > K) = 0;$$

*(ii) Pour tout intervalle $[a,b] \subset T$, et pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} P\left(\sup_{s,t\in[a,b],\ |t-s|<\delta} |X_n(s) - X_n(y)| > \varepsilon\right) = 0.$$

**Lemme A.4.2 (Critère d'Aldous)** *Soit $X_n$ une suite de processus avec trajectoire dans $D$. Soit $\tau_n$ un temps d'arrêt du processus $X_n$ à valeurs finies. Et soit $\delta_n$ une constante entre $0$ et $1$ qui converge vers $0$. Pour tout $f \in D$, on note par $J(f)$ le maximum des sauts de $|f(t) - f(t-)|$. Supposons que $X_n$ vérifie les conditions suivantes:*
*(i) $X_n(0)$ et $J(X_n)$ sont tendues.*
*(ii) $X_n(\tau_n + \delta_n) - X_n(\tau_n) \xrightarrow{P} 0$.*
*Alors $X_n$ est tendue dans $D$.*

Démonstration: Voir [2].

**Théorème A.4.3** *Soient $\{P_n\}_{n\geq 1}$ une suite de mesures de probabilités sur $\mathcal{C}$ et $x$ une fonction réelle continue sur $[0,1]$. Alors la suite $\{P_n\}_{n\geq 1}$ est tendue si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*
*(i) Pour tout $\eta > 0$, il existe $a$ tel que*

$$P_n(|x(0)| > a) \leq \eta, \quad n \geq 1.$$

*(ii) Pour tout $\eta$ et $\varepsilon$ positives, il existe $\delta$, avec $0 < \delta < 1$, et un entier $n_0$ tel que*

$$\frac{1}{\delta} P_n(\sup_{t\leq s\leq t+\delta} |x(s) - x(t)| \geq \varepsilon) \leq \eta, \quad n \geq n_0,\ pour\ tout\ t.$$

Démonstration: Voir [6].

**Lemme A.4.4 (Inégalité de Lenglart)** *Soient $X$ et $Y$ deux processus $\mathcal{F}$-adapté avec trajectoire dans $D$ (espace des fonctions càdlàg). Supposons que $Y$ est croissante et que pour tout $T$ temps d'arrêt fini on a $E[X(T)] \leq E[Y(T)]$. Si $Y$ est prévisible, alors pour tout $T$ temps d'arrêt fini et pour tout $\varepsilon, \eta > 0$*

$$P(\sup_{s \leq T} |X_s| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} E[Y(T) \wedge \eta] + P(Y(T) \geq \eta).$$

Démonstration: Voir [27].

**Théorème A.4.5 (Skorohod)** *Soit $X_n = \{X_n(t)\}, n = 1, 2, \ldots,$ une suite tendue de processus à valeurs dans $C([0, \infty); I\!R^d)$. Alors il existe une sous-suite $n_1 < n_2 < \ldots < n_k \ldots \to \infty$, un espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ et un processus continu $\tilde{X}_{n_k} = (\tilde{X}_{n_k}(t)), k = 1, 2, \ldots$ et $\tilde{X} = (\tilde{X}(t))$ définie sur cet espace tel que*

$$\tilde{X}_{n_k} \overset{\mathcal{L}}{\approx} X_{n_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\tilde{X}_{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{X} \quad p.s.$$

Démonstration: Voir [24].

**Théorème A.4.6** *Soit $A_n$ un processus croissant tel $A_n(0) = 0$ et tel que les lois de dimensions finies convergent vers celles de $A$ sur $[a, b]$, c'est à dire $(A_n(t_1), \ldots, A_n(t_k))$ converge en loi vers $(A(t_1), \ldots, A(t_k))$ pour $a \leq t_1 \leq t_2 < \cdots \leq t_k \leq b$. Et supposons que $A$ est continue sur $[a, b]$. Alors $A_n$ est tendue dans $\mathcal{C}([a, b])$.*

Démonstration: Posons $w(x, \delta, [a, b]) = \sup_{|t-s|<\delta, s,t \in [a,b]} |x(t) - x(s)|$. Alors on a

$$w(x, \delta, [a, b]) \leq 3 \max_{0 \leq i \leq [(b-a)/\delta]} \sup_{i\delta \leq s \leq \max((b, a+(i+1)\delta)} |x(s) - x(a + i\delta)|.$$

