

HEC MONTRÉAL

**Tarification d'options et ajustement
dans un modèle avec sauts**

Par

Rim Chérif

Sous la direction de

Hatem Ben Ameer

Bruno Rémillard

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de maîtrise ès sciences (M.Sc.)*

(Ingénierie financière)

Octobre 2009

© Rim Chérif, 2009

*A la mémoire de la plus chère à mon coeur,
ma grand-mère Kamoura,*

*A toi omni qui as tant donné et si peu reçu
A toi qui as su m'inculquer les bonnes valeurs de la vie
A toi je dédie ce travail qui m'a éloignée de toi au moment où je devais être
à côté de toi
Que dieu t'accorde sa miséricorde, t'assure une noble demeure et t'offre son
Paradis.*

Résumé

Dans ce mémoire, nous proposons une formule quasi-explicite pour le prix d'une option américaine dans le modèle de Merton (1976). Notre procédure est basée sur la programmation dynamique couplée avec une approximation linéaire.

La méthodologie proposée est testée numériquement et comparée, dans le même cadre, à d'autres méthodes d'évaluation.

Nous proposons, ensuite, d'étudier le problème d'ajustement dans le modèle avec sauts qui a été retenu. Nous considérons trois méthodes d'estimation : la méthode des cumulants, une méthode de seuil et la méthode du maximum de vraisemblance. Nous testons ces dernières numériquement et nous en étudions la précision et la robustesse.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes deux professeurs et encadreurs Pr. Bruno Rémilliard et Pr. Hatem Ben Ameer pour leur soutien moral et financier. Je vous remercie du fond du coeur de m'avoir donné la possibilité d'acquérir de nouvelles connaissances et d'en apprendre chaque jour davantage. Je remercie également les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Je tiens aussi à remercier le Ministère de l'Enseignement Supérieur Tunisien pour la qualité de l'éducation et le soutien qu'offrent ses membres aux étudiants.

De plus, je remercie mon tendre mari pour son amour, sa patience et son soutien inconditionnel. Je remercie mon cher papa d'avoir semé en moi l'amour pour les études et de m'avoir toujours poussée vers le meilleur grâce à son amour, sa disponibilité et ses précieux conseils. Merci maman pour ce que tu es, la meilleure des mères. Merci pour ton sacrifice, ta tendresse et ta douceur.

Je ne saurais oublier de remercier mon petit frère et ma petite soeur, ma grand-mère, ma chère Rafoulla, ainsi que mes oncles et tantes pour la fierté que je vois dans leurs yeux, cette fierté qui m'a toujours aidée à me surpasser.

Table des matières

Résumé	ii
Remerciements	iii
Table des matières	iv
Table des figures	vii
Liste des tableaux	viii
1 Introduction	1
2 Revue de la littérature	3
2.1 Tarification d'options américaines dans le modèle de diffusion avec sauts	4
2.1.1 Approche par arbre	4
2.1.2 Approche par différences finies	5
2.1.3 Autres approches	6
2.2 Estimation dans le modèle de diffusion avec sauts	7
2.2.1 Approches non paramétriques	7
2.2.2 Approches paramétriques	8
3 Le modèle de Merton	10
3.1 Processus de Poisson	10
3.2 Présentation du modèle de Merton	12

3.3	Le problème d'incomplétude des marchés	13
4	Tarification d'une option américaine dans le modèle de Merton par programmation dynamique	15
4.1	Description du contrat d'option américaine	15
4.2	Procédure de la programmation dynamique	16
4.3	Application au modèle de Merton	19
4.4	Investigation numérique	23
5	Ajustement dans le modèle à sauts de Merton	28
5.1	La méthode des cumulants	28
5.1.1	Présentation de la méthodologie d'estimation	28
5.1.2	Précision de la méthode des cumulants	31
5.2	La méthode de seuil	33
5.3	La méthode du maximum de vraisemblance	35
5.3.1	Présentation de la méthodologie d'estimation	35
5.3.2	Précision de la méthode du maximum de vraisemblance	37
5.4	Résultats empiriques	37
5.4.1	Sur des données simulées	37
5.4.2	Sur des données réelles	41
6	Conclusion générale	46
	Annexes	47
A	Lemme d'Îto pour les processus à sauts	48
B	Formule fermée pour l'évaluation d'une option européenne dans le modèle de Merton	49
C	Matrice de transition $A[.][.]$	51
D	Matrice de transition $B[.][.]$	54

E Preuves	57
E.1 Processus de Lévy et changement de loi	57
E.2 La fonction génératrice des moments	59
F Le théorème de Slutsky	60
G La méthode du gradient conjugué préconditionné	61
H Algorithme de Nelder & Mead (1965)	63
I La méthode du noyau	65
Bibliographie	67

Table des figures

5.1	Processus des log-rendements simulés avec $S_0 = 100$, $\mu = 0.08$, $\sigma = 0.12$, $\lambda = 10$, $\gamma = 0.02$ et $\delta = 0.01$	38
5.2	Processus des log-rendements de l'indice S&P500 (1999 – 2009).	42
5.3	Graphique des densités estimées du rendement	43

Liste des tableaux

4.1	Prix d'une option de vente américaine avec sauts log-normaux.	24
4.2	Prix d'une option de vente européenne selon le programme dynamique de Merton (<i>DPM</i>) et convergence vers le prix Merton (1976) avec $S_0 = 40\$$, $r = 0.08$, $\sigma^2 = 0.05$, $\tilde{\lambda} = 5$, $\gamma = -0.025$, $\delta^2 = 0.05$ et $T = 0.25$	25
4.3	Prix d'une option d'achat européenne évalué avec le programme dynamique de Merton (<i>DPM</i>) avec $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $\tilde{\lambda} = 0$, $\gamma = -0.025$, $\delta^2 = 0.05$ et $T = 1$	25
4.4	Prix d'une option d'achat européenne évalué avec le programme dynamique de Merton (<i>DPM</i>) avec $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $\tilde{\lambda} = 5$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ et $T = 1$	25
4.5	Prix d'une option d'achat européenne évalué avec le programme dynamique de Merton (<i>DPM</i>) et sa convergence vers le prix Black & Scholes (1973) avec $\gamma = -0.025$ et $\delta^2 = 0.05$	26
4.6	Prix d'une option d'achat européenne évalué avec le programme dynamique de Merton (<i>DPM</i>) et sa convergence vers le prix Black & Scholes (1973) avec $\tilde{\lambda} = 5$	27
5.1	Les paramètres estimés sur des données simulées selon les différentes méthodes d'estimation.	39
5.2	Paramètres estimés sur des données simulées avec une forte amplitude de sauts.	40
5.3	Paramètres estimés sur des données simulées avec une faible amplitude de sauts.	41
5.4	Statistiques des log-rendements de l'indice S&P500 (1999 – 2009)	43

5.5	Les paramètres estimés sur des données réelles selon les différentes méthodes d'estimation.	44
5.6	Prix théorique d'une option de vente américaine sur le S&P500 selon le programme dynamique de Merton (<i>DPM</i>)	45

Chapitre 1

Introduction

On connaît la journée du lundi 19 octobre 1987 comme étant le « Lundi noir », jour où l'indice Dow Jones de la Bourse de New York a atteint son niveau le plus bas entraînant dans sa chute les bourses mondiales.

Plusieurs, dont Bates (1991), ont essayé d'expliquer les mécanismes qui ont conduit au déclenchement du krash boursier et qui sont à l'origine de son ampleur. L'auteur mentionne que le marché est victime de la carence des instruments d'évaluation, entre autres de l'absence d'une modélisation prenant en compte le comportement de sauts des actifs sous-jacents.

C'est donc à juste titre que beaucoup de chercheurs se sont focalisés sur ce type de modélisation dans leurs différentes recherches, notamment dans le cadre de la tarification de produits dérivés dont le sous-jacent suit une diffusion avec sauts. Cependant, bien que les récents dénouements aient réussi à évaluer quelques types de contrats dérivés, à savoir les options européennes, et ce, d'une manière exacte, ils n'ont pas connu pareil succès quand il s'agit de tarifier des options américaines, l'un des contrats les plus transigés sur le marché des droits contingents. Cet échec a donné lieu à une littérature ayant comme objectif l'élaboration de modèles robustes pour la tarification d'options américaines.

En plus de la difficulté d'évaluation dans le cadre des processus de diffusion avec sauts, une autre complexité se rajoute. Celle-ci est l'ajustement de ces

modèles à cause, entre autre, de l'addition des paramètres relatifs aux sauts. Dans ce travail, nous nous sommes donc intéressés d'une part, à la tarification d'options américaines dont le sous-jacent suit un processus de diffusion avec sauts selon le modèle de Merton (1976), et ce, d'une manière quasi-exacte, puis d'une autre part à l'ajustement de ce modèle en se basant sur différentes approches.

Alors que le prochain chapitre présente une revue de la littérature pertinente, le troisième chapitre expose le modèle à sauts de Merton (1976) et le chapitre 4 présente notre méthode d'évaluation basée sur la programmation dynamique couplée avec des éléments finis. Finalement, le chapitre 5 traite de l'ajustement du modèle avec sauts.

Chapitre 2

Revue de la littérature

Malgré le succès du modèle de Black & Scholes (1973), il a été prouvé que plusieurs de ses hypothèses fondamentales ne sont pas validées. L'une des plus contraignantes est la constance de la volatilité. Une manière de tester cette hypothèse consiste à inverser la formule explicite de ce modèle pour obtenir une volatilité dite *implicite* qui n'est pas constante. De plus, le modèle de Black & Scholes (1973) repose sur la normalité des rendements empiriques. Or, il est reconnu dans la littérature que ces rendements peuvent prendre des valeurs plus étendues que ceux du cas gaussien : les queues de distribution sont plus épaisses (distribution dite *leptokurtique*).

Afin de remédier aux problèmes liés à ce modèle, Merton (1976) a introduit un nouveau modèle financier qui a été amplement étudié dans la littérature. L'auteur considère un processus hybride composé d'une partie continue gaussienne et d'une autre discontinue de type Poisson composé.

Avec le développement du marché des options, plusieurs chercheurs se sont basés sur ce type de modèle et ont essayé de dériver une évaluation explicite pour ce type de contrats. Cependant, bien qu'ils aient réussi à élaborer des formules explicites pour des options européennes, ils n'ont pas connu un pareil succès quant à l'évaluation des options américaines.

Dans la première section de cette revue, nous exposons les différents travaux effectués pour l'évaluation d'option américaine dans un contexte de diffusion

avec des amplitudes de sauts log-normales puis dans la section suivante, nous présentons quelques méthodes d'estimation dans ce cadre particulier.

2.1 Tarification d'options américaines dans le modèle de diffusion avec sauts

Tous s'entendent pour définir une option américaine comme une option donnant à son détenteur le privilège de l'exercer à tout moment durant sa durée de vie. Afin de bénéficier du privilège d'exercice par anticipation, le détenteur de ce type d'option doit exercer celle-ci au meilleur moment possible, c'est pourquoi il fait face à un problème de temps d'arrêt optimal. Le droit d'exercice anticipé associé à l'option américaine complique notablement son évaluation dans le cadre du processus de diffusion avec sauts. Dans ce sens, plusieurs méthodes numériques ont été développées. Il est à remarquer qu'en choisissant un modèle de diffusion avec sauts, nous nous plaçons délibérément en situation de marché incomplet. Dans cette section, nous passons en revue les approches les plus pertinentes qui ont été proposées pour évaluer le prix d'une option américaine dans le cadre d'une diffusion avec une occurrence des sauts de type Poisson composé.

2.1.1 Approche par arbre

Parmi les premiers travaux dans ce domaine, nous retenons l'article d'Amin (1993). En partant du modèle d'arbre binomial de Cox *et al.* (1979), l'auteur lui superpose des sauts multivariés afin de construire un modèle d'évaluation pour un processus limite de diffusion avec sauts. Finalement, en supposant que le risque de sauts est diversifiable, Amin (1993) procède par rétroinduction (*backward induction*) selon un raisonnement de non-arbitrage pour l'évaluation d'une option américaine. Cette méthode a été critiquée par Hilliard & Schwartz (2005) qui invoquent un problème de convergence vers le prix d'une option

européenne¹ quand la volatilité conditionnelle des sauts est plus importante que celle de la diffusion. Ces auteurs ont essayé d'améliorer les résultats d'Amin (1993) en construisant un arbre bivarié. En effet, ils établissent les probabilités de transitions de telle sorte à capter les deux premiers moments de la diffusion et ceux de la composante de sauts. Ces probabilités peuvent être multipliées grâce à l'hypothèse d'indépendance entre les deux processus de diffusion et de sauts. Dans un processus de diffusion avec sauts, le marché n'est pas complet, des auteurs tel que Wu & Dai (2009), utilisent l'approche d'arbre pour évaluer une option américaine par indifférence d'utilité.

2.1.2 Approche par différences finies

En partant de cette approche, les chercheurs utilisent la théorie des inégalités variationnelles avec le problème d'arrêt optimal pour formuler un cadre d'évaluation pour une option américaine dont le sous-jacent suit un processus de diffusion avec sauts. Il est à remarquer que le problème d'inégalité variationnelle n'est qu'une généralisation au problème de complémentarité linéaire. Par la suite, une fois le problème d'évaluation précisé, les auteurs démontrent l'existence d'une solution, associent des équations déterministes appelées *équations intégro-différentielles* (EID) et définissent une méthode de résolution basée sur les différences finies pour discrétiser leur formulation selon un schéma spécifique. Le problème est que des difficultés surviennent à cause des termes de sauts qui introduisent un opérateur intégral supplémentaire très difficile à approximer.

Zhang (1995, 1997a,b) et Zhang *et al.* (2008) procèdent par différences finies selon un schéma semi-implicite pour l'évaluation de l'option américaine dans un cadre de diffusion avec sauts. À la différence des travaux cités précédemment, Halluin *et al.* (2004) utilisent un schéma purement implicite. Ils prouvent aussi que, si la méthode de Crank Nicolson est utilisée pour la discrétisation des deux parties différentielle et intégrale, l'algorithme est inconditionnellement stable. D'autres auteurs tels que Andersen & Andreasen (2000) et Chiarella &

1. Le benchmark est le prix d'une option européenne selon la formule fermée de Merton (1976)

Ziogas (2006) ont tiré parti de la forme particulière de l'opérateur intégral pour accélérer le calcul en utilisant la méthode de la Transformée de Fourier Rapide (*Fast Fourier Transform*). Des variations sur ces méthodes sont présentées dans les recherches de Cont & Voltchkova (2005), Ana-Maria *et al.* (2005) et Mayo (2008). Plus récemment, Tangman *et al.* (2008) utilisent aussi la méthode de différences finies selon un schéma explicite pour approximer l'EID en prenant un ordre de discrétisation plus élevé. Ces derniers améliorent la convergence de l'algorithme basé sur les EID, en revanche leur schéma de discrétisation requiert un effort de calcul supplémentaire par rapport aux autres méthodes. Bien que le recours aux EID soit une approche robuste, elle reste coûteuse en termes de temps de résolution numérique, trop technique et inaccessible aux praticiens.

