

HEC MONTRÉAL

**Réplication par chaînes de Markov de la distribution des
rendements de fonds de couverture**

Par

Nicolas Ponce

**Sciences de la gestion
(Ingénierie financière)**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de maîtrise ès sciences
(M.Sc.)*

7 mai 2008

© Nicolas Ponce, 2008

Remerciements

D'abord, j'aimerais remercier Nicolas Papageorgiou et Bruno Rémillard de m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce projet. Ce fut un projet particulièrement intéressant et stimulant qui m'a permis d'étendre grandement mes connaissances et d'approfondir ma compréhension de plusieurs concepts d'ingénierie financière. Leur support continu tout au long de ce mémoire fut également très apprécié.

J'aimerais également remercier mes collègues du Groupe de Recherche en Placements Alternatifs DGIA-HEC. Particulièrement Hugues Langlois et Gauthier Webanck avec qui j'ai partagé de très bon moments au bureau du groupe de recherche. Ils ont une contribution certaine à ce mémoire par les réflexions que nous avons partagées tout au long de ce cheminement. Un remerciement spécial dédié à Alexandre Hocquard qui a su nous introduire de façon intuitive à la problématique et qui était toujours prêt à nous aider malgré son horaire chargé.

Sur le plan personnel, je remercie mes parents, mon frère et ma copine pour leur appui inconditionnel. Il s'agit des personnes les plus importantes pour moi et le remerciement ne se limite pas à la réalisation de ce mémoire.

Finalement, je tiens à exprimer ma reconnaissance envers l'Institut de Finance Mathématique de Montréal (*IFM*²) pour leur généreux support financier et pour leur engagement auprès des étudiants.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Revue de littérature	4
2.1	La réplication des fonds de couverture	5
2.1.1	Approches traditionnelles	5
2.1.2	Solutions alternatives	7
2.2	Les chaînes de Markov	11
2.2.1	Applications diverses	11
2.2.2	Risque de crédit	13
2.2.3	Tarification d'options	15
2.3	Lien avec le mémoire	18
3	Le modèle de réplication	19
3.1	Idée générale	20
3.2	Modélisation	21
3.3	Outil de réplication : la fonction g_T	24
3.4	Tarification et couverture de la fonction g_T	27
3.5	Résumé des étapes	32

4	Tarification par chaînes de Markov	35
4.1	Introduction aux chaînes de Markov	36
4.2	Choix des états	38
4.2.1	Zone de forte densité	40
4.2.2	Transformation linéaire	44
4.3	Matrice de transition	47
4.4	Exemple de tarification	51
5	Méthodologie	57
5.1	Estimation des distributions	58
5.1.1	Horizon temporel	58
5.1.2	Modélisation des rendements de S_1 et S_2	59
5.1.3	Modélisation des rendements de S_1 et S_3	59
5.2	Matrice de transition	62
5.2.1	Choix des états	62
5.2.2	Probabilités de transition	64
5.3	Couverture et réplication	67
5.3.1	Rappels sur le modèle de réplication	67
5.3.2	Approche par chaînes de Markov	68
6	Résultats numériques et analyses	73
6.1	Validation de l'algorithme de tarification et de couverture	74
6.2	Tarification et couverture de la fonction g_T	79
6.3	Réplication de propriétés statistiques	83

6.4	Analyse computationnelle	86
6.4.1	Analyse de la précision	86
6.4.2	Analyse du temps de calcul	88
6.5	Analyse de sensibilité	91
6.5.1	Coefficient d'asymétrie	91
6.5.2	Coefficient d'aplatissement	92
7	Conclusion	96
	Bibliographie	98

Table des figures

4.1	Couples de rendements cumulatifs possibles (r_1, r_2).	39
4.2	10000 premiers points de la suite de Sobol.	42
4.3	Zone de forte densité pour $\rho = 0$	43
4.4	Zone de forte densité pour $\rho = 0.9$	43
4.5	Zone de forte densité pour $\rho = -0.9$	44
4.6	Zone de forte densité des rendements cumulatifs pour $\rho = 0$. . .	46
5.1	États possibles de rendements cumulatifs pour une mixture gaussienne bivariée à 2 régimes.	63
6.1	Fonction de paiement pour l'option d'échange.	75
6.2	Distribution des erreurs de couverture pour 5000 simulations. . .	76
6.3	Fonction g_T	81
6.4	Erreurs de couverture sur la fonction g_T pour 10 000 simulations. .	82
6.5	Erreurs de couverture sur l'option d'échange pour 10 000 simulations.	82
6.6	Distribution des rendements obtenus par la couverture de g_T . . .	83
6.7	Représentation du temps du RMSE contre le temps de calcul pour la couverture de g_T	89

6.8	Répartition du temps de calcul pour 5000 états.	90
6.9	Répartition du temps de calcul pour 20 000 états.	90
6.10	Prix de l'option g_T en fonction du coefficient d'asymétrie.	92
6.11	Prix de l'option g_T en fonction du coefficient d'aplatissement.	93
6.12	Erreurs de réplication en fonction du coefficient d'aplatissement.	94

Liste des tableaux

4.1	Prix et bornes de l'option <i>put on min</i> avec 500 000 simulations Monte Carlo.	54
4.2	Prix de l'option <i>put on min</i> évalué par chaînes de Markov.	54
4.3	Prix de l'option <i>put on min</i> évalué par chaînes de Markov pour différentes échéances de matrice de transition.	55
6.1	Paramètres annuels des sous-jacents impliqués dans l'option d'échange.	74
6.2	Résultats des erreurs de couverture pour l'option d'échange.	75
6.3	Paramètres de la mixture gaussienne bivariée modélisant les rendements quotidiens du portefeuille initial et de la réserve.	79
6.4	Estimation des paramètres de la gaussienne bivariée modélisant les rendements mensuels du portefeuille initial et de la réserve cohérente avec la distribution quotidienne.	80
6.5	Paramètres de la distribution mensuelle des rendements du fonds de couverture à répliquer.	80
6.6	Comparaison des erreurs de couverture pour option d'échange et fonction g_T pour 10 000 simulations.	81
6.7	Résultats de réplcation pour 10 000 simulations en considérant 10 000 états de discrétisation.	83
6.8	Erreurs de couverture pour 10 000 simulations en considérant 10 000 états de discrétisation.	84

6.9	Distribution cible et celle obtenue par la fonction g_T pour 10 000 simulations.	86
6.10	Statistiques concernant la distribution des rendements répliqués pour 10 000 simulations en considérant différents nombres d'états de discrétisation.	86
6.11	Statistiques concernant la distribution des rendements répliqués pour 10 000 simulations en considérant différents nombres d'états de discrétisation.	87
6.12	Erreurs de réplication de la fonction g_T pour 10 000 simulations en considérant différents nombres d'états de discrétisation.	87
6.13	Erreurs de réplication de la fonction g_T pour 10 000 simulations en considérant différents nombres d'états de discrétisation.	87
6.14	Analyse de la précision et du temps de calcul pour différents nombres d'états de discrétisation.	88
6.15	Sensibilité du prix de l'option en fonction du coefficient d'asymétrie exigé.	91
6.16	Sensibilité du prix de l'option en fonction du coefficient d'aplatissement exigé.	93
6.17	Erreurs de réplication de la fonction g_T pour différents niveaux d'aplatissement ciblés.	94

Chapitre 1

Introduction

L'industrie des fonds de couverture a connu un essor incroyable depuis quelques années. De près de 500 fonds connus en 1990, on en recense plus de 8000 de nos jours. L'actif sous gestion a grimpé de plus de 950 milliards de dollars en une quinzaine d'années, passant de 50 milliards en 1990 à 1000 milliards en 2005. De nombreux investisseurs institutionnels et particuliers considèrent maintenant les fonds de couverture comme une classe d'actif intéressante. Les motivations poussant ces mêmes investisseurs à investir dans ce genre de fonds se sont aussi multipliées. Les uns cherchent à obtenir des rendements supérieurs, tandis que les autres les considèrent comme outil de diversification privilégié. Nous pouvons aussi constater l'émergence de nouveaux produits financiers liés aux fonds de couverture. Les fonds de fonds de couverture en sont un bel exemple. Nous pouvons donc constater l'effervescence actuelle autour de ces fonds.

Toutefois, certains inconvénients quant à l'investissement dans ces fonds de couverture persistent. Le manque de transparence figure parmi les principaux. En effet, les gestionnaires ne sont pas tenus de divulguer les informations concernant leur politique de placement, le degré de levier pour leurs différentes positions, le changement de style, ect. Il revient donc à l'investisseur de gérer ce manque d'information par différents moyens qui, généralement, s'avèrent

très coûteux. L'absence de liquidité peut aussi causer certains problèmes. De fait, plusieurs fonds de couverture gèlent les fonds des investisseurs pour des périodes variant de 6 mois à 5 ans. Certains fonds de couverture peuvent aussi exiger des frais (jusqu'à 5% de la valeur) lors du retrait des sommes. Les frais de gestions considérables incarnent aussi un désavantage majeur à ce type d'investissement.

Par conséquent, de nombreux chercheurs ont donc tenté de trouver des alternatives à l'investissement direct dans les fonds de couverture, tout en considérant les objectifs amenant les investisseurs à préconiser ces fonds. La première approche est celle des modèles à facteurs. Cette approche vise à répliquer les rendements tels qu'obtenus par différents fonds de couverture. Les résultats se sont avérés plus ou moins convaincants et varient grandement par types de fonds. Une autre approche, celle faisant l'objet de ce mémoire, préconise une réplication de la distribution des rendements plutôt que les rendements mêmes. Cette distribution est intégrée dans un contexte de portefeuille dans lequel on ajoute une participation dans un fonds de couverture. L'objectif de diversification d'un portefeuille par l'investissement dans un fonds de couverture est celui retenu par ceux favorisant cette approche. Initialement développée par Kat et Palaro(2005, [24]), certaines améliorations sont apportées dans l'article de Papageorgiou et Rémillard(2007, [21]).

Dans ce mémoire, nous considérerons l'approche présentée dans l'article de Papageorgiou et Rémillard(2007, [21]). Notre contribution sera de résoudre l'algorithme de réplication qu'ils ont développé par l'utilisation des chaînes de Markov. Nous débuterons ce travail par une revue de la littérature concernant la réplication et l'utilisation des chaînes de Markov en finance. Par la

suite, nous détaillerons la procédure menant à la réplication. Nous clarifierons ensuite le concept de chaîne de Markov. L'intégration des deux concepts (réplication et chaînes de Markov) sera ensuite présentée dans le chapitre concernant l'implémentation. Enfin, nous présenterons des résultats numériques ainsi que quelques analyses issues de ces résultats.

Chapitre 2

Revue de littérature

Cette revue de la littérature se divisera essentiellement en trois parties. Tout d'abord, nous présenterons des articles concernant la problématique principale abordée par ce mémoire : la réplique de la distribution des rendements des fonds de couverture. Par la suite, nous passerons en revue différents articles faisant appel aux chaînes de Markov dans un contexte financier. Finalement, nous terminerons cette section en établissant le lien entre ces deux concepts, clarifiant ainsi le cadre de ce mémoire.

2.1 La répliation des fonds de couverture

La tentative de répliation de fonds mutuels ou de fonds de couverture s'avère un phénomène assez récent. En effet, les premiers articles faisant référence explicitement à la répliation ou à l'analyse de performance de ces fonds datent seulement d'une quinzaine d'années. Au cours de cette revue, nous nous concentrerons presque exclusivement sur les travaux concernant la répliation des rendements des fonds de couverture. Nous débuterons par un bref historique des approches et des méthodes développées depuis quelques années et terminerons avec celle faisant l'objet de ce mémoire, l'approche « Optimal Hedging » de Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]).

2.1.1 Approches traditionnelles

La première approche a été celle développée par Sharpe (1992, [34]). Il s'agit de son fameux modèle à facteurs. L'idée derrière cette modélisation relève de l'identification des facteurs responsables des rendements par une méthode de régression linéaire multifactorielle. Sharpe (1992, [34]), en se référant au R^2 , parvient à réplier 70% à 90% des rendements de fonds mutuels à l'aide de cette technique. L'efficacité de ce genre de modèle pour les fonds mutuels peut être expliquée en partie par la forte corrélation linéaire existant entre les fonds mutuels et les différents indices de référence (pouvant ainsi représenter les différents facteurs) présents sur le marché. Inspirés par le succès de cette méthode appliquée aux fonds mutuels, Fung et Hsieh (1997, [15]) l'utilisent pour analyser le rendement des fonds de couverture. Ils considèrent toutefois des éléments supplémentaires lors de leur analyse : l'accès au levier et la stratégie propre au fonds. Malgré cette amélioration, dans près de 50% des cas, ils n'arrivent pas à expliquer plus de 25% des rendements des fonds de couverture étudiés. La

principale source d'erreur de ce genre de modèle est qu'il ne tient pas compte du caractère non-linéaire du rendement de ces fonds. Cette non-linéarité relève entre autre de l'usage de produits dérivés, de la structure asymétrique des frais de gestion ainsi que de l'usage de leviers financiers.

Conscients de cette lacune, de nombreux chercheurs ont tenté d'intégrer cette non-linéarité dans leur modèle à facteurs. Mitchell et Pulvino (2001, [30]) proposent une régression de type « piecewise » afin de tenir compte de la non-linéarité existant pour les fonds préconisant une stratégie d'arbitrage de risque. Ils démontrent aussi que ces stratégies d'arbitrage de risque s'apparentent à une série d'options de vente à découvert sur indice. De leur côté, Fung et Hsieh (2001, [16]) reviennent à la charge, mais cette fois en analysant les rendements des fonds de couverture de type « trend following ». Ils remarquent que l'option de type « lookback straddle » s'avère un candidat efficace pour modéliser les rendements de ce type de stratégie. Agarwal et Naik (2004, [1]) ont eu aussi recours aux options afin d'introduire la non-linéarité. Ils distinguent trois catégories de facteurs dans leur modèle : actifs classiques, options hors jeu, options en jeu. Diez de los Rios et Garcia (2006, [8]) contribuent également à ce type de modélisation. Ils proposent une méthode statistique afin de déterminer de façon optimale le type d'option et à quel point cette option devrait être à la monnaie afin de modéliser le mieux possible le rendement de différents fonds. Malgré tout, nous pouvons constater qu'il s'agit toujours d'approximer, par une modélisation linéaire, des rendements qui ne sont pas linéaires.

2.1.2 Solutions alternatives

Considérant cette réalité, des chercheurs ont tenté d'aborder la problématique différemment. Ainsi, plutôt que de chercher à reproduire les rendements tels que générés par ces fonds, certains auteurs proposent de répliquer la distribution des rendements. Cette quête est justifiée par l'hypothèse que lorsque nous investissons dans un fonds de couverture, nous investissons dans une certaine distribution (par souci de « décorrélation » avec notre portefeuille, par exemple). Par conséquent, s'il s'avérait possible d'obtenir cette distribution d'une autre façon que d'investir dans un fonds de couverture, cela permettrait d'éviter les problèmes de transparence et de frais onéreux inhérents à l'investissement dans ce type de fonds. Outillés des travaux présentés par Dybvig (1988, [12],[13]) et Glosten et Jagannathan(1994, [19]), Amin et Kat (2003, [2]) suggèrent une stratégie dynamique de réplique de la distribution marginale de différents fonds de couverture par l'achat et la vente d'actifs liquides offerts sur les marchés conventionnels. Le coût exigé pour la réplique se révèle aussi comme un indicateur permettant d'évaluer si l'investissement dans le fonds est justifié. En effet, si la stratégie de réplique s'avère moins coûteuse que le coût relatif à l'investissement dans le fonds, mieux vaut tenter de répliquer sa distribution.

Kat et Palaro (2005, [24]) poursuivent dans cette direction en raffinant l'approche. En effet, ils considèrent que l'investissement dans un fonds de couverture doit s'analyser dans un contexte de portefeuille et non de façon isolée. Ils proposent donc une modélisation intégrant aussi la dépendance entre un portefeuille bien diversifié et le fonds de couverture. Les auteurs modélisent cette dépendance à l'aide de copules (une introduction sera présentée au chapitre suivant). Les étapes menant à la réplique de la distribution du fonds

ainsi que la dépendance avec un autre portefeuille bien diversifié se résument sommairement de la façon suivante :

1. Identifier la distribution marginale du portefeuille diversifié, celle du fonds de couverture ainsi que la copule appropriée pour modéliser la dépendance entre ces deux investissements.
2. Déterminer une fonction g qui dépend d'une certaine réserve (actifs liquides) et du portefeuille diversifié. Cette fonction g est déterminée de sorte que la distribution conjointe du portefeuille diversifié et du fonds de couverture soit la même que la distribution conjointe du portefeuille diversifié et de cette fonction g .
3. Trouver le prix de cette fonction g qui peut aussi être considérée comme une option. Ainsi, le prix permet de déterminer si la répliation est souhaitable.
4. Si elle s'avère souhaitable, la dernière étape est de déterminer la stratégie dynamique autofinancée permettant de répliquer cette fonction g .

Cette méthodologie n'est pas exclusive à la répliation de la distribution des fonds de couverture. Effectivement, l'intérêt réside aussi dans la possibilité de créer des fonds qui n'existent pas nécessairement sur le marché démontrant des propriétés statistiques prédéterminées (fonds synthétiques). Kat et Palaro (2006, [25]) discutent de cet usage de la méthodologie.

Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]) généralisent l'approche de Kat et Palaro (2005, [24]) et corrigent quelques incompatibilités du modèle.

Tout d'abord, l'approche de Kat et Palaro (2005, [24]) est confinée au modèle de Black et Scholes (1973, [6]) uniquement. Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]) permettent une dynamique de prix différente. En fait, ils n'admettent aucune restriction à ce niveau. Cela les amène à utiliser une méthode de tarification et de réplication plutôt différente. Leur technique est inspirée de celle utilisée pour les options américaines. Poursuivant l'objectif de réplication par couverture dynamique, ils cherchent à déterminer la stratégie minimisant l'erreur de réplication au carré (squared-hedging error). En ce qui concerne la modélisation des rendements, l'article de Kat et Palaro (2005, [24]) présente une incompatibilité majeure. En effet, ils supposent que la distribution des rendements journaliers est inconnue. Ils ne font que modéliser la distribution mensuelle. Or, la stratégie de réplication s'implémente de façon journalière. Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]) soulignent cette incompatibilité et abordent le problème de manière différente. Ils cherchent plutôt à modéliser les rendements journaliers par des mixtures de lois gaussiennes et déterminent par la suite la loi mensuelle correspondante. Il est à noter que cette modélisation fait référence au rendement du portefeuille diversifié et de l'actif de réserve, puisque pour les fonds de couverture, les données disponibles sont généralement mensuelles.

Pour conclure, nous avons pu réaliser que de nombreuses approches ont été tentées afin de percer le mystère des fonds de couverture. Certaines se sont avérées plus efficaces que d'autres. Nous avons pu aussi remarquer un changement quant à l'angle sous lequel le problème est maintenant abordé : on cherche maintenant à répliquer la distribution des rendements plutôt que les rendements. Dans de ce mémoire, nous discuterons de la problématique telle que proposée par Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]) : réplification de la distribution des rendements de fonds de couverture et réplification de la dépendance par rapport à un portefeuille initial par la méthode « Optimal Hedging ».

2.2 Les chaînes de Markov

Le concept des chaînes de Markov a vu le jour au début du 20e siècle. Le mathématicien russe Andrei Markov les a introduites dans un article publié en 1906. Depuis ce temps, de nombreux scientifiques travaillant dans des domaines aussi variés que la physique statistique, la biologie et la musique ont su intégrer les propriétés clés des chaînes de Markov dans leurs champs d'application respectifs. Le domaine de la finance ne fait pas figure d'exception. Dans cette section, nous effectuerons donc un survol des différents emplois des chaînes de Markov dans un contexte financier.

