

HEC MONTRÉAL

**Méthodes Monte Carlo pour l'évaluation des paramètres de
sensibilité des valeurs d'options sur plusieurs actifs sous-jacents**

Mémoire présenté à HEC Montréal
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès Sciences de Gestion (M.Sc.) en Ingénierie Financière

©Kadiata Kane, 2006

Sommaire

Ce mémoire traite de l'estimation des paramètres de sensibilité des produits dérivés à m dimensions et ce à partir des résultats de Broadie et Glasserman 1996 "Estimating Security Price Derivatives Using Simulation".

Dans cet article, Broadie et Glasserman présentent deux méthodes d'estimation des paramètres de sensibilité à l'aide de la simulation Monte Carlo pour des options portant sur un actif sous-jacent.

Au travers de ce mémoire nous étendons ces 2 approches, la méthode des trajectoires et la méthode du ratio de vraisemblance à des produits dérivés portant sur plusieurs actifs sous-jacents en partant de la matrice de variance covariance. Pour la méthode des trajectoires, les paramètres de sensibilité sont dérivés par rapport à chacune des trajectoires possibles de la valeur de l'option tandis que pour la méthode du ratio de vraisemblance, les sensibilités sont dérivées par rapport à la fonction de densité du prix de l'option.

Nous illustrons ensuite nos résultats par des applications numériques sur le cas d'une option d'échange d'un actif risqué pour un autre, d'une option panier portant sur 2 actifs risqués et enfin sur une option panier portant sur 5 actifs risqués.

Remerciements

Mes remerciements vont à l'endroit de mon professeur et directeur de mémoire Bruno Remillard pour avoir encadré ce travail de ses précieux conseils. Merci d'avoir financé mon projet, d'avoir fait preuve d'une grande disponibilité et surtout d'avoir su prodiguer un encadrement de qualité.

Mes remerciements à Chantal Labbé et Frank Leclerc pour avoir accepté de lire ce travail; vos commentaires et suggestions ont permis d'en améliorer la qualité.

Mes sincères remerciements à ma famille. A mes chers parents, merci pour votre soutien moral et financier et surtout merci d'avoir poussé la paresseuse que je suis aux études. A mon frère Mamadou, tes efforts et ta persévérance m'ont permis de réaliser ce projet, merci. À Selly merci d'être le génie que tu es, Fadima et Alpha merci pour votre soutien sans faille.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Revue de la littérature	4
2.1	Calcul des greeks lorsque des formules fermées existent	5
2.2	Méthodes des différences finies	6
2.3	Méthodes du modèle binomial	8
2.4	Calcul de Malliavin	10
2.5	Méthodes Monte Carlo	11
2.6	Lien avec le mémoire	15
3	Méthodologie	16
3.1	Définition des greeks	16
3.1.1	Delta	17

3.1.2	Vega	18
3.1.3	Gamma	19
3.1.4	Rho	20
3.1.5	Theta	21
3.2	Utilité et application des greeks	22
3.2.1	Les valeurs de sensibilité d'options pour les stratégies de couverture	23
3.2.2	Les valeurs de sensibilité d'options pour le calcul des VaR	26
3.3	Évaluation des greeks par les méthodes de Broadie et Glasser- man (1996)	27
3.3.1	Cadre théorique	28
3.3.2	Méthode des trajectoires (pathwise method)	28
3.3.3	Méthode du rapport de vraisemblance	32
3.3.4	Résultats donnés par les deux méthodes	35
3.4	Extension des méthodes de Broadie et Glasserman (1996) au cas des options ayant plusieurs actifs sous-jacents	36
3.4.1	Particularités des options ayant plusieurs actifs sous-jacents	36
3.4.2	Cadre théorique	39

3.4.3	Méthode des trajectoires	41
3.4.4	Méthode du rapport de vraisemblance	43
4	Application numérique	46
4.1	L'option d'échange d'un actif risqué pour un autre	47
4.1.1	Méthodes Monte Carlo pour la valeur et les paramètres de sensibilité pour une option d'échange	48
4.1.2	Formules de Black-Scholes pour la valeur et les para- mètres de sensibilités pour une option d'échange	49
4.1.3	Description des données	51
4.2	L'option panier	55
4.2.1	L'option panier de dimension 2	56
4.2.2	L'option panier de dimension 5	58
5	Conclusion	64
A	Méthode des trajectoires	67
A.1	Forme générale	67
A.2	Delta	68

A.3	Vega	69
A.4	Theta	70
A.5	Rho	71
A.6	Gamma	72
B	Méthode du rapport de vraisemblance	73
B.1	Forme générale	73
B.2	Delta	76
B.3	Gamma	79
B.4	Vega	82
B.5	Theta	89
B.6	Rho	92
C	Modèle de Black-Scholes pour l'option d'échange	94
C.1	Delta	95
C.2	Vega	96
C.3	Gamma	98

C.4 Rho 99

C.5 Theta 99

Liste des figures

3.1	Evolution de Delta par rapport au sous-jacent ($S = 1, \dots, 15,$ $K = 10, \sigma = 0.2, T = 0.5, r = 0.05$).	18
3.2	Evolution de Vega par rapport au sous-jacent ($S = 1, \dots, 15,$ $K = 10, \sigma = 0.2, T = 0.5, r = 0.05$).	19
3.3	Evolution de Gamma par rapport au sous-jacent ($S = 1, \dots, 15,$ $K = 10, \sigma = 0.2, T = 0.5, r = 0.05$).	20
3.4	Evolution de Rho par rapport au sous-jacent ($S = 1, \dots, 15, K =$ $10, \sigma = 0.2, T = 0.5, r = 0.05$).	21
3.5	Evolution de Theta par rapport au sous-jacent ($S = 1, \dots, 15,$ $K = 10, \sigma = 0.2, T = 0.5, r = 0.05$).	22
4.1	Evolution du titre MSFT Evolution du titre INT	52
4.2	Evolution des Titres APPLE, DELL et CISCO	60

Liste des tableaux

4.1	Valeurs et paramètres de sensibilité d'une option d'échange . . .	54
4.2	Valeurs et paramètres de sensibilité d'une option panier de 2 titres	57
4.3	Valeurs et paramètres de sensibilité d'une option panier de 5 titres	62

Chapitre 1

Introduction

Les institutions financières sont soumises à un risque de marché dans le cadre de leurs activités. Chaque fois qu'elles offrent à leur clientèle institutionnelle des produits dérivés, elles s'exposent en retour à un important risque de perte qu'elles ne peuvent couvrir par une couverture de type assurance. Pour faire face à ce risque, deux alternatives s'offrent à elles, soit acquérir le produit dérivé en question si celui-ci est transigé sur le marché organisé, soit lorsqu'elles sont en présence de produits dérivés conçus pour un besoin spécifique propre à un client et transigé sur le marché Other The Counter (OTC) , mettre en place une stratégie de réplication (ou duplication).

La stratégie de réplication dynamique va permettre à l'institution financière de compenser sa perte sur la position du produit dérivé par celle du portefeuille de réplication. Pour construire ce portefeuille de réplication et le rééquilibrer, elle doit se servir des différentes sensibilités du produit dérivé par rapport à

ses paramètres : les greeks.

Les greeks (grecques) sont des dérivées d'une valeur d'option par rapport à différents paramètres. Ils permettent de quantifier la sensibilité d'une option à ses différents paramètres et sont utilisés dans les stratégies de réplication et de couverture d'options ou de portefeuilles d'options. Ils sont appelés greeks parce qu'ils sont représentés par des lettres grecques (exception faite de Vega qui bien que considéré comme greek n'est pas une lettre grecque) :

- Le Delta Δ d'une option représente la variation du prix de l'option par rapport à la variation de l'actif sous-jacent.
- Le Gamma Γ d'une option se définit comme la variation du Δ par rapport à celle de l'actif sous-jacent.
- Le Theta θ d'une option détermine la sensibilité de l'option par rapport à une variation de la durée de vie de l'option.
- Le Vega d'une option (également appelé Lambda Λ) équivaut à la variation de l'option par rapport à la volatilité.
- Le Rho d'une option représente la sensibilité de l'option par rapport à une variation du niveau des taux d'intérêt.

Il existe d'autres greeks comme speed (ordre 3), charm (ordre 2), color (ordre 3), etc., mais nous nous étendrons sur ceux cités ci-dessus, qui ont plus d'applications. Tout au long de ce travail nous utiliserons l'anglicisme "greeks" plutôt que la traduction "grecques".