2.1.3 Autres approches

Toujours pour la même finalité, la tarification d'une option américaine dont le sous-jacent suit un processus de diffusion avec sauts, certains auteurs tel que Mulinacci (1996), se basent sur l'enveloppe de Snell. D'autres tels que Bates (1991), Pham (1997), Gukhal (2001) et Kou & Wang (2004) ont proposé une approximation quadratique pour le prix d'une option américaine. En effet le prix de celle-ci est perçu comme étant la somme d'une option européenne plus une prime pour l'exercice anticipé. Cette approche constitue une généralisation des travaux de Barone-Adesi & E. Whaley (1987). En partant des travaux de Geske & Johnson (1984), une autre méthode a été proposée par Gukhal (2004). En se basant sur une formule analytique pour le prix d'une option composée dans le cadre d'un processus de diffusion avec sauts, l'auteur dérive un prix pour une option américaine, et ce, dans le même contexte. Cependant, quand le nombre de dates d'exercices augmente, l'effort de calcul devient important.

2.2 Estimation dans le modèle de diffusion avec sauts

Une fois le modèle d'évaluation d'une option américaine dans le contexte d'un processus de diffusion avec sauts établi, ses paramètres doivent être estimés. L'estimation dans ce contexte requiert plus d'effort à cause de la dimension du problème. Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux méthodes d'estimation sur des modèles de diffusion avec sauts. Nous distinguons deux grandes approches : les approches paramétriques et les approches non paramétriques.

2.2.1 Approches non paramétriques

Plusieurs chercheurs ont développé des méthodes non paramétriques pour l'estimation des modèles de diffusion avec sauts. Certaines recherches se sont basées sur le calibrage. Cette approche non paramétrique consiste à déterminer à partir des données de marché les paramètres du modèle permettant le mieux de retrouver les prix du marché. Cependant, cette alternative mène à un problème inverse mal posé qui se présente surtout quand la dimension est élevée. Une des méthodes les plus souvent utilisées dans ce cadre est les moindres carrés non linéaires. Le problème usuel associé à cette méthode est la non-convexité de la fonction objectif, ce qui peut conduire le calibrage à s'arrêter sur un minimum local au lieu du minimum global cherché.

Bates (1991) se base sur cette approche mais en y apportant quelques changements. Il approxime d'abord le taux sans risque à partir des taux des bonds du trésor, puis procède à un changement de variables des paramètres à estimer afin de réduire la dimension d'optimisation. L'auteur mentionne que l'optimisation sur la volatilité implicite réduit l'espace du problème de 4 à 3. Andersen & Andreasen (2000) utilisent la même approche et concentrent aussi l'effort de calibrage sur la fonction de volatilité implicite. Dans la même veine, He *et al.* (2006) procèdent par calibrage sur des prix d'options américaines et affirment que l'estimation des paramètres reliés à la distribution log-normale des sauts est laborieuse. Ils démontrent ensuite qu'en fixant la moyenne de l'amplitude

des sauts et son écart type, la fonction objectif à minimiser aura un minimum global et le problème de calibrage devient un problème bien posé.

Une méthode alternative, introduisant une fonction de pénalité, a été récemment proposée par Cont & Tankov (2004) pour pallier le problème des minimums locaux. Cette approche repose sur un calibrage avec une entropie relative. L'entropie relative constitue une mesure de distance entre deux mesures de probabilités. Le recours à une optimisation avec entropie relative rend la fonction objectif plus convexe. Elle introduit plus de stabilité numérique et peut garantir l'obtention d'un minimum global. Cependant, elle rajoute plus de biais quant à la solution obtenue. Une des difficultés rencontrées lors de l'estimation des paramètres de sauts réside dans la différenciation entre les variations dues à la partie de diffusion de celles dues à la partie discontinue modélisée par des sauts. Pour cela, Mancini & Renò (2008) définissent un seuil pour la détection des sauts. A partir de cette distinction, les auteurs élaborent des estimés pour les paramètres de diffusion, ainsi que les paramètres de sauts.

2.2.2 Approches paramétriques

Parmi les méthodes paramétriques utilisées pour l'estimation des paramètres avec sauts, nous retenons la méthode du maximum de vraisemblance. Honoré (1998) modifie le modèle de Merton (1976) en introduisant une deuxième composante de sauts fixée d'avance. Celle-ci lui permet d'améliorer les résultats de ses estimations. Cependant, le test du ratio de vraisemblance rejette l'hypothèse du modèle de Merton (1976) modifié par rapport au modèle de Merton (1976) original. D'autres comme Hanson & Zhu (2004) utilisent la méthode du maximum de vraisemblance mais en réduisant la dimension du problème pour garantir une meilleure convergence. En effet, Hanson & Zhu (2004) imposent deux restrictions : la première est une condition sur les deux premiers moments du processus puis la deuxième est une troncature au second ordre de la densité de probabilité du processus de diffusion avec sauts. Plus récemment Ait-Sahalia (2004) distingue l'information attribuable aux paramètres de la diffusion de celle attribuable aux paramètres de sauts. Il prouve que l'estima-

tion de la volatilité de la diffusion n'est pas affectée par l'occurrence des sauts quand la méthode d'estimation utilisée est le maximum de vraisemblance.

Dans le même cadre d'approche paramétrique, Press (1967) utilise la méthode des cumulants pour estimer le modèle de diffusion avec sauts. Pour éviter le recours à des cumulants de grands ordres, l'auteur impose la nullité du terme de la dérive. Askari & Krichene (2008) critiquent la méthode de Press (1967) en invoquant la possibilité d'avoir une variance conditionnelle des sauts négative lors de l'application de son approche.

Ainsi, la modélisation dans le cadre d'un processus avec sauts s'avère laborieuse et les méthodes les plus robustes pour l'évaluation d'une option américaine dans ce cadre bien particulier restent trop techniques et non accessibles aux praticiens. Pour cela, nous proposons une méthode numérique pour la tarification d'options américaines dans le contexte de diffusion avec sauts de Merton (1976) puis nous tentons l'ajustement du modèle. Au cours du prochain chapitre, nous exposons le modèle de Merton (1976) et nous abordons le problème d'incomplétude du marché introduit par ce modèle.

Chapitre 3

Le modèle de Merton

Dans le modèle d'évaluation des options de Black & Scholes (1973), le processus du prix de l'actif sous-jacent est fonction continue du temps. Merton (1976) introduit des discontinuités modélisées par un processus de Poisson composé avec sauts gaussiens capable de capter les événements rares et les chocs abruptes. Partant de ce modèle, nous développons une formule quasi-explicite pour le prix d'une option américaine. Dans ce qui suit, nous exposons quelques propriétés de bases¹ qui vont nous permettre par la suite de présenter le modèle de Merton (1976).

3.1 Processus de Poisson

Définition 1. Soit $(T_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées de loi exponentielle de paramètres λ , dont la mesure s'écrit

$$\mathbb{I}_{\{x > 0\}} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. Les propriétés sont tirées du livre de Damien Lambertson (1997)

On pose $\forall n \geq 1$, $\tau_n = \sum_{i=1}^n T_i$. On appelle le processus de Poisson d'intensité λ , le processus N_t défini par :

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}_{\{\tau_n \leq t\}} = \sum_{n \geq 1} n \mathbb{I}_{\{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\}}.$$

Proposition 1. Si $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ alors, pour tout $t > 0$ la variable aléatoire N_t , suit une loi de Poisson de paramètres λ :

$$P(N_t = n) = e^{(-\lambda t)} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Proposition 2. Soient $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ et $F_t = \sigma(N_s, s \leq t)$. Le processus $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, c'est à dire :

indépendance : si $s > 0$, $N_{t+s} - N_t$ est indépendants de la tribu F_t .

stationnarité : la loi de $N_{t+s} - N_t$ est identique à celle de $N_s - N_0 = N_s$.

Ainsi,

$$P \{ \text{un événement survient une fois durant } dt \} \cong \lambda dt + o(h),$$

$$P \{ \text{un événement survient plus d'une fois durant } dt \} \cong o(h),$$

$$P \{ \text{un événement ne survient pas durant } dt \} \cong 1 - \lambda dt + o(h).$$

où P désigne une mesure de probabilité et $o(h)$ désigne une fonction qui tend vers zéro plus rapidement que h .

Processus de Poisson composé. Soit N_t un processus de Poisson d'intensité λ , et $(U_i)_{i \geq 1}$ une famille de variables aléatoires i.i.d et aussi indépendantes de N_t . Soit le processus de Poisson composé L_t tel que $\forall t \geq 0$

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

L_t est un cas particulier d'un processus de Lévy, la variable U_i représente l'amplitude des sauts.

3.2 Présentation du modèle de Merton

Nous nous plaçons dans le cadre du modèle de Merton (1976). Il s'agit d'un marché sans frictions dans lequel il y a un actif sans risque et un actif risqué qui présente des sauts de valeurs relatives U_1, \dots, U_j, \dots , à des instants aléatoires $\tau_1, \dots, \tau_j, \dots$. Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on définit un mouvement brownien standard $(W_t)_{t \geq 0}$, un processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité λ et une suite $(U_j)_{j \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de distribution log-normale représentant les valeurs relatives des sauts. L'auteur suppose que les tribus engendrées respectivement par $(W_t)_{t \geq 0}$, $(N_t)_{t \geq 0}$ et $(U_j)_{j \geq 1}$ sont indépendantes. L'évolution de S_t , le prix de l'actif risqué à l'instant (t) , est décrite par :

$$dS_t = \mu S_{t-} dt + \sigma S_{t-} dW_t + S_{t-} dL_t, \quad \forall 0 \leq t \leq T \quad (3.1)$$

où μ s'interprète comme le rendement instantané, $L_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$ est un processus de Poisson composé et σ est la volatilité du rendement de l'actif sous-jacent conditionnellement à la non-occurrence des sauts.

Dans le modèle à sauts de Merton (1976), le processus de l'actif risqué suit une dynamique mixte, à certaines dates qui sont des dates d'arrêts, le processus est discontinu avec l'arrivée de sauts ayant différentes amplitudes, en dehors de ces temps d'arrêt, le processus est totalement continu. Par application du lemme d'Itô pour les processus de diffusion avec sauts (voir annexe A), la solution à l'équation différentielle stochastique (3.1) est décrite de la façon suivante :

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \kappa \right) t + \sigma W_t + \sum_{j=1}^{N(t)} \xi_j \right],$$

avec la convention que $\sum_{j=1}^0 = 0$, $\xi_j = \ln(1 + U_j) \sim N(\gamma, \delta^2)$ avec $U_j > -1$ de sorte que les prix soient positifs et $\kappa = E(e^{\xi_j}) - 1 = \exp\left\{\left(\gamma + \frac{\delta^2}{2}\right)\right\} - 1$. Comme nous l'avons mentionné précédemment, pour ce type de modèle, nous

faisons face à un problème d'incomplétude de marché, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de probabilités équivalentes à \mathbb{P} sous lesquelles le prix actualisé $(e^{-rt}S_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale.

3.3 Le problème d'incomplétude des marchés

Afin d'évaluer un produit dérivé, nous devons transformer le modèle sous une mesure neutre au risque. Ayant plus de sources de risque que d'actifs sous-jacents, cette mesure n'est pas unique. Plus précisément, lorsque l'on a recourt aux modèles à sauts tel que celui de Merton (1976), un problème complexe et délicat apparaît, celui de l'incomplétude du marché². Nous formalisons dans ce qui suit le problème.

Nous nous plaçons toujours dans le cadre du modèle de Merton (1976), sous la mesure historique \mathbb{P} , avec

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \kappa \right) t + \sigma W_t + \sum_{j=1}^{N(t)} \xi_j \right].$$

Pour une fonction h positive telle que $a = E[h(\xi_j)] < \infty$, posons

$$\Lambda_t^h = e^{bW_t - t\frac{b^2}{2} - \lambda t(a-1)} \prod_{j=1}^{N_t} h(\xi_j).$$

Alors Λ_t^h est une \mathbb{P} martingale positive d'espérance 1. Sous la loi \mathbb{Q}^h induite par Λ^h , $\tilde{W}_t = W_t - bt$ est un \mathbb{Q}^h mouvement brownien, $\tilde{N}_t = N_t$ est un \mathbb{Q}^h processus de Poisson d'intensité $\tilde{\lambda} = a\lambda$ et la nouvelle loi \tilde{v} des $\tilde{\xi}_j = \xi_j$ sous \mathbb{Q}^h a comme densité $h(x)/a$ par rapport à la loi v sous \mathbb{P} (voir annexe E.1). En effet, sous cette nouvelle mesure \mathbb{Q}^h , la loi des sauts demeure inchangée, i.e $\tilde{v} = v$, mais leur fréquence est $\tilde{\lambda} = \lambda a$ (voir annexe E.1).

2. Cette section est tirée des notes du cours de Pr. Bruno Rémillard « Les méthodes statistiques en ingénierie financière »

Dans le cadre de ce travail et à l'instar de Merton (1976), nous supposons $h(x) = 1 \forall x$, ce qui implique que :

1. $a = 1$,
2. la loi des ξ est la même sous \mathbb{Q}^h et sous \mathbb{P} ,
3. la fréquence $\tilde{\lambda} = a\lambda = \lambda$ du processus de Poisson N_t est la même sous \mathbb{Q}^h et sous \mathbb{P} .

Plus intuitivement, Merton (1976) suppose que le risque associé aux sauts est non systématique, c'est-à-dire un risque qui peut être exclu par une diversification de portefeuille. Ainsi, sous cette mesure neutre au risque \mathbb{Q} , le processus du prix de l'actif sous-jacent est décrit comme suit

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \tilde{\lambda}\tilde{\kappa} \right) t + \sigma \tilde{W}_t + \sum_{j=1}^{\tilde{N}(t)} \tilde{\xi}_j \right],$$

avec $\tilde{\xi}_j \sim N(\gamma, \delta^2)$ et $\tilde{\kappa} = E\left(e^{\tilde{\xi}_j}\right) - 1 = \exp\left\{\gamma + \frac{\delta^2}{2}\right\} - 1$.

Dans le prochain chapitre nous décrivons notre méthode d'évaluation et nous l'appliquons dans le cadre du modèle de Merton (1976).

Chapitre 4

Tarification d'une option américaine dans le modèle de Merton par programmation dynamique

4.1 Description du contrat d'option américaine

Une option américaine est une option qui donne à son détenteur le privilège d'exercer à tout moment durant sa durée de vie. Afin de bénéficier du privilège d'exercice par anticipation, le détenteur de l'option américaine doit exercer celle-ci au meilleur moment possible. Dans ce qui suit, nous présentons le cas d'une option de vente bermudienne¹. Soit les dates d'exercice $t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$ avec $\Delta t_m = t_{m+1} - t_m$, on note $v_m(s)$ la valeur de l'option à la date t_m avec $s = S_{t_m}$, $v_m^e(s)$ la valeur d'exercice de l'option à la date t_m en $s = S_{t_m}$ et v_m^d la valeur de détention de l'option à la date t_m en $s = S_{t_m}$.

La valeur d'exercice d'une option de vente bermudienne à n'importe quelle date d'exercice t_m , pour $m = 1, \dots, M$ est spécifiée dans le contrat d'une option

1. Option se situant entre l'option américaine et l'option européenne, et que l'acheteur peut exercer à une ou plusieurs dates particulières entre la souscription de l'option et son échéance.

de vente comme étant :

$$v^e(s) = \max \left[(K - s), 0 \right].$$

Par ailleurs, le théorème fondamental d'évaluation des actifs dans les marchés sans arbitrage donne la valeur de détention suivante :

$$v_m^d(s) = E \left[e^{-r\Delta t_m} v_{m+1}(S_{t_{m+1}}) \mid S_{t_m} = s \right], \quad \forall m = 0, \dots, M - 1, \quad (4.1)$$

avec la convention que $v_M^d(s) = 0$ pour $s > 0$. Il s'en suit que la valeur globale est :

$$v_m(s) = \max \left(v_m^e(s), v_m^d(s) \right),$$

avec $v_M(s) = v_M^e(s)$.