2.2.1 Applications diverses

Dans la littérature, le premier article que nous avons pu recenser impliquant les chaînes de Markov dans un contexte financier s'avère celui de Pye (1966, [31]). La problématique relève de l'évaluation de flux monétaires dans un environnement incertain de taux d'intérêt. L'auteur utilise les chaînes de Markov afin de modéliser l'évolution du taux court pour un période donnée. Cet emploi s'appuie sur l'hypothèse markovienne de l'évolution de ces taux. Autrement dit, l'auteur présume que le taux court qui sera effectif dans une période, pour une période, ne dépend uniquement que du taux court actuel pour une période. Sous ces hypothèses, l'évaluation des flux financiers ne s'effectue donc que par de simples opérations matricielles. Kobbacy et Nicol (1994, [27]) aussi ont recours aux chaînes de Markov pour modéliser les taux d'intérêt. Ces derniers les utilisent plutôt à des fins de simulation lors d'une étude visant à déterminer le temps optimal de remplacement de différents types d'équipements. La matrice de transition de la chaîne de Markov a été obtenue avec des données historiques. Nous pouvons donc constater que la chaîne de Markov peut autant

être utilisée dans un contexte de probabilité historique que dans un contexte plus théorique. Cette flexibilité sera aussi mise en évidence un peu plus tard lors de la discussion relative au risque de crédit et à la tarification d'options américaines.

Les chaînes de Markov ont aussi été un outil privilégié pour analyser le concept de marche aléatoire. En effet, prenons l'exemple de l'article de McQueen et Thorley (1991, [29]) dans lequel les auteurs se servent d'une matrice de transition pour tester l'hypothèse selon laquelle les rendements annuels suivent une marche aléatoire. Ils distinguent deux états : haut rendement et bas rendement. Par conséquent, selon l'hypothèse nulle (marche aléatoire), le rendement annuel de la prochaine année devrait être haut avec une probabilité de 50% et ce, indépendamment du rendement de l'année précédente. Or, à la suite de l'analyse des matrices obtenues, ils conclurent qu'il y avait une certaine dépendance entre les rendements annuels. Les années marquées par de hauts (bas) rendements étaient généralement suivies par une année de bas (hauts) rendements. Un an auparavant, Engel et Hamilton (1990, [14]) ont eux aussi fait appel au concept de chaînes de Markov dans un contexte de validation ou de rejet de l'hypothèse de la marche aléatoire. Cependant, ces derniers se sont attardés aux taux de change plutôt qu'aux rendements de certains titres. Ils voulaient tester l'hypothèse selon laquelle l'évolution des taux de change est conforme à une marche aléatoire. Contrairement à McQueen et Thorley (1991, [29]), ils n'ont pas utilisé la matrice de transition pour tester cette hypothèse. Ils ont utilisé la matrice pour définir un modèle alternatif, qui selon eux s'avérait plus conforme à la réalité, en incluant une certaine dépendance périodique dans la dynamique de taux de change. Il s'agit d'un modèle avec changement de régime qui répond à une chaîne de Markov.

2.2.2 Risque de crédit

Le début des années quatre-vingt-dix a aussi été marqué par le jaillissement du marché des titres adossés à des créances hypothécaires (mortgage backed securities). Les chaînes de Markov ont servi à la tarification de ces titres à revenus fixes complexes. De fait, l'article de Zipkin (1993, [37]) illustre une application de ces chaînes de Markov à la tarification. Plus précisément, l'auteur modélise l'évolution des taux d'intérêt par une chaîne de Markov. La matrice de transition contient les différents facteurs d'escompte. Dans l'exemple numérique présenté, cette matrice contient vingt états. À l'évidence, on semble reconnaître encore une fois l'avantage de travailler avec des matrices de transition plutôt qu'avec les formules complexes qu'exigent les calculs en temps continu et à cardinalité infinie. Toujours dans le domaine des titres adossés à des créances hypothécaires, nous pouvons aussi constater l'utilisation des chaînes de Markov pour la gestion du risque de crédit hypothécaire. En effet, Smith (1996, [36]) modélise les changements d'état ou de statut des prêts par une chaîne de Markov : défaut, remboursement, défaut de paiement, etc. Les probabilités de transition sont par la suite estimées par des données historiques. Betancourt (1999, [5]) présente un modèle relativement semblable à celui de Smith(1996, [36]) en considérant une matrice de transition reflétant les différents états possibles du prêt. Toutefois, il insiste sur le fait que certaines hypothèses bien précises doivent être satisfaites pour que la rigueur théorique de l'utilisation des chaînes de Markov soit incontestable. Nous devons supposer que les probabilités de transition soient stationnaires et que le comportement dans chacun des états soit homogène. Néanmoins, même si ces conditions dans ce cas sont difficilement observables, il mentionne qu'il s'agit d'un compromis

avantageux à la pure indépendance entre le changement des états pour deux périodes consécutives.

Le risque de crédit corporatif figure aussi parmi les domaines d'application des chaînes de Markov. Le populaire modèle de Jarrow, Lando et Turnbull (1997, [23]) témoigne de cette utilisation. Les auteurs considèrent la cote de crédit de la firme comme un indicateur du risque de défaut. Plus précisément, ils modélisent le processus de défaut par une chaîne de Markov à états finis où les différents états représentent la cote de crédit de la firme. La matrice de transition contient donc les probabilités de migration d'une cote de crédit à l'autre, incluant le défaut de la firme. Ces probabilités sont estimées par les migrations et les défauts observés dans le marché. Kijima et Komoribayashi (1998, [26]) ont poursuivi le travail de Jarrow, Lando et Turnbull (1997, [23]) en ajustant le modèle pour tenir compte du fait que l'on ne constate pas beaucoup de défauts chez les sociétés les mieux cotées, soulevant ainsi un problème de crédibilité dans l'utilisation de ces données historiques. Kodera (2001, [28]) contribue lui aussi à l'amélioration du modèle en laissant varier de façon aléatoire la matrice de transition pour représenter le risque de changement d'écart de crédit (credit spread) requis pour une cote donnée. Bref, cette façon de caractériser le processus de défaut, présentée d'abord par Jarrow, Lando et Turnbull (1997, [23]), permet autant d'évaluer le risque de crédit (valeur à risque, par exemple) que de tarifier une obligation corporative avec optionalité ou même d'évaluer différents produits dérivés sur crédit (credit spread options, credit default swap, ...). Encore une fois, nous sommes en mesure de constater la polyvalence des chaînes de Markov.

Nous terminerons cette revue concernant les chaînes de Markov par des exemples

plus adaptés à l'objectif de ce mémoire. Dans cette dernière série d'articles, nous discuterons essentiellement des applications liées à la tarification d'options.

2.2.3 Tarification d'options

En 1995, Barraquand et Martineau (1995, [3]) établissent une technique particulière pour l'évaluation numérique multidimensionnelle appliquée à des options américaines. En fait, afin de pallier aux problèmes computationnels provoqués par l'augmentation exponentielle des calculs requis lors de la présence de plusieurs sources de risque, les auteurs proposent une discrétisation des valeurs prises par les sous-jacents (ou sources de risque). Ils considèrent par la suite que la stratégie d'exercice est la même pour chacune des cellules trouvées par la discrétisation. Cette méthode leur a permis d'évaluer des options américaines comportant jusqu'à quatre cents sources de risque. Il est à noter que Barraquand et Martineau (1995, [3]) n'utilisent pas explicitement une chaîne de Markov. Nous avons présenté cet article pour illustrer l'efficacité d'une certaine discrétisation des états représentant des titres ou des sources de risques.

De son côté, Guo (1998, [20]) utilise explicitement la chaîne de Markov pour la tarification d'options européennes dans un contexte de volatilité stochastique. La chaîne de Markov modélise les k états possibles (discrets) de volatilité pour une période donnée. L'auteur souligne l'efficacité de la modélisation par chaînes de Markov puisqu'elle exige de simples opérations matricielles telles l'exponentiation et la multiplication. Nous pouvons encore une fois constater la flexibilité que nous amène l'utilisation des chaînes de Markov.

L'application des chaînes de Markov dans le contexte de ce mémoire s'apparente plutôt à celle présentée par Duan et Simonato (2001, [10]). Ces derniers proposent une méthode numérique basée sur les chaînes de Markov pour évaluer des options où la volatilité stochastique du sous-jacent (dans cet article, seul le cas unidimensionnel est abordé) est modélisée par un processus GARCH. Cette méthode donne aussi des résultats pertinents pour une dynamique Black et Scholes (1973, [6]). Ils s'intéressent à la tarification d'options vanilles américaines et européennes. L'idée intuitive s'interprète relativement facilement. Chaque état est défini par un certain intervalle de valeurs prises par la source de risque (sous-jacent seulement ou sous-jacent et volatilité). Les probabilités pour chaque transition entre deux états pour une période donnée peuvent être calculées de façon analytique autant dans le contexte Black-Scholes (1973, [6]) que pour la dynamique de volatilité stochastique GARCH. Le prix de l'option est déterminé par de simples opérations matricielles. De plus, tel que mentionné dans l'article, la matrice de transition étant creuse, il est possible d'augmenter significativement la taille de cette matrice (discrétisation plus fine des états) en conservant un temps de calcul relativement faible. Les auteurs dégagent aussi d'autres avantages à l'utilisation de cette méthode. En effet, contrairement au modèle binomial, il est possible d'augmenter l'espace des états sans nécessairement augmenter le nombre de pas pour se rendre à l'échéance de l'option. Cette caractéristique s'avère intéressante pour la tarification d'options américaines et bermudiennes : la discrétisation des états ne dépend pas du nombre d'exercices prématurés (early exercise). Ces avantages ont aussi été mis à profit par Duan, Dudley, Gauthier et Simonato (1999, [11]) pour la tarification d'options barrières. Finalement, une méthode semblable a été développée par Duan, Gauthier et Simonato (2004, [9]) dans le cas multivarié (multiples sources de risque). La construction de la chaîne de Markov s'effectue alors à l'aide d'une

suite à discrédance faible.

Bref, nous avons pu constater que plusieurs chercheurs se sont approprié les chaînes de Markov pour profiter de leurs avantages. Leur utilisation s'est faite dans des domaines aussi variés que la modélisation de taux d'intérêt, les titres adossés à des créances hypothécaires (mortgages backed securities), le risque de crédit ainsi que la tarification d'options. La flexibilité d'usage, la rapidité de calcul et la simplicité d'interprétation en font un outil précieux et approprié dans le cadre de ce travail.

2.3 Lien avec le mémoire

Tel que discuté précédemment, l'objectif principal de ce mémoire est de procéder à la réplication de la distribution des rendements de fonds de couverture ou de distributions synthétiques. Cette réplication sera effectuée en mettant à profit les avantages computationnels et intuitifs que nous procurent les chaînes de Markov. Plus précisément, nous tenterons de résoudre l'algorithme de réplication développé par Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]) à l'aide des techniques de tarification d'options américaines par chaînes de Markov.

Chapitre 3

Le modèle de répliation

Le modèle de répliation présenté dans ce mémoire est celui proposé par Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]). Ce modèle est basé sur les travaux de Kat et Palaro (2005, [24]). Ils apportent toutefois des améliorations remarquables concernant la modélisation des rendements ainsi que la stratégie optimale de couverture. Par souci de cohérence quant à l'objectif poursuivi par ce mémoire, nous ne détaillerons pas les différences entre ces deux modèles. Nous présenterons uniquement l'approche « Optimal Hedging » de Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]). Le lecteur pourra se référer à l'article de Kat et Palaro (2005, [24]) pour constater les différences. Détaillons chacune des étapes de l'approche « Optimal Hedging ».

3.1 Idée générale

Définissons tout d'abord la notation concernant les actifs impliqués dans le processus :

- S_1 représente le portefeuille initial de l'investisseur,
- S_2 représente l'actif de réserve, utilisé dans la réplique,
- S_3 représente le fonds de couverture.

Précisons de façon intuitive l'objectif de la réplique . Un investisseur détient initialement un portefeuille bien diversifié S_1 . Cet investisseur, pour une raison quelconque, désire investir dans un certain fonds de couverture S_3 . Les rendements obtenus par ce nouveau portefeuille composé de S_1 et S_3 seront définis par une certaine fonction de distribution conjointe $F_{1,3}$. C'est précisément cette fonction de distribution que nous cherchons à répliquer afin d'éviter à l'investisseur les risques inhérents à l'investissement dans les fonds de couverture. Cette nuance s'avère d'une importance capitale. Nous cherchons à répliquer les propriétés statistiques du nouveau portefeuille composé de S_1 et de S_3 ou autrement dit, sa fonction de distribution $F_{1,3}$. Nous ne nous attardons pas à répliquer chacun des rendements qu'aurait obtenus ce nouveau portefeuille s'il s'était concrétisé sur le marché.

3.2 Modélisation

En premier lieu, nous considérons de façon indépendante les actifs suivants : S_1 , S_2 et S_3 . Définissons la fonction de distribution marginale de chacun des actifs :

- F_1 représente la fonction de distribution marginale du portefeuille initial de l'investisseur,
- F_2 représente la fonction de distribution marginale de l'actif de réserve,
- F_3 représente la fonction de distribution marginale du fonds de couverture.

Rappelons que l'objectif consiste à répliquer la distribution conjointe de S_1 et S_3 . Pour l'instant, nous n'avons que les distributions marginales de ces deux actifs. Introduisons le concept de copule nous permettant de caractériser les fonctions de distribution conjointes.

Définition 3.1 : *Une copule $C(u_1, u_2)$ est une fonction de répartition dont les marges sont uniformes. Autrement dit, il existe deux variables $U_1, U_2 \sim \text{Uniforme}(0, 1)$ telles que pour tout $u_1, u_2 \in [0, 1]$,*

$$P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) = C(u_1, u_2) \quad (3.1)$$

En particulier, $C(u_1, 1) = u_1$, $C(u_1, 0) = 0$ et $C(1, u_2) = u_2$, $C(0, u_2) = 0$.

Ainsi, nous pouvons introduire le théorème de Sklar(1959, [35]) qui nous permet de caractériser les distributions. Plus précisément, ce théorème implique que toute combinaison de deux distributions univariées ainsi qu'une fonction copule modélisant la dépendance permet de définir une distribution bivariée valide.

Théorème 3.1 (Sklar) : *Pour toute fonction de répartition H d'un vecteur (X_1, X_2) , dont les marges sont F_1 et F_2 , il existe une copule C telle que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,*

$$H(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \quad (3.2)$$

*La copule est **unique** lorsque restreinte à $\overline{\text{Image}(F_1)} \times \overline{\text{Image}(F_2)} \subset [0, 1]^2$, où $\overline{\text{Image}(F_j)} = \{0; 1\} \cup \{F_j(y); y \in \mathbb{R}\}$. En particulier, elle est **unique** si F_1 et F_2 sont continues.*

Cette représentation d'une fonction de distribution bivariée s'avère un outil précieux. En effet, cela nous permet de caractériser une plus grande diversité de distributions plutôt que de simplement utiliser les distributions paramétriques bivariées connues, leur nombre étant assez restreint. Cette diversité s'explique par la définition même de la représentation à l'aide d'une fonction copule. De fait, dans le cas bivarié, elle exige l'utilisation de deux distributions univariées (identiques ou différentes) et d'une fonction copule pour la dépendance. Cela permet un grand nombre de combinaisons de distributions univariées (l'ensemble étant beaucoup plus riche que pour les distributions bivariées) et de fonctions copules, démultipliant ainsi le nombre de distributions bivariées que nous pouvons représenter.

Cette particularité s'avère fort utile dans un contexte de modélisation, puisque le choix de distributions étant beaucoup plus vaste, nous obtenons certainement une meilleure représentation de nos données. Ainsi, le théorème de Sklar(1959, [35]) nous permet de représenter les distributions conjointes de nos actifs présentés en début de chapitre :

- $F_{1,3}(x, y) = C_{1,3}(F_1(x), F_3(y)), x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$
- $F_{1,2}(x, y) = C_{1,2}(F_1(x), F_2(y)), x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$

Rappelons que c'est précisément $F_{1,3}$ que nous tentons de reproduire à l'aide des actifs S_1 (portefeuille initial) et S_2 (actif de réserve) dont les distributions marginales sont F_1 et F_2 et ayant comme distribution conjointe $F_{1,2}$. Précisons comment cette réplication peut être possible.

3.3 Outil de réplication : la fonction g_T

Tel que présenté en détail dans l'article de Kat et Palaro (2005, [24]), la clé du processus de réplication réside dans la détermination de la fonction de paiement g_T la moins chère de sorte que pour tout x, y :

$$P\{r_{1T} \leq x, g_T(r_{1T}, r_{2T}) \leq y\} = P(r_{1T} \leq x, r_{3T} \leq y) = F_{1,3}(x, y), \forall x, y, \quad (3.3)$$

avec $r_{1T} = \log(\frac{S_1(T)}{S_1(0)})$, $r_{2T} = \log(\frac{S_2(T)}{S_2(0)})$ et $r_{3T} = \log(\frac{S_3(T)}{S_3(0)})$ représentant les rendements.

Dans le contexte de réplication, l'échéance T est d'un mois. En effet, la technique considère une problématique de réplication mensuelle. Ainsi, g_T peut être interprétée comme une option européenne d'échéance 1 mois sur les rendements mensuels du portefeuille initial et de l'actif de réserve. Il s'agit donc de déterminer la fonction g_T , qui dépend du rendement mensuel du portefeuille initial (r_{1T}) et du rendement mensuel de l'actif de réserve (r_{2T}), pour laquelle la fonction de distribution conjointe de r_{1T} et de g_T serait la même que la fonction de distribution conjointe de r_{1T} et r_{3T} (le portefeuille initial et le fonds de couverture). Cela nous permettrait d'obtenir la distribution souhaitée, sans investir dans le fonds de couverture.

À ce moment, procédons à quelques manipulations afin de caractériser cette fonction g_T . D'abord, définissons la relation avec la fonction g_T en termes de probabilités conditionnelles :

$$P\{g_T(r_{1T}, r_{2T}) \leq y | r_{1T} = x\} = P(r_{3T} \leq y | r_{1T} = x) = F_{3|1}(y|x), \forall x, y, \quad (3.4)$$

où $F_{3|1}$ correspond à la distribution conditionnelle du rendement du fonds de

couverture étant donné le rendement obtenu par le portefeuille initial.

Sous certaines conditions techniques démontrées dans l'article de Kat et Palaro (2005, [24]) concernant le ratio de Sharpe de l'actif de réserve et son coefficient de corrélation avec le portefeuille initial, nous pouvons exprimer la fonction g_T de la manière suivante (représentation basée sur les transformées de Rosenblatt) :

$$g_T(x, y) = F_{3|1}^{-1}(F_{2|1}(y|x)|x), \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

où $F_{3|1}^{-1}(y|x)$ est la pseudo inverse de $F_{3|1}(y|x)$.