On a $(A(t_1), \ldots, A(t_k))$ pour $a \leq t_1 \leq t_2 < \cdots \leq t_k \leq b$, on a

$$
\begin{aligned}
& \limsup_{n\to\infty} P(w(A_n, \delta, [a,b]) \geq \epsilon) \\
\leq\ & \limsup_{n\to\infty} P\left(3 \max_{0\leq i\leq[(b-a)/\delta]} \sup_{a+i\delta\leq s\leq \max(b,a+(i+1)\delta)} |A_n(s) - A_n(a+i\delta)| \geq \epsilon\right) \\
\leq\ & \limsup_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{0\leq i\leq (b-a)/\delta} \{|A_n(\max(b, a+(i+1)\delta)) - A_n(a+i\delta)| \geq \epsilon/3\}\right) \\
\leq\ & P\left(\bigcup_{0\leq i\leq[(b-a)/\delta]} \{|A(\max(b, a+(i+1)\delta) - A(a+i\delta)| \geq \epsilon/3\}\right) \\
\leq\ & P(w(A, \delta, [a,b]) \geq \epsilon/3),
\end{aligned}
$$

d'après les propriétés de la convergence en loi.
Par conséquent, la suite $A_n$ est tendue dans $C([a,b])$ si $A \in C([a,b])$.

**Définition A.4.7** *Une famille de mesures de probabilité $\mathcal{P} = \{P_\alpha; \alpha \in I\}$ ,où $I$ est un ensemble d'index, est relativement compact si pour toute suite de mesures de $\mathcal{P}$ contient une sous-suite qui converge en loi vers une mesure de probabilité.*

**Théorème A.4.8** *(Prohorov) Soit $\mathcal{P} = \{P_\alpha; \alpha \in I\}$ une famille de mesures de probabilité définies sur un espace métrique séparable et complet. Alors $\mathcal{P}$ est relativement compacte si et seulement si elle est tendue.*

DÉMONSTRATION: Voir [47].

## A.5 Mesures

Le lemme suivant est dû à Morando [36].

**Lemme A.5.1** *Soit $L$ une fonction de $\mathcal{G} \times \mathcal{E} \to [0,1]$ telle que $L(\Omega', E) = 1$ et*
*(i) pour tout $A \in \mathcal{G}, B \to L(A,B)$ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$*
*(ii) pour tout $B \in \mathcal{E}, A \to L(A,B)$ est une mesure sur $(\Omega', \mathcal{G})$.*
*Alors, il existe une unique mesure de probabilité $\mu$ sur $(\Omega' \times E, \mathcal{G} \otimes \mathcal{E})$ tel que $\mu(A \times B) =$*

*$L(A,B)$ pour tout $(A,B) \in \mathcal{G} \times \mathcal{E}$.*

DÉMONSTRATION: Voir [27].

**Théorème A.5.2** *(Vitali-Hahn-Saks) Soit $E = (\Omega, \mathcal{F})$ et soit $P_n$ une suite de mesures de probabilité sur $E$. Supposons que la limite*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$$

*existe pour tout $A \in \mathcal{F}$. Alors $P(A)$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{F}$ et*

$$L(A) = \sup_n P_n(A)$$

*est continue sur l'ensemble vide, c'est à dire si $A_j \in \mathcal{F}$, $A_{j+1} \subset A_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, et $\prod_{j=1}^{+\infty} A_j = \emptyset$, alors on a*

$$\lim_{j\to\infty} L(A_j) = 0.$$

DÉMONSTRATION: Voir [40].

**Théorème A.5.3** *Soient $\mu$ et $\lambda$ deux mesures positives définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ tel que $\lambda$ est fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*
*a) $\lambda$ est absolument continue par rapport à $\mu$.*
*b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\lambda(A) < \varepsilon$ dès que $\mu(A) < \delta$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION: Voir [7].

**Théorème A.5.4** *Soit $E$ un espace métrique. Toute mesure de probabilité sur $E$ est régulière.*

DÉMONSTRATION: Voir [6].