Un portefeuille qui réplique un autre portefeuille de produits dérivés nécessite des greeks calculés avec précision. À ce sujet, il existe plusieurs méthodes

d'évaluation des greeks, certaines analytiques, d'autres numériques, l'utilisateur n'ayant qu'à choisir celle qui s'applique le mieux au type d'options qu'il souhaite répliquer. Parmi celles-ci on peut citer celles proposées par Broadie et Glasserman (1996).

Ce mémoire se veut une extension des travaux de Broadie et Glasserman (1996) au cas spécifique des options portant sur plusieurs actifs sous-jacents. Nous essayerons d'estimer les greeks des valeurs portant sur plusieurs actifs sous-jacents par le biais de la simulation Monte Carlo car celle-ci s'avère parfaitement indiquée lorsqu'on est en présence de plusieurs variables d'état.

Notre étude débutera tout d'abord par une revue de la littérature déjà existante sur l'évaluation des greeks, puis nous entamerons la méthodologie dans laquelle après une définition des greeks, nous présenterons les méthodes proposées par Broadie et Glasserman (1996) et l'extension que nous en tirerons. Par la suite nous testerons nos propositions par simulation Monte Carlo puis analyserons les résultats obtenus.

Chapitre 2

Revue de la littérature

L'objectif de cette revue de littérature est de faire une présentation des différentes contributions apportées dans le calcul des différents paramètres de sensibilité des options.

Le premier volet de ce chapitre portera sur les différentes formes analytiques de calcul des greeks existants. Par la suite nous aborderons dans les autres sections le calcul des greeks basé sur les méthodes numériques. Un intérêt particulier sera accordé aux dernières méthodes présentées, celles basées sur la simulation Monte Carlo dont Broadie et Glasserman (1996).

2.1 Calcul des greeks lorsque des formules fermées existent

C'est Black et Scholes (1973) qui introduisent l'usage des greeks. Ils montrent que la position de couverture ne dépend pas du prix de l'actif sous-jacent mais plutôt de la variation de la valeur de l'option par rapport à celle de son sous-jacent. Leur article demeure une référence importante dans l'évaluation des valeurs d'options et dans le calcul des paramètres de sensibilité. Les greeks sont calculés en dérivant la valeur de l'option, obtenue par le modèle de Black-Scholes, par rapport au paramètre étudié.

Carr (2001) parvient à exprimer les greeks en les interprétant comme une valeur d'une certaine quantité du produit dérivé en question. A partir de l'équation aux dérivées partielles de l'option obtenue par le modèle de Black-Merton-Scholes, il exprime le Delta qui a la même expression que l'équation aux dérivées partielles de l'option exception faite de la dérive (drift) et du taux d'actualisation. À partir de ces équations et des relations qui existent entre les différents greeks, en se servant d'une expansion en série de Taylor, il est à même de déduire les autres greeks. Cependant, la résolution des équations aux dérivées partielles de l'option et celle du Delta se fait numériquement. C'est seulement la détermination des autres dérivées qui se fait analytiquement.

Reiss et Wystup (2001) proposent une approche rapide de calculer les greeks. Ils établissent les liens entre les différents greeks. Ils déduisent une relation basée sur l'homogénéité du temps (le prix de l'option dépend de la date de maturité plutôt que du temps au moment courant) et une autre basée

sur le niveau de prix du produit financier (les prix des produits dérivés peuvent être exprimés en différentes unités monétaires par exemple). Ils montrent ensuite comment déduire les autres greeks lorsqu'on en connaît un ou deux en exploitant ces différentes propriétés. Ainsi, l'utilisateur évite les coûts de calcul de même que le calcul de dérivées quelquefois fastidieux.

Dans certains cas cependant, il est possible que l'option évaluée ne réponde pas aux différentes hypothèses ou spécificités énumérées par chacune des méthodes ci-dessus citées. L'utilisateur n'est alors pas en mesure de se servir des formes analytiques pour déduire les greeks. Il peut alors avoir recours aux méthodes numériques ou aux techniques de simulation pour évaluer la valeur des greeks.

2.2 Méthodes des différences finies

Les méthodes de différences finies sont héritées de la physique et leurs premières applications en finance sont dues à Brennan et Schwartz (1978). Dans leur article, ils se proposent d'évaluer des produits dérivés dont l'actif sous-jacent suit une dynamique de saut au moyen des différences finies. Pour arriver à une approximation en différences finies, Brennan et Schwartz partent de l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes à laquelle ils appliquent la log transformation. Dans cette nouvelle équation, ils remplacent les dérivées partielles par des différences finies. Ils sont alors à même de résoudre cette équation pour chaque intervalle de temps. La résolution de cette équation permet de déduire les greeks qui sont exprimés dans l'équation.

Dans la suite des travaux de Brennan et Schwartz (1978), on peut citer ceux de Courtadon (1982) qui en adoptant une discrétisation différente du temps parvient à une meilleure approximation des greeks et par conséquent à une meilleure précision des résultats. Il fait également une extension de Brennan et Schwartz (1978) au cas d'une option d'achat européenne.

Hull et White (1990) quant à eux font une application générale de ces méthodes et plus précisément l'approche explicite à l'évaluation des produits dérivés. En adoptant une discrétisation plus fine du temps et de la valeur du sous-jacent tout en respectant un certain ordre de grandeur défini de même qu'une transformation de variables qui assure la constance de la volatilité, ils obtiennent une meilleure convergence de la méthode et une généralisation de son application à l'évaluation des produits dérivés dépendant d'une ou de deux variables d'état. Les greeks qui peuvent être déduits sont alors plus précis.

Thomas III et Yalanmanchili (2001) proposent une autre méthode de discrétisation néanmoins différente pour la computation des greeks, la méthode des éléments finis. Dans la méthode des éléments finis, l'ensemble des équations aux dérivées partielles qui forment la solution est remplacé par des équations algébriques dont les inconnues seront évaluées aux différents noeuds de la grille. Cette méthode peut s'avérer avantageuse par rapport à celle des différences finies lorsque la grille de discrétisation n'est pas uniforme.

Ces méthodes génèrent des résultats plus ou moins bons selon l'approche utilisée (approche implicite, explicite ou Crank-Nicholson pour les différences finies) et le type d'option à évaluer. Leur efficacité repose également sur la discrétisation choisie, les conditions aux bornes et le nombre de variables d'état.

Les greeks étant des mesures de la sensibilité des valeurs d'options, les erreurs produites lors de l'évaluation de l'option vont se répercuter sur les valeurs des greeks. Ces méthodes produisent un biais important lorsque les fonctions de paiement (payoffs) sont discontinues comme c'est le cas des options rétroviseurs, binaires, etc.

2.3 Méthodes du modèle binomial

Le modèle de l'arbre binomial est proposé par Cox, Ross et Rubinstein (1979) et Rendleman et Bartter (1979). Le produit dérivé est évalué en temps discret en fonction des différentes trajectoires possibles de l'actif sous-jacent. Cette résolution par approche martingale est une représentation du produit dérivé par l'espérance actualisée de sa valeur future dans un monde neutre au risque.

Hull (1993) énonce un moyen de détermination des greeks à partir des arbres binomiaux. Les greeks sont exprimés en fonction des prix de l'option, des valeurs du sous-jacent, de la volatilité ou du temps selon les cas. Ces calculs se font à différents noeuds de l'arbre suivant la date de calcul désirée. Dans la pratique, le calcul des greeks s'effectue le plus souvent à la date zéro. Cela requiert une évaluation sur plusieurs noeuds.

Pelsser et Vorst (1994) proposent une alternative au modèle binomial basée sur une extension de l'arbre. Ils étendent un arbre binomial de manière à obtenir un arbre pour lequel il serait possible de calculer des valeurs antérieures au

temps zéro. Les greeks sont alors exprimés en fonction des valeurs prises autour du temps zéro selon les différents paramètres. Cette méthode est plus rapide et plus précise que la première, notamment pour le calcul de Gamma, car elle requiert moins de noeuds pour estimer les greeks. Ces travaux portent essentiellement sur la détermination du Delta et du Gamma.

Pour ce qui est du calcul du Theta, du Rho et du Vega, ils proposent de les calculer pour le premier par une approximation du Delta et du Gamma et pour les autres par les méthodes de dérivation numérique. La précision des calculs restent très sujette au choix des intervalles de temps et de prix du sous-jacent.