Ainsi, le programme dynamique calcule la valeur d'exercice, la valeur de détention et la valeur globale, puis selon un principe de rétro-induction (*backward induction*), à chaque date t_m , une comparaison entre la valeur de détention et la valeur d'exercice permet l'identification d'une politique d'exercice optimale. Le problème est que la valeur globale de l'option v_m pour $m = 0, \dots, M - 1$ est inconnue analytiquement et doit être approximée. Ce problème sera détaillé dans les sections qui suivent.

4.2 Procédure de la programmation dynamique

En se basant sur le travail de Ben-Ameur *et al.* (2002), nous allons expliciter l'espérance spécifiée dans (4.1).

Soit $\mathcal{G} = \{a_0 < \dots < a_p < a_{p+1} = +\infty\}$ une grille de valeurs pour le prix de l'actif sous-jacent dans \mathbb{R}^+ . Le choix de la grille \mathcal{G} doit être fait de tel sorte que pour $i = 1, \dots, p - 1$, $\Delta a_i = a_{i+1} - a_i$, ainsi que $P(S_t < a_1)$ et $P(S_t > a_p)$ convergent vers 0 quand $p \rightarrow \infty$ et ce pour tout $t = 1, \dots, T$. On pose $a_0 = 0$ et $a_{p+1} = \infty$. Pour notre cas, nous choisissons les valeurs de la grille d'une manière consistante avec les quantiles de la loi de (S_t) . Nous supposons qu'à une date t_m nous avons déjà une approximation \tilde{v}_{m+1} de la fonction valeur v_{m+1} à

une date future t_{m+1} sur la grille \mathcal{G} . Cette hypothèse n'est pas contraignante car nous connaissons v_M à la maturité $t_M = T$ sur l'espace d'état.

Dans une première étape, nous proposons une interpolation linéaire par morceaux de \tilde{v}_{m+1} notée \hat{v}_{m+1} à tout état d'espace :

$$\hat{v}_{m+1}(s) = \sum_{i=0}^p (\alpha_i^{m+1} + \beta_i^{m+1} s) \mathbb{I}(a_i < s \leq a_{i+1}), \quad \forall s \geq 0,$$

où \mathbb{I} est une fonction indicatrice définie comme suit :

$$\mathbb{I}(a_i < s \leq a_{i+1}) = \begin{cases} 1, & \text{si } s \in (a_i; a_{i+1}] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour $i = 1, \dots, p-1$, on a :

$$\beta_i^{m+1} = \frac{\tilde{v}_{m+1}(a_{i+1}) - \tilde{v}_{m+1}(a_i)}{a_{i+1} - a_i}, \quad (4.2)$$

$$\alpha_i^{m+1} = \frac{a_{i+1}\tilde{v}_{m+1}(a_i) - a_i\tilde{v}_{m+1}(a_{i+1})}{a_{i+1} - a_i}, \quad (4.3)$$

et, pour $i = 0$

$$\beta_0^{m+1} = \beta_1^{m+1} \quad \text{et} \quad \alpha_0^{m+1} = \alpha_1^{m+1}, \quad (4.4)$$

puis pour $i = p$

$$\beta_p^{m+1} = \beta_{p-1}^{m+1} \quad \text{et} \quad \alpha_p^{m+1} = \alpha_{p-1}^{m+1}. \quad (4.5)$$

Suivant le théorème fondamental d'évaluation décrit en (4.1), nous calculons une approximation \tilde{v}_m^d de v_m sur la grille \mathcal{G} . Comme la vraie fonction valeur v_{m+1} est inconnue, nous l'échangeons par son interpolation \hat{v}_{m+1} dans l'espérance,

nous obtenons pour $s = a_k \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_m^d(a_k) &= E \left[e^{-r\Delta t_m} \hat{v}_{m+1}(S_{t_{m+1}}) \mid S_{t_m} = a_k \right], \\ &= e^{-r\Delta t_m} \sum_{i=0}^p \left[\alpha_i^{m+1} E \left[\mathbb{I}(a_i < S_{t_{m+1}} \leq a_{i+1}) \mid S_{t_m} = a_k \right] \right. \\ &\quad \left. + \beta_i^{m+1} E \left[S_{t_{m+1}} \mathbb{I}(a_i < S_{t_{m+1}} \leq a_{i+1}) \mid S_{t_m} = a_k \right] \right],\end{aligned}$$

posons,

$$A_{ki}^m = E \left[\mathbb{I}(a_i < S_{t_{m+1}} \leq a_{i+1}) \mid S_{t_m} = a_k \right], \quad (4.6)$$

$$B_{ki}^m = E \left[S_{t_{m+1}} \mathbb{I}(a_i < S_{t_{m+1}} \leq a_{i+1}) \mid S_{t_m} = a_k \right]. \quad (4.7)$$

ainsi,

$$\tilde{v}_m^d(a_k) = e^{-r\Delta t_m} \sum_{i=0}^p \alpha_i^{m+1} A_{ki}^m + \beta_i^{m+1} B_{ki}^m, \quad (4.8)$$

par suite, une fois la fonction valeur \tilde{v}_m^d calculée, nous approximations v_m sur la grille \mathcal{G} par :

$$\tilde{v}_m(a_k) = \max \left(v_m^e(a_k), \tilde{v}_m^d(a_k) \right), \quad (4.9)$$

ensuite, nous identifions la stratégie d'exercice, c'est-à-dire nous distinguons les états a_k de la grille \mathcal{G} pour lesquels il est optimal d'exercer à une date donnée. Il est à noter que ce programme dynamique, couplé avec une approximation linéaire par morceaux, fonctionne sous l'hypothèse que les matrices de transitions A_{ki}^m et B_{ki}^m sont calculables pour $k = 1, \dots, p$ et $i = 0, \dots, p$. Le calcul des matrices de transition pour le modèle Merton (1976) fera l'objet de la section suivante.

Nous résumons l'algorithme de la programmation dynamique pour la tarification d'options américaines comme suit :

1. Initialiser $\tilde{v}^M(a_k) = v^M(a_k) \forall k$ et avec $m = M$;

2. Calculer α_i^m et $\beta_i^m \forall i = 0, \dots, p$ en utilisant (4.2 - 4.5) ;
3. Si $m = 0$, arrêter l'algorithme ; la valeur de l'option est approximée par $\hat{v}_0(\cdot)$ selon une interpolation linéaire ; sinon continuer pour $m = m - 1$;
4. Calculer $\tilde{v}_m^d(a_k) \forall k$ en utilisant (4.8) ;
5. Calculer $\tilde{v}_m(a_k) \forall k$ en utilisant (4.9) puis sauvegarder la stratégie optimale à (m, k) ;
6. Retourner l'étape 2.

Finalement, en utilisant la méthode de la bisection, nous trouvons la valeur de l'option correspondant à un S_0 donné car la résolution de la grille nous donne juste une gamme de prix qui coïncident aux points de discrétisation a_i choisis au départ.

4.3 Application au modèle de Merton

Nous rappelons que dans le cadre du modèle de Merton (1976), l'équation différentielle stochastique (EDS) sous une mesure neutre au risque \mathbb{Q} est :

$$dS_t = S_{t-} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \tilde{\lambda}\tilde{\kappa} - d \right) dt + \sigma S_{t-} d\tilde{W}_t + S_{t-} d\tilde{L}_t, \quad \forall 0 \leq t \leq T \quad (4.10)$$

ou r est le taux sans risque, σ est la volatilité du rendement de l'actif sous-jacent conditionnellement à la non-occurrence des sauts, d est le taux de dividende, $(\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$ est mouvement brownien standard, $\tilde{L}_t = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_t} \tilde{U}_i$ est un processus de Poisson composé avec $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\tilde{\lambda}$ et $(\tilde{U}_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendants de distribution log-normale représentant les valeurs relatives des sauts et $\tilde{\kappa} = E[\tilde{U}_j]$, où $E[\cdot]$ désigne l'opérateur espérance. La solution à cette (EDS) vérifie :

$$\mathbb{Q} : \quad S_t = S_0 \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - d - \tilde{\lambda}\tilde{\kappa} \right) t + \sigma \tilde{W}_t + \sum_{j=1}^{\tilde{N}_t} \tilde{\xi}_j \right], \quad (4.11)$$

où $\tilde{\xi}_j = \ln(1 + \tilde{U}_j) \sim N(\gamma, \delta^2)$.

Dans ce qui suit nous allons calculer les matrices de transition définies dans (4.13) et (4.15) dans le cadre du modèle de Merton (1976).

Soit,

$$A_{ki}^{mn} = E \left[\mathbb{I} (a_i < S_{t_{m+1}} \leq a_{i+1}) | S_{t_m} = a_k \right], \quad (4.12)$$

en conditionnant sur le nombre de sauts \tilde{N}_t et selon les propriétés des espérances itérées on a :

$$A_{ki}^{mn} = E \left[\underbrace{E \left[I(a_i < S_{t_{m+1}} \leq a_{i+1}) | S_{t_m} = a_k, \tilde{N}_t = n \right]}_{G_{k,i}^{mn}} \right],$$

par suite,

$$A_{ki}^{mn} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) G_{k,i}^{mn}, \quad (4.13)$$

où $f(n)$ est la fonction de masse de la loi de Poisson définie par :

$$f(n) = e^{(-\tilde{\lambda}\Delta t_m)} \frac{(\tilde{\lambda}\Delta t_m)^n}{n!}. \quad (4.14)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} G_{k,i}^{mn} &= P \left[(a_i < S_{t_{m+1}} \leq a_{i+1}) | S_{t_m} = a_k, \tilde{N}_t = n \right] \\ &= P \left[\frac{a_i}{a_k} < \exp \left[(r - d - \tilde{\lambda}\tilde{\kappa} - \frac{\sigma_n^2}{2}) \Delta t_m + \sigma_n Z \sqrt{\Delta t_m} + \overbrace{\sum_{j=1}^n \tilde{\xi}_j}^{N(n\gamma, n\delta^2)} \right] \leq \frac{a_{i+1}}{a_k} \right], \end{aligned}$$

avec $\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\Delta t_m}$, $\tilde{\kappa} = \exp\left\{\gamma + \frac{\delta^2}{2}\right\} - 1$, et $Z \sim N(0, 1)$.

$$G_{k,i}^{mn} = P\left[\frac{a_i}{a_k} < \exp\left[\left(r - d - \tilde{\lambda}\tilde{\kappa} - \frac{\sigma_n^2}{2}\right)\Delta t_m + \sigma_n Z \sqrt{\Delta t_m} + n\gamma + \frac{n}{2}\delta^2\right] \leq \frac{a_{i+1}}{a_k}\right]$$

$$= \begin{cases} \Phi(c_{k,1}^{mn}) & \text{pour } i = 0 \\ \Phi(c_{k,i+1}^{mn}) - \Phi(c_{k,i}^{mn}) & \text{pour } 1 \leq i \leq p-1 \\ 1 - \Phi(c_{k,p}^{mn}) & \text{pour } i = p \end{cases}$$

où $c_{k,i}^{mn} = \left[\log\left(\frac{a_i}{a_k}\right) - \left(r - d - \tilde{\lambda}\tilde{\kappa} - \frac{\sigma_n^2}{2}\right)\Delta t_m - n\gamma - \frac{n}{2}\delta^2\right] / (\sigma_n \sqrt{\Delta t_m})$ et Φ est la fonction de répartition de Z d'une distribution normale centrée et réduite.

De même,

$$B_{ki}^{mn} = E\left[S_{t_{m+1}} I(a_i < S_{t_{m+1}} \leq a_{i+1}) \mid S_{t_m} = a_k\right],$$

suivant le même principe, i.e. en conditionnant sur le nombre de sauts et selon les propriétés des espérances itérées on a :

$$B_{ki}^{mn} = E\left[\underbrace{E\left[S_{t_{m+1}} I(a_i < S_{t_{m+1}} \leq a_{i+1}) \mid S_{t_m} = a_k, \tilde{N}_t = n\right]}_{\mathbf{H}_{k,i}^{mn}}\right],$$

ainsi,

$$B_{ki}^{mn} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) H_{k,i}^{mn}, \quad (4.15)$$

où $f(n)$ est la fonction de masse de la loi de Poisson définie précédemment dans (4.14).

$$B_{ki}^{mn} = E \left[E \left[a_k e^{(r-d-\tilde{\lambda}\tilde{\kappa}-\frac{\sigma_n^2}{2})\Delta t_m + \sigma_n Z \sqrt{\Delta t_m} + n\gamma + \frac{n}{2}\delta^2} \mathbb{I} \left(\frac{a_i}{a_k} < e^{(r-d-\tilde{\lambda}\tilde{\kappa}-\frac{\sigma_n^2}{2})\Delta t_m + \sigma_n Z \sqrt{\Delta t_m} + n\gamma + \frac{n}{2}\delta^2} \leq \frac{a_{i+1}}{a_k} \right) \right] \right],$$

nous procédons au calcul de $H_{k,i}^{mn}$,

$$H_{k,i}^{mn} = \frac{a_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{c_{(k,i)}^{mn}}^{c_{(k,i+1)}^{mn}} e^{(r-d-\tilde{\lambda}\tilde{\kappa}-\frac{\sigma_n^2}{2})\Delta t_m + \sigma_n Z \sqrt{\Delta t_m} + n\gamma + \frac{n}{2}\delta^2} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ,$$

nous effectuons un changement de variable, soit $U = Z - \sigma_n \sqrt{\Delta t_m}$, $dU = dZ$,

$$H_{k,i}^{mn} = \frac{a_k}{\sqrt{2\pi}} e^{(r-d-\tilde{\lambda}\tilde{\kappa})\Delta t_m + n\gamma + \frac{n}{2}\delta^2} \int_{c_{(k,i)}^{mn} - \sigma_n \sqrt{\Delta t_m}}^{c_{(k,i+1)}^{mn} - \sigma_n \sqrt{\Delta t_m}} e^{-\frac{U^2}{2}} dU,$$

en posant $\eta_k^{mn} = a_k e^{(r-d-\tilde{\lambda}\tilde{\kappa})\Delta t_m + n\gamma + \frac{n}{2}\delta^2}$, nous obtenons

$$H_{k,i}^{mn} = \begin{cases} \eta_k^{mn} [\Phi(c_{k,1}^{mn} - \sigma_n \sqrt{\Delta t_m})] & \text{pour } i = 0 \\ \eta_k^{mn} [\Phi(c_{k,i+1}^{mn} - \sigma_n \sqrt{\Delta t_m}) - \Phi(c_{k,i}^{mn} - \sigma_n \sqrt{\Delta t_m})] & \text{pour } 1 \leq i \leq p-1 \\ \eta_k^{mn} [1 - \Phi(c_{k,p}^{mn} - \sigma_n \sqrt{\Delta t_m})] & \text{pour } i = p \end{cases}$$

Il est à remarquer que pour le calcul des matrices de transitions (4.13) et (4.15), nous tronquons la somme infinie quand le terme de celle-ci est inférieur à 10^{-32} . Une fois les matrices de transitions calculées, il ne nous reste plus qu'à appliquer la procédure de la programmation dynamique décrite dans la section précédente.