Quelques manipulations algébriques supplémentaires permettront d'exprimer la fonction g_T à l'aide des fonctions identifiées précédemment. En effet, pour l'instant, nous n'avons pas les représentations des distributions conditionnelles $F_{3|1}$ et $F_{2|1}$. Rappelons donc les représentations des fonctions de distribution inconditionnelles présentées à la section précédente :

$$F_{1,3}(x, y) = C_{1,3}(F_1(x), F_3(y)) , \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

$$F_{1,2}(x, y) = C_{1,2}(F_1(x), F_2(y)) , \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Nous pouvons écrire les distributions conditionnelles $F_{3|1}$ et $F_{2|1}$ de la façon suivante :

$$F_{3|1}(y|x) = \mathcal{K}_x^{1,3}(y) = \frac{\partial C_{1,3}(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=F_1(x), v=F_3(y)} \quad (3.8)$$

$$F_{2|1}(y|x) = \mathcal{K}_x^{1,2}(y) = \frac{\partial C_{1,2}(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=F_1(x), v=F_2(y)} \quad (3.9)$$

La fonction de paiement g_T peut donc être réécrite en tenant compte des deux

équations précédentes :

$$g_T(x, y) = \mathcal{K}_x^{(-1)1,3}(\mathcal{K}_x^{1,2}(y)), \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Notons que l'existence de cette fonction g_T nécessite que les copules $C_{1,3}$ et $C_{1,2}$ soient dérivables. Précisons également que l'unité de mesure du domaine de cette fonction g_T est le rendement mensuel. En réarrangeant ce résultat, nous obtenons notre fonction de paiement ayant pour domaine le couple de prix $(S_1(T), S_2(T))$, soit le portefeuille initial et la réserve. Pour un investissement initial de $S_3(0)$ qui aurait été fait dans le fonds de couverture, nous obtenons :

$$S_g(T) = S_3(0) \exp \left\{ g_T \left\{ \log \left(\frac{S_1(T)}{S_1(0)} \right), \log \left(\frac{S_2(T)}{S_2(0)} \right) \right\} \right\}. \quad (3.11)$$

S_g se nomme la valeur de réplication. Ainsi, détenir S_1 et S_g est équivalent à détenir S_1 et S_3 . Cependant, S_g n'est pas un actif transigeable au même titre que S_1 , S_2 et S_3 . Intuitivement, nous pouvons interpréter S_g comme un paiement résultant d'une option européenne d'échéance 1 mois ayant comme fonction de paiement g_T . Bref, détenir S_1 et cette option g_T procurant un paiement S_g est équivalent à détenir S_1 et S_3 en terme de distribution et de dépendance.

À ce moment, nous avons déterminé la fonction de paiement permettant la réplication. La prochaine étape consiste à déterminer la stratégie de couverture dynamique menant à cette fonction. Nous verrons aussi que cette stratégie nous permettra de vérifier si la réplication est souhaitable.

3.4 Tarification et couverture de la fonction g_T

Nous avons vu à la section précédente qu'il existe une fonction de paiement nous permettant de répliquer la distribution souhaitée. Nous avons aussi mentionné que nous pouvions considérer cette fonction de paiement comme une option. Ainsi, nous sommes en mesure d'utiliser différentes techniques propres à la couverture et à la tarification d'options pour aborder la problématique. Une des principales contributions de Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]) concernant la réplication se situe à ce niveau. Précisons les bases théoriques de leur approche.

Définissons l'espace probabilisé dans lequel évoluent les processus stochastiques impliqués dans notre étude : (Ω, P, \mathcal{F}) ainsi que la filtration $\mathbb{F} = \{ \mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_T \}$.

Posons le processus $S_t = (S_t^{(1)}, S_t^{(2)})$ modélisant les actifs qui seront impliqués dans la tarification et la couverture de la fonction g_T . Les actifs $S_t^{(1)}$ et $S_t^{(2)}$ représentent respectivement la valeur du portefeuille initial et de l'actif de réserve au temps t .

Rappelons d'abord qu'une stratégie de réplication pour une certaine option s'effectue en prenant position dans un actif sans risque ainsi que dans le ou les sous-jacents à laquelle se réfère l'option.

Afin d'établir notre stratégie de réplication, nous devons nous munir d'un facteur d'escompte. Posons β_t correspondant à la valeur au temps 0 qui doit être investie dans un actif sans risque à ce temps (0) afin que la valeur de l'investissement au temps t soit de 1\$. Par définition, $\beta_0 = 1$. De plus, nous supposons que le processus β est prévisible, c'est-à-dire que β_t est \mathcal{F}_{t-1} mesurable pour

tout $t = 1, \dots, T$.

Une stratégie de réplication dynamique peut être décrite par une valeur de départ v_0 nécessaire à l'initiation de la stratégie ainsi qu'une suite de vecteurs aléatoires $\phi = (\phi_t)_{t=0}^T$. Chaque élément $\phi_t^{(j)}$ (dans notre cas, $j = 1, 2$.) du vecteur ϕ_t à différents moments t représente le nombre de parts détenues de l'actif $S^{(j)}$ pour la période $(t-1, t]$. Le processus ϕ_t est dit prévisible puisque qu'il ne dépend que des vecteurs (2 dimensions puisque 2 actifs à utiliser pour la réplication : portefeuille initial et la réserve) S_0, \dots, S_{t-1} . Initialisons le processus de sorte que $\phi_0 = \phi_1$ (les positions prises au temps 0 sont conservées jusqu'au temps 1) et que la valeur initiale du portefeuille de réplication soit v_0 . Nous pouvons donc déterminer le montant à investir dans l'actif sans risque :

$$v_0 - (\phi_1^{(1)} S_0^{(1)} + \phi_1^{(2)} S_0^{(2)}) = v_0 - \phi_1^\top S_0 \quad (3.12)$$

Intuitivement, nous pouvons interpréter que le montant à investir dans l'actif sans risque résulte de l'argent résiduel (au coût d'initiation de la stratégie de réplication) une fois les prises de position dans le ou les sous-jacents déduites.

De plus, la stratégie de réplication doit être autofinancée. Autrement dit, aucun argent supplémentaire n'est investi suite au coût initial v_0 . Cela implique que pour tout $t = 1, \dots, T$,

$$\beta_t V_t(v_0, \phi) - \beta_{t-1} V_{t-1}(v_0, \phi) = \phi_t^\top (\beta_t S_t - \beta_{t-1} S_{t-1}) \quad (3.13)$$

Par conséquent, en se servant des deux équations précédentes, nous obtenons de façon récursive que :

$$\beta_T V_T = \beta_T V_T(v_0, \phi) = v_0 + \sum_{t=1}^T \phi_t^\top (\beta_t S_t - \beta_{t-1} S_{t-1}). \quad (3.14)$$

Cette équation n'est qu'une expression de la valeur terminale actualisée d'une certaine stratégie de réplication en fonction des paramètres qui définissent cette stratégie, soient v_0 et ϕ .

Le problème réside donc dans l'identification de la stratégie (v_0, ϕ) autofinancée qui engendre une erreur aussi petite que possible lors de la réplication d'une certaine option C. Cette erreur, G_T se représente sous la forme :

$$G_T(v_0, \phi) = \beta_T V_T(v_0, \phi) - \beta_T C. \quad (3.15)$$

G_T correspond donc à la différence entre la valeur terminale engendrée par la stratégie dynamique de réplication et l'option C que nous cherchons à répliquer, le tout actualisé.

Dans le contexte de ce travail, l'erreur quadratique espérée est utilisée comme mesure de qualité de la réplication. Cela nécessite que les prix $S_t^{(j)}$ ainsi que le processus ϕ soient de carré intégrable. Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]) proposent une solution afin de déterminer la stratégie de réplication permettant de minimiser l'erreur quadratique espérée. Ils se sont inspirés du travail fait par Schweizer(1995, [33]). Définissons la notation nous menant à cette solution.

Posons,

$$\Delta_t = S_t - E(S_t | \mathcal{F}_{t-1}), t = 1, \dots, T. \quad (3.16)$$

Étant donné les conditions d'intégrabilité citées ci-haut, la matrice de variance conditionnelle Σ_t de Δ_t existe et s'exprime comme suit :

$$\Sigma_t = E\{\Delta_t \Delta_t^\top | \mathcal{F}_{t-1}\}, 1 \leq t \leq T. \quad (3.17)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le principal théorème de l'article de Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]) qui permet de déterminer la stratégie de réplcation optimale.

Théorème 3.2 : *Posons Σ_t inversible pour tout $t = 1, \dots, T$. Le risque $E\{G^2(v_0, \phi)\}$ est minimisé en choisissant de façon récursive ϕ_T, \dots, ϕ_1 satisfaisant*

$$\phi_t = (\Sigma_t)^{-1} E\{(S_t - E(S_t | \mathcal{F}_{t-1})) C_t | \mathcal{F}_{t-1}\}, t = T, \dots, 1, \quad (3.18)$$

où C_T, \dots, C_0 sont définis de façon récursive en initialisant $C_T = C$ et

$$\beta_{t-1} C_{t-1} = \beta_t E(C_t | \mathcal{F}_{t-1}) - \phi_t^\top E(\beta_t S_t - \beta_{t-1} S_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}), t = T, \dots, 1. \quad (3.19)$$

De plus, la valeur optimale v_0 correspond à C_0 et l'erreur quadratique de réplcation espérée est :

$$E(G^2) = \sum_{t=1}^T E(\beta_t G_t^2). \quad (3.20)$$

où,

$$G_t = \phi_t^\top \{S_t - E(S_t | \mathcal{F}_{t-1})\} - \{C_t - E(C_t | \mathcal{F}_{t-1})\}, 1 \leq t \leq T. \quad (3.21)$$

Remarque 3.1 : À cause de la relation (3.21) et du fait que $v_0 = C_0$, C_t peut être interprété comme l'investissement nécessaire à la période t pour ré-

plier le paiement contingent C à la période T . C_t peut aussi être interprété comme la valeur au temps t de l'option qui permet la réplication à la période T .

La valeur de l'option nous indique s'il en vaut la peine de procéder à la réplication. En effet, si v_0 est inférieur à $S_3(0)$ utilisé dans l'équation (3.11), alors il est souhaitable de recourir à la réplication. En effet, pour un investissement inférieur à celui qui aurait été fait dans le fonds de couverture, nous obtenons les propriétés statistiques qu'aurait engendrées cet investissement. À l'opposé, un v_0 supérieur à $S_3(0)$ indique que la réplication n'est pas souhaitable.

3.5 Résumé des étapes

En guise de conclusion de ce chapitre, il convient de résumer les étapes afin d'avoir une vision globale de la problématique.

1. À l'aide des données recueillies sur les 3 actifs impliqués,

- S_1 , le portefeuille initial de l'investisseur,
- S_2 , l'actif de réserve utilisé dans la réplique et
- S_3 , le fonds à répliquer,

nous devons estimer la distribution conjointe des rendements mensuels de S_1 et S_2 , soit $F_{1,2}$. Nous devons également identifier la distribution marginale des rendements mensuels de S_3 ainsi que la copule appropriée modélisant la dépendance entre les rendements de S_1 et S_3 . Tel que décrit à la section 1.2, une fois la distribution marginale des rendements mensuels de S_1 (dérivée à l'aide de la conjointe entre les rendements de S_1 et S_2) obtenue, nous sommes en mesure de caractériser la distribution conjointe des rendements mensuels de S_1 et S_3 à partir de F_1 , F_3 et $C_{1,3}$. Cette première étape relève uniquement de l'estimation de distributions.

2. Par la suite, nous déterminons la fonction g_T (présentée à la section 1.3) qui nous permettra de procéder à la réplique. Cette fonction est définie à l'aide des fonctions de distribution marginales et conjointes et des copules correspondantes. De façon intuitive, nous pouvons interpréter cette fonction $g_T(r_{1T}, r_{2T})$ comme une option européenne sur deux sous-jacents. Cette interprétation nous permettra d'utiliser les concepts propres à la tarification et à la couverture d'options.

3. À cette étape, nous choisissons le portefeuille qui minimise l'erreur de répliation quadratique de l'option $g_T(r_{1T}, r_{2T})$. Il s'agit donc de définir la stratégie dynamique de couverture de façon récursive : ϕ_T, \dots, ϕ_1 . Le tout s'exécute en transigeant des unités du portefeuille initial (S_1) et de l'actif de réserve (S_2). Rappelons que détenir S_1 et cette option g_T est équivalent, en terme de distribution et de dépendance, à détenir S_1 et S_3 . La stratégie de répliation dynamique de l'option nous permet aussi d'obtenir le prix (v_0) de cette option, ou autrement dit, le coût d'initiation de la stratégie de répliation.

4. Finalement, la dernière étape est de vérifier si la répliation apporte une valeur ajoutée. Autrement dit, déterminer s'il en vaut la peine de tenter de répliquer la distribution des rendements du fonds plutôt que d'investir directement dans le fonds. Cette validation est relativement simple. Il s'agit de rejeter la répliation si la valeur v_0 est supérieur à $S_3(0)$ (le montant qui aurait été investi dans le fonds de couverture) et l'accepter si elle est inférieure à $S_3(0)$. Dans le cas où la répliation est rejetée, cela implique qu'il est préférable d'investir directement dans le fonds plutôt que de tenter de répliquer sa distribution.

En conclusion, ce chapitre nous a permis de définir plus précisément ce qu'est la réplication et de clarifier les différents concepts mathématiques impliqués dans cette procédure. Dans le prochain chapitre, nous introduirons la méthode de tarification et de couverture choisie dans le cadre de ce mémoire. Nous discuterons de l'approche par chaînes de Markov. Plus précisément, cette méthode sera intégrée à l'étape 3 du cheminement présenté dans cette section : la tarification et la couverture de la fonction g_T .

Chapitre 4

Tarification par chaînes de Markov

Tel que discuté dans la revue de la littérature, les chaînes de Markov ont été utilisées dans plusieurs domaines financiers. Dans le cadre de ce mémoire, elles nous aideront à évaluer les équations menant à la réplication. Rappelons que ces équations ont été présentées à la section 3.4 du présent document. Nos travaux seront basés sur ceux de Duan, Gauthier et Simonato (2004, [9]) lesquels utilisent les chaînes de Markov pour la tarification d'options sur plusieurs sous-jacents. Au cours de ce chapitre, nous énoncerons tout d'abord les bases mathématiques des chaînes de Markov. Par la suite, nous présenterons la technique de tarification par chaînes de Markov : choix des états et matrice de transition. Finalement, nous présenterons un exemple simple de tarification.

4.1 Introduction aux chaînes de Markov

Dans ce mémoire, nous travaillons avec des chaînes à temps discret et à états finis. Présentons quelques définitions clarifiant le concept.

Définition 4.1 : Un processus stochastique $X = \{X_t : t \in \mathcal{T}\}$, où \mathcal{T} est un ensemble d'indices, est dit **markovien** si, pour tout $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, la distribution conditionnelle de X_{t_n} étant donné $X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}}$ est égale à la distribution conditionnelle de X_{t_n} étant donné $X_{t_{n-1}}$, c'est à dire que pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_1} = x_1) = P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}). \quad (4.1)$$

Définition 4.2 : L'ensemble des valeurs pouvant être prises par le processus est appelé **l'espace d'états** de X et nous le dénotons par ε_x .

Définition 4.3 : Soit $X = \{X_t : t \in \mathcal{T}\}$, un processus stochastique. Si \mathcal{T} est un ensemble fini ou dénombrable, alors le processus X est dit à **temps discret**, sinon, il est dit à **temps continu**.

Définition 4.4 : Un processus markovien X est appelé **chaîne de Markov** si l'espace de ses états est un ensemble fini ($\varepsilon_x = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$) ou dénombrable ($\varepsilon_x = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$).

Définition 4.5 : La **loi de transition** d'une chaîne de Markov à temps discret est donnée par une suite $\{\mathcal{P}_n : n \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$ de matrices de dimension $\text{Card}(\varepsilon_x) \times \text{Card}(\varepsilon_x)$ où l'élément situé à l'intersection de la i ième ligne et de la j ième colonne de la matrice \mathcal{P}_n est

$$p_{ij}(n) = P[X_n = x_j | X_{n-1} = x_i], (x_i, x_j) \in \varepsilon_x \times \varepsilon_x. \quad (4.2)$$

Si la loi de transition ne dépend pas du temps, c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P[X_n = x_j | X_{n-1} = x_i] = p_{ij}, (x_i, x_j) \in \varepsilon_x \times \varepsilon_x, \quad (4.3)$$

alors la chaîne de Markov est dite **homogène** et la matrice \mathcal{P} , constituée des probabilités de transition p_{ij} , est appelée la **matrice de transition**.

4.2 Choix des états

La pierre angulaire de la technique est de décrire l'évolution du ou des sous-jacents par une chaîne de Markov homogène à états finis. Par homogène, nous entendons que la matrice de transition ne change pas dans le temps. Par états finis, nous entendons que les valeurs possibles prises par le processus caractérisant le ou les sous-jacents est circonscrit par un ensemble fini et discret représentant les différents états possibles. Cette dernière caractéristique nous permet d'implémenter une procédure de programmation. Résumons la procédure du choix des états dans le cas d'une option sur deux sous-jacents, telle que décrite dans l'article de Duan, Gauthier et Simonato (2004, [9]).

Spécifions d'abord que l'objectif ultime consiste à déterminer l'ensemble des valeurs possibles de rendements cumulatifs pouvant être prises par les deux sous-jacents pour une certaine échéance. Nous supposons que les rendements périodiques sont distribués selon une loi gaussienne bivariée. L'ensemble des valeurs possibles des rendements cumulatifs observables sur une certaine échéance peut être représenté par un plan. Dans ce plan, la coordonnée en x représente le rendement cumulé du premier sous-jacent (r_1), alors que la coordonnée en y représente le rendement cumulé du deuxième sous-jacent (r_2).

La figure (4.1) présente des points représentant les états possibles de rendements cumulatifs lorsque les rendements périodiques suivent une loi normale bivariée d'espérance nulle ($\mu_1 = \mu_2 = 0$) et d'écart type de 20% pour les deux variables ($\sigma_1 = \sigma_2 = 20\%$). Le lecteur attentif remarquera que la zone des rendements cumulatifs possibles a été limitée. En effet, dans cet exemple, nous avons éliminé les rendements cumulatifs au-delà de trois écarts-type pour chaque variable étant donné leur faible probabilité d'occurrence. Cela explique

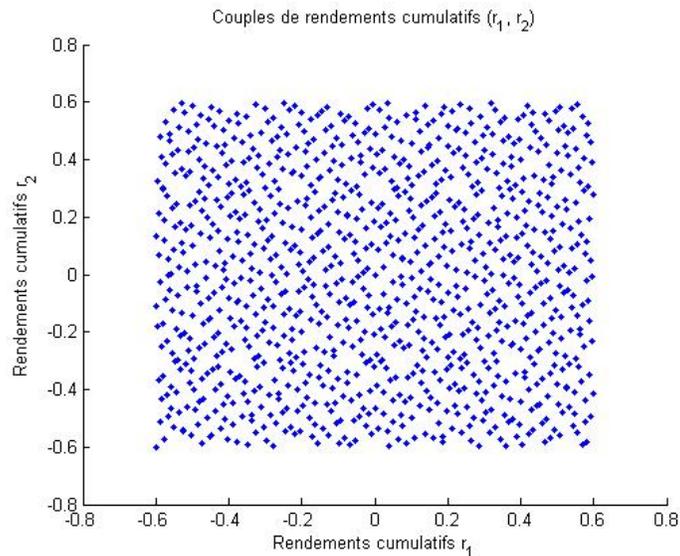


FIG. 4.1 – Couples de rendements cumulatifs possibles (r_1, r_2).

la circonscription de la zone. De plus, nous pouvons constater que la zone est centrée en zéro. En effet, puisque les rendements périodiques suivent une loi normale bivariée d'espérance nulle, la distribution des rendements cumulatifs est une loi normale bivariée d'espérance nulle, donc centrée en 0.

Détaillons la procédure afin d'obtenir cette représentation.