Chung and Shackleton (2002) remettent à jour l'utilisation du modèle binomial pour le calcul des greeks en éliminant les limites citées ci-dessus quant à son utilisation. Pour ce faire, ils travaillent à partir de la méthode binomiale Black-Scholes (BBS dans ce qui suit) introduite par Broadie et Detemple (1996). Broadie et Detemple avaient montré qu'en appliquant la formule de Black-Scholes au pénultième noeud à l'arbre binomial, on obtenait des résultats plus précis pour un arbre de même taille. Ces performances se retrouvent lorsqu'on applique le modèle BBS pour le calcul des greeks. En outre, les erreurs relatives à la discrétisation n'apparaissent plus puisque la méthode BBS est basée sur des fonctions lisses des prix du sous-jacent et du temps proches de la date de maturité. Dans leur article, ils montrent que cette méthode de computation est très adaptée pour les options de type vanille.

2.4 Calcul de Malliavin

Le Calcul de Malliavin, de son auteur Paul Malliavin, est le calcul de la variation pour les processus stochastiques définis sur un espace de Wiener et peut être visualisé comme un modèle d'intégration par partie sur cet espace. Il est parfois nécessaire de mesurer l'effet d'une perturbation dans la trajectoire d'un sous-jacent mouvement brownien sur la fonction en question. Le calcul de Malliavin permet de mesurer cet effet d'où son usage de plus en plus fréquent en ingénierie financière. La dérivée de Malliavin d'une fonction quelconque de mouvements browniens, continue et dérivable, est la variation de cette fonction due à une quelconque variation dans la trajectoire des mouvements browniens.

Le calcul des greeks par le calcul de Malliavin est utilisé pour la première fois par Fournié, Lasry, Lebuchoux, Lions et Touzi (1999). Selon leur approche, chaque greek peut être exprimé comme une moyenne de pondération de la fonction de paiement (payoff) à partir de la dérivée de Malliavin. Cette pondération est fonction des conditions initiales et d'une faible variation de la volatilité locale. Fournié, Lasry, Lebuchoux et Lions (2001) font une extension de l'article précédent en déterminant les pondérations optimales qui correspondent à une variance minimale. Les avantages de la méthode résident dans le fait que les calculs peuvent se faire sans toutefois connaître la fonction de densité. De plus, lorsque les pondérations utilisées sont optimales, des travaux ont été fait dans ce sens notamment par Benhamou (2003), l'évaluation des greeks par le calcul de Malliavin s'avère efficiente et rapide.

Cependant, la détermination de la dérivée de Malliavin est un calcul assez

ardu et la méthode ne peut être généralisée à toutes les options car la condition de départ requiert une fonction de paiement lisse.

2.5 Méthodes Monte Carlo

La simulation Monte Carlo pour l'évaluation des options a été introduite par Boyle (1976). Cette approche consiste à générer des trajectoires de processus stochastiques afin d'estimer les évolutions possibles de l'option pendant sa durée de vie. La valeur de l'option est ensuite exprimée sous forme d'une espérance des différents cas de figure à une date donnée. La simulation est très utile lorsqu'il s'agit de calculer des valeurs d'options pour lesquelles il n'existe pas de formules analytiques et lorsqu'on est en présence de plusieurs variables d'état. C'est une technique très appropriée pour traiter les processus continus ou avec sauts. Les résultats et performances produits par la méthode par rapport aux coûts de computation en ont fait un outil très utilisé notamment dans l'évaluation des valeurs d'option et des valeurs de sensibilité y afférents.

Depuis, plusieurs travaux sur l'évaluation des différents types d'options via la simulation Monte Carlo ont été développés. Les greeks étaient alors calculés en faisant une resimulation supplémentaire pour mesurer la variation occasionnée sur la valeur de l'option par celle du paramètre étudié. Cette méthode requérait la détermination de la variation optimale à appliquer au paramètre en question et un temps de calcul supplémentaire voir double. Le succès des méthodes Monte Carlo ont entraîné en parallèle plusieurs travaux sur la détermination des greeks simultanément à l'estimation du produit dérivé.

Cette voie est ouverte par Fu et Hu (1995) qui proposent comme alternative à la resimulation, la méthode des gradients. Ils déterminent les espérances des dérivées partielles pour le cas d'une option européenne et d'une option américaine.

Par la suite, Broadie et Glasserman (1996) sur la base de la simulation Monte Carlo, présentent deux nouvelles méthodes de calcul des greeks. La première, la méthode par trajectoire (pathwise method) suppose que la fonction de payoff est dérivable presque partout et que les dérivées partielles des valeurs d'options existent pour chacun des paramètres. La fonction de payoff suit une distribution log-normale et est représentée par un mouvement brownien géométrique. Partant de là, il devient possible d'évaluer chacune des dérivées partielles correspondant aux greeks. La méthode exige cependant une continuité des fonctions de paiement pour être applicable.

C'est pourquoi ils proposent en alternative une deuxième méthode, celle du rapport de vraisemblance (likelihood ratio method). Le principe de la méthode est de supposer que les rendements des sous-jacents suivent une fonction de densité g . La fonction de payoff est alors définie comme une intégrale par rapport au sous-jacent de la fonction de densité actualisée. Pour obtenir les différents greeks il suffit de diviser le g dans la fonction de payoff par les différents paramètres. La méthode nécessite cependant de connaître la fonction de densité des rendements. Broadie et Glasserman arrivent à la conclusion que la méthode des trajectoires lorsqu'elle est applicable donnent de meilleurs résultats que celle du rapport de vraisemblance. Comme montré par Detemple, Garcia et Rindisbacher (2002), la méthode des trajectoires ainsi que celle du

rapport de vraisemblance peuvent être vues comme des méthodes du calcul de Malliavin dans le cas du mouvement brownien géométrique.

Toujours avec la simulation Monte Carlo, Willard (1997) suggère l'utilisation du Monte Carlo Conditionnel pour calculer les valeurs des sensibilités d'options dont la fonction de payoff à la date d'exercice est indépendante du reste la trajectoire dans le cas des modèles à facteurs multiples. Le conditionnement est une technique de réduction de variance. En l'associant à la simulation Monte Carlo elle permet de simplifier les calculs en exprimant des valeurs conditionnelles sous forme de solutions explicites. Pour ce faire, il donne l'exemple d'une option européenne à volatilité stochastique. Il calcule la volatilité moyenne sur la durée de vie de l'option. En conditionnant la volatilité stochastique à un processus de Wiener, il parvient à une volatilité constante et à exprimer ainsi la valeur de l'option par la formule de Black-Scholes. De là, il peut tirer les expressions des différents greeks voulus. Cette technique permet de gagner en temps de computation et donne de bons résultats, cependant elle ne s'applique que dans le cas des options dont la fonction de paiement (payoff) est indépendante du reste de la trajectoire.

Dans la suite de Broadie et Glasserman (1996), Glasserman et Zhao (1999) font une application des méthodes des trajectoires et du rapport de vraisemblance pour le calcul des greeks à des modèles de Libor et Forward semblables à ceux présentés dans les modèles de Heath, Jarrow et Merton avec une particularité cependant, car ils modélisent la dynamique de la courbe des taux forward. La structure de ces modèles rend le calcul des greeks plus complexe que dans le cas d'options. Ils y ajoutent une combinaison des deux méthodes

pour le calcul de certains greeks. Grâce à une analyse comparative, ils déterminent la meilleure approche adaptée à l'évaluation des greeks dans les modèles de structure à terme selon le type de la fonction de valeur (continue ou discontinue).

Toujours dans la foulée de Broadie et Glasserman (1996), Duan (2003) développe une généralisation de la méthode des trajectoires. Il introduit un lissage naturel à partir de la formule analytique de la fonction de paiement disponible à certains points à une date proche de la maturité afin de rendre applicable la méthode aux options dont les trajectoires sont non différentiables. Il réussit à appliquer sa méthode au calcul des greeks pour des options à barrière, asiatiques ou encore sur des modèles Garch.

Glasserman (2003) fait une extension de la méthode des trajectoires et de celle du ratio de vraisemblance au cas d'options avec multiples sous-jacents mais seulement pour le calcul du Delta.