4.4 Investigation numérique

Dans cette section et dans un premier lieu, nous présentons nos résultats notés (**DPM** : Dynamic program for Merton) pour le prix d'une option de vente bermudienne, puis nous les comparons, à partir des mêmes hypothèses de base, avec d'autres prix d'options américaines similaires selon d'autres modèles d'évaluation. Pour ce faire, nous avons choisi trois modèles d'évaluation d'options américaines dans le cadre du modèle de Merton (1976), à savoir le modèle de Bates (1991), d'Amin (1993) et de Gukhal (2004). Toutefois, il faudra garder à l'esprit lors de l'analyse des résultats que ces trois modèles n'en reste pas moins des modèles numériques et que par conséquent, les prix d'options correspondants aux différents modèles ne sont qu'approximatifs. Ces derniers ne doivent pas être retenus comme références absolues, mais plutôt comme des modèles nous permettant de nous positionner en terme de prix d'options obtenus. Les résultats d'évaluation sont présentés dans le tableau (4.1). Dans un second lieu, nous élaborons deux tests afin de valider notre modèle d'évaluation. Comme notre programme dynamique est adaptable au cas d'une option européenne, le premier test de validation consiste à retrouver le prix d'une option européenne évalué selon la formule explicite de Merton (1976), puis le deuxième test consiste à retrouver le prix d'une option européenne évalué selon la formule explicite de Black & Scholes (1973), et ce, soit en annulant le paramètre ($\tilde{\lambda}$), soit en annulant les deux paramètres (γ et δ). Les résultats des tests sont présentés dans les tableaux (4.2),(4.3) et (4.4).

Prix d'exercice	Nombre de points de discrétisation du sous jacent				Merton (1976)	Amin (1993)
	125	250	500	1000		
30	0.66988	0.66972	0.66970	0.66969	0.66969	0.669
35	1.67310	1.67274	1.67269	1.67268	1.67268	1.674
40	3.59258	3.59204	3.59199	3.59198	3.59198	3.594
45	6.65523	6.65477	6.65472	6.65471	6.65471	6.656
50	10.54490	10.54456	10.54449	10.54448	10.54448	10.545
CPU	(1.68)	(6.75)	(27.13)	(100.04)		

TABLE 4.2 – Prix d'une option de vente européenne selon le programme dynamique de Merton (*DPM*) et convergence vers le prix Merton (1976) avec $S_0 = 40\$$, $r = 0.08$, $\sigma^2 = 0.05$, $\tilde{\lambda} = 5$, $\gamma = -0.025$, $\delta^2 = 0.05$ et $T = 0.25$.

Prix d'exercice	Nombre de points de discrétisation du sous jacent					
	125	250	500	1000	2000	B&S
90	16.70011	16.69987	16.69957	16.69947	16.69945	16.69944
95	13.34809	13.34664	13.34658	13.34650	13.34648	13.34647
100	10.45206	10.45065	10.45073	10.45060	10.45058	10.45058
105	8.02364	8.02191	8.02156	8.02140	8.02137	8.02135
110	6.04324	6.0406	6.04027	6.04010	6.04008	6.04008

TABLE 4.3 – Prix d'une option d'achat européenne évalué avec le programme dynamique de Merton (*DPM*) avec $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $\tilde{\lambda} = 0$, $\gamma = -0.025$, $\delta^2 = 0.05$ et $T = 1$.

Prix d'exercice	Nombre de points de discrétisation du sous jacent					
	125	250	500	1000	2000	B&S
90	16.70011	16.69987	16.69957	16.69947	16.69945	16.69944
95	13.34809	13.34664	13.34658	13.34650	13.34648	13.34647
100	10.45206	10.45065	10.45073	10.45060	10.45058	10.45058
105	8.02364	8.02191	8.02156	8.02140	8.02137	8.02135
110	6.04324	6.0406	6.04027	6.04010	6.04008	6.04008

TABLE 4.4 – Prix d'une option d'achat européenne évalué avec le programme dynamique de Merton (*DPM*) avec $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $\tilde{\lambda} = 5$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ et $T = 1$.

Nous constatons que notre modèle d'évaluation est comparable aux modèles retenus en terme de prix d'options obtenus. Nous constatons aussi que les prix convergent en un temps de calcul mesuré en (CPU) raisonnable étant donné le degrés de précision que nous imposons lors du calcul de la somme infinie des matrices de transition (10^{-32}). Dans le tableau (4.2), nous remarquons une nette convergence du prix de l'option de vente européenne évalué avec notre méthode vers le prix exact de Merton (1976). Une même conclusion est tirée pour le cas des tableaux (4.3) et (4.4), puisque nous retrouvons le prix Black & Scholes (1973) pour une précision de quatre chiffres après la virgule, quand nous annulons les paramètres du sauts.

Afin de mieux illustrer la convergence vers le prix Black & Scholes (1973), nous faisons tendre le paramètre $\tilde{\lambda}$ vers zéros, et ce, pour différents nombres de points de discrétisation. Nous procédons de la même manière pour les paramètres γ et δ . Les résultats sont présentés respectivement dans le tableau (4.5) et (4.6). Nous présentons dans l'annexe C une séquence des matrices de transition $A_{k,i}^{mn}$ et $B_{k,i}^{mn}$ pour différents paramètres $\tilde{\lambda}$, ainsi que pour différents nombres de points de discrétisation p . Les paramètres de l'option d'achat européenne sont les suivants : $S_0 = 100$, $K = 90$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, et $T = 1$ pour un prix Black & Scholes (1973) de 16.69944.

$p \backslash \tilde{\lambda}$	0.001	0.0001	0.00001	0	CPU
250	16.70286	16.70017	16.69990	16.69987	1.59
500	16.70257	16.69987	16.69960	16.69957	5.08
1000	16.70247	16.69977	16.69950	16.69947	20.20

TABLE 4.5 – Prix d'une option d'achat européenne évalué avec le programme dynamique de Merton (*DPM*) et sa convergence vers le prix Black & Scholes (1973) avec $\gamma = -0.025$ et $\delta^2 = 0.05$.

$p \backslash (\gamma, \delta)$	$(10^{-3}, 10^{-3})$	$(10^{-4}, 10^{-4})$	$(10^{-5}, 10^{-5})$	$(0, 0)$	CPU
250	16.70054	16.69987	16.69987	16.69987	9.59
500	16.70025	16.69958	16.69957	16.69957	41.73
1000	16.70015	16.69948	16.69947	16.69947	160.21

TABLE 4.6 – Prix d'une option d'achat européenne évalué avec le programme dynamique de Merton (*DPM*) et sa convergence vers le prix Black & Scholes (1973) avec $\tilde{\lambda} = 5$.

Chapitre 5

Ajustement dans le modèle à sauts de Merton

Une fois le modèle d'évaluation établi, il convient d'estimer ses paramètres. Ainsi, nous proposons, dans un premier lieu, d'exposer les différentes méthodes d'estimation retenues, à savoir : la méthode des cumulants, la méthode de seuil et la méthode du maximum de vraisemblance, puis nous présentons les résultats numériques de chacune de ces méthodes et nous en étudions la précision.

5.1 La méthode des cumulants

5.1.1 Présentation de la méthodologie d'estimation

L'idée repose sur l'égalisation des cumulants empiriques avec les cumulants théoriques. Ceci nous conduit à un système d'équations non linéaires à cinq inconnus. Nous tenterons de résoudre ce dernier numériquement, à l'aide d'une optimisation non linéaire sans contraintes sur les paramètres. Pour construire ce système, il est nécessaire d'explicitier les expressions analytiques correspondantes aux cumulants.

Soit $R_t = \ln \left(\frac{S_{th}}{S_{(t-1)h}} \right) \forall t = 2, \dots, \frac{T}{h} = M$, les rendements journaliers du processus de prix, T est la date de la dernière observation et h un horizon journalier

($h = \frac{1}{250}$). Nous rappelons que l'évolution du processus de log-rendement R_t est :

$$R_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa \right) h + \sigma (W_{th} - W_{(t-1)h}) + \sum_{j=1}^{N(t)} \xi_j,$$

avec $\xi_j \sim N(\gamma, \delta^2)$ et $\kappa = E[e^{\xi_j}] - 1 = \exp\left(\gamma + \frac{\delta^2}{2}\right) - 1$.

On note par $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_5)^\top$, le vecteur des paramètres avec $\mu = \omega_1, \sigma = e^{\omega_2}, \lambda = e^{\omega_3}, \gamma = \omega_4$ et $\delta = e^{\omega_5}$. On pose $\alpha = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$.

Soit,

$$\ln E[e^{\theta R_t}] = \theta(\alpha - \lambda\kappa)h + \theta^2\sigma^2h/2 + \lambda h(\phi(\theta) - 1),$$

où θ est une variable de transformation, ϕ est la fonction génératrice des moments de ξ , c'est à dire $\phi(\theta) = E(e^{\theta\xi}) = \exp\{\theta\gamma + \theta^2\delta^2/2\}$ (voir Annexe E.2). Ainsi, pour tout $|\theta| < \theta_0$,

$$\ln E[e^{\theta R_t}] = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \frac{\theta^j}{j!},$$

nous déduisons que les cumulants théoriques k_j de R_t sont donnés par,

$$k_1 = (\alpha - \lambda\kappa)h + \lambda h E(\xi), \quad k_2 = \sigma^2 h + \lambda h E(\xi^2) \quad \text{et} \quad k_n = \lambda h E(\xi^n) \quad \forall n \geq 3,$$

Dans le modèle de Merton (1976), conditionnellement au nombre de sauts $N_{th} - N_{(t-1)h} = n$, on a

$$R_t \sim N\left((\alpha - \lambda\kappa)h + n\gamma, \sigma^2 h + n\delta^2\right),$$

la fonction de densité de R_t est donc donnée par,

$$f_{R_t}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^n}{n!} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{[r - (\alpha - \lambda\kappa)h - n\gamma]^2}{(\sigma^2 h + n\delta^2)}}}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 h + n\delta^2)}}. \quad (5.1)$$

Soit, les six premiers cumulants théoriques,

$$\begin{aligned}
 k_1 &= (\alpha - \lambda\kappa)h + \lambda h\gamma, \\
 k_2 &= \sigma^2 h + \lambda h(\gamma^2 + \delta^2), \\
 k_3 &= \lambda h(3\gamma\delta^2 + \gamma^3), \\
 k_4 &= \lambda h(3\delta^4 + 6\gamma^2\delta^2 + \gamma^4), \\
 k_5 &= \lambda h(15\gamma\delta^4 + 10\gamma^3\delta^2 + \gamma^5), \\
 k_6 &= \lambda h(15\delta^6 + 45\delta^4\gamma^2 + 15\delta^2\gamma^4 + \gamma^6).
 \end{aligned}$$

Nous rappelons que les six premiers cumulants empiriques d'une variable aléatoire X sont donnés par,

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \mu = E(X), \\
 k_2 &= \sigma^2 = Var(X), \\
 k_3 &= E \{ (X - \mu)^3 \} \\
 k_4 &= E \{ (X - \mu)^4 \} - 3\sigma^4, \\
 k_5 &= E \{ (X - \mu)^5 \} - 10\sigma^2 k_3, \\
 k_6 &= E \{ (X - \mu)^6 \} - 15\sigma^2 k_4 - 10k_3^2 - 15\sigma^6.
 \end{aligned}$$

On pose donc,

$$\begin{aligned}
 \hat{k}_1 &= \bar{x}, \\
 \hat{k}_2 &= s_x^2, \\
 \hat{k}_3 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3, \\
 \hat{k}_4 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 - 3\hat{k}_2^2, \\
 \hat{k}_5 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^5 - 10\hat{k}_2\hat{k}_3, \\
 \hat{k}_6 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^6 - 15\hat{k}_2\hat{k}_4 - 10\hat{k}_3^2 - 15\hat{k}_2^3.
 \end{aligned}$$

Nous remarquons que lorsque (γ) s'annule, le troisième et le cinquième cumulants théoriques de Merton (1976) s'annulent en consécutif. Nous construisons donc un test d'hypothèse ($H_0 : \gamma = 0$ Vs $H_1 : \gamma \neq 0$) et nous calculons une valeur critique. Si celle-ci est inférieure à 1%, cela signifie que $(\gamma \neq 0)$, par conséquent, nous établissons un système d'équations non-linéaires constitué par les cinq premiers cumulants, sinon si $(\gamma = 0)$, il est indispensable d'introduire deux autres sources d'informations pour rendre le système identifiable. Ainsi, nous intégrons d'un part, un sixième cumulant, d'autre part, une septième équation constituée par le rapport du sixième et du quatrième cumulant.

Finalement, une fois le système d'équations non linéaires établi, nous spécifions les paramètres de départ d'une manière aléatoire puis nous procédons à la résolution du système non linéaire à l'aide de la fonction ***fsolve*** de Matlab qui regroupe plusieurs algorithmes d'optimisation non linéaire. Le problème étant de grande dimension, nous avons choisi l'approche de région de confiance avec gradient conjugué préconditionné (voir l'annexe G). Nous spécifions une tolérance de 10^{-7} établie sur le changement relatif de la valeur de la fonction objective. Une fois le vecteur des paramètres $\hat{\omega}$ obtenu, il convient de calculer la précision d'estimation.

5.1.2 Précision de la méthode des cumulants

Dans cette section, nous proposons d'identifier la matrice de covariance de l'erreur d'estimation.

Proposition¹ 5.1.1. *Soit X_1, \dots, X_n des observations indépendantes et de même loi et supposons que les moments d'ordre 12 existent. Soit $\mu_j = E\{(X - \mu)^j\}$, $j = 1, \dots, 12$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \{(X_i - \mu)^j - \mu_j\} \rightsquigarrow Z_j \sim N(0, \mu_{2j} - \mu_j^2)$, et $Cov(Z_j, Z_k) = \mu_{j+k} - \mu_j \mu_k$, alors, $\sqrt{n}(\hat{k}_1 - k_1, \dots, \hat{k}_6 - k_6) \rightsquigarrow W = (W_1, \dots, W_6) \sim N_6(0, V)$, lorsque $n \rightarrow \infty$, où*

$$W_1 = Z_1,$$

$$W_2 = Z_2,$$

$$W_3 = Z_3 - 3k_2 Z_1,$$

1. Tirée des notes de cours de Bruno Rémillard « Les méthodes statistiques en ingénierie financière »

$$W_4 = Z_4 - 4k_3Z_1 - 6k_2Z_2,$$

$$W_5 = Z_5 - 5(k_4 - 3k_2^2)Z_1 - 10k_3Z_2 - 10k_2Z_3,$$

$$W_6 = Z_6 - 6(k_5 - 10k_2k_3)Z_1 - 15(k_4 - 3k_2^2)Z_2 - 20k_3Z_3 - 15k_2Z_4,$$

La matrice de covariance (V) est estimée par la matrice de covariances des pseudo-observations $W_i = (W_{i1}, \dots, W_{i6})^\top$, où $Z_{ij} = (x_i - \bar{x})^j$ et

$$W_{i1} = Z_{i1},$$

$$W_{i2} = Z_{i2},$$

$$W_{i3} = Z_{i3} - 3\hat{k}_2Z_{i1},$$

$$W_{i4} = Z_{i4} - 4\hat{k}_3Z_{i1} - 6\hat{k}_2Z_{i2},$$

$$W_{i5} = Z_{i5} - 5(\hat{k}_4 - 3\hat{k}_2^2)Z_{i1} - 10\hat{k}_3Z_{i2} - 10\hat{k}_2Z_{i3},$$

$$W_{i6} = Z_{i6} - 6(\hat{k}_5 - 10\hat{k}_2\hat{k}_3)Z_{i1} - 15(\hat{k}_4 - 3\hat{k}_2^2)Z_{i2} - 20\hat{k}_3Z_{i3} - 15\hat{k}_2Z_{i4}.$$

Supposons maintenant que le vecteur des paramètres $\omega \in \Theta$ (de dimension $p = 5$) est estimé et qu'il existe une transformation inversible dérivable $T : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que $T_j(\omega) = k_j$ pour tout $j = 1, \dots, p$. On note par \dot{T} sa dérivée appelée jacobien, qui est une matrice $(p \times p)$.