La première considération est de s'assurer de l'uniformité dans le choix des points. L'utilisation de la suite à discrétance faible dans ce contexte s'avère un choix approprié. En effet, par définition, cette suite nous permet de respecter le critère de représentation uniforme du plan contenant les rendements cumulatifs. Pour plus de détails sur les suites à dicrépance faible, le lecteur pourra consulter le livre de Glasserman (2004, [18]). L'article de Duan, Gauthier et Simonato (2004, [9]) préconise la suite de Sobol. Pour ce mémoire, nous adaptons la technique de cet article. Par conséquent, nous utilisons aussi la suite de

Sobol générant ainsi des couples de points de façon uniforme sur le plan $[0, 1]^2$. La matrice $\mathbf{U}_{N \times 2}$ contient les N couples générés sur cet espace par la suite de Sobol.

$$\mathbf{U}_{N \times 2} = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ u_1^{(N)} & u_2^{(N)} \end{bmatrix}$$

4.2.1 Zone de forte densité

Rappelons d'abord que notre tarification s'effectue dans un contexte où les rendements cumulatifs (r_1, r_2) suivent une loi gaussienne bivariée (rappel : puisque la loi périodique est une loi gaussienne bivariée). Par conséquent, il est possible de déterminer une zone de forte densité de ces rendements cumulatifs. Plus précisément, cette zone correspond aux couples de rendements des deux titres pour lesquels la valeur de la fonction de densité évaluée en ces points est significative. Dans le cas qui nous occupe (la loi gaussienne bivariée), les couples situés aux quatre coins du plan de la figure (4.1) sont négligeables en terme de probabilité d'occurrence. Ainsi, il s'avère plus efficace de ne tenir compte qu'uniquement des points situés dans la zone de forte densité de notre loi gaussienne bivariée. Pour cette loi, la densité est concentrée dans une zone elliptique dont la forme dépend de la corrélation entre les deux variables (ρ). Nous devons donc retenir que les points de la suite de Sobol figurant dans cette zone de forte densité.

Retournons donc à notre suite de Sobol $\mathbf{U}_{N \times 2}$. Tel que présenté dans l'article

de Duan, Gauthier et Simonato (2004, [9]), en tenant compte de la zone de forte densité, nous ne conservons que les n premiers points $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}$, c'est-à-dire les n premières lignes de $\mathbf{U}_{N \times 2}$, qui respectent le critère suivant :

$$(\mathbf{u}^{(i)} - [0.5 \ 0.5]) \Sigma^{-1} (\mathbf{u}^{(i)} - [0.5 \ 0.5])^\top \leq \frac{1}{4} \quad (4.4)$$

où ρ correspond au coefficient de corrélation entre les deux variables, r_1 et r_2 , Σ correspond à la matrice de corrélation, et

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Cette région n'a pas été définie au hasard. En effet, nous remarquons que l'équation (4.4) correspond à celle d'une ellipse centrée au point $(0.5, 0.5)$. Le centre de cette ellipse est celui de notre plan sur $[0, 1]^2$. Nous apprécierons l'influence de la matrice de covariance sur sa forme aux figures (4.3), (4.4) et (4.5). Cette ellipse, correspondant à la zone de forte densité d'une loi normale, nous permettra de discarter les événements trop extrêmes.

La matrice $\tilde{\mathbf{U}}_{n \times 2}$ contient ces n points figurant dans la zone de forte densité.

Notons que n est choisi arbitrairement. En effet, n représente le nombre d'états que nous souhaitons considérer dans notre matrice de transition. Bien entendu, n doit être inférieur au nombre de points de la suite de Sobol qui satisfont l'inéquation (4.4).

Illustrons les concepts précédents. D'abord, la figure (4.2) est une représentation visuelle de 10 000 points générés par la suite de Sobol sur le plan $[0, 1]^2$.

Nous pouvons remarquer que les points sont dispersés uniformément sur le plan. Cela résulte de l'utilisation de la suite à discrédance faible.

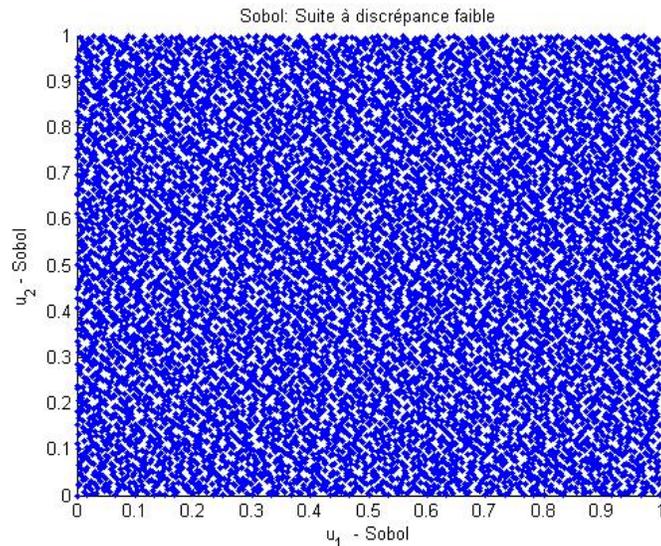
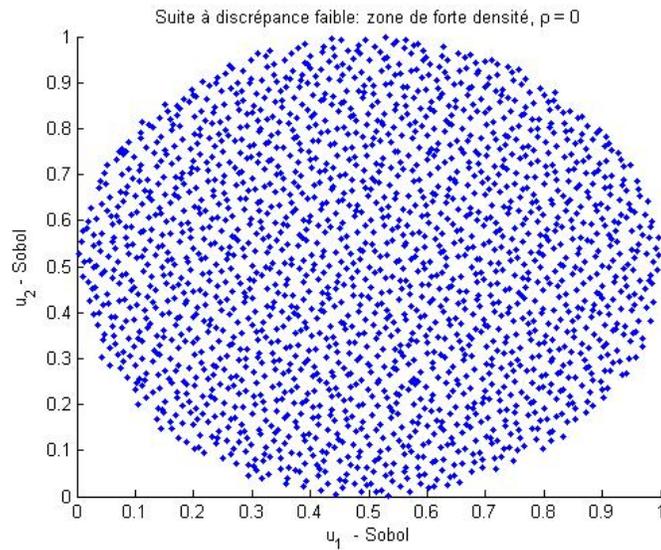
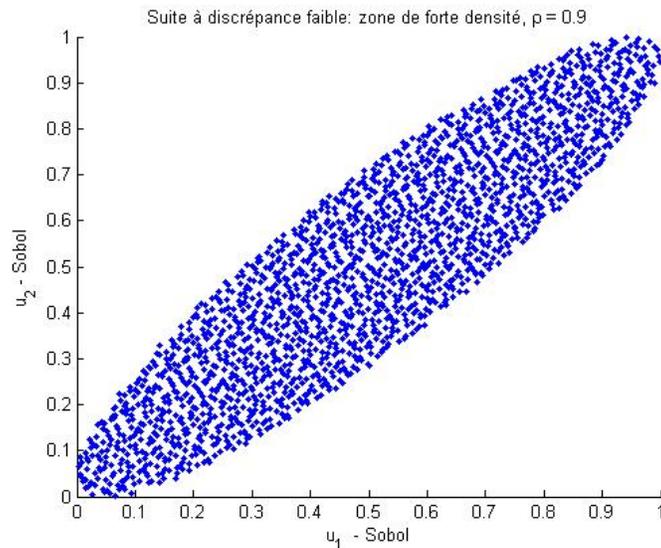


FIG. 4.2 – 10000 premiers points de la suite de Sobol.

Maintenant, considérons les 2000 premiers points respectant le critère présenté à l'équation (4.4). Les figures (4.3), (4.4) et (4.5) présentent différents niveaux de corrélation.

Nous pouvons procéder à une interprétation intuitive de ces représentations. En effet, pour un niveau de corrélation près de 1, les deux variables ont tendance à évoluer dans la même direction. Par conséquent, il n'est pas surprenant d'obtenir une zone de forte densité inclinée vers la droite (figure (4.4)). Pour une valeur de r_1 élevée, il est plus probable que r_2 soit élevé, puisque les deux variables réagissent de façon presque identique. Pour un niveau de corrélation près de -1, nous pouvons procéder au même raisonnement : pour un r_1 élevé, il est plus probable que r_2 soit faible, puisque cette variable est fortement nég-

FIG. 4.3 – Zone de forte densité pour $\rho = 0$.FIG. 4.4 – Zone de forte densité pour $\rho = 0.9$.

tivement corrélée à r_1 . Cela explique que la zone de forte densité pour $\rho = -1$ soit inclinée vers la gauche (figure 4.5). Il est à noter que la zone de forte densité est principalement déterminée par la corrélation. Pour cette raison, cette zone a pu être identifiée directement à partir des points générés par la suite de

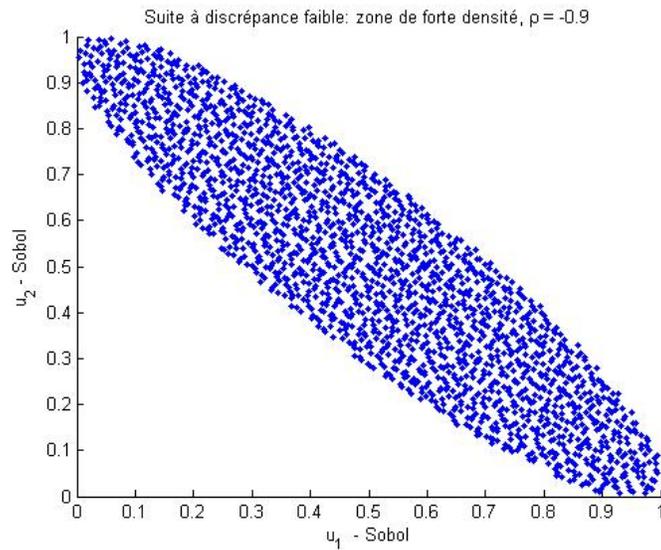


FIG. 4.5 – Zone de forte densité pour $\rho = -0.9$.

Sobol. En fait, cette zone nous dicte quels points méritent d'être transformés linéairement pour obtenir les rendements cumulatifs les plus probables.

4.2.2 Transformation linéaire

Le lecteur attentif aura remarqué que les points définis dans $\tilde{U}_{n \times 2}$ ne peuvent représenter des états de rendements cumulatifs. Effectivement, cette matrice ne contient que des valeurs entre 0 et 1. Ainsi, nous devons procéder à une transformation linéaire de façon à ce que ces couples représentent des rendements cumulatifs. Définissons les éléments intervenant dans cette transformation.

- n : nombre d'états considérés dans notre matrice de transition (le n choisi à l'étape précédente).
- T : échéance en année de l'option considérée.

- σ_1, σ_2 , respectivement la volatilité annuelle de r_1 et r_2 .
- $a_1 = -2\sigma_1\sqrt{T} \ln(\ln(n))$, borne inférieure pour les valeurs prises par r_1 .
- $b_1 = 2\sigma_1\sqrt{T} \ln(\ln(n))$, borne supérieure pour les valeurs prises par r_1 .
- $a_2 = -2\sigma_2\sqrt{T} \ln(\ln(n))$, borne inférieure pour les valeurs prises par r_2 .
- $b_2 = 2\sigma_2\sqrt{T} \ln(\ln(n))$, borne supérieure pour les valeurs prises par r_2 .

Considérons de surcroît les matrices suivantes obtenues à partir des paramètres précédents :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 & 0 \\ 0 & b_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{n \times 2} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons maintenant transformer linéairement les couples de la suite $(u_1^{(i)}, u_2^{(i)})$ pour obtenir des rendements cumulatifs. La transformation est la suivante :

$$\mathbf{R}_{n \times 2} = \tilde{\mathbf{U}}_{n \times 2} \mathbf{M}_{2 \times 2} + \mathbf{A}_{n \times 2} \quad (4.5)$$

Les lignes de $\mathbf{R}_{n \times 2}$ contiennent donc les couples de rendements cumulatifs présents dans la zone de forte densité de la loi gaussienne bivariable. À titre d'exemple, la figure (4.6) présente la zone de forte densité dans le cas d'une corrélation nulle entre les variables r_1 et r_2 . Il s'agit des points de la figure

(4.3) transformés linéairement tel que présenté à l'équation (4.5).

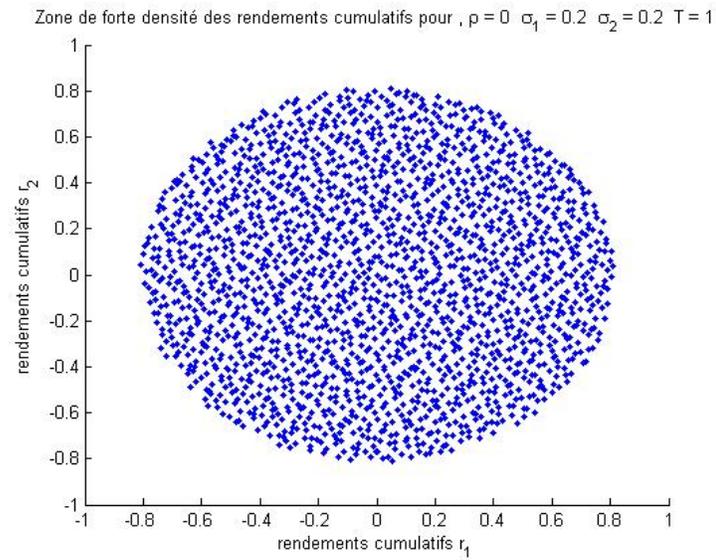


FIG. 4.6 – Zone de forte densité des rendements cumulatifs pour $\rho = 0$.

4.3 Matrice de transition

À ce moment, nous avons déterminé les n couples de rendements cumulatifs dans la matrice $\mathbf{R}_{n \times 2}$ ($\mathbf{r}^{(i)} = (r_1^{(i)}, r_2^{(i)})$ pour $i = 1, 2, \dots, n$) qui représenteront l'ensemble des états possibles. Autrement dit, nous avons discrétisé, de façon uniforme, le domaine de la loi gaussienne bivariée. Toutefois, le lecteur attentif aura remarqué que ces états ne tiennent pas compte de la tendance des deux sous-jacents. En effet, nous avons que discrétisé le comportement aléatoire considérant uniquement la volatilité des rendements des deux sous-jacents et la corrélation entre ces rendements. Ainsi, les états possibles doivent être ajustés dans le temps pour tenir compte de la tendance. Nous devons donc procéder à une autre transformation linéaire pour obtenir les états possibles compte tenu de la tendance. μ_1 et μ_2 représentent respectivement l'espérance de r_1 et de r_2 sur la même période que celle des rendements modélisés par la matrice de transition. Les rendements ajustés sont donc :

$$\mathbf{r}_t^{(i)} = [r_{1t}^{(i)} \ r_{2t}^{(i)}] = \mathbf{r}^{(i)} + \mu t = [\mathbf{r}_1^{(i)} \ \mathbf{r}_2^{(i)}] + [\mu_1 \ \mu_2]t. \quad (4.6)$$

Maintenant, nous sommes en mesure de définir notre matrice de transition. Cette matrice présente les probabilités de passer d'un état à l'autre pour une période donnée. Puisque nous considérons n états, la matrice de transition Π est une matrice de dimensions $n \times n$.

$$\Pi_{t-1,t} = \begin{bmatrix} \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(1)}, \mathbf{r}_t^{(1)}) & \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(1)}, \mathbf{r}_t^{(2)}) & \dots & \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(1)}, \mathbf{r}_t^{(n)}) \\ \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(2)}, \mathbf{r}_t^{(1)}) & \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(2)}, \mathbf{r}_t^{(2)}) & \dots & \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(2)}, \mathbf{r}_t^{(n)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(n)}, \mathbf{r}_t^{(1)}) & \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(n)}, \mathbf{r}_t^{(2)}) & \dots & \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(n)}, \mathbf{r}_t^{(n)}) \end{bmatrix}$$

Bien entendu, la probabilité de passer d'un certain état $\mathbf{r}_{t-1}^{(i)}$ à un autre état $\mathbf{r}_t^{(j)}$ dépend de la distribution conjointe des sous-jacents. Afin de déterminer ces probabilités de transition, nous utilisons l'approche présentée dans l'article de Duan, Gauthier et Simonato (2004, [9]). Ils définissent cette probabilité de la façon suivante :

$$\pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{r}_t^{(j)}) = \pi_{i,j}^{t-1} = \frac{f(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)})}{\sum_{k=1}^n f(\mathbf{r}_t^{(k)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)})} \quad (4.7)$$

Rappelons que dans ce chapitre, nous considérons que les rendements périodiques sont distribués selon une loi gaussienne bivariée. Ainsi, nous pouvons exprimer la densité conditionnelle de l'état $r_t^{(j)}$ sachant que nous sommes dans l'état $r_{t-1}^{(i)}$:

$$f(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)}) = \frac{1}{2\pi} |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{r}_t^{(j)} - \mathbf{r}_{t-1}^{(i)} - \mu)' |\Lambda|^{-1} (\mathbf{r}_t^{(j)} - \mathbf{r}_{t-1}^{(i)} - \mu)\right) \quad (4.8)$$

où Λ est la matrice de covariance entre les rendements périodiques des deux sous-jacents impliqués.

Toutefois, il est possible de rendre ces probabilités indépendantes du temps. En effet, en utilisant l'équation (4.6), nous pouvons réécrire l'équation (4.8) :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)}) &= \frac{1}{2\pi} |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{r}_t^{(j)} - \mathbf{r}_{t-1}^{(i)} - \mu)' |\Lambda|^{-1} (\mathbf{r}_t^{(j)} - \mathbf{r}_{t-1}^{(i)} - \mu)\right) \quad (4.9) \\ &= \frac{1}{2\pi} |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{r}^{(j)} + \mu t - \mathbf{r}^{(i)} - \mu(t-1) - \mu)' |\Lambda|^{-1} (\mathbf{r}^{(j)} + \mu t - \mathbf{r}^{(i)} - \mu(t-1) - \mu)\right) \quad (4.10) \end{aligned}$$

Ainsi, les μ s'annulent et nous obtenons :

$$f(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)}) = \frac{1}{2\pi} |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{r}^{(j)} - \mathbf{r}^{(i)})' |\Lambda|^{-1} (\mathbf{r}^{(j)} - \mathbf{r}^{(i)})\right). \quad (4.11)$$

Nous retirons donc le sous-indice t pour montrer que cette densité conditionnelle est constante dans le temps :

$$f(\mathbf{r}^{(j)}|\mathbf{r}^{(i)}) = \frac{1}{2\pi} |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{r}^{(j)} - \mathbf{r}^{(i)})' |\Lambda|^{-1} (\mathbf{r}^{(j)} - \mathbf{r}^{(i)})\right). \quad (4.12)$$

Par conséquent, notre matrice de transition n'est pas fonction du temps t :

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(1)}) & \pi(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}) & \dots & \pi(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(n)}) \\ \pi(\mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{r}^{(1)}) & \pi(\mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{r}^{(2)}) & \dots & \pi(\mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{r}^{(n)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi(\mathbf{r}^{(n)}, \mathbf{r}^{(1)}) & \pi(\mathbf{r}^{(n)}, \mathbf{r}^{(2)}) & \dots & \pi(\mathbf{r}^{(n)}, \mathbf{r}^{(n)}) \end{bmatrix}$$

où

$$\pi(\mathbf{r}^{(i)}, \mathbf{r}^{(j)}) = \pi_{i,j} = \frac{f(\mathbf{r}^{(j)}|\mathbf{r}^{(i)})}{\sum_{k=1}^n f(\mathbf{r}^{(k)}|\mathbf{r}^{(i)})}. \quad (4.13)$$

Interprétons cette équation. Nous déterminons les probabilités de transition de la matrice une ligne à la fois. Plus précisément, considérons la ligne i . L'intuition se présente comme suit : pour l'état actuel (à $t-1$) de rendements cumulatifs $\mathbf{r}^{(i)} + \mu(t-1)$, nous cherchons à déterminer quelle est la probabilité que les rendements cumulatifs à la période suivante (à t) soient de $\mathbf{r}^{(j)} + \mu t$, j pouvant aller de 1 jusqu'à n . Nous utilisons la densité afin d'estimer cette probabilité. De plus, le lecteur remarquera que nous devons normaliser par la somme des valeurs de densité sur la ligne i . Cela n'est pas surprenant. En effet, la somme des probabilités sur chaque ligne doit être égale à 1. Toutefois, puisque nous utilisons la densité comme approximation et que cette densité s'intègre sur un domaine continu, en utilisant seulement la densité comme probabilité, la somme des probabilités de transition sur notre ligne ne donnera

pas 1. Le fait de normaliser par la somme des valeurs de la densité nous permet donc d'obtenir des probabilités cohérentes pour une matrice de transition. Ainsi, nous transformons le domaine en le limitant aux états possibles définis à la sous-section précédente.