Dans le cas particulier des options, Bernis, Gobet et Kohatsu-Higa (2003) utilisent le calcul de Malliavin pour dériver des pondérations additionnelles qui permettront l'usage de la simulation Monte Carlo pour la détermination des greeks. Leur travail porte sur le cas multidimensionnel en plus de traiter de la particularité des options barrières et rétroviseurs à savoir que la valeur finale dépendra des extrema de la trajectoire pendant la durée de vie de l'option. Cette méthode pour ce type d'option s'avère plus performante dans le sens où elle permet une plus grande applicabilité (à des options dont la fonction de valeur est discontinue) que celle des différences finies ou celle du calcul de Malliavin utilisée toute seule. Cette manière de faire est encore appelée Quasi-

Monte Carlo.

2.6 Lien avec le mémoire

De nombreux travaux ont été menés en matière de calcul des greeks. Depuis l'article de Black et Scholes (1973), l'utilisateur a le choix entre plusieurs méthodes d'évaluation des paramètres de sensibilité des valeurs d'options adaptées plus ou moins au cas qu'il traite. Cependant lorsque l'option porte sur plusieurs actifs sous-jacents, le choix de l'utilisateur est beaucoup plus restreint. Dans ce travail nous nous proposons de faire une généralisation des méthodes de trajectoires et du rapport de vraisemblance présentées par Broadie et Glasserman (1996) au cas des options sur plusieurs actifs sous-jacents.

Chapitre 3

Méthodologie

Dans cette section, nous nous proposons de faire une extension de Broadie et Glasserman (1996) aux options portant sur plusieurs actifs sous-jacents. Afin d'explicitier l'intérêt d'un tel travail, la première partie de ce chapitre sera consacrée à la définition ainsi qu'à l'utilité des greeks. Par la suite nous ferons un exposé des méthodes de Broadie et Glasserman (1996) et enfin l'extension qui peut en être faite.

3.1 Définition des greeks

Dans cette partie, nous allons présenter les greeks et décrire leurs caractéristiques dans le cadre d'une option d'achat dans un contexte de Black-Scholes, i.e., lorsque l'actif sous-jacent suit la dynamique suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Les propriétés et formules présentées ci-dessus s'appliquent au cas de l'option d'achat européenne dont la valeur au temps t est :

$$C(S, K, t, T) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

avec N la fonction cumulative de la loi normale centrée réduite, S l'actif sous-jacent, K le prix d'exercice, T la date d'échéance et

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Dans tout ce qui suit, $V = V(S, K, \sigma, t, T)$ représente la valeur d'une option européenne sur un actif sous-jacent suivant la dynamique de Black-Scholes.

3.1.1 Delta

Définition 3.1.1 *Le Delta d'une option représente la variation du prix de l'option par rapport à une variation monétaire du prix de l'actif sous-jacent, i.e.*

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Dans le cas de l'option d'achat européenne, on a

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = N(d_1). \quad (3.1)$$

Le Delta d'une option d'achat varie entre 0 et 1 tandis que celui de l'option de vente varie entre 0 et -1. L'option d'achat dont le sous-jacent ne verse pas de dividende verra son Delta évoluer avec sa valeur. Ainsi Delta tendra vers 0 lorsque que l'option sera hors de la monnaie et tendra vers 1 lorsque l'option sera dans la monnaie. $S = 1, \dots, 15$, $K = 10$, $\sigma = 0.2$, $T = 0.5$, $r = 0.05$.

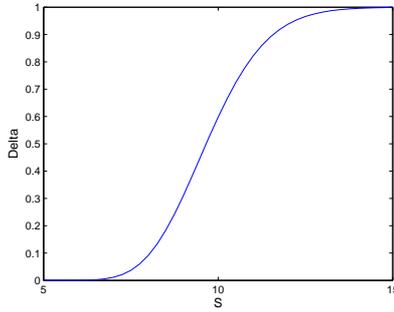


Figure 3.1: Evolution de Delta par rapport au sous-jacent ($S = 1, \dots, 15$, $K = 10$, $\sigma = 0.2$, $T = 0.5$, $r = 0.05$).

3.1.2 Vega

Définition 3.1.2 *Vega* représente la sensibilité de l'option par rapport à la volatilité du sous-jacent, i.e.

$$v = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Dans le cas de l'option d'achat européenne, on a

$$v = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}N'(d_1).$$

Bien que la volatilité soit supposée constante dans la formule de Black-Scholes, elle est très souvent variable dans la réalité. La valeur de l'option est de fait affectée par la variation de la volatilité de l'actif sous-jacent. Lo (1986) montre l'importance de calculer Vega. En partant de la formule de Black-Scholes pour une option d'achat européenne, il fait le lien entre la variance du prix de l'option et la volatilité de l'actif sous-jacent. Il déduit ainsi que pour une meilleure estimation du prix de l'option il est nécessaire de tenir compte de la variation

par rapport à la volatilité du sous-jacent sur toute la durée de vie de l'option. Ainsi Vega est une fonction croissante du prix de l'option d'achat puisque qu'une augmentation de la volatilité implique une hausse de la probabilité d'exercice et produit l'effet contraire dans le cas d'une option de vente.

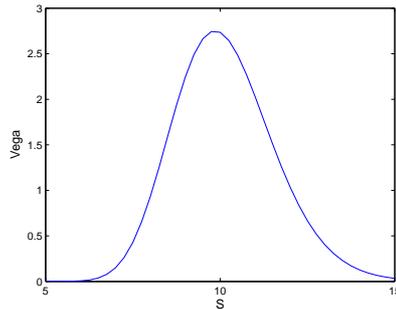


Figure 3.2: Evolution de Vega par rapport au sous-jacent ($S = 1, \dots, 15$, $K = 10$, $\sigma = 0.2$, $T = 0.5$, $r = 0.05$).

Il est difficile de déterminer la volatilité et il faut recourir à des modèles de calibration. Connaître la sensibilité de l'option par rapport à la volatilité permet de jauger la fiabilité de son prix par rapport au modèle de calibration. C'est très souvent le paramètre à calculer.

3.1.3 Gamma

Définition 3.1.3 *Gamma correspond à la variabilité du prix de l'option par rapport à celle d'une unité du Delta de ladite option; c'est donc la dérivée*

seconde par rapport à l'actif sous-jacent, i.e.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Dans le cas de l'option d'achat européenne, on a

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (3.2)$$

Le Gamma d'une option est à son maximum lorsque celle-ci est à la monnaie. Lorsque l'option est hors de la monnaie ou dans la monnaie Gamma tend vers 0.

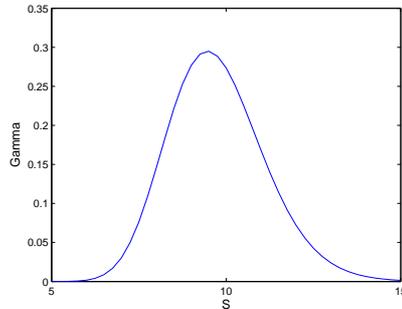


Figure 3.3: Evolution de Gamma par rapport au sous-jacent ($S = 1, \dots, 15$, $K = 10$, $\sigma = 0.2$, $T = 0.5$, $r = 0.05$).

3.1.4 Rho

Définition 3.1.4 *Rho permet de mesurer la variabilité d'une option par rapport au niveau des taux d'intérêt sans risque, i.e.*

$$Rho = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Dans le cas de l'option d'achat européenne, on a

$$Rho = \frac{\partial V}{\partial r} = K(T - t)e^{-r(T-t)}N(d_2).$$

Un Changement dans les taux d'intérêt va entraîner une variation du facteur d'actualisation et ainsi de la valeur de l'option. Cependant, il a un impact relativement faible sur la valeur de l'option comparé aux autres dérivées partielles.

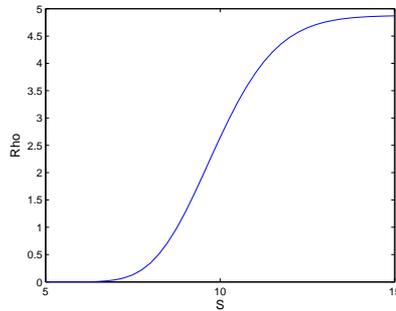


Figure 3.4: Evolution de Rho par rapport au sous-jacent ($S = 1, \dots, 15$, $K = 10$, $\sigma = 0.2$, $T = 0.5$, $r = 0.05$).

3.1.5 Theta

Définition 3.1.5 *Theta exprime la sensibilité de l'option par rapport au temps, i.e.*

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Il fournit une indication sur la vitesse à laquelle le prix de l'option décroît plus la date d'échéance approche.