Si $\hat{\omega}$ est tel que $T_j(\hat{\omega}) = \hat{k}_j$, $j = 1, \dots, p$, alors

$$\sqrt{n}(\hat{\omega} - \omega) \rightsquigarrow N_p(0, \Sigma),$$

où Σ peut être estimée par

$$\hat{\Sigma} = J^{-1}V(J^{-1})^\top,$$

avec $J = \dot{T}(\hat{\omega})$.

Enfin pour éliminer les contraintes de positivité sur quelques paramètres, à savoir : l'écart type du processus de diffusion (σ), celui du processus de sauts (δ) et l'intensité des sauts (λ), nous posons $\sigma = e^{\omega_2}$, et $\delta = e^{\omega_5}$ et $\lambda = e^{\omega_3}$.

Il convient alors de tenir compte de ces contraintes de positivités lors de l'estimation de la matrice de variance covariance de l'erreur d'estimation, ainsi

d'après le théorème de Slutsky, nous avons

$$\sqrt{n} (e^{\hat{\omega}_i} - e^{\omega_i}) \approx \hat{D}_{ii} \sqrt{n} (\hat{\omega}_i - \omega_i),$$

par conséquent, la matrice de covariance des erreurs est estimée par $\hat{D}\hat{\Sigma}\hat{D}$, \hat{D} étant une matrice diagonale avec $\hat{D}_{ii} = 1$ partout sauf aux indices i correspondant aux paramètres transformés,

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\hat{\omega}_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\hat{\omega}_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\hat{\omega}_5} \end{pmatrix}$$

Nous procédons de la même manière pour le calcul de la variance des erreurs dans le cas où nous utilisons le deuxième système d'équations non linéaire ($\gamma = 0$), excepté pour $\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{k}_4 & k_4 \\ \hat{k}_6 & k_6 \end{pmatrix}$ (voir annexe F).

5.2 La méthode de seuil

A partir de la méthode de seuil, nous visons l'estimation de μ , σ et λ . Pour le restant des paramètres, nous les estimons à l'aide d'un système d'équations non linéaires. La procédure d'estimation est basée sur la spécification d'un seuil à partir duquel nous définissons un saut. Pour cela, nous avons fixé ce seuil selon cette procédure :

- établir une échelle partant de $Seuil_{min}$ jusqu'à $Seuil_{max}$, tous deux définis arbitrairement.
- procéder à plusieurs routines d'estimation pour chacun des seuils, à l'aide de la méthode que nous exposons ci-dessous, puis évaluer la fonction de vraisemblance aux paramètres obtenus.
- retenir le seuil correspondant au minimum de la fonction de vraisemblance puis réeffectuer l'estimation selon ce seuil.

Soit $R_t = \ln \left(\frac{S_{th}}{S_{(t-1)h}} \right) \forall t = 2, \dots, \frac{T}{h} = M$, une suite de log-rendements, (h) est un horizon journalier et (τ) un seuil spécifié,

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{h} \text{Var} [R_t \mathbb{I}_{|\Delta R_t| \leq \tau}]},$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=2}^M R_t \mathbb{I}_{(|\Delta R_t| \leq \tau)}}{h \sum_{t=2}^M \mathbb{I}_{(|\Delta R_t| \leq \tau)}},$$

l'intensité des sauts (λ) est définie comme la moyenne des dépassements des variations du log-rendement au delà du seuil fixé (τ), d'où,

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{t=2}^M \mathbb{I}_{(|\Delta R_t| \geq \tau)}}{h(M-1)}.$$

Pour le restant des paramètres, à savoir : la moyenne de l'amplitude des sauts (γ) et l'écart type de l'amplitude des sauts (δ), nous les estimons en résolvant un système d'équations non-linéaires.

Soit,

$$E [R_t] = \alpha h + \lambda h (\gamma - \kappa), \quad (5.2)$$

$$\text{Var} [R_t] = \sigma^2 h + \lambda h (\delta^2 + \gamma^2), \quad (5.3)$$

avec $\kappa = \exp \left\{ \gamma + \frac{1}{2} \delta^2 \right\} - 1$.

nous effectuons, par la suite, un développement limité d'ordre 2 pour κ ,

$$\begin{aligned} \kappa &\cong \left(\gamma + \frac{1}{2} \delta^2 \right) + \frac{\left(\gamma + \frac{1}{2} \delta^2 \right)^2}{2!} + \dots + O(n), \\ \gamma - \kappa &\cong -\frac{1}{2} (\delta^2 + \gamma^2) - \frac{1}{2} \gamma \delta^2, \end{aligned} \quad (5.4)$$

or d'après (5.3)

$$\gamma^2 + \delta^2 = \frac{\text{Var} [R_t] - \sigma^2 h}{\lambda h}, \quad (5.5)$$

de (5.2) et (5.4), on obtient

$$\gamma\delta^2 = \frac{1}{\lambda h} \left[\left(\sigma^2 h - \text{Var}[R_t] \right) + 2 \left(\alpha h - E[R_t] \right) \right],$$

soit donc le système d'équations non-linéaire suivant

$$\begin{cases} \gamma\delta^2 = \frac{1}{\lambda h} \left[\left(\sigma^2 h - \text{Var}[R_t] \right) + 2 \left(\alpha h - E[R_t] \right) \right] \\ \gamma^2 + \delta^2 = \frac{1}{\lambda h} \left[\text{Var}[R_t] - \sigma^2 h \right]. \end{cases}$$

Nous résolvons ce système numériquement à l'aide de la fonction **fsolve** de Matlab, en fixant les paramètres estimés avec la méthode de seuil. Enfin, pour apprécier l'erreur des estimations, nous calculons une erreur quadratique moyenne pour chacun des paramètres

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\omega}_i - \omega_i)^2}.$$

5.3 La méthode du maximum de vraisemblance

5.3.1 Présentation de la méthodologie d'estimation

Dans cette section, nous considérons une autre alternative qui est la méthode du maximum de vraisemblance. Soit $R = \{R_1, R_2, \dots, R_{(M-1)}\}$, une série de log-rendements. Le logarithme de la vraisemblance de R_t conditionnelle aux nombres de sauts ($N_t = n$) est donnée par :

$$\mathcal{L}(R; \omega) = \sum_{t=1}^M \ln \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^n}{n!} \phi \left(R; (\alpha - \lambda \kappa) h + n\gamma, \sigma^2 h + n\delta^2 \right) \right],$$

où ϕ est la densité de probabilité d'une loi normale. Nous choisissons de tronquer la somme infinie à un nombre de sauts au delà duquel la valeur de la log-vraisemblance est en dessous de 10^{-32} , puis nous maximisons celle-ci sans

aucune contrainte sur les paramètres. Ceci revient à minimiser son inverse. Pour cela, nous utilisons la fonction *fminsearch* de Matlab qui se base sur l'algorithme de Nelder & Mead (1965) (voir annexe H). Ce dernier est un algorithme d'optimisation non linéaire qui permet de minimiser une fonction objectif dans un espace à plusieurs dimensions. La méthode d'optimisation est un simplexe modifié. En effet, celle-ci compare les valeurs de la fonction dans les $(p+1)$ sommets d'un simplexe générale, p étant la dimension de l'espace du problème. Le simplexe se modifie par des opérations de réflexion, de contraction et d'expansion, en gardant à chaque itération le sommet qui présente la plus petite valeur de la fonction objectif à minimiser. Le premier avantage de cet algorithme est qu'il s'applique aux problèmes sans bornes et ne requiert pas le calcul de gradient. Cette étape est laborieuse dans le cas des problèmes de grande dimension tel que le notre. Le deuxième avantage consiste en la rapidité et la robustesse de cette méthode comparativement aux méthodes d'ordre zéro. Cependant, il est toujours probable que l'algorithme aboutisse à un minimum local, ce qui est un inconvénient commun aux différentes méthodes d'optimisation.

Pour une fonction présentant plusieurs minima, le point sur lequel l'algorithme converge dépend du vecteur initial. Ainsi, pour chaque vecteur ω^0 contenant l'initialisation des paramètres à estimer, nous pouvons obtenir une solution qui minimise localement le logarithme de la vraisemblance. A partir de cette convergence locale, nous pouvons peut être parvenir à une convergence globale par ré-initialisation. Ainsi, la génération aléatoire du vecteur de départ doit s'effectuer d'une manière à ne pas retourner dans les bassins déjà visités. Nous choisissons donc de simuler un vecteur ω^0 dont les composantes suivent une loi normale multivariée avec une moyenne et une matrice de variances-covariance aléatoires. La procédure d'optimisation s'arrête quand le changement relatif de la valeur de la fonction objective atteint 10^{-7} .

5.3.2 Précision de la méthode du maximum de vraisemblance

Tout au long de cette section, nous proposons de mesurer la précision des estimations obtenues selon la méthode du maximum de vraisemblance.

Proposition 1. *Si $\hat{\omega}$ est l'estimateur obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance, alors pour un nombre d'observation n assez grand,*

$$\sqrt{n}(\hat{\omega} - \omega) \sim N_5(0, \hat{V}),$$

où $\hat{V} = \hat{D}\hat{I}^{-1}\hat{D}$. On note par \hat{I} la matrice estimée de l'information de Fisher donnée par $\hat{I} = nH(\hat{\omega})^{-1}$, $H(\hat{\omega})$ étant la matrice hessienne de la fonction de log-vraisemblance évaluée en $\hat{\omega}$ et \hat{D} est une matrice diagonale avec $\hat{D}_{ii} = 1$ partout sauf aux indices (i) correspondant aux paramètres transformés afin de garantir leur positivité où $\hat{D}_{ii} = \exp(\omega_i)$.

Remarque 1. La matrice hessienne de la fonction du log-vraisemblance est approximée à l'aide d'un schéma aux différences finies.

Une fois la matrice de variance-covariance des erreurs d'estimation établie, nous calculons une marge d'erreur à 95% pour chacun des paramètres estimés.

5.4 Résultats empiriques

5.4.1 Sur des données simulées

Cette section présente une analyse comparative des résultats d'estimation, pour chacune des différentes méthodes exposées précédemment. Nous avons simulé un processus de sauts de Merton (1976) sur une période de 10 ans, d'une manière journalière $h = (\frac{1}{250})$. La valeur initiale du prix et les paramètres du modèle sont fixés respectivement à $S_0 = 100$, $\mu = 0.08$, $\sigma = 0.12$, $\lambda = 10$, $\gamma = 0.02$ et $\delta = 0.01$. Nous exprimons notre série en différence première pour avoir une série en log-rendements $R_t = \ln\left(\frac{S_{th}}{S_{(t-1)h}}\right) \forall t = 2, \dots, \frac{T}{h}$. L'évolution

de notre série en log-rendements journaliers apparaît dans la figure (5.1).

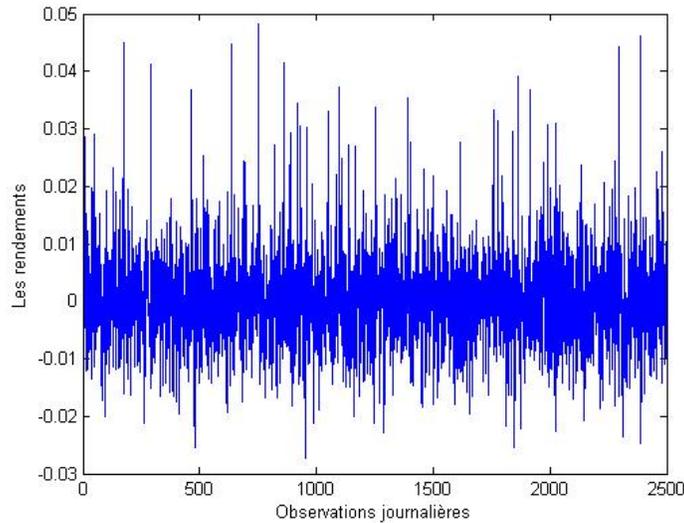


FIGURE 5.1 – Processus des log-rendements simulés avec $S_0 = 100$, $\mu = 0.08$, $\sigma = 0.12$, $\lambda = 10$, $\gamma = 0.02$ et $\delta = 0.01$.

Nous voulons retrouver les paramètres qui commandent le processus des log-rendements représenté par la figure (5.1), et ce, selon les différentes méthodes d'estimation. Nous les comparons ensuite aux vraies valeurs des paramètres que nous avons fixé pour la simulation. Nous utilisons les mêmes paramètres de départ pour la méthode des cumulants et la méthode du maximum de vraisemblance, puis nous calculons une marge d'erreur asymptotique à 95% pour chacun des paramètres estimés selon ces deux dernières méthodes.

$$\text{Marge d'erreur}_{95\%} = \pm 1.96 \sqrt{\frac{\text{diag} \left[\hat{\Sigma}(\hat{\omega}_i) \right]}{N}}.$$

Pour la méthode de seuil, nous calculons une erreur quadratique moyenne sur les paramètres basée sur N simulations ($N = 2000$).

L'estimation des paramètres de notre modèle selon les différentes approches apparaît au tableau (5.1).

		Marge d'erreur
$\hat{\omega}_{cum}$	0.0766	N.A
	8.7881e-5	N.A
	0.2125	N.A
	0.0951	N.A
	0.4594	N.A
$\hat{\omega}_{mv}$	0.0682	$\pm 0.0862 \ni 0.08$
	0.1174	$\pm 0.0044 \ni 0.12$
	10.3908	$\pm 6.7680 \ni 10$
	0.0135	$\pm 0.0093 \ni 0.02$
	0.0183	$\pm 0.0046 \ni 0.01$
		RMSE
$\hat{\omega}_{(seuil=0.0258)}$	-0.0228	0.1101
	0.1227	0.0053
	10.4083	7.0683
	-0.0073	0.0272
	0.0271	0.0140

TABLE 5.1 – Les paramètres estimés sur des données simulées selon les différentes méthodes d'estimation.