## A.6 Topologie faible

**Définition A.6.1** *Soient $E$ un espace topologique linéaire et $A$ un ensemble dans $E$. On dit que $A$ est un ensemble sequentiellement faible et compact si toute suite $\{x_n\}$ de $A$ contient une sous-suite qui converge faiblement vers un point dans $E$.*

**Théorème A.6.2** *Soit $(S, \Sigma, \mu)$ un espace mesurable. Si $1 < p < \infty$ alors l'espace $L^p(S, \Sigma, \mu)$ est faiblement complet.*

DÉMONSTRATION: Voir [14].

**Théorème A.6.3** *Soit $(S, \Sigma, \mu)$ un espace mesurable. Si $1 < p < \infty$ alors un ensemble dans $L^p(S, \Sigma, \mu)$ est sequentiellement faible et compact si et seulement si il est borné.*

DÉMONSTRATION: Voir [14].

**Théorème A.6.4** *Soit $(S, \Sigma, \mu)$ un espace mesurable. L'espace $L^1(S, \Sigma, \mu)$ est faiblement complet.*

DÉMONSTRATION: Voir [14].

**Théorème A.6.5** *Une suite $\{f_n\}$ dans $L^1(S, \Sigma, \mu)$ est faiblement de Cauchy si et seulement si elle est bornée et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(s) d\mu(s)$$

*existe pour tout $E \in \Sigma$.*

DÉMONSTRATION: Voir [14].

**Théorème A.6.6** *De toute suite bornée dans un espace de Hilbert on peut extraire une sous-suite faiblement convergente dans $L^2$.*

DÉMONSTRATION: Voir [14].

**Théorème A.6.7** *Soit $x_n$ une suite d'un espace de Banach $E$.*
*Si $x_n$ converge faiblement dans $E$ vers $x$ alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.*

DÉMONSTRATION: Voir [8].

## A.7 Martingales

**Définition A.7.1** *Soient $M$ et $N$ deux martingales de carré intégrable. Alors il existe un processus $A$ croissant et intégrable telle que $M_tN_t - A_t$ est une martingale. On note $A$ par $< M, N >$.*

**Lemme A.7.2** *Pour tout $M, N$ des martingales local continues et pour tout processus mesurable $H, K$ on a*

$$\int_0^t |H_s||K_s||d(< M, N >)|_s \leq \left(\int_0^t H_s^2 d(< M >_s)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t K_s^2 d(< N >_s)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

DÉMONSTRATION: [44].

**Théorème A.7.3** *(Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy) Soit $M$ une martingale locale continue tel que $M(0) = 0$. Notons par $M_t^\star = \sup_{s \leq t} |M_s|$. Alors pour tout $p > 0$ il existe deux constantes $c_p$ et $b_p$ tel que*

$$c_p E[< M >_T^{\frac{p}{2}}] \leq E[(M_T^\star)^p] \leq b_p E[< M >_T^{\frac{p}{2}}]$$

*pour tout temps d'arrêt $T$.*

DÉMONSTRATION: Voir [28].

**Théorème A.7.4** *(Knight) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité avec une famille de référence $\mathcal{F}_t$. Soit $M^i, i = 1, 2, \ldots, d$ une famille finie de martingales continues de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ par rapport à $\mathcal{F}_t$, telle que $< M^i, M^j > (t) \equiv 0, i \neq j$. Alors sur une extension $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, il existe un mouvement Brownien standard de dimension $d$ $B(t) = (B^1(t), B^2(t), \ldots, B^d(t))$ telle que*

$$B^i(t) = M^i(\tau_t^i) \qquad \textit{presque sûrement} \quad t \in [0, < M^i > (\infty)),$$

*où*

$$\tau_t^i = \begin{cases} \inf\{u; < M^i > (u) > t\}, \\ \infty \ , \ t \geq < M^i > (\infty). \end{cases}$$

*En conséquence, $(M^1(t), M^2(t), \ldots, M^d(t))$ peut être obtenu du mouvement brownien de dimension $d, B(t) = (B^1(t), B^2(t), \ldots, B^d(t))$ par*

$$M^i(t) = B^i(< M_i > (t)), \qquad \textit{presque sûrement} \quad i = 1, 2, \ldots, d.$$

DÉMONSTRATION: Voir [24].