Dans le cas de l'option européenne d'achat, on a

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\sigma S N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + SN(d_1) - rKe^{-r(T-t)}N(d_2). \quad (3.3)$$

Pour une option d'achat, Theta est proche de 0 lorsque l'option est hors de la monnaie et large et négatif lorsque l'option est à la monnaie.

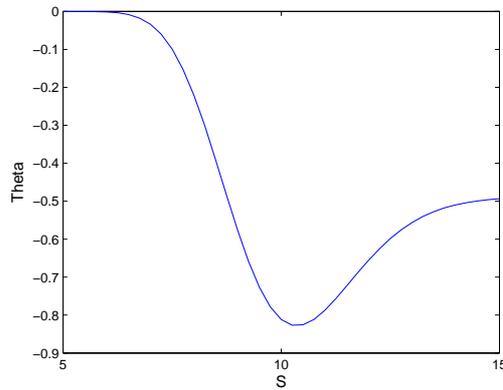


Figure 3.5: Evolution de Theta par rapport au sous-jacent ($S = 1, \dots, 15$, $K = 10$, $\sigma = 0.2$, $T = 0.5$, $r = 0.05$).

3.2 Utilité et application des greeks

Soit un gestionnaire de portefeuille d'options. Lorsqu'il ne peut pas se référer au marché pour gérer le risque lié à son portefeuille, il peut se fier aux différentes valeurs de sensibilité par rapport aux facteurs de risque des options de son portefeuille pour le couvrir. La sensibilité des options sera mesurée par

rapport à différents paramètres pour aboutir à des stratégies de couverture ou de calcul de la VaR (Valeur à Risque) de portefeuille.

3.2.1 Les valeurs de sensibilité d'options pour les stratégies de couverture

Soit un portefeuille Π d'actifs et d'options portant sur les mêmes actifs. Pour simplifier, supposons une volatilité et un taux sans risque constant. À partir d'une expansion de Taylor, et en ignorant les termes d'ordre 2 autre que $(\Delta S)^2$, nous pouvons exprimer tout changement dans la valeur de notre portefeuille Π par :

$$d\Pi = \Theta dt + \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma(dS)^2 + v d\sigma + \text{Rho } dr$$

Une couverture du portefeuille consisterait à le rendre neutre aux différents greeks

Delta

Delta informe sur la variabilité de l'option ainsi que sur la probabilité de l'exercer. Beaucoup de gestionnaires utilisent la technique du Delta hedging comme moyen de couverture de leurs portefeuilles. Il s'agit d'une gestion en temps continu du risque. Elle consiste à rééquilibrer le nombre de parts d'actifs sous-jacents à détenir pour couvrir le risque de variabilité de l'option par rapport à son sous-jacent.

Lorsque Δ change, il faut rééquilibrer le portefeuille d'actions pour garder la position Delta neutre. Lorsque le portefeuille est Delta neutre, sa variation est donnée par :

$$d\Pi = \theta dt + \frac{1}{2}\Gamma(dS)^2 + \nu d\sigma + \text{Rho } dr$$

Cette technique ne peut être applicable que lorsque les variations des prix des sous-jacents ne sont pas très importantes car dans la pratique il peut être difficile de rééquilibrer le portefeuille lorsque l'opération doit porter sur un volume important d'actions compte tenu des coûts de transactions, des risques de pertes, etc.

Gamma

Gamma désigne également la fréquence et le niveau auquel un portefeuille doit être rééquilibré pour conserver la position Delta neutre. Ainsi, pour Γ petit, le rééquilibrage du portefeuille d'actions ne se fera pas très souvent. Par contre, lorsque Gamma est élevé, Delta est de fait très sensible aux variations de prix de l'actif sous-jacent. Pour maintenir la position Delta neutre, le gestionnaire devra ajuster son portefeuille d'actions sur des intervalles de temps très réduits et souvent pour des quantités importantes.

Dans ces cas-ci, étant donné la difficulté à garder la position Delta neutre, le gestionnaire peut avoir recours à la position Gamma neutre. Pour ce faire, il doit rééquilibrer non pas seulement le portefeuille d'actions mais également un portefeuille d'options dans des proportions lui garantissant la position Delta

neutre et Gamma neutre :

$$d\Pi = \theta dt + v d\sigma + \text{Rho } dr$$

Dans le modèle Black-Scholes, σ et r étant supposés constants, la position Delta Gamma neutre équivaut à une position Theta neutre également (pour respecter la condition d'autofinancement $d\Pi = r\Pi \implies \theta dt = r\Pi$).

Vega

Dans le cas où le Vega est élevé, la valeur de l'option est très sensible aux plus petites variations de la volatilité mais fluctuera peu dans le cas contraire. Là également, le gestionnaire peut chercher la position Vega neutre pour réduire la sensibilité face aux variations du sous-jacent :

$$d\Pi = \Delta dS + \theta dt + \frac{1}{2}\Gamma(dS)^2 + \text{Rho } dr$$

On note cependant qu'il est très rare d'aboutir sur une position Gamma neutre et Vega neutre à la fois et c'est donc au gestionnaire de décider dans ces cas quelle est la position neutre à privilégier.

Theta

L'importance de Theta dans les stratégies de couverture relève de l'interprétation que l'on peut tirer de Gamma. En effet, pour l'option d'achat européenne, plus Theta est grand et positif, plus Gamma a tendance à être grand et négatif et vice versa.

Rho

Rho détermine la variabilité de la valeur de l'option par rapport à un changement des taux d'intérêt sans risque. Cette mesure est intéressante dans le cas des taux d'intérêt déterministes. Dans le cas des options sur devises étrangères, l'utilisateur peut également viser à assurer la neutralité de son portefeuille par rapport au taux étranger.

En parallèle avec la stratégie de couverture, le manager peut utiliser les greeks pour définir l'exposition maximale à un facteur de risque qu'il peut tolérer dans son portefeuille. Ainsi, il est courant dans la pratique de définir la limite Vega, Delta ou Rho selon les cas pour les portefeuilles.

3.2.2 Les valeurs de sensibilité d'options pour le calcul des VaR

La VaR est une mesure statistique de risque qui décrit le risque de marché lié à un portefeuille. C'est la perte maximale espérée d'un portefeuille sur un horizon de temps donné pour un intervalle de confiance défini. Elle peut être calculée au moyen de plusieurs méthodes dont l'approximation Delta et l'approximation Delta-Gamma.

Soit un portefeuille d'options portant sur un actif sous-jacent. L'approximation Delta consiste à définir l'écart type de notre portefeuille à partir de celui de l'actif sous-jacent c'est-à-dire à multiplier l'écart type de l'actif sous-jacent au Delta du portefeuille par rapport à ce sous-jacent.

L'approximation Delta est pertinente dans les cas où les variations du sous-jacent sont linéaires (portefeuilles d'actions, d'obligations ou de contrats forward). La variation dans les portefeuilles de produits dérivés tels que les options n'étant pas linéaire, il devient approprié d'insérer Gamma dans la méthode de calcul car l'approximation Delta est une estimation linéaire sous laquelle la valeur calculée est normalement distribuée. Gamma permet de considérer toute la convexité de la fonction de distribution et de calculer une VaR plus exacte (Mina and Ulmer (1999), Jaschke(2002)).

3.3 Évaluation des greeks par les méthodes de Broadie et Glasserman (1996)

Dans cette section, nous nous attarderons sur les travaux de Broadie et Glasserman puisque nous l'avons dit plus haut, l'objet de ce mémoire est d'en faire une extension aux options ayant plusieurs actifs sous-jacents.

Broadie et Glasserman (1996) développent deux méthodes directes de calcul des paramètres de sensibilité des valeurs d'options au moyen de la simulation Monte Carlo, la méthode des trajectoires et celle du rapport de vraisemblance par opposition aux méthodes de computation indirectes telle la resimulation.

Les auteurs préconisent deux méthodes directes car elles permettent un gain de temps puisqu'une simulation supplémentaire est inutile et qu'elles génèrent des résultats non biaisés ce qui n'est pas toujours le cas des méthodes indirectes.

3.3.1 Cadre théorique

Soit Φ la valeur à l'échéance d'une option européenne portant sur un actif qui verse des dividendes. Dans le cas d'une option d'achat, on a

$$\Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0) \quad (3.4)$$

pour un prix d'exercice K et une maturité $T > 0$.