Apportons quelques précisions concernant la périodicité. En fait, nous pouvons définir la matrice de transition pour la période que nous désirons. Il s'agit d'être cohérent avec les paramètres utilisés dans la densité. Par exemple, si nous souhaitons modéliser les rendements quotidiens par une chaîne de Markov, nous devons utiliser des paramètres quotidiens dans la densité pour être en mesure de déterminer la juste probabilité de transition de rendements cumulatifs à l'intérieur d'une journée.

4.4 Exemple de tarification

Dans cette section, nous décrivons un exemple simple de tarification par chaîne de Markov. Plus précisément, nous procédons à la tarification d'une option de vente sur le titre ayant la plus petite valeur à l'échéance (*European put on the minimum of 2 assets*). Voici quelques paramètres caractérisant le problème :

- $S_1(0) = S_2(0) = 50$, les sous-jacents considérés.
- $T = 1$, échéance en année de l'option.
- $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$, la volatilité annuelle des rendements r_1 et r_2 de S_1 et S_2 .
- $\rho = 0.5$, corrélation entre les rendements r_1 et r_2 .
- Λ , matrice de covariance déterminée à partir de la corrélation et des volatilités.
- $r = 0.05$, taux d'intérêt annuel sans risque.
- $\mu_1 = \mu_2 = r$, le rendement espéré des deux sous-jacents.
- $K = 55$, le prix d'exercice de l'option.

Précisons que nous établissons les rendements espérés au taux sans risque, puisque nous cherchons à obtenir les probabilités dans un monde neutre au risque. Cela nous permet d'actualiser les flux monétaires de l'option d'échange au taux sans risque.

Rappelons les étapes à suivre :

Tout d'abord, il faut déterminer, à l'aide d'une suite à discrétion faible à laquelle nous appliquons une transformation linéaire, l'espace des états possibles. Ces états possibles représenteront des rendements cumulatifs sur un an ($T=1$). Nous avons défini, $\mathbf{R}_{n \times 2}$, ce vecteur des états possibles.

Par la suite, nous déterminons les probabilités de la matrice de transition Π :

$$\pi(\mathbf{r}^{(i)}, \mathbf{r}^{(j)}) = \pi_{i,j} = \frac{f(\mathbf{r}^{(j)}|\mathbf{r}^{(i)})}{\sum_{k=1}^n f(\mathbf{r}^{(k)}|\mathbf{r}^{(i)})} \quad (4.14)$$

Nous devons également déterminer les flux à l'échéance de l'option. Pour ce faire, il faut définir les couples possibles de valeurs de sous-jacents à cette date. Nous retrouvons nos états $r^{(i)}$ définis plus tôt et ajoutons la tendance pour obtenir les rendements cumulatifs possibles au temps 1 :

$$\mathbf{S}_{n \times 2}(1) = \exp\left(\mathbf{R}\mathbf{I}_{n \times 2} + \mathbf{R}_{n \times 2} + \mu_{n \times 2}\right) \quad (4.15)$$

où

$$\mathbf{R}\mathbf{I}_{n \times 2} = \begin{bmatrix} \ln S_1(0) & \ln S_2(0) \\ \ln S_1(0) & \ln S_2(0) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \ln S_1(0) & \ln S_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{n \times 2} = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} & r_2^{(1)} \\ r_1^{(2)} & r_2^{(2)} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ r_1^{(n)} & r_2^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\mu_{n \times 2} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{n \times 2}(1) = \begin{bmatrix} S_1^{(1)}(1) & S_2^{(1)}(1) \\ S_1^{(2)}(1) & S_2^{(2)}(1) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ S_1^{(n)}(1) & S_2^{(n)}(1) \end{bmatrix}$$

Définissons $\mathbf{S}_1(1)$ et $\mathbf{S}_2(1)$, respectivement la première et deuxième colonne de $\mathbf{S}_{n \times 2}(1)$. La tarification de l'option résulte des simples opérations matricielles suivantes :

$$V(0) = e^{-r} \Pi \max\{K - \min(\mathbf{S}_1(1); \mathbf{S}_2(1)); 0\}$$

Le prix de l'option pour des prix initiaux de $S_1(0)$ et $S_2(0)$ correspond à la valeur de la première ligne du vecteur $\mathbf{V}_{n \times 2}(0)$. Voici quelques résultats sur cette méthode de tarification par chaînes de Markov pour cette option de vente européenne sur le titre ayant la plus petite valeur à l'échéance (*European put on the minimum of 2 assets*). Nous avons aussi déterminé l'intervalle de confiance à 99% sur le prix obtenu par simulation de Monte Carlo avec 500 000 trajectoires. De plus, pour la méthode par chaînes de Markov, nous avons fait varier le nombre d'états pris en considération pour montrer que les prix obtenus semblent converger à mesure que nous considérons plus d'états possibles (discrétisation plus fine). Les paramètres de l'option sont ceux définis au début

de la section.

Voici le prix obtenu par simulation ainsi que les bornes correspondant à un intervalle de confiance à 99% :

Borne inférieure	Prix	Borne supérieure
5.9050	5.9141	5.9232

TAB. 4.1 – Prix et bornes de l’option *put on min* avec 500 000 simulations Monte Carlo.

Comparons cet intervalle aux prix obtenus par l’approche par chaînes de Markov :

Nombre d’états	Prix
25	5.9778
50	5.9309
100	5.9132
500	5.9059
1000	5.9060
2000	5.9140
3000	5.9198
5000	5.9225

TAB. 4.2 – Prix de l’option *put on min* évalué par chaînes de Markov.

Nous pouvons constater que nous convergions rapidement vers des valeurs à l’intérieur de l’intervalle de confiance établi par 500 000 simulations. À première vue, dans ce contexte simple de tarification, cette rapidité de convergence semble anodine. Toutefois, dans un contexte de tarification par couverture historique, cela s’avère un avantage considérable. En effet, les techniques conventionnelles par simulation exigent une resimulation à chaque pas de temps. Ainsi, ces 500 000 simulations exécutées à chaque date de couverture sont très

coûteuses en temps de calcul. En utilisant l'approche par chaînes de Markov, nous pouvons utiliser que 500, 1000 ou 2000 points au lieu de 500 000 pour des résultats sensiblement similaires.

Rappelons, tel que présenté au chapitre 3, que nous procédons à la réplication par des techniques de tarification par couverture historique. Ainsi, ces qualités computationnelles des chaînes de Markov seront donc mises à profit.

Toutefois, nous devons être conscients que la méthode par chaînes de Markov est en quelque sorte une procédure de discrétisation. De plus, lors d'une tarification par couverture historique, la matrice de transition a pour échéance la fréquence de rebalancement du portefeuille. Ainsi, les erreurs de discrétisation se démultiplieront en fonction du nombre de rebalancement, puisque nous devons procéder à plusieurs multiplications de la matrice de transition. La table suivante nous montre l'impact de ces multiplications de la matrice de transition sur la précision du calcul. Nous pouvons constater que plus nous multiplions la matrice de transition, plus le nombre d'états doit être important pour assurer la convergence du prix vers l'intervalle de confiance.

Nombre d'états	Annuelle	Semestrielle	Trimestrielle	Mensuelle
25	5.9778	6.0383	6.0962	5.7806
50	5.9309	6.0011	6.0539	5.9120
100	5.9132	5.9266	5.9198	5.7402
500	5.9059	5.9151	5.9139	5.8831
1000	5.9060	5.8987	5.8894	5.8939
2000	5.9140	5.9144	5.9181	5.9368
3000	5.9198	5.9243	5.9287	5.9380
5000	5.9225	5.9263	5.9326	5.9449

TAB. 4.3 – Prix de l'option *put on min* évalué par chaînes de Markov pour différentes échéances de matrice de transition.

Pour conclure ce chapitre, nous tenons à rappeler qu'il s'agissait de présenter la technique de tarification par chaînes de Markov au lecteur. Pour ce faire, nous avons débuté par une définition des concept sous-jacents. Par la suite, nous avons détaillé la technique présentée dans l'article de Duan, Gauthier et Simonato (2004, [9]). Finalement, nous avons précisé la méthode dans un contexte simple de tarification d'option européenne. Au chapitre suivant, nous discuterons plus en détail de la façon dont cette procédure pourra s'implémenter dans un contexte de réplcation.

Chapitre 5

Méthodologie

Au cours de ce chapitre, nous discuterons essentiellement de la mise en oeuvre de la technique de réplification introduite au chapitre 3. Dans un premier temps, nous préciserons l'étape de modélisation des données. Cependant, il est à noter que cette première partie sera principalement descriptive, puisqu'il ne s'agit pas de la contribution de ce mémoire. Les explications données seront donc plutôt à titre informatif. Dans un deuxième temps, nous traiterons de l'estimation de la matrice de transition qui servira à déterminer la stratégie de réplification ainsi que la valeur de réplification. Finalement, nous préciserons l'utilisation de cette matrice dans un contexte de réplification.

5.1 Estimation des distributions

5.1.1 Horizon temporel

À cette étape, certaines clarifications doivent être amenées quant à l'horizon temporel de la modélisation et de la réplique.

Tout d'abord, nous devons préciser qu'il s'agit d'une problématique de réplique mensuelle. Rappelons donc que l'objectif est de répliquer la distribution des rendements mensuels d'un nouveau portefeuille composé du portefeuille initial S_1 et d'une participation dans un fonds de couverture S_3 . La principale raison pour laquelle nous répliquons la distribution conjointe mensuellement concerne l'accès aux données des fonds de couverture. De fait, les gestionnaires de ces fonds ne publient que très rarement leurs résultats sur une base plus fréquente que mensuelle.

Toutefois, les transactions sur les actifs S_1 et S_2 qui nous permettront de répliquer cette distribution mensuelle ($F_{1,3}$) s'effectueront de façon journalière. L'accessibilité aux données pour le portefeuille initial et l'actif de réserve s'avère beaucoup plus simple et s'obtient sur une base quotidienne.

Bref, nous devons distinguer deux horizons :

1. Réplique de la distribution **mensuelle** des rendements $F_{1,3}$.
2. Transactions **quotidiennes** sur S_1 et S_2 menant à cette réplique.

5.1.2 Modélisation des rendements de S_1 et S_2

Nous devons modéliser la distribution jointe des rendements quotidiens des actifs S_1 et S_2 . Nous modélisons d'abord ces actifs de façon quotidienne, puisque la stratégie dynamique de réplcation s'implémente de façon quotidienne. En effet, rappelons que les espérances à évaluer présentées au théorème (3.2) se calculent à intervalles quotidiens.

La forme paramétrique suggérée dans l'article de Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]) pour modéliser ces rendements quotidiens est la mixture gaussienne bivariée à m régimes. Ce choix ne relève pas du hasard. En effet, cela permet d'obtenir la distribution conjointe des rendements mensuels de façon analytique sachant que la somme d'une mixture gaussienne bivariée engendre une mixture gaussienne bivariée. Rappelons que c'est la distribution conjointe des rendements mensuels de S_1 et S_2 qui nous permet d'identifier la fonction g . La distribution quotidienne nous permet de déterminer la stratégie dynamique de réplcation menant à la couverture de la fonction g .

Les détails de la technique permettant d'obtenir les paramètres optimaux de la mixture gaussienne bivariée et concernant le nombre de régimes optimal figurent dans l'article de Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]). Nous ne détaillerons pas cette procédure puisque la partie concernant l'estimation des distribution n'est pas l'objectif principal de ce mémoire.

5.1.3 Modélisation des rendements de S_1 et S_3

L'approche est quelque peu différente. En effet, nous modélisons directement la distribution conjointe des rendements mensuels des actifs S_1 et S_3 . De plus,

la forme paramétrique ne se limite pas à celle de la mixture gaussienne bivariée.

D'abord, nous déterminons la distribution marginale des rendements mensuels de S_1 . Il suffit d'isoler les paramètres relatifs à la distribution des rendements mensuels de S_1 dans l'ensemble des paramètres de la mixture gaussienne bivariée des rendements mensuels de S_1 et S_2 . La distribution marginale des rendements mensuels de S_1 est donc aussi une mixture gaussienne.

Par la suite, nous déterminons la distribution marginale des rendements mensuels de S_3 . Pour le titre S_3 , aucune forme paramétrique n'est prédéterminée. Il s'agit de conduire les tests statistiques appropriés et d'identifier la meilleure distribution.

Finalement, nous identifions la copule $C_{1,3}$ modélisant la dépendance entre S_1 et S_3 . Des tests statistiques doivent être effectués afin d'identifier la copule qui représente le mieux la structure de dépendance. L'article de Beaudoin, Genest et Remillard (2007, [4]) traite de ce genre de test.

Ainsi, tel que discuté au chapitre 3 à la section sur la modélisation (section 2), les deux distributions marginales et la copule permettent de caractériser la fonction de distribution conjointe des rendements mensuels des actifs S_1 et S_3 .

Bref, nous avons maintenant la représentation de la distribution conjointe des rendements quotidiens et mensuels de S_1 et S_2 . Cela nous permet d'implémenter une stratégie de réplcation quotidienne à l'aide de ces actifs. De plus, nous avons identifié la fonction de distribution que nous souhaitons répliquer : la fonction de distribution conjointe des titres S_1 et S_3 . Par conséquent, nous sommes en mesure d'identifier la fonction g permettant la réplcation de cette distribution. Rapellons que c'est précisément cette fonction g , considérée comme une option quelconque sur deux sous-jacents, que nous chercherons à couvrir et à évaluer.

5.2 Matrice de transition

5.2.1 Choix des états

Le choix des états s'effectue de la même façon qu'au chapitre précédent. Toutefois, au chapitre précédent, nous considérons la loi gaussienne bivariée. Dans le contexte de répliquon, la mixture gaussienne bivariée s'avère la loi retenue. Nous devons donc procéder à un ajustement pour tenir compte des différents régimes.

Soit n , le nombre que nous voulons considérer dans notre matrice de transition et p_1, p_2, \dots, p_m , les poids attribués à chacun des régimes. Sur n états considérés,

- $n_1 = p_1 \times n$ seront issus du régime 1,
- $n_2 = p_2 \times n$ seront issus du régime 2,
- ...,
- $n_m = p_m \times n$ seront issus du régime m .

de sorte que $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.

Pour chaque régime, nous procédons de la même façon qu'à la section (4.3). Les états possibles de rendements cumulatifs mensuels seront donc composés des n_1 états du régime 1, des n_2 états du régime 2, ..., et des des n_m états du régime m . N'oublions pas que puisque la couverture s'implémente de façon quotidienne, notre matrice de transition modélise des rendements quotidiens. Ainsi, les paramètres utilisés lors de la transformation linéaire seront les paramètres de la mixture gaussienne bivariée modélisant les rendements quotidiens de S_1 et S_2 .

À titre informatif, voici une illustration de l'ensemble des états considérés dans le cas d'une mixture gaussienne bivariée à deux régimes.

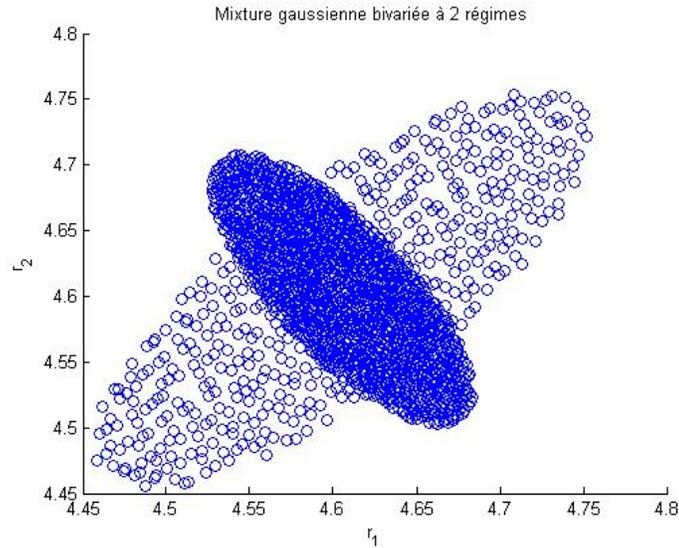


FIG. 5.1 – États possibles de rendements cumulatifs pour une mixture gaussienne bivariée à 2 régimes.

Nous pouvons constater que les deux régimes ont des niveaux de volatilité et de corrélation bien différents. Ce choix des états prend donc en considération ces différences.

Rappelons que ces états ne tiennent pas compte de l'espérance de rendement des titres. Ces rendements cumulatifs possibles ont été générés à partir de la corrélation et de la volatilité. Par conséquent, à chaque pas de temps considéré, il faut faire un ajustement pour tenir compte de la tendance. Ainsi, les états possibles de rendements cumulatifs changent avec le temps de sorte que :

$$\mathbf{r}_t^{(i)} = [r_{1t}^{(i)} \ r_{2t}^{(i)}] = \mathbf{r}^{(i)} + \mu t. \quad (5.1)$$

Pour la mixture gaussienne, nous définissons μ comme la moyenne pondérée des espérances de rendements quotidiens des différents régimes :

$$\mu = \theta_1\mu_1 + \theta_2\mu_2 + \dots + \theta_m\mu_m \quad (5.2)$$

où

- θ_k est le poids donné au régime k dans l'estimation de la mixture gaussienne,
- μ_k le vecteur ligne 1×2 de l'espérance des rendements quotidiens de r_1 et r_2 pour le régime k .

5.2.2 Probabilités de transition

Pour définir les probabilités de transition, nous avons recours à la même méthode qu'à la section 3 du chapitre précédent. La seule différence est que dans le contexte de réplcation, la distribution jointe des rendements périodiques des titres S_1 et S_2 , soient r_1 et r_2 est la mixture gaussienne bivariée. Nous utilisons donc la distribution quotidienne de r_1 et r_2 pour définir les probabilité de transitions. Procédons à certains rappels concernant les probabilités de transition et définissons ces probabilités dans le cas de la mixture gaussienne bivariée.

Les probabilités de transition forment la matrice $\Pi_{t-1,t}$:

$$\Pi_{t-1,t} = \begin{bmatrix} \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(1)}, \mathbf{r}_t^{(1)}) & \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(1)}, \mathbf{r}_t^{(2)}) & \dots & \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(1)}, \mathbf{r}_t^{(n)}) \\ \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(2)}, \mathbf{r}_t^{(1)}) & \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(2)}, \mathbf{r}_t^{(2)}) & \dots & \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(2)}, \mathbf{r}_t^{(n)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(n)}, \mathbf{r}_t^{(1)}) & \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(n)}, \mathbf{r}_t^{(2)}) & \dots & \pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(n)}, \mathbf{r}_t^{(n)}) \end{bmatrix}$$

Rappelons également que :

$$\pi(\mathbf{r}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{r}_t^{(j)}) = \pi_{i,j}^{t-1} = \frac{f(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)})}{\sum_{k=1}^n f(\mathbf{r}_t^{(k)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)})} \quad (5.3)$$

et que

$$f(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)}) = \frac{1}{2\pi} |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{r}_t^{(j)} - \mathbf{r}_{t-1}^{(i)} - \mu)' |\Lambda|^{-1} (\mathbf{r}_t^{(j)} - \mathbf{r}_{t-1}^{(i)} - \mu)\right) \quad (5.4)$$

dans le cas de la loi gaussienne bivariée. Maintenant, puisque nous considérons la mixture gaussienne bivariée, nous définissons maintenant la densité $f(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)})$, comme une moyenne pondérée des densités des différents régimes composant la mixture gaussienne bivariée.

$$f(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)}) = \theta_1 f_1(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)}) + \theta_2 f_2(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)}) + \dots + \theta_m f_m(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)}) \quad (5.5)$$

où

$$f_k(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)}) = \frac{1}{2\pi} |\Lambda_k|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{r}_t^{(j)} - \mathbf{r}_{t-1}^{(i)} - \mu_k)' |\Lambda_k|^{-1} (\mathbf{r}_t^{(j)} - \mathbf{r}_{t-1}^{(i)} - \mu_k)\right) \quad (5.6)$$

pour $k = 1, 2, \dots, m$.