**Lemme A.7.5** *Soient $M$ une $L^2$-martingale continue et $X \in L^2(< M >)$. Alors il existe un processus unique $\int_0^{\cdot} XdM$ qui est une $L^2$-martingale continue tel que*

$$\sum_n \left\{ E[\int_0^n (X_n - X)^2 d(< M >)] \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

*pour toute fonction en escalier $X_n$ bornée,mesurable, continue à droite et à valeurs réelle.*

DÉMONSTRATION: Voir [17].

**Théorème A.7.6** *Soit $X_n$ une sous-maringale. Supposons qu'il existe $p > 1$ tel que $\sup_n E[|X_n|^p] < \infty$, alors il existe une variable aléatoire intégrable $X_\infty$ tel que*

$$X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X_\infty \ \ p.s.$$

*et*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X_\infty.$$

DÉMONSTRATION: Voir [47].

**Définition A.7.7** *On dit qu'un processus $X$ est une semi-martingale s'il est de la forme*

$$X = X_0 + M + A \tag{12}$$

*où $X_0$ est une valeur finie et $\mathcal{F}_0$ mesurable, $M$ est une martingale locale avec $M(0) = 0$ et $A$ est un processus cádlàg, adaptée, avec $A(0) = 0$ et de variation fini sur chaque intervalle fini $[0, t]$. $(Var(A)_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{1\le k\le n} |A_{\frac{tk}{n}}(\omega) - A_{\frac{t(k-1)}{n}}(\omega)|.)$*

**Théorème A.7.8** *(Formule d'Itô) Soit $f : I\!R \to I\!R$ une fonction de classe $C^2$ et soit $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ une semi-martingale continue avec la décomposition 12. Alors,*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dM_s + \int_0^t f'(X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d < M >_s,$$

$0 \le t < \infty$.

Démonstration: Voir [28].

**Théorème A.7.9** *Soit $X_n$ une semi-martingale cádlàg de dimension $d$ définie sur la base stochastique $\mathcal{B}^n = (\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbf{F}^n, P^n)$. Et soit $X$ une semi-martingale de dimension $d$ définie sur la base stochastique $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$.*
*Supposons que $|\Delta X_t^n(\omega)| \leq c$, avec $c$ une constante quelconque. Alors*

$X_n \xrightarrow{d} X$ *implique que* $(X_n, < X_n >) \xrightarrow{d} (X, < X >)$.

Démonstration: Voir [27].

## A.8 Le temps local d'un mouvement brownien

**Définition A.8.1** *Soient $B$ un mouvement brownien de dimension un défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\{\phi(t, x, \omega), t \in [0, \infty), x \in I\!R\}$ une famille de variables aléatoires non-négatives. On dit que $\phi(t, x)$ est le temps local en $x$ de $B$ si,avec une probabilité un, on a*
*(i) $(t, x) \mapsto \phi(t, x)$ est continue,*
*(ii) Pour tout sous-ensemble de Borel $A$ de $I\!R$ et $t \geq 0$*

$$\int_0^t I\!I_A(B_s)ds = 2 \int_A \phi(t, x)dx.$$

**Théorème A.8.2** *(Formule de temps d'occupation) Soient $B$ un mouvement brownien de dimension un défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\phi(t, x)$ son temps local en $x$ et $F$ une fonction de Borel positive. Alors il existe un ensemble $P$-négligeable tel que à l'extérieur de cet ensemble on a, pour tout $t$*

$$\int_0^t F(B_s)ds = \int_{I\!R} F(x)\phi(t, x)dx.$$

Démonstration: voir [44].

## A.9 Convergence en loi des processus de Markov

Une fonction continue $f(s) : (0,\infty) \mapsto (0,\infty)$ est une fonction à variation lente lorsque $s \to 0$ si, pour tout $a > 0$, on a
$$\lim_{s\to 0} \frac{f(as)}{f(s)} = 1.$$
Soit $x(t)$ un processus de Markov homogène sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et soit $P_t(x, E)$ sa fonction de transition pour tout $E \in \mathcal{F}$. Soit $p_s(x, dy)$ la mesure définie par

$$p_s(x, E) = \int_0^\infty e^{-st} P_t(x, E) dt, \quad E \in \mathcal{F}.$$

Une fonction mesurable non-négative $V$ satisfait la condition (A) s'il existe une fonction $h(s) \to \infty$, lorsque $s \to 0$, et une constante positive $C$ tels que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{p_s(x, dy)}{h(s)} V(y) dy \to C, \text{ lorsque } s \to 0,$$

uniformément pour tous les $x \in \{\xi \in \Omega : V(\xi) > 0\}$.