Le prix de l'option au temps $t = 0$ est donné par

$$V = e^{-rT} E[\Phi(S_T)] \quad (3.5)$$

avec E désignant l'espérance en monde neutre au risque. Comme c'est une espérance, elle peut être estimée sans biais par simulation.

En monde neutre au risque, l'équation différentielle stochastique du prix de l'actif sous-jacent S_t est la suivante :

$$dS_t = S_t (r - \delta) dt + \sigma S_t dW_t \quad (3.6)$$

où r est le taux sans risque, δ le taux de paiement des dividendes, σ la volatilité et W un mouvement brownien standard.

Sous la mesure neutre au risque, $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$ suit une loi normale d'espérance $\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$ et de variance $(\sigma^2 T)$.

3.3.2 Méthode des trajectoires (pathwise method)

La méthode des trajectoires repose sur la relation entre la fonction de paiement (payoff) et le paramètre étudié (σ, r, S, T) . Ici, le prix de l'actif sous-jacent

est modélisé par un mouvement brownien géométrique et s'écrit sous la forme

$$S_T = S_0 e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z} \quad (3.7)$$

où Z est une variable aléatoire normale centrée réduite.

Pour obtenir une estimation de Vega, $\frac{dV}{d\sigma}$, les auteurs dérivent S_T par rapport à la volatilité puisque celle-ci n'affecte V qu'à travers S_T ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{dS_T}{d\sigma} &= S_T \left(-\sigma T + \sqrt{T}Z \right) \\ &= \frac{S_T}{\sigma} \left[\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) - \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Par la suite il suffit d'évaluer la variation de Φ par rapport à S_T pour arriver à la variation de V par rapport à σ :

$$\frac{dV}{d\sigma} = e^{-rT} E \left[\frac{d\Phi}{dS_T} \frac{dS_T}{d\sigma} \right] \quad (3.9)$$

$$= e^{-rT} E \left[\Phi'(S_T) \frac{S_T}{\sigma} \left\{ \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) - \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right\} \right] \quad (3.10)$$

Cette expression de Vega est facilement calculée par le biais de la simulation et les auteurs montrent que les résultats obtenus sont sans biais.

Dans le cas de l'option d'achat, on trouve que

$$\frac{d\Phi}{dS_T} = \mathbf{1}_{(S_T \geq K)} \quad (3.11)$$

où $\mathbf{1}$ désigne la fonction indicatrice de l'événement $S_T \geq K$. On note cependant que lorsque que $S_T = K$ la fonction de paiement n'étant plus dérivable, il est plus difficile de justifier le changement de variables de dérivation mais le résultat reste similaire. On obtient alors

$$\frac{dV}{d\sigma} = e^{-rT} E \left[\mathbf{1}_{(S_T \geq K)} \frac{S_T}{\sigma} \left\{ \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) - \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right\} \right]. \quad (3.12)$$

En appliquant le même raisonnement on obtient l'expression suivante de Delta

$$\frac{dV}{dS_0} = e^{-rT} E \left[\frac{d\Phi}{dS_T} \frac{dS_T}{dS_0} \right] = e^{-rT} E \left[\frac{d\Phi}{dS_T} \frac{S_T}{S_0} \right],$$

ce qui donne

$$\frac{dC}{dS_0} = e^{-rT} E \left[\mathbf{1}_{(S_T \geq K)} \frac{S_T}{S_0} \right] \quad (3.13)$$

pour l'option d'achat.

L'expression obtenue de Rho est

$$\frac{dV}{dr} = -TV + e^{-rT} E \left[\frac{d\Phi}{dS_T} \frac{dS_T}{dr} \right] = -TV + T e^{-rT} E \left[\frac{d\Phi}{dS_T} S_T \right],$$

ce qui donne

$$\frac{dC}{dr} = KT e^{-rT} E \left[\mathbf{1}_{(S_T \geq K)} \right] \quad (3.14)$$

pour l'option d'achat.

Quant à Theta, la dérivée par rapport à t , elle est évaluée par

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{dV}{dT} = rV - e^{-rT} E \left[\frac{d\Phi}{dS_T} \frac{dS_T}{dT} \right],$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= r e^{-rT} E [\max(S_T - K, 0)] \\ &\quad - e^{-rT} E \left[\mathbf{1}_{(S_T \geq K)} \frac{S_T}{2T} \left(\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

pour l'option d'achat.

Cette méthode peut être difficile à appliquer pour le calcul du Gamma. En effet, dans le cadre de l'option d'achat européenne, Broadie et Glasserman

expriment Gamma, en partant de (3.13), comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2V}{dS_0^2} &= E \left[e^{-rT} \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \frac{\partial}{\partial S_0} \mathbf{1}_{(S_T(S_0) \geq K)} \right] \\
&= E \left[e^{-rT} \left(\frac{K}{S_0} \right)^2 g(K) \right] \\
&= E \left[e^{-\delta T} \frac{n(d_1(K))}{S_0 \sigma \sqrt{T}} \right]
\end{aligned} \tag{3.16}$$

où

$$\begin{aligned}
d_1(x) &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{x}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma \sqrt{T}} \\
&= -d(x) + \sigma \sqrt{T}^3.
\end{aligned}$$

et

$$g(x) = \frac{1}{x \sigma \sqrt{T}} n(d(x)), \quad x \geq 0.$$

avec $n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

En partant de (3.7) et (3.13), on remarque que la dérivée seconde par rapport à S_0 est nulle. Pour être en mesure de déterminer l'expression de Gamma les auteurs supposent le cas d'un payoff exponentiel. Ainsi,

$$V = E [e^{-rT} e^{-S_T}] \tag{3.17}$$

En dérivant deux fois cette expression par rapport à S_0 et sachant que $\frac{dS_T}{dS_0} = \frac{S_T}{S_0}$ et $\frac{d^2 S_T}{dS_0^2} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d^2V}{dS_0^2} &= E \left[e^{-rT} e^{-S_T} \left\{ \left(\frac{dS_T}{dS_0} \right)^2 - \frac{d^2 S_T}{dS_0^2} \right\} \right] \\
&= E \left[e^{-rT} e^{-S_T} \left(\frac{S_T}{S_0} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

3.3.3 Méthode du rapport de vraisemblance

La méthode du rapport de vraisemblance est basée sur la relation entre la fonction de densité du prix de l'option et le paramètre étudié. Le rapport de vraisemblance est obtenu en partant de la valeur de l'option :

$$V = e^{-rT} E \left[\Phi \left(S_0 e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z} \right) \right] \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \left(S_0 e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}z} \right) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= e^{-rT} \int_0^{+\infty} \Phi(x) \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left(\ln\left(\frac{x}{S_0}\right) - (r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T \right)^2}}{x\sigma\sqrt{2\pi T}} dx \end{aligned} \quad (3.20)$$

Soit f la densité de la variable x :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T} \left(\ln\left(\frac{x}{S_0}\right) - (r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T \right)^2}}{x\sigma\sqrt{2\pi T}} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{x}{S_0}\right) - (r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right)^2}}{x\sigma\sqrt{2\pi T}} \\ &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} n(d(x)) \quad , \quad x \geq 0; \end{aligned} \quad (3.21)$$

où

$$n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

et

$$d(x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{S_0}\right) - \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Le prix de l'option peut alors être écrit de la manière suivante :

$$V = \int_0^{+\infty} \Phi(x) e^{-rT} f(x) dx. \quad (3.22)$$

Le premier greek évalué ici est Vega, la dérivée première par rapport à σ .

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{d\sigma} &= \frac{\partial}{\partial\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-rT} \Phi(x) f(x) dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-rT} \Phi(x) \frac{\partial f}{\partial\sigma}(x) dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-rT} \Phi(x) \frac{\partial \log f}{\partial\sigma}(x) f(x) dx \\
&= E \left[e^{-rT} \Phi(S_T) \frac{\partial \log f}{\partial\sigma}(S_T) \right], \tag{3.23}
\end{aligned}$$

puisque la fonction de paiement ne dépend pas d'aucun des paramètres S_0, σ, t, T .