- Λ_k est la matrice de covariance des rendements quotidiens r_1 et r_2 pour le régime k .

En utilisant l'équation (5.1), nous pouvons réécrire l'équation (5.6) et la rendre indépendante du temps t :

$$f_k(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)}) = \frac{1}{2\pi} |\Lambda_k|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{r}_t^{(j)} - \mathbf{r}_{t-1}^{(i)} - \mu_k)' |\Lambda_k|^{-1} (\mathbf{r}_t^{(j)} - \mathbf{r}_{t-1}^{(i)} - \mu_k)\right) \quad (5.7)$$

$$= \frac{1}{2\pi} |\Lambda_k|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{r}^{(j)} + \mu t - \mathbf{r}^{(i)} - \mu(t-1) - \mu_k)' |\Lambda_k|^{-1} (\mathbf{r}^{(j)} + \mu t - \mathbf{r}^{(i)} - \mu(t-1) - \mu_k)\right) \quad (5.8)$$

$$= \frac{1}{2\pi} |\Lambda_k|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{r}^{(j)} + \mu - \mathbf{r}^{(i)} - \mu_k)' |\Lambda_k|^{-1} (\mathbf{r}^{(j)} + \mu - \mathbf{r}^{(i)} - \mu_k)\right). \quad (5.9)$$

Nous avons donc que, pour $t = 1, 2, \dots$,

$$f_k(\mathbf{r}_t^{(j)} | \mathbf{r}_{t-1}^{(i)}) = \frac{1}{2\pi} |\Lambda_k|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{r}^{(j)} + \mu - \mathbf{r}^{(i)} - \mu_k)' |\Lambda_k|^{-1} (\mathbf{r}^{(j)} + \mu - \mathbf{r}^{(i)} - \mu_k)\right). \quad (5.10)$$

Nous retirons donc le sous indice t pour montrer que cette densité conditionnelle est constante dans le temps :

$$f_k(\mathbf{r}^{(j)} | \mathbf{r}^{(i)}) = \frac{1}{2\pi} |\Lambda_k|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{r}^{(j)} + \mu - \mathbf{r}^{(i)} - \mu_k)' |\Lambda_k|^{-1} (\mathbf{r}^{(j)} + \mu - \mathbf{r}^{(i)} - \mu_k)\right). \quad (5.11)$$

Nous pouvons également réécrire l'équation (5.5) et la rendre indépendante du temps :

$$f(\mathbf{r}^{(j)} | \mathbf{r}^{(i)}) = \theta_1 f_1(\mathbf{r}^{(j)} | \mathbf{r}^{(i)}) + \theta_2 f_2(\mathbf{r}^{(j)} | \mathbf{r}^{(i)}) + \dots + \theta_m f_m(\mathbf{r}^{(j)} | \mathbf{r}^{(i)}). \quad (5.12)$$

Ainsi, la matrice de transition est elle aussi indépendante du temps. Il suffit de la définir qu'une seule fois en début d'algorithme.

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(1)}) & \pi(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}) & \dots & \pi(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(n)}) \\ \pi(\mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{r}^{(1)}) & \pi(\mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{r}^{(2)}) & \dots & \pi(\mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{r}^{(n)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi(\mathbf{r}^{(n)}, \mathbf{r}^{(1)}) & \pi(\mathbf{r}^{(n)}, \mathbf{r}^{(2)}) & \dots & \pi(\mathbf{r}^{(n)}, \mathbf{r}^{(n)}) \end{bmatrix}$$

où :

$$\pi(\mathbf{r}^{(i)}, \mathbf{r}^{(j)}) = \pi_{i,j} = \frac{f(\mathbf{r}^{(j)} | \mathbf{r}^{(i)})}{\sum_{k=1}^n f(\mathbf{r}^{(k)} | \mathbf{r}^{(i)})}. \quad (5.13)$$

5.3 Couverture et répliation

5.3.1 Rappels sur le modèle de répliation

Au chapitre 3, nous avons présenté l'outil nécessaire à la répliation : la fonction g_T .

$$g_T(x, y) = F_{3|1}^{-1}(F_{2|1}(y|x)|x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5.14)$$

Rappelons également que la fonction g a été définie de sorte que :

$$P\{r_{1T} \leq x, g_T(r_{1T}, r_{2T}) \leq y\} = P(r_{1T} \leq x, r_{3T} \leq y) = F_{1,3}(x, y), \quad \forall x, y. \quad (5.15)$$

La distribution jointe des rendements mensuels du portefeuille initial et de la fonction g est égale à la distribution jointe des rendements mensuels du portefeuille initial et du fonds de couverture. Puisque cette fonction exotique ne peut être obtenue sur les marchés, nous déterminons le portefeuille de répliation de cette option. Ce portefeuille de répliation exige des transactions quotidiennes. Détenir le portefeuille de répliation est équivalent à détenir l'option.

Les équations suivantes, présentées en détails au théorème (3.2), nous permettent de déterminer ce portefeuille de répliation de façon récursive :

$$\Delta_t = S_t - E(S_t | \mathcal{F}_{t-1}), \quad t = 1, \dots, T, \quad (5.16)$$

$$\Sigma_t = E\{\Delta_t \Delta_t^\top | \mathcal{F}_{t-1}\}, \quad 1 \leq t \leq T, \quad (5.17)$$

$$\phi_t = (\Sigma_t)^{-1} E\{(S_t - E(S_t | \mathcal{F}_{t-1})) C_t | \mathcal{F}_{t-1}\}, \quad t = T, \dots, 1, \quad (5.18)$$

où C_T, \dots, C_0 sont définis de façon récursive en initialisant $C_T = 100 e^{g(r_T)}$,

$$\beta_{t-1}C_{t-1} = \beta_t E(C_t | \mathcal{F}_{t-1}) - \phi_t^\top E(\beta_t S_t - \beta_{t-1} S_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}), t = T, \dots, 1. \quad (5.19)$$

5.3.2 Approche par chaînes de Markov

La matrice de transition définie à la section précédente nous permet d'évaluer les espérances. En effet, nous utilisons ces probabilités et les états possibles pour déterminer le portefeuille de réplication. Afin de donner l'intuition au lecteur, nous présentons un exemple d'évaluation d'espérance par chaînes de Markov pour le premier pas de l'algorithme récursif, soit en partant de T .

Transformons d'abord les rendements cumulatifs déterminés à la section précédente en terme de prix. Les vecteurs colonnes $S_1(t)$ et $S_2(t)$ correspondent respectivement aux prix possibles au temps t pour le portefeuille initial et la réserve. Initialisant le portefeuille initial et la réserve à 100, nous pouvons représenter $S_1(t)$ et $S_2(t)$ de la façon suivante :

$$S_1^{(i)}(t) = 100 e^{r_1^{(i)} t}, \quad (5.20)$$

$$S_2^{(i)}(t) = 100 e^{r_2^{(i)} t}. \quad (5.21)$$

Détaillons le calcul de la première itération en partant de l'échéance T . Notons que la stratégie de couverture à adopter de $T - 1$ à T ainsi que la valeur de l'option au temps $T - 1$ dépendent de l'état actuel de prix (portefeuille initial et réserve). Ainsi, les matrices Δ_{iT} et Σ_{iT} doivent être calculées pour chaque état de prix possible à $T - 1$, soit les n couples $(S_1^{(i)}(T - 1), S_2^{(i)}(T - 1))$. Définissons les matrices impliquées dans l'algorithme.

- Δ_{iT} , de dimensions $n \times 2$, conditionnelle à l'état de prix à $(S_1^{(i)}(T - 1), S_2^{(i)}(T - 1))$.

- 1)),
- Σ_{iT} , de dimensions 2×2 , matrice de covariance conditionnelle à l'état de prix à $(S_1^{(i)}(T-1), S_2^{(i)}(T-1))$,
 - ϕ_T , de dimensions $n \times 2$, matrice contenant les positions à détenir dans le portefeuille initial et la réserve pour chacun des états possibles à $T-1$ (n états possibles donc n lignes),
 - C_{T-1} , de dimensions $n \times 1$, matrice contenant le prix de l'option pour chacun des états possibles à $T-1$ (n états possibles donc n lignes).

Précisons également que la notation $(\bullet)_{ij}$ correspond à l'élément de la ligne i et de la colonne j de la matrice (\bullet) . Autrement dit, $(\Delta_{iT})_{s1}$ est l'élément de la ligne s et de la colonne 1 de Δ_{iT} et $(\Delta_{iT})_{s2}$ est l'élément de la ligne s et de la colonne 2 de Δ_{iT} . Débutons l'algorithme.

$$(\Delta_{iT})_{s1} = S_1^{(s)}(T) - E\left\{S_1(T) \mid S_1(T-1) = S_1^{(i)}(T-1)\right\} \quad (5.22)$$

$$= S_1^{(s)}(T) - \sum_{j=1}^n \pi_{i,j} S_1^{(j)}(T) \quad (5.23)$$

$$(\Delta_{iT})_{s2} = S_2^{(s)}(T) - E\left\{S_2(T) \mid S_2(T-1) = S_2^{(i)}(T-1)\right\} \quad (5.24)$$

$$= S_2^{(s)}(T) - \sum_{j=1}^n \pi_{i,j} S_2^{(j)}(T) \quad (5.25)$$

Nous procédons de façon similaire pour définir Σ_{iT} , la matrice de covariance conditionnelle. Cette matrice est de dimensions 2×2 .

$$(\Sigma_{iT})_{11} = \sum_{s=1}^n (\Delta_{iT})_{s1} (\Delta_{iT})_{s1} \pi_{i,s} \quad (5.26)$$

$$(\Sigma_{iT})_{12} = \sum_{s=1}^n (\Delta_{iT})_{s1} (\Delta_{iT})_{s2} \pi_{i,s} \quad (5.27)$$

$$(\Sigma_{iT})_{21} = \sum_{s=1}^n (\Delta_{iT})_{s2} (\Delta_{iT})_{s1} \pi_{i,s} \quad (5.28)$$

$$(\Sigma_{iT})_{22} = \sum_{s=1}^n (\Delta_{iT})_{s2} (\Delta_{iT})_{s2} \pi_{i,s} \quad (5.29)$$

Définissons maintenant les éléments de Σ_{iT}^{-1} , cette matrice 2×2 . Calculons d'abord le déterminant :

$$D_i = (\Sigma_{iT})_{11}(\Sigma_{iT})_{22} - (\Sigma_{iT})_{12}(\Sigma_{iT})_{21} \quad (5.30)$$

$$(\Sigma_{iT}^{-1})_{11} = (\Sigma_{iT})_{22} \times D_i^{-1} \quad (5.31)$$

$$(\Sigma_{iT}^{-1})_{12} = -(\Sigma_{iT})_{21} \times D_i^{-1} \quad (5.32)$$

$$(\Sigma_{iT}^{-1})_{21} = -(\Sigma_{iT})_{12} \times D_i^{-1} \quad (5.33)$$

$$(\Sigma_{iT}^{-1})_{22} = (\Sigma_{iT})_{11} \times D_i^{-1} \quad (5.34)$$

Rappelons que la définition de Δ_{iT} et celle de Σ_{iT}^{-1} doivent être effectuées pour les n états possibles à $T - 1$.

À ce moment, nous sommes en mesure de construire le vecteur où figurent les positions à détenir dans chacun des actifs. Soit $(\phi_T)_{i1}$, la position à détenir dans S_1 (portefeuille initial) de $T-1$ à T et $(\phi_T)_{i2}$, la position à détenir dans S_2 (réserve) de $T-1$ à T , sachant qu'à $T-1$, les prix sont $(S_1^{(i)}(T-1), S_2^{(i)}(T-1))$.

Nous déterminons $(\phi_T)_{i1}$ et $(\phi_{iT})_{12}$ comme suit :

$$(\phi_T)_{i1} = \sum_{q=1}^2 \left\{ (\Sigma_{iT}^{-1})_{1q} \times \left(\sum_{s=1}^n (\Delta_{iT})_{sq} \times 100e^{g(r_T^{(s)})} \times \pi_{i,s} \right) \right\} \quad (5.35)$$

$$(\phi_T)_{i2} = \sum_{q=1}^2 \left\{ (\Sigma_{iT}^{-1})_{2q} \times \left(\sum_{s=1}^n (\Delta_{iT})_{sq} \times 100e^{g(r_T^{(s)})} \times \pi_{i,s} \right) \right\} \quad (5.36)$$

Finalement, nous sommes en mesure de déterminer la valeur de l'option pour les n états possibles à $T - 1$. $(\beta_{T-1}C_{T-1})_i$ correspond à la valeur au temps $T - 1$ de l'option ou fonction g sachant que nous sommes dans l'état de prix i à $T - 1$, le tout actualisé au temps 0 avec le taux sans risque.

$$\begin{aligned} (\beta_{T-1}C_{T-1})_i &= \beta_T \sum_{s=1}^n 100e^{g(r_T^{(s)})} \pi_{i,s} \\ &\quad - \sum_{q=1}^2 \left\{ (\phi_T)_{iq} \left(\sum_{s=1}^n \{ \beta_T S_q^{(s)}(T) - \beta_{T-1} S_q^{(s)}(T-1) \} \pi_{i,s} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Bref, il s'agit de poursuivre cet algorithme récursif jusqu'au temps 0 pour obtenir la valeur de la fonction g (l'option) ainsi que les positions à détenir à chaque pas de temps dépendamment des prix observés à chacune de ces périodes.

Somme toute, dans ce chapitre, nous avons détaillé l'implémentation de la méthode de tarification par chaînes de Markov dans un contexte de réplication. Au chapitre suivant, nous présenterons les résultats obtenus à l'aide de cette technique.

Chapitre 6

Résultats numériques et analyses

Dans ce chapitre, nous présenterons différents résultats numériques. Dans un premier temps, nous validerons l'algorithme de tarification et de couverture présenté au théorème 3.2. Nous appliquerons la technique pour la couverture d'une option d'échange et la comparerons au traditionnel « Delta Hedging » (Black et Scholes 1972,[6]). Dans un second temps, nous présenterons les résultats dans un contexte de réplique de distribution : erreurs de couverture de la fonction g_T et propriétés statistiques de la distribution répliquée. Finalement, nous discuterons de l'effet du nombre d'états choisis sur le temps de calcul, sur les erreurs de couverture et sur les propriétés statistiques de la distribution répliquée.

6.1 Validation de l'algorithme de tarification et de couverture

Cette première section du chapitre ne fait pas référence à la réplication de distributions. Toutefois, il s'agit de la première étape que nous avons entamée pour ce mémoire : valider l'algorithme de tarification et de couverture présenté au théorème 3.2. Ainsi, nous avons décidé de tarifer et de couvrir une option d'échange européenne par cet algorithme. Nous avons choisi cette option, puisque nous sommes en mesure d'obtenir analytiquement le prix de cette option lorsque les sous-jacents sont modélisés par une loi gaussienne bivariée (voir le livre de Hull 1999, [22]). Ainsi, nous avons une valeur étalon pour le prix de l'option d'échange. De plus, nous sommes en mesure de déterminer les positions à détenir dans chacun des sous-jacents dans le cas d'une approche « Delta Hedging » traditionnelle pour couvrir cette option. Comparons les deux méthodes.

Paramètre	Valeur
$S_A(0)$	100
$S_B(0)$	100
μ_A	0.07
μ_B	0.06
σ_A	0.20
σ_B	0.10
ρ_{AB}	0.5
Taux sans risque	0.05

TAB. 6.1 – Paramètres annuels des sous-jacents impliqués dans l'option d'échange.

Les paramètres de l'option sont les suivants :

- Échéance : 1 an.
- Fréquence de couverture : mensuelle.

- Fonction de paiement : $\max\{S_A(1) - S_B(1); 0\}$
- Prix de cette option : 1.9945 (Hull 1999, [22]).

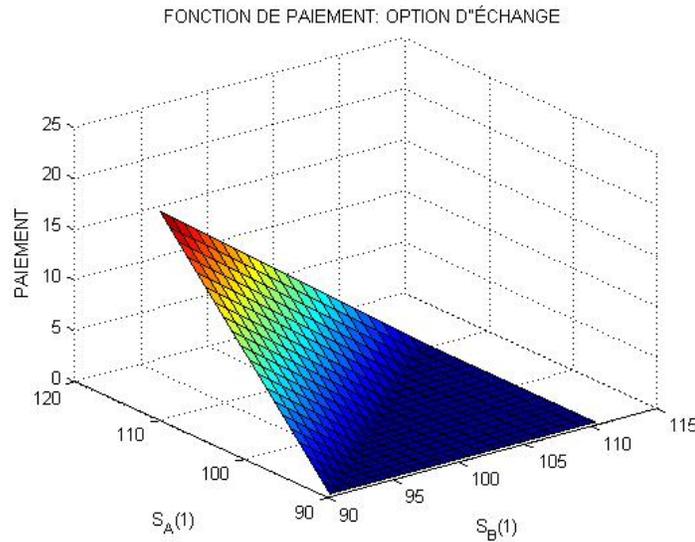


FIG. 6.1 – Fonction de paiement pour l'option d'échange.

Voici donc les résultats de tarification par couverture historique ainsi que la distribution des erreurs de couverture pour la méthode « Optimal Hedging » (OH) présentée au théorème 3.2 et pour la méthode « Delta Hedging » traditionnelle (DH).

Paramètres	Optimal Hedging	Delta Hedging	DH/OH
Erreur moyenne	-0.0056	-0.0170	3.0357
RMSE	0.9347	1.5184	1.6245
Prix par couverture historique	1.9952	2.0066	
Valeur étalon	1.9945	1.9945	

TAB. 6.2 – Résultats des erreurs de couverture pour l'option d'échange.

Précisons que les résultats obtenus par la méthode « Optimal Hedging » résultent de la combinaison de l'algorithme du théorème 3.2 et de la technique

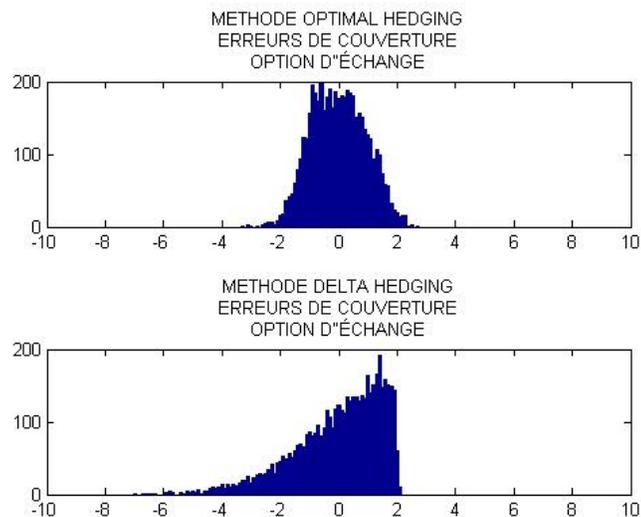


FIG. 6.2 – Distribution des erreurs de couverture pour 5000 simulations.

de tarification par chaînes de Markov présentée au chapitre 4. Notons également que la discrétisation s'est effectuée sur 10 000 couples d'états possibles de valeurs de sous-jacents. Ces états ont été définis par la technique présentée au chapitre 4 dans le cas d'une loi gaussienne bivariée.

L'objectif principal de cette section était de présenter des résultats simples de tarification et de couverture en utilisant l'algorithme « Optimal Hedging » et de l'implémenter à l'aide des chaînes de Markov. Analysons les résultats obtenus.