Nous constatons d'une part, que la méthode des cumulants est la plus instable, excepté la moyenne de la diffusion, celle-ci est incapable d'estimer le restants des paramètres. Les expériences effectuées montrent qu'à cause des erreurs d'arrondis, cette méthode engendre de grands problèmes d'instabilité numérique et les résultats obtenus peuvent être complètement erronés. D'une part, pour un seuil fixé selon le principe décrit dans la section (5.2), les paramètres σ et λ sont correctement estimés avec la méthode de seuil. Cependant, en faisant varier le vecteur initial contenant les paramètres de sauts γ et δ , nous constatons que ces derniers varient significativement. Pour ce qui est de la méthode du maximum de vraisemblance, celle-ci présente de meilleurs résultats; en effet, pour plusieurs paramètres de départ, la solution reste sensiblement la même. En outre, la méthode réussit à retrouver les paramètres caractérisant les sauts

γ et δ qui sont difficilement accessibles par les deux autres méthodes. Puis, nous constatons que pour cette méthode, les vrais paramètres appartiennent aux différents intervalles de confiance établis. À cause des problèmes qu'elle engendre, nous excluons la méthode des cumulants de notre cadre d'analyse. Dans un deuxième temps, nous testons le cas où la volatilité d'un processus est très importante alors que les sauts sont très peu fréquents. Pour cela, nous avons simulé deux autres processus de rendements avec un $\sigma = 0.5$ et un $\lambda = 1$. Dans le cadre du premier processus, nous considérons une forte amplitude de sauts, s'il y a occurrence de sauts, c-à-d $e^{(\gamma+0.5\delta^2)} > 1$, ainsi, nous gardons les mêmes paramètres ($\gamma = 0.02$) et ($\delta = 0.01$) fixés tel que précédemment. Dans le cadre du deuxième processus, nous considérons une faible amplitude de sauts c-à-d $e^{(\gamma+0.5\delta^2)} < 1$. Dans ce cas, nous fixons ($\gamma = -1$) et ($\delta = 0.01$). L'estimation de ces deux derniers processus figure respectivement dans les tableaux (5.2) et (5.3).

	Marge d'erreur	
$\hat{\omega}_{mv}$	0.2933	$\pm 0.5952 \ni 0.08$
	0.5031	$\pm 0.0139 \ni 0.5$
	0.0272	$\pm 0.1204 \not\ni 1$
	1.5534	$\pm 5.9180 \ni 0.02$
	0.4330	$\pm 2.5716 \ni 0.01$
	RMSE	
$\hat{\omega}_{(seuil=0.1872)}$	0.03	0.1578
	0.5042	0.0071
	0.1001	0.9180
	0.063	0.8255
	0.0979	2.3275

TABLE 5.2 – Paramètres estimés sur des données simulées avec une forte amplitude de sauts.

	Marge d'erreur	
$\hat{\omega}_{mv}$	0.1802	$\pm 0.4983 \ni 0.08$
	0.4905	$\pm 0.0136 \ni 0.5$
	1.0004	$\pm 0.6199 \ni 1$
	-1.0118	$\pm 0.0193 \ni -1$
	0.0001	$\pm 0.0426 \ni 0.01$
	RMSE	
$\hat{\omega}_{(seuil=0.1751)}$	0.8121	0.7221
	0.4908	0.0092
	2.0016	1.1206
	0.1627	1.1503
	0.2301	0.2136

TABLE 5.3 – Paramètres estimés sur des données simulées avec une faible amplitude de sauts.

Nous constatons que dans les deux cas de figure et en dehors du paramètre de volatilité, la méthode de seuil est incapable de retrouver le restant des paramètres, en particuliers ceux relatifs aux sauts. En revanche, bien que la méthode du maximum de vraisemblance échoue dans le cas d'un processus à forte volatilité, une faible fréquence de sauts mais une importante amplitude de ces derniers, elle présente de meilleurs résultats quand il s'agit du deuxième processus, c-à-d, le processus à forte volatilité, faible fréquence de sauts et faible amplitude de ces derniers.

5.4.2 Sur des données réelles

Nous avons choisi comme données réelles les cotations de l'indice Standard and Poor's 500 (S&P500) puisqu'il est perçu comme l'indice le plus représentatif du marché boursier américain. Nous disposons d'observations quotidiennes des cours sur une période de 10 ans allant de l'année 1999 à l'année 2009², soit 2516 cours. Nous choisissons cette période puisqu'elle est associée

². Les cotations sont tirées de la base de données Datastream pour l'indice S&P500 de Septembre 1999

à plusieurs évènements rares tels que les évènements du 11 septembre 2001, l'affaire des subprimes puis la crise économique mondiale, donc une période pendant laquelle les variations de rendement ont été des plus importantes. Finalement, à partir de ces cotations, nous recalculons les log-rendements journaliers $R_t = \ln\left(\frac{S_{th}}{S_{(t-1)h}}\right) \forall t = 2, \dots, M$, soit 2515 observations dont l'allure générale est représentée dans le graphique(5.2).

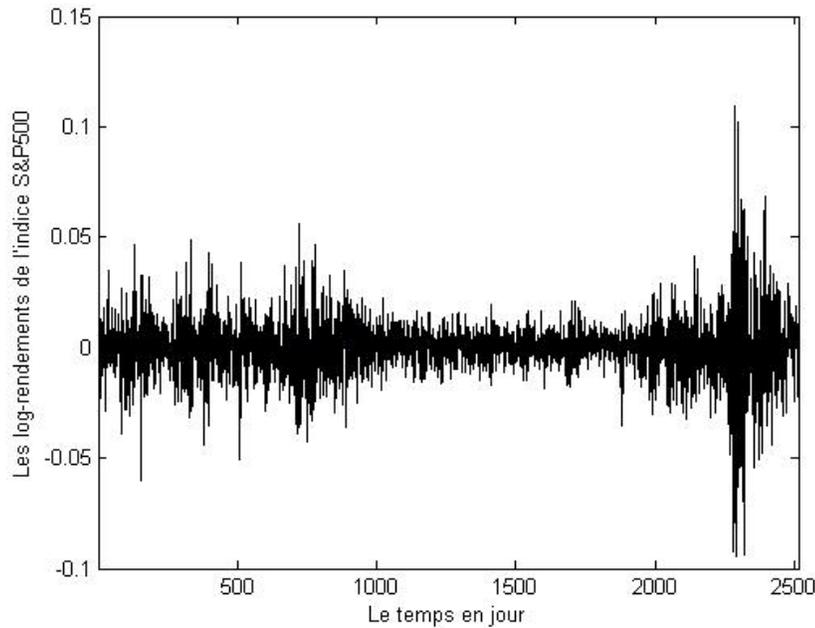


FIGURE 5.2 – Processus des log-rendements de l'indice S&P500 (1999 – 2009).

Avant de procéder à l'estimation, il faut vérifier que nos données ne sont pas gaussiennes. En effet, si tel est le cas, le modèle de Black & Scholes (1973) serait suffisamment robuste. Dans le tableau (5.4), nous présentons les statistiques du log-rendement de l'indice S&P500 de 1999 à 2009.

Observations	2515		
Sample Mean	-0.000113	Variance	0.000197
Standard Error	0.014021	of Sample Mean	0.000280
t-Statistic (Mean=0)	-0.404147	Signif Level	0.686139
Skewness	-0.0974587	Signif Level (Sk=0)	0.046139
Kurtosis (excess)	7.630484	Signif Level (Ku=0)	0.000000
Jarque-Bera	6105.400561	Signif Level (JB=0)	0.000000
Durbin avec 1000 itérations	7.46251	Signif Level (DW=0)	0.000000
Khi-carré	Inf	Signif Level	0.000000

TABLE 5.4 – Statistiques des log-rendements de l'indice S&P500 (1999 – 2009)

Nous constatons qu'on rejette la normalité des log-rendements de l'indice S&P500. En effet, on rejette la nullité du coefficient d'asymétrie, ainsi que le coefficient d'excès d'aplatissement (valeur critique $< 5\%$). De plus le test de Durbin rejette la normalité de l'échantillon de données.

Dans le graphique (5.3), nous illustrons la densité estimée des log-rendements de l'indice S&P500. Pour cela, nous avons utilisé d'une part, la méthode de noyau avec un noyau gaussien et un paramètre de lissage égale à $\hat{\sigma}M^{-1/5}$, d'une autre part nous avons ajusté les quatre premiers moments de la loi de student, ceux de loi johnson (voir annexe I) et les deux premiers moments de la loi gaussienne aux moments empiriques pour estimer la densité des log-rendements. Nous constatons encore une fois que les données ne sont pas gaussiens, nous rejetons donc l'hypothèse de la normalité des rendements. Tous ces résultats, nous incitent à appliquer le modèle à sauts de Merton (1976).

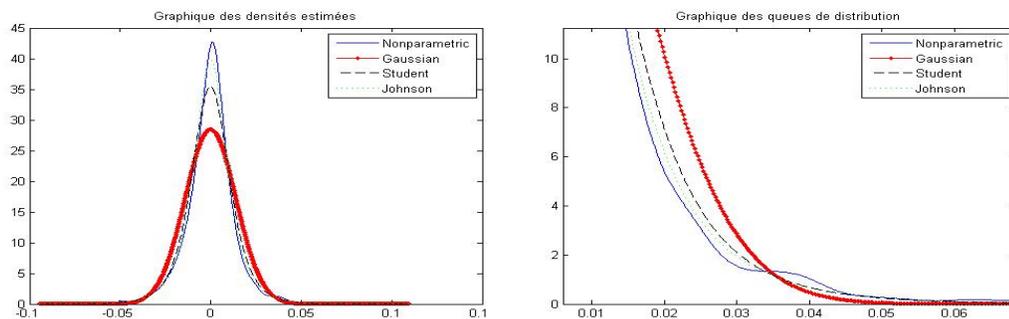


FIGURE 5.3 – Graphique des densités estimées du rendement

Nous présentons alors dans le tableau (5.5) les résultats d'estimation avec les différentes méthodes. Nous excluons la méthode des cumulants à cause de son instabilité numérique. Nous gardons la même procédure d'initialisation pour la méthode du maximum de vraisemblance,

$\hat{\omega}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
$\hat{\omega}_{(Seuil=0.0131)}$	0,0998	0,1327	98.2498	0.0018	0.0190
$\hat{\omega}_{MI}$	-0,0048 (± 0.1337)	0,1134 ($\pm 0,0141$)	108,6127 ($\pm 38,6160$)	-0,0014 ($\pm 0,0014$)	0,0176 ($\pm 0,0027$)

TABLE 5.5 – Les paramètres estimés sur des données réelles selon les différentes méthodes d'estimation.

Nous constatons que la méthode du maximum de vraisemblance présente une certaine stabilité quant aux résultats obtenus : en effet, en fixant différents paramètres de départ, l'algorithme converge toujours vers une même solution. Pour ce qui est de la méthode de seuil, celle-ci nous donne des estimés $\hat{\lambda}$ et $\hat{\sigma}$ proches de ceux obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance. Celle-ci rend l'estimation des paramètres de sauts γ et δ possibles avec une erreur respective relativement faible.

Dans ce qui suit, nous proposons une application au cas d'une option de vente américaine sur le S&P500 d'échéance 1 mois³ (date d'émission 31/07/2009, date d'échéance 22/08/2009), le taux sans risque est le taux Libor 1 mois⁴ et la valeur du sous-jacent $S_0 = 987.48$. Pour le restant des paramètres de l'option, nous utilisons nos paramètres estimés selon la méthode du maximum de vraisemblance sur le S&P500. Nous choisissons d'exercer d'une manière journalière c.à.d 22 dates d'exercice. Nous présentons nos résultats dans le tableau (5.6) ci-dessous.

3. Le prix de l'option ainsi que du sous-jacent sont recueillis de la base de données Option Metrics

4. Le taux Libor 1mois est recueilli de la base de données Datastream

Nombre de points sur la grille					
Prix d'exercice	125	250	500	1000	Prix observé
985	22.47604	22.44374	22.43978	22.43027	21.9
990	25.00661	24.97454	24.96863	24.96246	24.3
1005	33.55701	33.56917	33.56314	33.55909	33
1010	36.78634	36.75702	36.75085	36.74724	36.2
1015	40.12662	40.09785	40.09184	40.09023	39.7
1020	43.61323	43.58699	43.58273	43.57880	43.3
1100	113.1066	113.09218	113.08862	113.08862	115.8
CPU	1.00	4.09	16.75	61.38	

TABLE 5.6 – Prix théorique d'une option de vente américaine sur le S&P500 selon le programme dynamique de Merton (*DPM*)

Pour conclure, en se basant sur l'algorithme de Nelder & Mead (1965) pour la résolution et avec une technique judicieuse d'initialisation, la méthode du maximum de vraisemblance est la plus robuste d'entre toutes les autres méthodes retenues et a permis une meilleure convergence, mais qui peut être toujours locale. Étant donnée l'erreur produite essentiellement sur le paramètre λ , le prix de l'option de vente théorique est différent de celui observé sur le marché. Sauf, qu'en améliorant l'estimation de ce paramètre, nous puissions probablement retrouver le prix observé. Ainsi, nous pouvons rediscuter les hypothèses posées par d'autres auteurs par souci de simplicité et de convergence, comme d'imposer une moyenne nulle pour l'amplitude des sauts ou de fixer les paramètres de diffusion pour réduire l'espace d'optimisation, cependant, il y a toujours un compromis entre faisabilité technique et réalité.

Chapitre 6

Conclusion générale

Le but poursuivi dans ce mémoire est, dans un premier lieu, de proposer une formule quasi-explicite pour le prix d'une option américaine dans le cadre du modèle de Merton (1976). Notre méthode d'évaluation est basée sur la programmation dynamique couplée avec des éléments finis.

Les résultats indiquent que l'approche proposée est concluante : en effet, à travers les expériences numériques effectuées, nous avons constaté une convergence rapide des prix dans un temps CPU raisonnable compte tenu du niveau de précision que nous exigeons pour les matrices de transition. Ensuite, nous avons validé la justesse de notre méthode en essayant de retrouver le prix d'une option européenne selon la formule fermée de Merton (1976), ainsi que le prix Black & Scholes (1973) en annulant les paramètres de sauts.

Il serait alors intéressant d'essayer de généraliser la méthode à d'autres modèles de sauts.

Dans un deuxième lieu, nous avons tenté un ajustement du modèle de Merton (1976). Trois méthodes ont été retenues : la méthode des cumulants, la méthode de seuil et la méthode du maximum de vraisemblance. Nous avons eu recours à l'optimisation non linéaire sans contraintes sur les paramètres à l'aide d'algorithmes appropriés au problème. Grâce à un choix judicieux de l'algorithme d'optimisation et des paramètres de départ, la méthode du maximum de vraisemblance s'avère la plus prometteuse. La méthode de seuil est un bon point de départ à améliorer, en spécifiant par exemple un seuil variable. Par

contre, en ce qui concerne la méthode des cumulants, nous avons remarqué qu'elle est instable, imprécise et engendre d'importants risques d'erreurs. Nous proposons, ensuite, une application pour évaluer une option de vente sur l'indice S&P 500. Notre modèle d'évaluation ainsi que notre méthode d'estimation ont permis de retrouver un prix théorique différent mais proche de celui observé sur le marché. Cette différence peut s'expliquer par l'erreur faite sur le paramètre de sauts λ . Le problème usuel associé à ces méthodes d'estimation est la non convexité de la fonction objectif, ce qui peut ramener l'algorithme à converger vers une solution locale. Une avenue à explorer serait l'utilisation d'autres algorithmes d'optimisation non linéaire mieux adaptés pour ce genre de problème, tel que *The extended Cutting Angle method* (ECAM). Le problème d'ajustement dans les modèles avec sauts est une voie de recherche encore bien ouverte et un défi toujours d'actualité.