**Théorème A.9.1 (Darling and Kac (1957))** *Soit $x(t)$ un processus de Markov tel que décrit ci-dessus et supposons que pour un certain $0 \le \alpha < 1$, $V$ satisfait l'hypothèse (A) pour $h(s) = s^{-\alpha} L(1/s)$, $0 \le \alpha < 1$, où $L(1/s)$ est une fonction à variation lente lorsque $s \to 0$. Alors, pour tout $x \ge 0$, on a*

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{ \frac{1}{Ch(1/t)} \int_0^t V(x(\tau) d\tau \le x \right\} = g_\alpha(x),$$

*où*
$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\alpha} \displaystyle\int_0^x \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j-1}}{j!} \sin(\pi\alpha j) \Gamma(\alpha j + 1) y^{j-1} dy, & 0 < \alpha < 1, \\ 1 - e^{-x}, & \alpha = 0. \end{cases}$$

*De plus,*
$$\lim_{t\to\infty} E\left\{ \left( \frac{1}{h(1/t)} \int_0^t V(x(\tau) d\tau \right)^k \right\} = \frac{C^k k!}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

*pour tout $k \ge 0$.*

DÉMONSTRATION: Voir [13].
La fonction de répartition $g_\alpha(x)$ est dite loi de Mittag-Leffler d'indice $\alpha$. Cette loi est déterminée par ses moments et

$$\int_0^\infty e^{\lambda x} dg_\alpha(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

si $|\lambda|$ est assez petit.
Pour $\alpha = 0$, la loi de Mittag-Leffler est la loi exponentielle, et pour $\alpha = \frac{1}{2}$, c'est la loi normale tronquée de fonction de répartition $(\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{4}} dy,\ x \geq 0$.

## A.10 Équations stochastiques différentielles

Soit $\Omega$ l'ensemble des fonctions $\omega : I\!R^+ \to I\!R$ qui sont continues . On définie une filtration sur $\Omega$ par

$$\mathcal{F}_t = \cap_{s>t} \sigma(\omega(u) : u \leq s).$$

On définie $\mathcal{F}$ comme étant la plus petite $\sigma$-algèbre contenant $\mathcal{F}_t$. On appelle $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ l'espace canonique. Soit $(\Omega', \mathcal{F}', \mathcal{F}'_t, P')$ l'espace de base. Soit $\Theta$ un sous-ensemble de $I\!R^n$ avec un intérieur non-vide. Supposons que pour tout $\theta \in \Theta$ l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dY_t = \beta(\theta; t, Y_t)dt + \gamma(t, Y_t)dW_t, \quad Y_0 = x_0 \tag{13}$$

a une solution $Y^\theta$. $x_0$ est un vecteur de dimension $d$ et

$$\gamma : I\!R^+ \times I\!R^d \to I\!R^d \times I\!R^m$$

$$\beta(\theta, ., .) : I\!R^+ \times I\!R^d \to I\!R^d$$

sont des fonctions de Borel.
La solution $Y^\theta$ induit une mesure de probabilité $P_\theta$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
Posons $c(t, x) = \gamma(t, x)\gamma(t, x)^T$.

**Définition A.10.1** *Une solution forte de l'équation (13) est un processus* $Y = \{Y_t; 0 \leq t < \infty\}$ *continu qui vérifie*

*(i)* $Y$ *est adapté à* $\mathcal{F}_t$,
*(ii)* $P(X_0 = \xi) = 1$,
*(iii)*$P(\int_0^t (|\beta(\theta; s, Y_s)| + \gamma^2(s, Y_s))ds < \infty) = 1$ *pour tout* $1 \leq i \leq d$,
*(iv) (13) est satisfait presque sûrement.*

**Théorème A.10.2** *Supposons que pour tout* $n \geq 1$ *il existe une constante* $K_n > 0$ *tel que pour tout* $t \geq 0$, $\|x\| \leq n$ *et* $\|y\| \leq n$:

$$\|\beta(t,x) - \beta(t,y)\| + \|\gamma(t,x) - \gamma(t,y)\| \leq K_n(\|x\| - \|y\|).$$

*Alors l'équation (13) a une solution forte unique.*

Démonstration: Voir [28].