Tout d'abord, nous sommes en mesure de constater que l'algorithme « Optimal Hedging » par chaînes de Markov nous permet de tarifier cette option d'échange par couverture historique. En effet, le prix obtenu par couverture historique est relativement près de la valeur analytique attendue. Notons que cette différence relève principalement du fait que nous couvrons cette option mensuellement

et non de façon continue. Cette remarque est aussi valide pour la méthode « Delta Hedging ». Toutefois, pour une même fréquence de couverture, la méthode « Optimal Hedging » indique un prix plus près de la valeur attendue que la méthode « Delta Hedging ». Cette comparaison est valable, puisque les mêmes simulations ont été utilisées pour les deux méthodes. Seule la détermination des positions à détenir dans les deux sous-jacents diffère. Ainsi, dans une optique de tarification par couverture historique, la méthode « Optimal Hedging » présente des résultats plus précis.

Maintenant, plaçons-nous dans un contexte de couverture. En effet, supposons que nous vendons cette option d'échange et que nous voulons couvrir notre position à découvert. Ainsi, nous devons prendre des positions dans le sous-jacent A, dans le sous-jacent B et dans un compte dans lequel nous pouvons accumuler et emprunter au taux sans risque. Comparons les deux méthodes de détermination de positions dans ce contexte. La figure (6.2) indique la distribution de la richesse terminale actualisée au temps 0 lorsque la couverture de l'option est effectuée par « Optimal Hedging » et par « Delta Hedging ». Une erreur de couverture négative indique que la prime initiale n'a pas été suffisante pour nous couvrir et que nous devons sortir de l'argent supplémentaire de notre poche pour honorer notre contrat. Une erreur positive indique qu'il nous reste de l'argent suite au règlement de l'option.

Nous pouvons constater que les erreurs négatives de couverture sont beaucoup plus prononcées avec la méthode « Delta Hedging » qu'avec la méthode « Optimal Hedging ». Dans notre position de vendeur d'option, la méthode « Delta Hedging » s'avère donc beaucoup moins intéressante, puisque nous nous exposons à des pertes beaucoup plus lourdes que par la méthode « Optimal

Hedging ». Nous pouvons également constater cette réalité par les statistiques descriptives des erreurs de couverture. En effet, la racine de la moyenne des erreurs au carré, qui nous indique en quelque sorte l'étendue de la distribution des erreurs de couverture, est plus importante pour la méthode « Delta Hedging ». Ainsi, cette méthode est plus risquée, puisque la variabilité est plus importante. De plus, nous pouvons constater que l'erreur moyenne de couverture est inférieure avec la méthode « Optimal Hedging ». Ainsi, en moyenne, nous devons sortir moins d'argent supplémentaire si nous nous couvrons par la technique « Optimal Hedging » que si nous nous couvrons par la traditionnelle méthode « Delta Hedging ».

6.2 Tarification et couverture de la fonction g_T

À la section précédente, nous avons montré que la combinaison de l'algorithme de tarification et de couverture proposé par Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]) et de la modélisation par chaînes de Markov nous permet de tarifier une option et de déterminer la stratégie dynamique de couverture. Nous pouvons ainsi utiliser la méthode présentée au chapitre précédent pour tarifier et couvrir l'option g_T . Rappelons que l'objectif est de créer synthétiquement cette option en reproduisant la stratégie dynamique de couverture. En effet, nous avons spécifié au chapitre 3 que détenir notre portefeuille initial et cette option (ayant comme fonction de paiement g_T) est statistiquement équivalent à détenir notre portefeuille initial et allouer une certaine portion d'actif à un fonds de couverture.

Présentons d'abord les paramètres des distributions qui seront impliquées dans le processus de réplication. Ces paramètres sont ceux utilisés dans l'article de Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]).

- Portefeuille initial : $S_1(0) = 100$.
- Actif de réserve : $S_2(0) = 100$.

π_k	μ_{1k}	μ_{2k}	σ_{1k}	σ_{2k}	ρ_k
0.0956	0.0016	0.0008	0.0039	0.0016	0.9754
0.4673	0.0000	0.0002	0.0069	0.0032	0.7981
0.0763	-0.0003	-0.005	0.0115	0.0054	0.6964
0.3607	0.0006	0.0005	0.0037	0.0027	0.4613

TAB. 6.3 – Paramètres de la mixture gaussienne bivariée modélisant les rendements quotidiens du portefeuille initial et de la réserve.

Le tableau (6.4) indique les paramètres de la distribution modélisant les ren-

μ_1	μ_2	σ_1	σ_2	ρ
0.007892797	0.0068086	0.029334999	0.014646356	0.700295314

TAB. 6.4 – Estimation des paramètres de la gaussienne bivariée modélisant les rendements mensuels du portefeuille initial et de la réserve cohérente avec la distribution quotidienne.

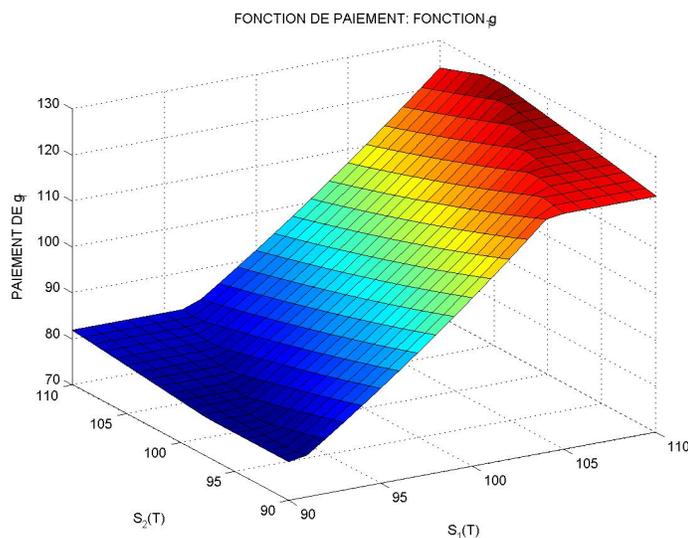
dements mensuels du portefeuille initial et de la réserve. La distribution du fonds de couverture à répliquer dans ce mémoire est la gaussienne univariée. Les paramètres sont présentés à la table (6.5).

μ_3	σ_3	$Copule_{1,3}$	$\rho_{1,3}$
0	0.034641016	Gaussienne	0.3

TAB. 6.5 – Paramètres de la distribution mensuelle des rendements du fonds de couverture à répliquer.

Notons que nous conservons ces paramètres pour le reste du chapitre. En effet, nous n'avons pas tenté de répliquer plusieurs distributions, puisque l'objectif de ce mémoire est plutôt de tester l'approche par chaînes de Markov pour l'algorithme de tarification et de couverture.

La figure (6.3) représente les paiements engendrés par la fonction g_T pour différentes valeurs terminales de portefeuille initial et de réserve. Cette fonction dépend de la distribution mensuelle des rendements du portefeuille initial et de la réserve (table 6.4) ainsi que de la distribution que nous voulons répliquer (table 6.5). En comparant avec le graphique de la fonction de paiement l'option d'échange, nous pouvons remarquer que la fonction g_T ne présente aucun point de discontinuité, alors qu'il y a discontinuité pour l'option d'échange aux points où les deux titres ont la même valeur. Cette linéarité de la fonction g_T la rend plus facile à répliquer que l'option d'échange. Les résultats suivants témoignent de cette réalité.

FIG. 6.3 – Fonction g_T .

Paramètres et statistiques	g_T	$\max\{S_1(T) - S_2(T); 0\}$
Nombre d'états	10 000	10 000
Échéance de l'option	1 mois	1 mois
Couverture	quotidienne	quotidienne
Valeur de l'option	99.1221	0.8468
Erreur moyenne	-0.0016	-0.0124
Erreur moyenne / Valeur	0.0016%	14.6434%
Racine moyenne carré des erreurs	0.0183	0.2124
Racine moyenne carré des erreurs / Valeur	0.0185%	25.0827%

TAB. 6.6 – Comparaison des erreurs de couverture pour option d'échange et fonction g_T pour 10 000 simulations.

Ainsi, nous pouvons constater que les faibles erreurs de couverture de la fonction g_T sont également dues à la nature même de la fonction g_T . Certes, l'algorithme de tarification et de couverture est précis, mais il faut garder à l'esprit que la linéarité de la fonction g_T dans le cas gaussien nous facilite la tâche. Les figures (6.4) et (6.5) présentent la distribution des erreurs de couverture pour les deux types d'options. Comme à la section précédente, nous pouvons

constater que les erreurs de couverture sont centrées à zéro. L'algorithme de tarification et de couverture à été construit ainsi.

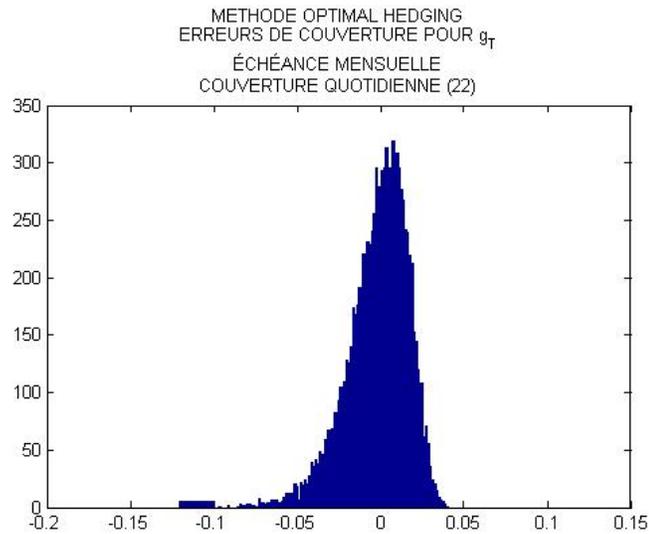


FIG. 6.4 – Erreurs de couverture sur la fonction g_T pour 10 000 simulations.

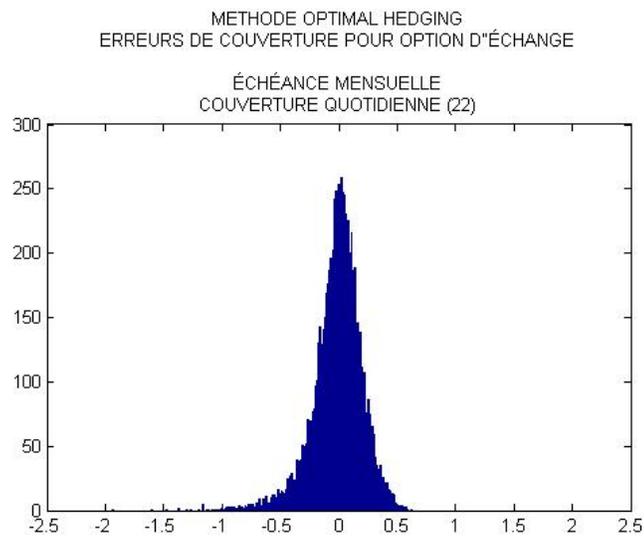


FIG. 6.5 – Erreurs de couverture sur l'option d'échange pour 10 000 simulations.

6.3 Réplication de propriétés statistiques

À la section précédente, nous avons tarifé et couvert la fonction g_T . Utilisons maintenant cette option dans le contexte pour lequel elle a été créée : la répliation de distribution. Voici donc quelques résultats concernant la distribution gaussienne que nous voulons répliquer et dont les paramètres ont été introduits à la table (6.5).

Statistiques	Cible	g_T	Optimal Hedging
Moyenne	0	0.00051622	0.00050116
Écart type	0.03464102	0.03496639	0.03494654
Coefficient d'asymétrie	0	-0.02818649	-0.03350716
Coefficient d'aplatissement	0	0.10482980	0.10631105
ρ	0.3	0.31783758	0.31813582

TAB. 6.7 – Résultats de réplication pour 10 000 simulations en considérant 10 000 états de discrétisation.

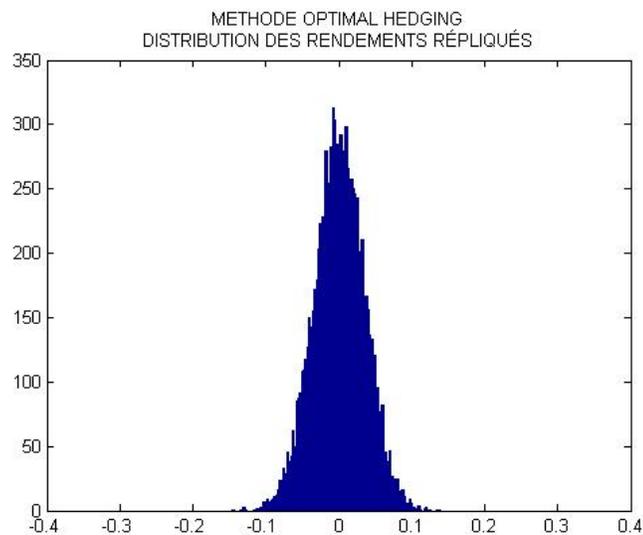


FIG. 6.6 – Distribution des rendements obtenus par la couverture de g_T .

Apportons quelques précisions concernant l'évaluation de la qualité de la ré-

Statistiques	Valeurs
Erreur moyenne	-0.00157422
Racine moyenne erreurs au carré	0.01832634

TAB. 6.8 – Erreurs de couverture pour 10 000 simulations en considérant 10 000 états de discrétisation.

plication. D’abord, l’évaluation doit s’effectuer par rapport à la propriété statistique que nous aurions obtenue si nous avions pu acheter l’option g_T . En fait, l’idée est d’évaluer dans quelle mesure nous sommes capable de répliquer g_T , puisque cette option, qui nous conduit à la réplication des propriétés statistiques voulues, n’est pas offerte sur les marchés. Mentionnons également que l’écart des statistiques recherchées aux statistiques obtenues par g_T est le résultat de la simulation. Asymptotiquement, ces propriétés sont identiques. Bref, nous devons évaluer les propriétés statistiques obtenues par « Optimal Hedging » par rapport à celles de g_T .

Avec 10 000 états de discrétisation, nous pouvons constater que les propriétés statistiques obtenues par « Optimal Hedging » sont pratiquement identiques à celles obtenues par la fonction g_T . Ainsi, nous pouvons investir dans la stratégie de couverture de la fonction g_T plutôt que le fonds de couverture S_3 en conservant des propriétés statistiques similaires à celles que nous aurions procuré S_3 . De plus, dans cet exemple précis de réplication de S_3 , le prix de cette stratégie de couverture de g_T est de 99.12\$ pour chaque 100\$ que nous aurions investi dans S_3 . Par conséquent, un fonds de couverture S_3 offrant les propriétés statistiques établies à la table (6.5) ne vaut pas la peine d’être considéré. En effet, nous pouvons obtenir ces propriétés statistiques synthétiquement à moindre coût.

À ce moment, nous pouvons nous questionner sur le choix du nombre d’états

de discrétisation. En effet, dans la présente section, nous avons considéré 10 000 états. Il s'agit d'un bon compromis entre temps de calcul et précision des propriétés statistiques. À la section suivante, nous considérerons différents nombres d'états et analyserons l'impact sur les propriétés statistiques, les erreurs de couverture et le temps de calcul.

6.4 Analyse computationnelle

Dans cette section, nous considérons les mêmes distributions qu'à la section précédente. La seule variable qui change est le nombre d'états de discrétisation. Ainsi, nous voulons tenter de dégager l'importance relative de ce nombre d'états sur la précision des propriétés statistiques répliquées, sur l'erreur de couverture et sur le temps de calcul. Voici les résultats de couverture et de réplication pour 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 10 000, 15 000, 20 000 états.

6.4.1 Analyse de la précision

Les tables suivantes présentent les résultats de réplication pour différents nombres d'états de discrétisation.

Statistiques	Cible	g_T
Moyenne	0	0.00051622
Écart type	0.03464102	0.03496639
Asymétrie	0	-0.02818649
Aplatissement	0	0.10482980
ρ	0.3	0.31783758

TAB. 6.9 – Distribution cible et celle obtenue par la fonction g_T pour 10 000 simulations.

Statistiques	1000	2000	3000	4000
Moyenne	0.00043114	0.00046624	0.00047908	0.00048646
Écart type	0.03494853	0.03494559	0.03494597	0.03494834
Asymétrie	-0.03388294	-0.03384318	-0.03374453	-0.03356900
Aplatissement	0.10677711	0.10684673	0.10619951	0.10617843
ρ	0.31812595	0.31816951	0.31816250	0.31811537

TAB. 6.10 – Statistiques concernant la distribution des rendements répliqués pour 10 000 simulations en considérant différents nombres d'états de discrétisation.

Statistiques	5000	10 000	15 000	20 000
Moyenne	0.00049480	0.00050116	0.00050532	0.00050624
Écart type	0.3494733	0.03494654	0.03494693	0.03494683
Asymétrie	-0.03355334	-0.03350716	-0.03347796	-0.03340979
Aplatissement	0.10626231	0.10631105	0.10623929	0.10610363
ρ	0.31814589	0.31813582	0.31813056	0.31811906

TAB. 6.11 – Statistiques concernant la distribution des rendements répliqués pour 10 000 simulations en considérant différents nombres d'états de discrétisation.

Statistiques	1000	2000	3000	4000
Erreur moyenne	-0.00854651	-0.00505806	-0.00377726	-0.00303274
RMSE	0.02169761	0.01986870	0.01929357	0.01877813

TAB. 6.12 – Erreurs de réplcation de la fonction g_T pour 10 000 simulations en considérant différents nombres d'états de discrétisation.

Statistiques	5000	10 000	15 000	20 000
Erreur moyenne	-0.00220588	-0.00157422	-0.00115813	-0.00106628
RMSE	0.01855003	0.01832634	0.01819914	0.01805516

TAB. 6.13 – Erreurs de réplcation de la fonction g_T pour 10 000 simulations en considérant différents nombres d'états de discrétisation.

Nous pouvons constater qu'en augmentant le nombre d'états, la précision sur la réplcation des différents moments et de la corrélation n'est pas significative. En effet, déjà avec 1000 états de discrétisation, la convergence des moments est établie. Le fait d'augmenter le nombre d'états n'entraîne pas une amélioration évidente de la réplcation des moments. Néanmoins, nous pouvons constater que les erreurs de couverture (appréciées avec le RMSE qui correspond à la racine de la moyenne du carré des erreurs de couverture) de la fonction g_T diminuent lorsque nous augmentons le nombre d'états. Ainsi, dans une optique de simple tarification d'option, il serait peut-être préférable de considérer le plus grand nombre d'états possibles. Toutefois, nous devons bien comprendre le coût de l'augmentation du nombre d'états. Ce coût peut s'évaluer en terme de temps de calcul.

6.4.2 Analyse du temps de calcul

Analysons maintenant l'impact de l'augmentation du nombre d'états sur le temps de calcul. Pour cette analyse, nous considérons principalement trois éléments : le nombre d'états, le temps de calcul et le RMSE. Le tableau suivant résume ces informations.

Nombre d'états	RMSE	Temps de calcul (secondes)
1000	0.02169761	1.07
2000	0.01986870	4.44
3000	0.01929357	9.56
4000	0.01877813	17.02
5000	0.01855003	26.34
10 000	0.01832634	111.43
15 000	0.01819914	324.90
20 000	0.01805516	1703.24

TAB. 6.14 – Analyse de la précision et du temps de calcul pour différents nombres d'états de discrétisation.

Analysons visuellement ces résultats à l'aide de la figure (6.7). Jusqu'à 5000 états, l'apport de précision (diminution du RMSE) n'est pas du tout coûteux en temps de calcul. Il est donc préférable d'augmenter le nombre d'états. Toutefois, à partir de 10 000 états, il semble que le gain marginal de précision s'avère de moins en moins important à mesure que nous augmentons le nombre d'états. La pente reliant le point 15 000 états à 20 000 états fait état de cette réalité. Ainsi, il s'agit de bien définir l'objectif. Par exemple, dans le cas de réplification de propriétés statistiques, nous avons montré que l'augmentation importante du nombre d'états n'est pas significatif sur la qualité de la réplification.