Annexe A

Lemme d'Îto pour les processus à sauts

Soit X un processus mixte de diffusion avec sauts défini par

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_{i=1}^{N_t} \Delta X_i,$$

où σ_s et b_s deux processus continus et non prévisibles avec $E \left[\int_0^T \sigma_t^2 dt \right] < \infty$ et ΔX l'amplitude du saut.

Ainsi, pour toute fonction $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le processus $Y_t = f(t, X_t)$ peut être exprimé par

$$\begin{aligned} dY_t = & \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} dt + b_t \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dt \\ & + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} \sigma_t dW_t + [f(X_{t-} + \Delta X_t) - f(X_{t-})]. \end{aligned}$$

Annexe B

Formule fermée pour l'évaluation d'une option européenne dans le modèle de Merton

Merton (1976) trouve une solution analytique au prix de l'option européenne lorsque U_t l'amplitude des sauts suit une distribution log-normale de moyenne γ et de variance δ^2 . La formule d'une option d'achat européenne C_M s'écrit alors,

$$\begin{aligned} C_M(S_0, K, r, T, \sigma^2, \lambda, \delta^2) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^i}{i!} C_{B\&S}(S_0, K, r_i, T, v_i^2) \\ &= S_0 \Psi [y_1(S_0, K, r_i, T, v_i^2, \lambda)] \\ &\quad - Ke^{-r_i T} \Psi [y_2(S_0, K, r_i, T, v_i^2, \lambda)] \end{aligned}$$

avec

$$\Psi [y_1 (S_0, K, r_i, T, v_i^2, \lambda)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^i}{i!} \Phi [d_1 (S_0, K, r_i, T, v_i^2)]$$

$$\Psi [y_2 (S_0, K, r_i, T, v_i^2, \lambda)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^i}{i!} \Phi [d_2 (S_0, K, r_i, T, v_i^2)]$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r_i + v_i^2/2) t}{v_i \sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 (S_0, K, r_i, T, v_i^2) - v_i \sqrt{t}$$

où $v_i = \sigma^2 + i\delta^2/T$, $r_i = r - \lambda\kappa + \frac{i \ln(1 + \kappa)}{T}$, $\kappa = e^{\gamma + \frac{\delta^2}{2}} - 1$ et Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée et réduite.

Annexe C

Matrice de transition $A[\cdot][\cdot]$

$A[\frac{p}{4}][i]$, $A[\frac{p}{2}][i]$ et $A[p][i]$ pour les dix derniers i éléments de la matrice.

$p = 250$

$$\begin{pmatrix} \dots & 0.000000 & \dots & 0.000025 & \dots & 0.000008 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000025 & \dots & 0.000008 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000017 & \dots & 0.000015 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000017 & \dots & 0.000015 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000011 & \dots & 0.000027 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000012 & \dots & 0.000027 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000007 & \dots & 0.000052 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000007 & \dots & 0.000053 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000004 & \dots & 0.000110 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000004 & \dots & 0.000110 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000002 & \dots & 0.000254 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000002 & \dots & 0.000255 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.000679 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.000680 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000290 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.002292 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.012328 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.012332 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.109294 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.109299 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.315310 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.315303 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.559618 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.559612 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$

$\lambda = 0.0001$

$$\begin{pmatrix} \dots & 0.000000 & \dots & 0.000025 & \dots & 0.000008 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000017 & \dots & 0.000015 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000011 & \dots & 0.000027 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000007 & \dots & 0.000052 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000004 & \dots & 0.000110 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000002 & \dots & 0.000254 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.000679 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.002290 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.012329 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.109295 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.315310 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.559617 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0.00001$

$$\begin{pmatrix} \dots & 0.000000 & \dots & 0.000025 & \dots & 0.000009 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000018 & \dots & 0.000016 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000012 & \dots & 0.000028 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000008 & \dots & 0.000055 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000005 & \dots & 0.000113 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000002 & \dots & 0.000259 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.000687 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.002305 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.012362 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.109344 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.315241 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.559565 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0.001$

$p = 500$

$$\begin{pmatrix} \dots & 0.000000 & \dots & 0.000006 & \dots & 0.000024 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000004 & \dots & 0.000038 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000003 & \dots & 0.000062 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000002 & \dots & 0.000106 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.000196 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.000395 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000909 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.002588 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.011406 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.109294 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.315310 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.559618 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dots & 0.000000 & \dots & 0.000006 & \dots & 0.000024 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000004 & \dots & 0.000038 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000003 & \dots & 0.000062 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000002 & \dots & 0.000107 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.000197 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.000396 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000909 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.002589 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.011409 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.109299 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.315303 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.559612 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$

$\lambda = 0.00001$

$\lambda = 0.0001$

$\lambda = 0.001$

Annexe D

Matrice de transition $B[.][.]$

$B[\frac{p}{4}][i]$, $B[\frac{p}{2}][i]$ et $B[p][i]$ pour les dix derniers i éléments de la matrice.

$p = 250$

$$\begin{pmatrix} \dots & 0.000004 & \dots & 0.005663 & \dots & 0.001924 & \dots \\ \dots & 0.000002 & \dots & 0.004045 & \dots & 0.003457 & \dots \\ \dots & 0.000001 & \dots & 0.002758 & \dots & 0.006515 & \dots \\ \dots & 0.000001 & \dots & 0.001771 & \dots & 0.013040 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.001050 & \dots & 0.028209 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000557 & \dots & 0.067805 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000249 & \dots & 0.189933 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000085 & \dots & 0.681871 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000017 & \dots & 4.040763 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 42.453012 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 147.371092 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 341.69502 & \dots \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} \dots & 0.000004 & \dots & 0.005665 & \dots & 0.001926 & \dots \\ \dots & 0.000002 & \dots & 0.004047 & \dots & 0.003459 & \dots \\ \dots & 0.000001 & \dots & 0.002760 & \dots & 0.006519 & \dots \\ \dots & 0.000001 & \dots & 0.001773 & \dots & 0.013046 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.001052 & \dots & 0.028217 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000558 & \dots & 0.067818 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000250 & \dots & 0.189955 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000085 & \dots & 0.681915 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000017 & \dots & 4.040871 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 42.453195 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 147.370762 & \dots \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 341.69495 & \dots \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0.00001$

$$\begin{pmatrix} \dots & 0.000005 & \dots & 0.005682 & \dots & 0.001943 \\ \dots & 0.000003 & \dots & 0.004062 & \dots & 0.003482 \\ \dots & 0.000002 & \dots & 0.002774 & \dots & 0.006551 \\ \dots & 0.000001 & \dots & 0.001785 & \dots & 0.013092 \\ \dots & 0.000001 & \dots & 0.001062 & \dots & 0.028288 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000567 & \dots & 0.067933 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000257 & \dots & 0.190156 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000090 & \dots & 0.682312 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000020 & \dots & 4.041843 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000002 & \dots & 42.454843 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 147.367785 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 341.694352 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0.0001$$

$$\begin{pmatrix} \dots & 0.000011 & \dots & 0.005851 & \dots & 0.002109 \\ \dots & 0.000008 & \dots & 0.004217 & \dots & 0.003710 \\ \dots & 0.000006 & \dots & 0.002914 & \dots & 0.006872 \\ \dots & 0.000005 & \dots & 0.001910 & \dots & 0.013559 \\ \dots & 0.000003 & \dots & 0.001171 & \dots & 0.028998 \\ \dots & 0.000002 & \dots & 0.000658 & \dots & 0.069077 \\ \dots & 0.000002 & \dots & 0.000330 & \dots & 0.192159 \\ \dots & 0.000001 & \dots & 0.000143 & \dots & 0.686286 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000053 & \dots & 4.051563 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000012 & \dots & 42.471315 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 147.338029 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 341.68828 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0.001$$

$p = 500$

$$\begin{pmatrix} \dots & 0.000001 & \dots & 0.001425 & \dots & 0.005866 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.001426 & \dots & 0.005869 \\ \dots & 0.000001 & \dots & 0.001072 & \dots & 0.009407 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.001073 & \dots & 0.009411 \\ \dots & 0.000001 & \dots & 0.000776 & \dots & 0.015743 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.000777 & \dots & 0.015747 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000535 & \dots & 0.027792 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000536 & \dots & 0.027799 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000346 & \dots & 0.052601 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000346 & \dots & 0.052611 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000204 & \dots & 0.109471 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000204 & \dots & 0.109486 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000104 & \dots & 0.261753 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000105 & \dots & 0.261776 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000042 & \dots & 0.785531 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000043 & \dots & 0.785573 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000011 & \dots & 3.755749 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000011 & \dots & 3.755844 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 42.453012 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 42.453195 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 147.371092 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 147.370762 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 341.69502 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 341.69495 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dots & 0.000002 & \dots & 0.001435 & \dots & 0.005894 & \dots & 0.000005 & \dots & 0.001520 & \dots & 0.006140 \\ \dots & 0.000001 & \dots & 0.001081 & \dots & 0.009443 & \dots & 0.000005 & \dots & 0.001160 & \dots & 0.009764 \\ \dots & 0.000001 & \dots & 0.000785 & \dots & 0.015790 & \dots & 0.000004 & \dots & 0.000858 & \dots & 0.016218 \\ \dots & 0.000001 & \dots & 0.000543 & \dots & 0.027857 & \dots & 0.000003 & \dots & 0.000610 & \dots & 0.028446 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000352 & \dots & 0.052695 & \dots & 0.000002 & \dots & 0.000413 & \dots & 0.053536 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000209 & \dots & 0.109613 & \dots & 0.000002 & \dots & 0.000263 & \dots & 0.110883 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000109 & \dots & 0.261983 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.000155 & \dots & 0.264051 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000046 & \dots & 0.785952 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.000083 & \dots & 0.789744 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000014 & \dots & 3.756701 & \dots & 0.000001 & \dots & 0.000039 & \dots & 3.765266 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000002 & \dots & 42.454843 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000012 & \dots & 42.471315 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 147.367785 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000001 & \dots & 147.338029 \\ \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 341.694352 & \dots & 0.000000 & \dots & 0.000000 & \dots & 341.688281 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$

$\lambda = 0$

$\lambda = 0.00001$

$\lambda = 0.0001$

$\lambda = 0.00001$

$\lambda = 0.0001$

$\lambda = 0.001$

$\lambda = 0.0001$

$\lambda = 0.001$

Annexe E

Preuves

E.1 Processus de Lévy et changement de loi

Supposons que $E \{h^\theta(\xi_1)\} = g(\theta)$ existe pour tout $|\theta| \leq 2$, on voit que

$$L_t = bW_t - t\frac{b^2}{2} - \lambda t(a-1) + \sum_{j=1}^{N_t} \log\{h(\xi_j)\}$$

est un processus de Lévy tel que pour tout $\theta \in [-2, 2]$,

$$E \{e^{\theta L_t}\} = e^{t\psi(\theta)} = e^{t\theta(\theta-1)\frac{b^2}{2} + \lambda t\{g(\theta)-1-\theta(a-1)\}},$$

avec $g(1) = a$.

En particulier $E \{e^{L_t}\} = 1$ pour tout $t \geq 0$ puisque $\psi(1) = 0$. On voit donc que $\Lambda_t = e^{L_t}$ est une martingale positive, définissant une mesure de probabilité Q .

Finalement, sous Q , pour toute variable X intégrable et \mathcal{F}_t -mesurable, on a

$$E^Q(X|\mathcal{F}_s) = \frac{E(X\Lambda_t|\mathcal{F}_s)}{E(\Lambda_t|\mathcal{F}_s)} = E \{X e^{L_t-L_s} | \Lambda_s\}.$$

Par conséquent, si $X = e^{\theta(L_t - L_s)}$, avec $\theta \in [-1, 1]$, on

$$E^Q \{e^{\theta(L_t - L_s)} | \mathcal{F}_s\} = E \{e^{(\theta+1)(L_t - L_s)} | \mathcal{F}_s\} = e^{(t-s)\psi(\theta+1)},$$

car $L_t - L_s$ est indépendant de \mathcal{F}_s et a la même loi que L_{t-s} . On en déduit donc que sous Q , L_t est aussi un processus de Lévy.

Or, si ν est la loi de ξ_1 , alors

$$a \int \{e^{\theta \log\{h(x)\}} - 1\} \frac{h(x)}{a} \nu(dx) = g(\theta + 1) - a.$$

Donc, en posant $\frac{d\tilde{\nu}}{d\nu} = \frac{h(x)}{a}$, $\tilde{\nu}$ est une loi de probabilité et on a

$$\begin{aligned} \psi(\theta + 1) &= \theta \frac{b^2}{2} + \theta^2 \frac{b^2}{2} + \lambda \{g(\theta + 1) - 1 - (\theta + 1)(a - 1)\} \\ &= \theta \frac{b^2}{2} + \theta^2 \frac{b^2}{2} + \lambda a \int \{e^{\theta \log\{h(x)\}} - 1\} \tilde{\nu}(dx) - \lambda \theta (a - 1). \end{aligned}$$

D'après la représentation des processus de Lévy on en déduit que sous Q ,

$$L_t = b\tilde{W}_t + t \frac{b^2}{2} - \lambda t(a - 1) + \sum_{j=1}^{\tilde{N}_t} \log\{h(\tilde{\xi}_j)\},$$

où les $\tilde{\xi}_j$ ont $\tilde{\nu}$ comme loi, \tilde{N} est un processus de Lévy d'intensité λa et \tilde{W} est un mouvement brownien. On en déduit que $\tilde{W}_t = W_t - bt$ et la preuve est complète.