On définit, pour chaque $\theta \in \Theta$ un processus $y(\theta)$ de dimension $d$ par:

$$y_t(\theta) = \beta(\theta, t, Y_t) - \beta(\theta_0, t, Y_t)$$

où $\theta_0 \in \Theta$ est fixé, et un autre processus $\alpha_t$ défini par

$$\alpha_t(\theta) = c_t^{-1} y_t(\theta)$$

où $c_t = c(t, Y_t)$. Enfin on pose

$$A_t(\theta) = \int_0^t \alpha_s(\theta)^T c_s \alpha_s(\theta) ds.$$

Maintenant on peut énoncer le théorème qui nous donnera une expression de la fonction de vraisemblance

$$L_t(\theta) = \left.\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{dP_\theta^t}{dP_{\theta_0}^t},$$

où $dP_\theta^t = P_\theta|_{\mathcal{F}_t}$.

**Théorème A.10.3** *Supposons que*

$$P_\theta^t(A_t(\theta) < \infty) = P_{\theta_0}^t(A_t(\theta) < \infty) = 1$$

*Alors*

$$P_\theta^t \sim P_{\theta^{(0)}}^t$$

*et*

$$\frac{dP_\theta^t}{dP_{\theta^{(0)}}^t} = \exp\{\int_0^t y_s(\theta)^T c_s^{-1} dY_s^c(\theta^{(0)}) - \frac{1}{2}\int_0^t y_s(\theta)^T c_s^{-1} y_s(\theta) ds\}$$

*où*

$$Y_s^c(\theta^{(0)}) = Y_t - x_0 - \int_0^t b(\theta; s, Y_s) ds.$$

DÉMONSTRATION: Voir [48].

# BIBLIOGRAPHIE


[1] Abramowitz, M. and Stegun, I.: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* Nat. Bureau of Standards, Appl. Math. Ser. No. 55, Tenth Edition (1970).

[2] Aldous D.J. *Stopping times and tightness* Ann Probability, **6**, No 2, 335-340 , 1978.

[3] Aldous D.J, Eagleson G.K. *On mixing and stability of limit theorems* Ann Probability, **6**, No 2, 325-331 , 1978.

[4] Baxter J.R, Chacon R.V. *Compactness of stopping times* Z.Wahrsch.Verw.Geb. **40**, 169-182, 1977 .

[5] Brown B,M. *Martingale central limit theorems* Ann.Math.Statist. **42**, 59-66,1971.

[6] Billingsley P. *Convergence of probability measures* Willey, New York, 1968.

[7] Billingsley P. *Probability and measure* Willey, New York, 1995.

[8] Brezis H. *Analyse fonctionnelle* Masson, 1983.

[9] Chung K.L. *A course in probability theory* Harcourt, Brace and World, Inc, 1968.

[10] Csorgo M, Fischler R. *Some examples and results in the theory of mixing and random-sum central limit theorems* Periodica Mathematica Hungarica, t **3**, 41-57, 1973.

[11] Csorgo M, Fischler R. *On mixing and the central limit theorem* Tohoku Math Journ., t **23**, 139-145, 1971.

[12] Daley D.J , Vere-Joners D. *An introduction to the theory of point process* Springer-Verlag, 1988.

[13] Darling D.A, Kac M. *On occupation times for Markoff processes* Trans.Amer.Math.soc, t **84**, 444-458, 1957.

[14] Dunford N, Schwartz J.T. *Linear operators* Interscience Publishers, 1958.

[15] Durrett R, Resnick S.I. *Functional limit theorems for dependent variables* Ann Probability, **6**, No 5, 829-846, 1978.

[16] Eagleson G.K. *Some simple conditions for limit theorems to be mixing* Teor.Verojatnost.i Primenen, **21**, 653-660 , 1967 .

[17] Ethier S.N, Kurtz T.G. *Markov Processes* Wiley and sons,1986.

[18] Feigin P.D. *Stable convergence of semimartingales* Stoch.Proc.App, **19**, No 1, 125-134, 1985.