Sachant que

$$\frac{d \ln(f(x))}{d\sigma} = -d \frac{\partial d}{\partial\sigma} - \frac{1}{\sigma}$$

et

$$\frac{\partial d}{\partial\sigma} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{x}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma^2 \sqrt{T}}$$

Il devient facile d'implanter (3.23). En refaisant le même exercice mais cette fois ci en dérivant par rapport à S_0 , on obtient l'expression sans biais suivante de Delta :

$$\frac{dV}{dS_0} = E \left[e^{-rT} \Phi(S_T) \frac{\partial \log f}{\partial S_0}(S_T) \right]. \tag{3.24}$$

De plus,

$$\frac{\partial \ln(f(S_T))}{\partial S_0} = \frac{d(x)}{S_0 \sigma \sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\frac{x}{S_0}\right) + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{S_0 \sigma^2 T}.$$

Comme les expressions (3.23) et (3.24) sont des espérances, elles peuvent être facilement estimées par simulation.

L'estimateur sans biais de Rho est évalué comme suit :

$$\frac{dV}{dr} = E \left[e^{-rT} \Phi(S_T) \left(-T + \frac{d\sqrt{T}}{\sigma} \right) \right]$$

tandis que celui de Theta est donné par

$$\frac{-dV}{dT} = E \left[e^{-rT} \Phi(S_T) \left(r + d \frac{\partial d}{\partial T} + \frac{1}{2T} \right) \right] \quad (3.25)$$

où

$$\frac{\partial d}{\partial T} = \frac{\left(-\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) - \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \right)}{2\sigma T^{3/2}}$$

Concernant le calcul de la dérivée seconde Gamma, les auteurs l'expriment en partant de l'équation (3.22) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dS_0^2} &= \frac{\partial^2}{\partial S_0^2} \int_0^{+\infty} e^{-rT} \Phi(x) f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-rT} \Phi(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial S_0^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-rT} \Phi(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial S_0^2} \frac{1}{f(x)} f(x) dx \\ &= E \left[e^{-rT} \Phi(S_T) \frac{\partial^2 f(S_T)}{\partial S_0^2} \frac{1}{f(S_T)} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

avec

$$\frac{\partial^2 f(S_T)}{\partial S_0^2} \frac{1}{f(S_T)} = \frac{d^2 - d\sigma\sqrt{T} - 1}{S_0^2\sigma^2T}$$

Cette formule permet également d'obtenir un estimateur sans biais de Gamma.

Il est à noter cependant que dans le cas du rapport de vraisemblance, le paramètre étudié pourrait ne pas apparaître dans la fonction de densité, auquel cas un changement de variables s'imposerait pour rendre la méthode applicable.

Les avantages et les inconvénients de ces deux méthodes sont explicités dans la section suivante.

3.3.4 Résultats donnés par les deux méthodes

Les auteurs, en plus du cas de l'option d'achat européenne appliquent leurs méthodes aux cas des options asiatiques et à volatilité stochastique. Ils comparent les résultats obtenus à ceux obtenus lorsque la méthode de resimulation est utilisée.

Dans le cas de l'option d'achat européenne pour laquelle il existe des formules explicites, l'estimation des greeks ainsi que l'écart type obtenus par resimulation sont identiques à ceux donnés par la méthode des trajectoires exception faite du Gamma pour lequel la méthode des trajectoires produit une estimation exacte. Ces deux méthodes génèrent des résultats meilleurs à ceux obtenus par la méthode du rapport de vraisemblance.

Concernant l'application aux options asiatiques auquel cas la fonction de payoff dépend de la moyenne des valeurs de l'actif sous-jacent pendant la durée de vie de l'option, on observe la même tendance des résultats que dans le cas de l'option d'achat européenne.

Pour valider leurs méthodes par rapport aux options à multiples variables

d'état, Broadie et Glasserman font une application sur les options à volatilité stochastique. Là également, la tendance des résultats est la même que dans les deux cas cités ci-dessus. Néanmoins, la méthode du rapport de vraisemblance n'est pas appliquée ici à cause de la complexité à définir les estimateurs.

Ces deux méthodes d'estimation des greeks requièrent un certain travail analytique dans le calcul des dérivées, des intégrales et dans la vérification des conditions de changement de variables afin d'obtenir des résultats fiables et sont plus complexes pour ce qui est de l'évaluation de la dérivée seconde. Elles sont toutes deux plus rapides que la technique de resimulation avec cependant une meilleure performance de la méthode des trajectoires quant il s'agit de la précision des résultats.

3.4 Extension des méthodes de Broadie et Glasserman (1996) au cas des options ayant plusieurs actifs sous-jacents

3.4.1 Particularités des options ayant plusieurs actifs sous-jacents

Une option portant sur plusieurs actifs sous-jacents (multi-asset option) est une option dont la fonction de paiement (payoff) dépend de deux ou plusieurs actifs. Ce type d'options appartient à la catégorie des options exotiques car elles sont spécifiquement créées pour répondre à un besoin particulier d'une

entreprise.

Les actifs sous-jacents peuvent être des actions, des devises, des indices boursiers, etc. Ils sont dans la majorité des cas modélisés par des processus stochastiques continus. Le prix de ce type d'option peut également être exprimé comme une espérance dans le cas multidimensionnel.

Tout comme l'évaluation des options standards (sur un actif sous-jacent), il existe pour certains cas des solutions fermées. Lorsque ces solutions analytiques ne s'appliquent pas, on peut alors avoir recours aux méthodes numériques. Une dimension de plus en plus grande devient vite une limite à l'usage des certaines méthodes (binomiales, Différences finies), auquel cas les méthodes Monte Carlo semblent être plus indiquées pour l'estimation.

Il existe différents types d'options sur plusieurs actifs sous-jacents :

Les options Panier

Les **options panier** (basket) sont des options dont le sous-jacent est un portefeuille d'actifs. Cette option ne prend pas en compte la somme des pondérations des actifs pris de façon indépendante mais repose plutôt sur un portefeuille constitués d'actifs avec des pondérations équivalentes ou non. La corrélation entre les actifs constituant le panier permet de générer une baisse de la volatilité et par conséquent un prix moins élevé que celui obtenu en sommant des options individuelles sur chacun des actifs. La première difficulté rencontrée dans l'évaluation de ces options est la détermination de la corrélation entre les

différents actifs. Par la suite, la dimension élevée et la possibilité d'un exercice prématuré peuvent rendre plus difficile la tâche de l'utilisateur.

Les options Rainbow

Les options rainbow sont des options dont la fonction de paiement (payoff) dépend de 2 ou plusieurs actifs risqués sous-jacents. Dans la catégorie des options rainbow, on retrouve :

- Les **options sur minimum / maximum** : il s'agit d'une option de type vanille avec cependant quelques spécificités. L'option porte sur plusieurs sous-jacents, mais à l'échéance, l'exercice portera sur un seul des actifs sous-jacents, celui ayant la valeur minimale ou maximale selon les cas.
- L'**option d'échange** comme son nom l'indique, permet à leur détenteur d'échanger un actif pour un autre. L'actif peut être une devise ou une action.
- Les **spread options** quant à eux correspondent à des options dont la fonction de paiement est basée sur la différence entre plusieurs actifs.
- Les **worst of / better of options** (alternative options) procurent à leur détenteur une fonction de paiement (payoff) correspondant à l'actif ayant la plus faible ou la plus forte valeur suivant les cas. Ces options peuvent inclure un paiement supplémentaire d'un montant donné, on parle alors de worst of / better of and cash options.

L'évaluation des options rainbow doit tenir compte de la particularité du produit dérivé mais aussi de la corrélation qui existe entre les différents actifs

en question.

Les options quantos

Les **quantos** ou cross currency derivative sont des produits dérivés pour lesquels la fonction de paiement (payoff) est définie par rapport à des actifs exprimés dans une certaine devise mais dont le paiement se fera dans une autre devise. L'option est alors exposé au taux de change entre les différentes devises.

3.4.2 Cadre théorique

Dans ce qui suit, nous nous proposons de faire une extension de la méthode des trajectoires et de celle du rapport de vraisemblance développées par Broadie et Glasserman (1996).

Pour cela, nous allons supposer le cas plus général d'une option européenne dont la fonction de paiement (payoff) Φ dépend de d actifs sous-jacents S et est indépendante de la trajectoire des actifs sous-jacents. Les actifs sous-jacents sont représentés par des mouvements browniens géométriques corrélés entre eux et suivent une distribution log-normale. Ces actifs, en monde neutre au risque, satisfont le système d'équations différentielles suivant :

$$dS_i(t) = S_i(t) r dt + S_i(t) \sigma_i dW_i(t)$$

pour $i = 1, \dots, d$, où σ représente la volatilité et W le mouvement brownien.