E.2 La fonction génératrice des moments

$$\begin{aligned}
\ln E [e^{\theta R_t}] &= \ln E \left[\exp \left\{ \theta(\alpha - \lambda\kappa)h + \theta\sigma (W_{th} - W_{(t-1)h}) + \theta \sum_{j=1}^{N(th)} \xi_j - \theta \sum_{j=1}^{N((t-1)h)} \xi_j \right\} \right] \\
&= \ln \sum_{n=0}^{+\infty} E \left[\exp \left\{ \theta(\alpha - \lambda\kappa)h + \theta\sigma (W_{th} - W_{(t-1)h}) + \theta \sum_{j=1}^n \xi_j \right\} \right. \\
&\quad \left. \Big| N(th) - N((t-1)h) = n \right] \times P \left[N(th) - N((t-1)h) = n \right] \\
&= \ln \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\theta(\alpha - \lambda\kappa)h} e^{\frac{\theta^2\sigma^2h}{2}} E \left[e^{\theta \sum_{j=1}^n \xi_j} \right] e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^n}{n!} \\
&= \theta(\alpha - \lambda\kappa)h + \frac{\theta^2\sigma^2h}{2} - \lambda h + \ln \sum_{n=0}^{+\infty} E \left[e^{\theta \sum_{j=1}^n \xi_j} \right] \frac{(\lambda h)^n}{n!} \\
&= \theta(\alpha - \lambda\kappa)h + \frac{\theta^2\sigma^2h}{2} - \lambda h + \ln \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=1}^n E [e^{\theta\xi_j}] \right) \frac{(\lambda h)^n}{n!} \\
&= \theta(\alpha - \lambda\kappa)h + \frac{\theta^2\sigma^2h}{2} - \lambda h + \ln \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(E [e^{\theta\xi_j}] \lambda h)^n}{n!} \\
&= \theta(\alpha - \lambda\kappa)h + \frac{\theta^2\sigma^2h}{2} - \lambda h + \ln \exp \{ E [e^{\theta\xi_1}] \lambda h \} \\
&= \theta(\alpha - \lambda\kappa)h + \frac{\theta^2\sigma^2h}{2} - \lambda h + \lambda h E [e^{\theta\xi_1}] \\
&= \theta(\alpha - \lambda\kappa)h + \theta^2\sigma^2h/2 + \lambda h (\phi(\theta) - 1),
\end{aligned}$$

Annexe F

Le théorème de Slutsky

Supposons $H : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ est telle que pour tout $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq d$, $(\nabla H(\omega))_{ij} = \frac{\partial H_i}{\partial \omega_j}$ existe est continue dans un voisinage de ω . Si $\sqrt{n}(\hat{\omega} - \omega) \sim N_d(0, V)$, lorsque n est assez grand, alors

$$\sqrt{n}(H(\hat{\omega}) - H(\omega)) \sim N_p\left(0, (\nabla H(\omega)) V (\nabla H(\hat{\omega}))^\top\right).$$

Variance de l'erreur pour $\frac{k_6}{k_4}$

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left(\frac{\hat{k}_6}{\hat{k}_4} - \frac{k_6}{k_4}\right) &= \sqrt{n}\left(\frac{\hat{k}_6 - k_6}{\hat{k}_4} - \left(\frac{k_6}{k_4} - \frac{k_6}{\hat{k}_4}\right)\right) \\ &\cong \sqrt{n}\left(\frac{1}{k_4}(\hat{k}_6 - k_6) - \frac{k_6}{k_4^2}(\hat{k}_4 - k_4)\right) \\ &\sim N\left(0, \frac{1}{k_4^2}(V_{66} + R^2V_{44} - 2RV_{46})\right)\end{aligned}$$

avec $R = \frac{k_6}{k_4}$ et $\forall i = 1, \dots, 6$ et $\text{cov}\left(\frac{k_6}{k_4}, k_i\right) = \frac{1}{k_4}V_{6i} - \frac{k_6}{k_4^2}V_{4i}$.

Annexe G

La méthode du gradient conjugué préconditionné

Nous rappelons dans cet annexe la notion du conditionnement d'une matrice pour ensuite décrire l'algorithme itératif du gradient conjugué préconditionné.

Le conditionnement d'une matrice

Considérons le système suivant :

$$Ax = B,$$

où A est une matrice de taille n symétrique définie positive ($A^\top = A$ et $x^\top Ax > 0$, pour tout vecteur $x \in \mathbf{R}^n$ non nul). Soit x_+ la solution du problème.

Le pré-conditionnement consiste à introduire une matrice \mathcal{M} régulière puisqu'il arrive que parfois le conditionnement de la matrice A soit beaucoup trop élevé (valeurs propres mal réparties). Ainsi, le nouveau système devient :

$$\mathcal{M}^{-1}(Ax) = \mathcal{M}^{-1}B \Leftrightarrow Ax = B$$

L'algorithme itératif du gradient conjugué préconditionné

La méthode du gradient conjugué préconditionné consiste à appliquer la méthode du gradient au système préconditionné. Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n$ le vecteur des paramètres de départ, p la direction du gradient et α un paramètre d'accélération. L'algorithme du gradient conjugué préconditionné est décrit comme suit :

$$r_0 = B - Ax_0$$

$$z_0 = \mathcal{M}^{-1}r_0$$

$$p_0 = z_0$$

Pour $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha_k = \frac{z_k^\top r_k}{p_k^\top A p_k}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$$

$$z_{k+1} = \mathcal{M}^{-1}r_{k+1}$$

$$\beta_{k+1} = \frac{z_{k+1}^\top r_{k+1}}{z_k^\top r_k}$$

$$p_{k+1} = z_{k+1} + \beta_{k+1} p_k$$

Annexe H

Algorithme de Nelder & Mead (1965)

La méthode de Nelder-Mead est un algorithme d'optimisation non-linéaire. C'est une méthode numérique qui minimise une fonction dans un espace à plusieurs dimensions. Nous décrivons dans cet annexe cet algorithme de résolution en supposons que notre problème d'optimisation est le suivant :

$$\min_{\omega \in \mathbb{R}^p} \mathcal{L}(R; \omega).$$

- Soit $\omega_1^0, \omega_2^0, \dots, \omega_{p+1}^0$, les $(p + 1)$ sommets d'un simplexe dans \mathbb{R}^p .
- Évaluer la fonction \mathcal{L} en ces vecteurs puis classer de façon à avoir $\mathcal{L}(\omega_1^0) \leq \mathcal{L}(\omega_2^0) \leq \dots \leq \mathcal{L}(\omega_{p+1}^0)$, comme nous minimisons \mathcal{L} , on considère ω_1 comme le meilleur sommet et ω_{p+1} le plus mauvais.
- Soit ρ le coefficient de réflexion, χ le coefficient d'expansion et η le coefficient de contraction, avec $\rho > 0$, $\chi > \rho$ et $0 < \eta < 1$. Généralement, on prend $\rho = 1$, $\chi = 2$ et $\eta = \frac{1}{2}$.
A chaque itération (i) :
- Calculer le centre de gravité ω^* des p premiers sommets du simplexe.

$$\omega^* = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \omega_j^i$$

-
- Calculer $\omega_r = \omega^* + (1 + \rho)(\omega^* - \omega_{p+1}^i) = (1 + \rho)\omega^* - \rho\omega_{p+1}^i$ (réflexion de ω_{p+1}^i par rapport à ω^*),
 - Si $\mathcal{L}(\omega_r) < \mathcal{L}(\omega_1^i)$ alors on cherche au delà de ω_r :
 - (a) Calculer $\omega_e = (1 + \rho\chi)\omega^* - \rho\chi\omega_{p+1}^i$ (expansion du simplexe) ,
 - (b) Si $\mathcal{L}(\omega_e) < \mathcal{L}(\omega_r)$ alors $\omega_+ = \omega_e$ sinon $\omega_+ = \omega_r$,
 - Si $\mathcal{L}(\omega_p^i) > \mathcal{L}(\omega_r) \geq \mathcal{L}(\omega_1^i)$, alors $\omega_+ = \omega_r$
 - Si $\mathcal{L}(\omega_r) \geq \mathcal{L}(\omega_p^i)$, alors on cherche avant ω_r (contraction du simplexe) :
 - (a) Si $\mathcal{L}(\omega_r) \geq \mathcal{L}(\omega_{(p+1)}^i)$ alors

$$\omega_+ = (1 - \eta)\omega^* + \eta\omega_{p+1}^i$$

- (b) Si $\mathcal{L}(\omega_r) < \mathcal{L}(\omega_{(p+1)}^i)$ alors

$$\omega_+ = (1 + \rho\eta)\omega^* - \rho\eta\omega_{p+1}^i$$

- $\omega_{p+1}^{i+1} = \omega_+$, $\omega_j^{i+1} = \omega_j^i$, $\forall j = 1, \dots, p$
- $i = i + 1$,
- Réévaluer pour obtenir $\mathcal{L}(\omega_j^i) \leq \mathcal{L}(\omega_{j+1}^i)$, $\forall j = 1, \dots, p$.

Annexe I

La méthode du noyau

L'estimation non-paramétrique d'une fonction de densité \hat{f}_K peut être interprétée comme le cumul d'une fonction K pour chaque observation sur tout le domaine

$$\hat{f}_K(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right), \quad \text{pour } \int K(x)dx = 1$$

où n est la taille de l'échantillon $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, K est la fonction noyau et h est le paramètre de lissage. K peut être choisi comme étant la densité d'une fonction gaussienne centrée et réduite.

La distribution de Johnson-SU

Soit Z une variable aléatoire normale standard. En effet, X une variable aléatoire de distribution Johnson s'il existe une fonction monotone f telle que

$$Z = \gamma + \delta f\left(\frac{X - \xi}{\lambda}\right),$$

où les paramètres γ et δ sont les paramètres de tendance. Le paramètre λ est un paramètre d'échelle, et ξ est un paramètre de position.

La distribution de Johnson-SU admet comme fonction f la transformation

suivante

$$f(y) = \log\left(y^2 + \sqrt{(y^2 + 1)}\right) = \sinh^{-1}(y).$$

et la densité p_X de la distribution de Johnson-SU s'écrit comme

$$p_X = \frac{\gamma}{\lambda} f'(\gamma + \delta f(x)) \Phi\left(\frac{x - \xi}{\lambda}\right)$$

où Φ est la densité de probabilité d'une normale centrée réduite. Les quatre premiers moments d'une variable centrée réduite $Y = \frac{X - \xi}{\lambda}$ de distribution Johnson-SU sont

$$\mu_1(Y) = a^{\frac{1}{2}} \sinh \theta,$$

$$\mu_2(Y) = \frac{1}{2} (a - 1) (a \cosh(2\theta) + 1),$$

$$\mu_3(Y) = -\frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} (a - 1)^2 (a(a + 2) \sinh(3\theta) + 3 \sinh(\theta))$$

$$\mu_4(Y) = -\frac{1}{8} (a - 1)^2 (a^2 (a^4 + 2a^3 + 3a^2 - 3)) \cosh(4\theta) + 4a^2 (a + 1) \cosh(2\theta) + 3(2a + 1)$$

où $a = \exp(\delta^{-2})$ et $\theta = \frac{\gamma}{\delta}$.

Bibliographie

- Ait-Sahalia, Y. 2004. Disentangling diffusion from jumps. *Journal of Financial Economics*, **74**(3), 487–528.
- Amin, K. 1993. Jump diffusion option valuation in discrete time. *Journal of finance*, **48**(5), 1833–63.
- Ana-Maria, Matache, Christoph, Schwab, & Thomas, Wihler P. 2005. Fast numerical solution of parabolic integrodifferential equations with applications in finance. *Siam j. sci. comput.*, **27**(2), 369–393.
- Andersen, L, & Andreasen, J. 2000. Jump-diffusion processes : Volatility smile fitting and numerical methods for option pricing. *Review of derivatives research*, **4**, 231–262(32).
- Askari, Hossein, & Krichene, Noureddine. 2008. Oil price dynamics (2002-2006). *Energy Economics*, **30**(5), 2134–2153.
- Barone-Adesi, Giovanni, & E. Whaley, Robert. 1987. Efficient analytic approximation of american option values. *Journal of finance*, **42**, 301–320.
- Bates, David S. 1991. The crash of '87 : Was it expected? the evidence from options markets. *Journal of finance*, **46**(3), p1009 – 1044.
- Ben-Ameur, Hatem, Breton, Michèle, & L'Ecuyer, Pierre. 2002. A dynamic programming procedure for pricing american-style asian options. *Manage. sci.*, **48**(5), 625–643.
- Black, Fischer, & Scholes, Myron S. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, **81**(3), 637–54.

- Chiarella, Carl, & Ziogas, Andrew. 2006. *American call options on jump-diffusion processes : A fourier transform approach*. Research Paper Series 174. Quantitative Finance Research Centre, University of Technology, Sydney.
- Cont, Rama, & Tankov, Peter. 2004. Non-parametric calibration of jump-diffusion option pricing models. *Journal of computational finance*, **7**(3).
- Cont, Rama, & Voltchkova, Ekaterina. 2005. Integro-differential equations for option prices in exponential lévy models. *Finance and stochastics*, **9**(3), 299–325.
- Cox, John C, Ross, Stephen A, & Rubinstein, Mark. 1979. Option pricing : A simplified approach. *Journal of financial economics*, **7**(3), 229–263.
- Damien Lamberton, Bernard Lapeyre. 1997. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses marketing Paris 2ème édition.
- Geske, Robert, & Johnson, Herb E. 1984. The american put option valued analytically. *Journal of finance*, **39**(5), 1511–24.
- Gukhal, CR. 2001. Analytical valuation of american options on jump-diffusion processes. *Mathematical finance*, **11**(1), 97–115.
- Gukhal, CR. 2004. The compound option approach to American options on jump-diffusions. *Journal of economic dynamics and control*, **28**(10), 2055–2074.
- Halluin, Y, Forsyth, P A, & Labahn, G. 2004. A penalty method for american options with jump diffusion processes. *Numer. math*, **97**, 321–352.
- Hanson, F.B., & Zhu, Zongwu. 2004. Comparison of market parameters for jump-diffusion distributions using multinomial maximum likelihood estimation. *Decision and control, 43rd ieee conference*, **4**, 3919 – 3924.
- He, C, Kennedy, J, Coleman, T, Forsyth, P, Li, Y, & Vetzal, K. 2006. Calibration and hedging under jump diffusion. *Review of derivatives research*, **9**(1), 1–35.

- Hilliard, Jimmy E, & Schwartz, Adam. 2005. Pricing european and american derivatives under a jump-diffusion process : A bivariate tree approach. *Journal of financial & quantitative analysis*, **40**(3), p671 – 691.
- Honoré, Peter. 1998. Pitfalls in estimating jump diffusion models. *Working paper, caf, univ. of aarhus*.
- Kou, S G, & Wang, Hui. 2004. Option pricing under a double exponential jump diffusion model. *Manage. sci.*, **50**(9), 1178–1192.
- Mancini, Cecilia, & Renò, Roberto. 2008. Threshold estimation of jump-diffusion models and interest rate modeling. *working paper*.
- Mayo, Anita. 2008. Methods for the rapid solution of the pricing PIDEs in exponential and Merton models. *Journal of computational and applied mathematics*, **222**, 128–143.
- Merton, Robert C. 1976. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of financial economics*, **3**, 125 –144.
- Mulinacci, Sabrina. 1996. An approximation of american option prices in a jump-diffusion model. *Stochastic processes and their applications*, **62**(1), 1–17.
- Nelder, J.A, & Mead, R. 1965. A simplex method for function minimization. *the computer journal*, **7**(4), 308 – 313.
- Pham, Huyên. 1997. Optimal stopping, free boundary, and american option in a jump-diffusion model. *Applied mathematics & optimization*, **35**(2), 145 – 164.
- Press, S. James. 1967. A compound events model for security prices. *Journal of business*, **40**, 317.
- Tangman, D. Y., Gopaul, A., & Bhuruth, M. 2008. Exponential time integration and Chebychev discretisation schemes for fast pricing of options. *Appl. Numer. Math.*, **58**(9), 1309–1319.

- Wu, Lixin, & Dai, Min. 2009. Pricing jump risk with utility indifference. *Quantitative finance*, **9**(2), 177–186.
- Zhang, Kai, Yang, Xiaoqi, & Teo, Kok Lay. 2008. A power penalty approach to american option pricing with jump diffusion processes. *journal of industrial and management optimization*, **4**(4), 783–799.
- Zhang, Xiao Lan. 1995. Formules quasi-explicites pour les options américaines dans un modèle de diffusion avec sauts. *Mathematics and computers in simulation*, **38**(1-3), 151–161.
- Zhang, Xiao Lan. 1997a. Numerical analysis of american option pricing in a jump-diffusion model. *Mathematics of operations research*, **22**(3), 668–690.
- Zhang, Xiao Lan. 1997b. Numerical analysis of american option pricing in a jump-diffusion model. *Math. oper. res.*, **22**(3), 668–690.