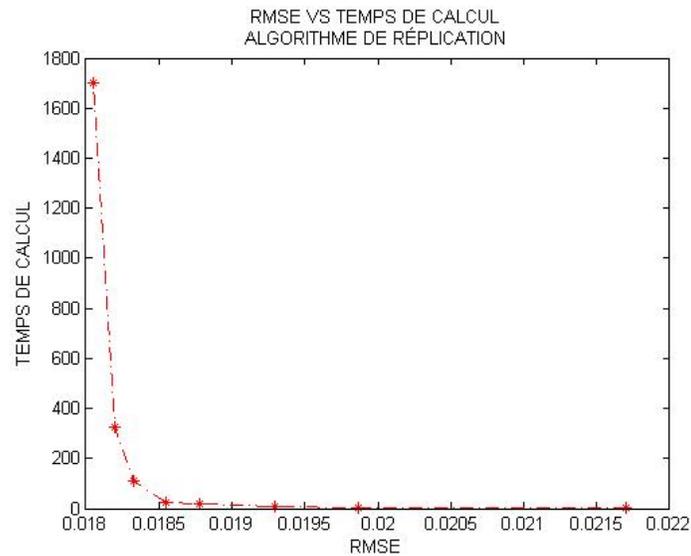


FIG. 6.7 – Représentation du temps du RMSE contre le temps de calcul pour la couverture de g_T .

Également, à titre informatif, les figures (6.8) et (6.9) présentent la répartition du temps de calcul pour la création de la matrice de transition et la détermination du prix et de la stratégie de couverture. Nous pouvons constater que la définition de la matrice de transition est responsable d'une partie plus importante du temps de calcul lorsque nous avons 5000 états que lorsque nous avons 20 000 états. Ainsi, il semble que le coût en temps de calcul de l'augmentation du nombre d'états progresse moins rapidement pour la matrice de transition que pour le reste de l'algorithme.

RÉPARTITION DU TEMPS DE CALCUL DE L'ALGORITHME
NOMBRE D'ÉTATS = 5000 TEMPS DE CALCUL TOTAL = 26.34

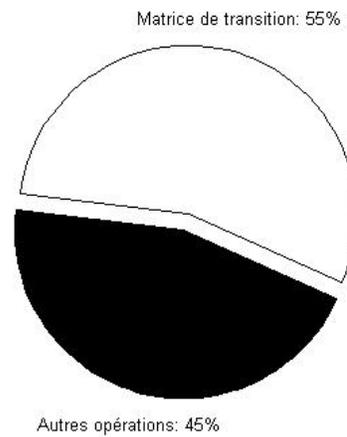


FIG. 6.8 – Répartition du temps de calcul pour 5000 états.

RÉPARTITION DU TEMPS DE CALCUL DE L'ALGORITHME
NOMBRE D'ÉTATS = 20 000 TEMPS DE CALCUL TOTAL = 1703.24

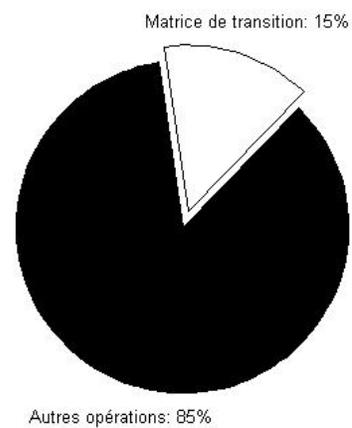


FIG. 6.9 – Répartition du temps de calcul pour 20 000 états.

6.5 Analyse de sensibilité

Terminons ce chapitre de résultats par une analyse de sensibilité. Plus précisément, déterminons l'impact sur le prix de la stratégie de couverture de l'option g_T lorsque nous varions certains paramètres de la distribution cible.

Pour cette analyse, nous tentons de répliquer la distribution Johnson-SU. Nous choisissons cette distribution puisque, contrairement à la distribution gaussienne, nous pouvons varier les paramètres qui la définissent pour obtenir différents niveaux d'asymétrie et d'aplatissement.

6.5.1 Coefficient d'asymétrie

Analysons l'impact sur le prix de l'option g_T pour différents niveaux d'asymétrie. Le tableau suivant ainsi que la figure (6.10) résument les résultats obtenus.

Asymétrie	-0.3022	-0.2181	-0.1288	-0.0338	0.0612	0.1504
Prix g_T	99.0527	99.0626	99.0702	99.0726	99.0733	99.0787
Moyenne	0.0003	0.0004	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
Écart type	0.0352	0.0351	0.0350	0.0350	0.0350	0.0351
Aplatissement	0.2716	0.1927	0.1390	0.1090	0.1190	0.1546
ρ	0.3178	0.3180	0.3181	0.3180	0.3177	0.3173

TAB. 6.15 – Sensibilité du prix de l'option en fonction du coefficient d'asymétrie exigé.

Nous pouvons constater que le prix de l'option augmente en fonction du degré d'asymétrie souhaité. Ce résultat n'est pas particulièrement surprenant. En effet, toutes choses étant égales par ailleurs, une asymétrie positive implique une plus forte importance des rendements positifs que pour une asymétrie négative (dans le cas d'une moyenne nulle). Ainsi, la relation monotone croissante entre

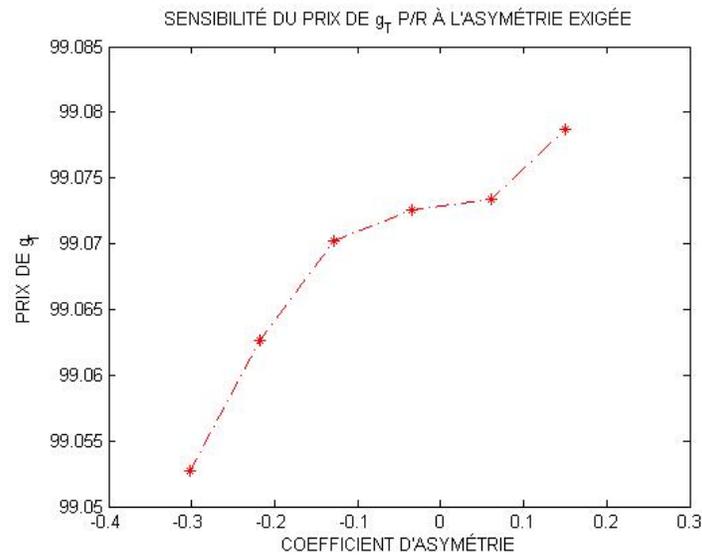


FIG. 6.10 – Prix de l’option g_T en fonction du coefficient d’asymétrie.

le coefficient d’asymétrie et le coût de la stratégie de réplcation s’explique par la définition même du coefficient d’asymétrie. Vous aurez noté que les autres paramètres sont similaires, mais pas identiques. Cette différence est causée par le fait qu’il est impossible de déterminer de façon analytique les paramètres de la distribution Johnson-SU pour un coefficient d’asymétrie fixé, un coefficient d’aplatissement fixé, un écart-type fixé et une moyenne fixée. Nous devons utiliser une procédure d’optimisation.

6.5.2 Coefficient d’aplatissement

Analysons maintenant l’impact sur le prix de l’option g_T pour différents niveaux d’aplatissement. Le tableau suivant ainsi que la figure (6.11) résument les résultats obtenus.

Mentionnons d’abord que nous avons tenté de garder les autres paramètres

Aplatissement	0.1090	1.1341	2.1012	3.0016	3.8409	4.6263
Prix g_T	99.0726	99.0722	99.0737	99.0756	99.0775	99.0793
Moyenne	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004
Écart type	0.0350	0.0350	0.0351	0.0351	0.0352	0.0352
Asymétrie	-0.0338	-0.0317	-0.0305	-0.0297	-0.0292	-0.0290
ρ	0.3180	0.3163	0.3143	0.3125	0.3108	0.3092

TAB. 6.16 – Sensibilité du prix de l’option en fonction du coefficient d’aplatissement exigé.

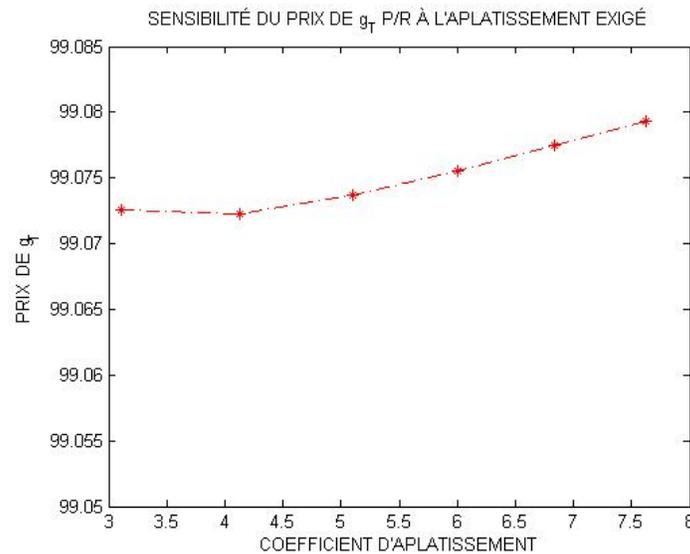


FIG. 6.11 – Prix de l’option g_T en fonction du coefficient d’aplatissement.

que le coefficient d’aplatissement fixes. La remarque concernant l’estimation des paramètres de la distribution Johnson-SU pour des moments fixés s’avère également pertinente. Cela explique les différences minimales entre les moments fixés. Contrairement à la sensibilité du prix par rapport au coefficient d’asymétrie, la sensibilité par rapport au coefficient d’aplatissement est beaucoup moins prononcée. Cela pourrait s’expliquer par le fait qu’en augmentant le coefficient d’aplatissement, nous ne rendons pas la distribution plus avantageuse (contrairement à l’augmentation du coefficient d’asymétrie). En effet, nous augmentons autant les probabilités d’occurrence des rendements extrêmes

négatifs et que des rendements extrêmes positifs (dans le cas d'une moyenne nulle et d'un coefficient d'asymétrie nul).

Considérons maintenant les erreurs de réplication de la distribution cible. Analysons la variation du RMSE en fonction du coefficient d'aplatissement ciblé.

Aplatissement	0.1090	1.1341	2.1012	3.0016	3.8409	4.6263
RMSE	0.0195	0.0992	0.1612	0.2067	0.2426	0.2722

TAB. 6.17 – Erreurs de réplication de la fonction g_T pour différents niveaux d'aplatissement ciblés.

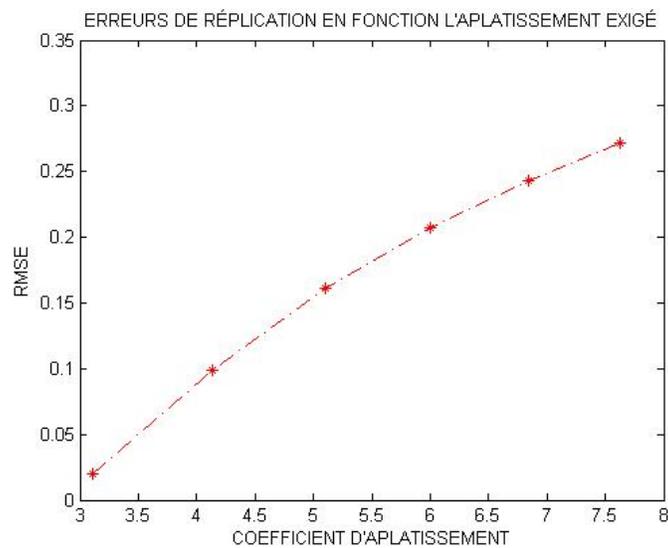


FIG. 6.12 – Erreurs de réplication en fonction du coefficient d'aplatissement.

La relation présentée à la figure (6.12) peut s'interpréter de façon intuitive. En effet, en augmentant le coefficient d'aplatissement (toutes choses étant égales par ailleurs), nous rendons les rendements extrêmes plus probables. Ainsi, tenter de couvrir l'option (g_T) qui génère ce type de distribution s'avère une tâche beaucoup plus ardue, puisque les positions à détenir pour couvrir cette op-

tion peuvent varier de façon extrême nous menant à des erreurs de réplication importantes. À la limite, une distribution composée presque uniquement d'événements extrêmes devient pratiquement impossible à répliquer.

Chapitre 7

Conclusion

En conclusion, l'objectif de ce mémoire était d'implémenter l'algorithme de tarification et de couverture « Optimal Hedging » à l'aide des chaînes de Markov et de l'employer dans un contexte de réplication de distribution. Rappelons donc les différentes étapes qui ont constitué ce mémoire. Nous avons d'abord effectué une revue de la littérature recensant les principaux articles des deux éléments constituant la problématique abordée : la réplication de distribution et l'utilisation des chaînes de Markov en finance. Par la suite, nous avons présenté le modèle de réplication de distribution développé par Hocquard, Papageorgiou et Rémillard (2007, [21]) et inspiré de celui de Kat et Palaro (2005, [24]). Dans le chapitre suivant, nous avons proposé une courte introduction aux chaînes de Markov, suivie de quelques précisions concernant leur implication dans un contexte de tarification. Par la suite, nous avons discuté de l'implémentation du modèle de réplication en mettant l'accent sur les considérations techniques lors de la construction de la matrice de transition de la chaîne de Markov et sur la définition des états. Finalement, nous avons exposé et analysé les résultats issus du modèle de réplication raisonné dans une optique de chaînes de Markov. Certaines extensions de la technique actuelle par chaînes de Markov pourraient être envisagées. À titre d'exemple, en supposant une modélisation du portefeuille initial et de la réserve avec changement de

régime, il serait possible de créer différentes matrices de transition pour tenir compte du régime courant et ainsi tenter d'incorporer la dépendance entre les rendements quotidiens.

Bibliographie

- [1] V. Agarwal and N. Y. Naik. Risks and Portfolio Decisions Involving Hedge Funds. *The Review of Financial Studies*, 17(1) :63–98, 2004.
- [2] G. Amin and H.M. Kat. Hedge Fund Performance 1990-2000 : Do the “Money Machines” Really Add Value. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 38(2) :251–275, 2003.
- [3] J. Barraquand and D. Martineau. Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30(3) :383–405, September 1995.
- [4] D. Beaudoin, C. Genest, and B. Rémillard. Omnibus goodness-of-fit tests for copulas : A review and a power study. *Insurance Math. Econom.*, 40 :in press, 2007.
- [5] L. Betancourt. Using Markov Chains to Estimate Losses from a Portfolio of Mortgages. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 12(3) :303–317, 1999.
- [6] F. Black and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 :637–654, 1973.
- [7] C.G. Deacon and A.J. Faseruk. Practical Solution Using Markov Chains to Describe Option States. *Journal of Financial Management and Analysis*, 16(1) :14–19, 2003.
- [8] A. Diez de los Rios and R. Garcia. Assessing and Valuing the Nonlinear Structure of Hedge Fund Returns. *Technical Report, CIRANO et CIREQ*, 2006.
- [9] J.-C. Duan, G. Gauthier, and J.-G. Simonato. Numerical Pricing of Contingent Claims on Multiple Assets and/or Factor - A Low-Discrepancy Markov Chain Approach. Technical Report 80, GERAD, 2004.

-
- [10] J.-C. Duan and J.-G. Simonato. American Option Pricing Under GARCH by a Markov Chain Approximation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25(11) :1689–1718, 2001.
- [11] J.C. Duan, E. Dudley, G. Gauthier, and J.-G Simonato. Pricing Discretely Monitored Barrier Options by a Markov Chain. *Working Paper*, March 1999.
- [12] P. Dybvig. Distributional Analysis of Portfolio Choice. *Journal of Business*, 61 :369–393, 1988a.
- [13] P. Dybvig. Inefficient Dynamic Portfolio Strategies or How to Throw Away a Million Dollars in the Stock Market. *Review of Financial Studies*, 1 :67–88, 1988b.
- [14] C. Engel and Hamilton J.D. Long Swings in the Dollar : Are They in the Data and Do the Market Know It? *The American Economic Review*, 80(4) :689–714, 1990.
- [15] W. Fung and D. Hsieh. Empirical Characteristics of Dynamic Trading Strategies : The Case of Hedge Funds. *Review of Financial Studies*, 10 :275–302, 1997.
- [16] W. Fung and D. A. Hsieh. The Risk in Hedge Fund Strategies : Theory and Evidence from Trend Followers. *The Review of Financial Studies*, 14(2) :313–341, 2001.
- [17] G. Gauthier. *Notes de cours 3-306-84 : Les modèles probabilistes et stochastiques de la gestion*. Département des méthodes quantitatives de gestion de HEC Montréal, Montréal, Automne 2007.
- [18] P. Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.
- [19] L. Glosten and R. Jagannathan. A Contingent Claim Approach to Performance Evaluation. *Journal of Empirical Finance*, 1 :133–160, 1994.
- [20] C. Guo. Option Pricing with Stochastic Volatility following a Finite Markov Chain. *International Review of Economics and Finance*, 7(4) :407–415, 1998.
- [21] A. Hocquard, N. Papageorgiou, and B. Rémillard. Optimal Hedging Strategies With an Application to Hedge Fund Replication. Technical Report 1, DGAM-HEC Alternative Investments Research, 2007.

- [22] John C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice-Hall, fourth edition, 1999.
- [23] R. Jarrow, D. Lando, and S. Turnbull. A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads. *Review of Financial Studies*, 10(2) :481–523, Summer 1997.
- [24] H. M. Kat and H. P. Palaro. Who Needs Hedge Funds ? A Copula-Based Approach to Hedge Fund Return Replication. *Technical Report, Cass Business School, City University*, 2005.
- [25] H.M. Kat and H. P. Palaro. Tell Me What You Want, What You Really, Really Want. Technical report, Cass Business School, City University, 2006.
- [26] M. Kijima and K. Komoribayashi. A Markov Chain Model for Valuing Credit Risk Derivatives. *Journal of Derivatives*, 6(1) :97–108, Fall 1998.
- [27] K.A.H. Kobbacy and S.D. Nicol. Security Analysis of Rent Replacement Models. *International Journal of Production Economics*, 36(3) :267–280, October 1994.
- [28] E. Kodera. A Markov Chain Model with Stochastic Default Rate for Valuation of Credit Spreads. *Journal of Derivatives*, 8(4), June 2001.
- [29] G. McQueen and Thorley S. Are Stock Returns Predictable? A Test Using Markov Chains. *The Journal of Finance*, 46(1) :239–263, March 1991.
- [30] M. Mitchell and T. Pulvino. Characteristics of Risk and Return in Risk Arbitrage. *The Journal of Finance*, 56(6) :2135–2175, 2001.
- [31] G. Pye. A Markov Model of the Term Structure. *Quarterly Journal of Economics*, 25 :60–72, February 1966.
- [32] B. Rémillard. *Notes de cours 6-610-01 : Méthodes numériques en ingénierie financière*. Département des méthodes quantitatives de gestion de HEC Montréal, Montréal, Hiver 2007.
- [33] M. Schweizer. Variance-optimal hedging in discrete time. *Math. Oper. Res.*, 20(1) :1–32, 1995.
- [34] W. Sharpe. Asset Allocation : Management Style and Performance Measurement. *Journal of Portfolio Management*, pages 7–19, 1992.
- [35] A. Sklar. Fonctions de Répartition à n Dimensions et leurs Marges. *Publ. Inst. Université de Paris*, 8 :229–231, 1959.

-
- [36] L.D. Smith, S.M. Sanchez, and E.C. Lawrence. A Comprehensive Model for Managing Credit Risk on Home Mortgage Portfolios. *Decision Sciences*, 27(2) :291–317, Spring 1996.
- [37] P. Zipkin. Mortgages and Markov Chains : A Simplified Evaluation Model. *Management Science*, 39 :683–691, 1993.