[19] Fischler R. *Suites de bi-probabilités stables* Annales de la faculté des sciences de l'université de Clermont, No **43**, 159-167, 1970.

[20] Fischler R. *Quelques théorèmes limites du calcul des probabilités dont la valeur limite dépend d'une variable aléatoire* Ann.Inst.Henri poincaré, Vol **IX**, No 4, 345-349, 1973.

[21] Fischler R. *Convergence faible avec indices aléatoires* Ann.Inst.Henri poincaré, Vol **XII**, No 4, 391-399, 1976.

[22] Hall P, Heyde c.c. *Martingale limit theory and its application* Academic Press, 1980.

[23] Horst S. *Topology* Allyn and Bacon, 1968.

[24] Ikeda N, Watanabe S. *Stochastic differential equations and diffusion processes* North-Holland publishing company, 1981.

[25] Jacod J. *Théorèmes limite pour les processus* Lecture notes in mathematics. **1117**, 299-407.

[26] Jacod J, Mémin J. *Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales* Z.Wahrsch.Verw.Geb. **35**, 1-37, 1976.

[27] Jacod J, Shiryaev A.N. *Limit theorems for stochastics process* Springer-Verlag, 1987.

[28] Karatzas I, Shreve E.S. *Brownian motion and Stochastic calculus* Springer-Verlag, 1988.

[29] Kasahara Y. *Limit theorems of occupation times for Markov processes* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **12**, 801-818, 1977.

[30] Letta G, Pratelli L. *Convergence stable vers un noyau gaussien* Rend.Accad.Naz.Sci.XL Mem.Mat.App(5) 20, 1996.

[31] Loève M. *Probability theory* D. Van Nostrand Company, Inc., 1963.

[32] McLeish, D.L. *Dependent central limit theorems and invariance principles* Ann.Prob **2**, 620-628., 1974.

[33] Mogyorodi J. *A remark on stable sequences of random variables and a limit distribution theorem for a random sum of independent random variables* Acta Math.Acad.Sci.Hung., t **17**, 401-409, 1966.

[34] Mogyorodi J, Katai I. *Some remarks concerning the stable sequences of random variables* Publicationes Mathematicae Debrecen, t **14**, 227-238, 1967.

[35] Mogyorodi J, Bassily N.L, Ishak S. *On stable and mixing sequences of $\sigma$-fields* Annales. Univ.Sci.Budapest, t **11**, 11-22, 1991.

[36] Morando Ph. *Mesures aléatoires* Lecture notes in mathematics. **88**, 190-229, 1969.

[37] Mordecki E. *Necessary conditions for stable convergence of semimartingales* Theory.Probab.Appl, **44**, 217-221, 2000.

[38] Papanicolaou G.C, Stroock D.W, Varadhan S.R.S. *Martingale approach to some limit theorems* Duke Univ.Math.Series III, 1977.

[39] Rebolledo R. *Central limit theorems for local martingales* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **51**, 269-286, 1980.

[40] Rényi A. *Foundation of probability* Holden-Day, 1970.

[41] Rényi A. *On stable sequences of events* Sankyha, t **25 A**, 293-302, 1963.

[42] Rényi A. *On mixing sequences of sets* Acta Math.Acad.Sci.Hung., t **9**, 215-228 , 1958.

[43] Rényi A, Revez P. *On mixing sequences of random variables* Acta Math.Acad.Sci.Hung., t **9**, 389-393 , 1958.

[44] Revuz D, Yor M. *Continous martingales and Brownian motion* Springer-Verlag, 1994.

[45] Rootzén H. *On the functional central limit theorem for martingales, II.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **51**, 79-93, 1980.

[46] Rootzén H. *Limit distributions for the error in approximations of stochastic integrals* Ann Probability, **8**, No 2, 241-251, 1980.

[47] Shiryayev A.N *Probability* Springer-Verlag, 1984.

[48] Sorensen M. *Likelihood methods for diffusions with jumps* Prob.Pure.Applied,**6**,67-105, 1991.

[49] Stoyanov J.M *Counterexamples in probability* Wiley series in probability and mathematical statistics

[50] Whitt W. *Some useful functions for functional limit theorems* Math of Operations research **5**, 67-85, 1980.