Notons ρ la matrice de corrélation des mouvements browniens et Σ la ma-

trice de variance-covariance définie par

$$\Sigma_{ik} = \sigma_i \sigma_k \rho_{ik}, \quad 1 \leq i, k \leq d$$

Puisque Σ est symétrique défini positif, il est possible d'obtenir par une décomposition de Cholesky une matrice triangulaire supérieure a contenant toute l'information de dépendance entre les mouvements browniens tel que

$$\Sigma = a^\top a$$

Cette réécriture de Σ nous permet d'écrire chaque actif sous-jacent sous la forme d'un mouvement brownien indépendant pondéré par le coefficient de dépendance :

$$S_i(t) = S_i(0) e^{\left(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2}\right)t + \sum_{k=1}^i a_{ki} Z_k(t)}$$

pour $i = 1, \dots, d$, $\Sigma_{ii} = \sigma_i^2$ et Z_1, \dots, Z_d des mouvement browniens indépendants.

On définit alors le vecteur de volatilité par $v = \vec{a} = (a_{11}, \dots, a_{1d}, a_{22}, \dots, a_{dd})$. Ainsi, la variation par rapport à chacun des éléments de \vec{a} ne constitue la variation par rapport à la volatilité des sous-jacents pris individuellement. Vega ici représente la sensibilité de l'option par rapport aux coefficients de volatilité présents dans le processus de diffusion des actifs sous-jacents.

Dans le cas, d'une option portant sur 2 actifs sous-jacents corrélés avec

$$S_1(t) = S_1(0) \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)t + \sigma_1 \sqrt{t} Z_1\right]$$

et

$$S_2(t) = S_2(0) \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)t + \rho \sigma_2 \sqrt{t} Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_2 \sqrt{t} Z_2\right].$$

Les coefficients de volatilité devant les mouvements browniens sont pour S_1 : σ_1 et pour S_2 : $\rho\sigma_2$ et $\sqrt{1 - \rho^2}\sigma_2$.

Quand aux dérivées croisées Γ_{ik} pour $i \neq k$, elles permettent de mesurer l'impact d'un mouvement simultané de deux actifs sous-jacents sur le prix de l'option.

Dans ce qui suit nous allons dans le cadre d'une simulation Monte Carlo déterminer les greeks d'une option portant sur plusieurs sous-jacents selon la méthode des trajectoires puis celle du rapport de vraisemblance.

3.4.3 Méthode des trajectoires

Dans le cadre d'une simulation des valeurs d'options européennes portant sur plusieurs sous-jacents, les titres peuvent être représentés comme suit :

$$(\tilde{S}_j)_i = s_i e^{(r - \frac{\sigma_{ii}}{2})\tau + \sqrt{\tau} \sum_{l=1}^i a_{li} Z_{jl}} \quad (3.27)$$

avec $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq N$, N étant le nombre de simulations effectuées, s est la valeur initiale du titre i , $Z = (Z_1, \dots, Z_d)^\top \sim N_d(0, 1)$ indépendants et $\tau = T - t$ la durée de vie restante avant l'échéance de l'option.

La valeur au temps t de l'option européenne venant à échéance au temps T est estimée par

$$\hat{V} = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j)$$

où Φ désigne la fonction de paiement de l'option.

Proposition 1 Si Φ est dérivable presque partout et admet des dérivées partielles, alors pour tout $i = 1, \dots, d$ la dérivée par rapport à un paramètre θ quelconque $\in (r, t, s_1, \dots, s_d, v_1, \dots, v_{d(d+1)/2})$ est :

$$\partial_\theta \hat{V} = \partial_\theta (e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^d \partial_k \Phi(\tilde{S}_j) \partial_\theta \tilde{S}_{jk},$$

où $\partial_k \Phi(s) = \frac{\partial}{\partial s_k} \Phi(s_1, \dots, s_d)$. Les estimateurs sans biais des dérivées partielles par rapport à chacun des paramètres sont :

Delta

$$\partial_{s_i} \hat{V} = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \frac{\tilde{S}_{ji}}{s_i}$$

Vega

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{a_{ii}} \hat{V} = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \tilde{S}_{ji} (\sqrt{\tau} Z_{ji} - a_{ii} \tau) \\ \text{pour } i = 1, \dots, d, \\ \partial_{a_{ik}} \hat{V} = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \partial_k \Phi(\tilde{S}_j) \tilde{S}_{jk} (\sqrt{\tau} Z_{ji} - \tau a_{ik}) \\ \text{pour } 1 \leq i < k \leq d. \end{array} \right.$$

Theta

$$-\partial_\tau \hat{V} = r \hat{V} - e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^d \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \left(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \sum_{k=1}^i a_{ki} Z_{jk} \right) \tilde{S}_{ji}$$

Rho

$$\partial_r \hat{V} = -\tau \hat{V} + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^d \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \tau \tilde{S}_{ji}$$

Gamma : Concernant les dérivées secondes, tout comme dans le cas à une dimension, la méthode des trajectoires ne permet pas de générer Gamma. Dans beaucoup de cas, les dérivées secondes de Φ sont nulles presque

partout. Ici également on utilisera la formule de Black-Scholes pour déterminer le Gamma par rapport à chacun des titres. Quant aux dérivées croisées, nous ne sommes pas en mesure de les évaluer non plus.

Pour plus de détail sur les calculs se référer à l'annexe A.

3.4.4 Méthode du rapport de vraisemblance

Dans le cas de multiples actifs sous-jacents, l'analogue de la fonction de vraisemblance (3.21), est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^d (a_{ii} x_i) (2\pi\tau)^{d/2}} e^{-\frac{1}{2\tau} \zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta}$$

avec $\Sigma^{-1} = (a^\top a)^{-1}$ et $\zeta_i = \ln\left(\frac{x_i}{s_i}\right) - \left(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2}\right) \tau$.

Remarquons que f est dérivable par rapport à chacun des paramètres qui nous intéresse. On peut alors représenter V en faisant apparaître $f(x)$ dans son expression :

$$V = e^{-r\tau} \int \Phi(x) f(x) dx$$

où Φ désigne la fonction de paiement de l'option.

Proposition 2 *Lorsque que le paramètre étudié apparaît dans la fonction de densité, l'estimation sans biais de la dérivée partielle (d'ordre 1) par rapport à ce paramètre est donnée par l'expression suivante :*

$$\widehat{\partial_\theta V} = \partial_\theta (e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \partial_\theta \{\ln f(x)\}_{|x=\tilde{S}_j} \quad (3.28)$$

Les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à chacun des paramètres étudiés sont :

Delta

$$\widehat{\partial_{s_i} V} = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{s_i \sqrt{\tau}} (a^{-1} Z_j)_i \Phi(\tilde{S}_j)$$

Vega

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\partial_{a_{ii}} V} = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ (a^{-1} Z_j)_i (Z_{ji} - \sqrt{\tau} a_{ii}) - \frac{1}{a_{ii}} \right\} \\ \text{pour } i = 1, \dots, d, \\ \widehat{\partial_{a_{ik}} V} = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) (a^{-1} Z_j)_k (Z_{ji} - \sqrt{\tau} a_{ik}) \\ \text{pour } 1 \leq i < k \leq d. \end{array} \right.$$

Theta

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_t V} &= -\widehat{\partial_\tau V} \\ &= \left(r + \frac{d}{2\tau} \right) \hat{V} - \\ &\quad \frac{e^{-r\tau}}{2\tau N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ (Z_j^\top Z_j) + 2\sqrt{\tau} \sum_{i=1}^d \left(r - \frac{\Sigma_{kk}}{2} \right) (a^\top Z_j)_k \right\} \end{aligned}$$

Rho

$$\widehat{\partial_r V} = -\tau e^{-r\tau} \hat{V} + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \sum_{k=1}^d (\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_k$$

L'estimateur sans biais d'une dérivée partielle (d'ordre 2) par rapport au paramètre s présent dans la fonction de densité est donné par :

$$\widehat{\partial_{s_i s_k} V} = \frac{1}{N} e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \{ \partial_{s_i} (\partial_{s_k} \ln f(x)) + (\partial_{s_i} \ln f(x)) (\partial_{s_k} \ln f(x)) \}$$

d'où

Gamma (dérivée seconde)

$$\partial_{S_i S_i} \widehat{V} = \frac{1}{N} e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ \frac{(\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_i^2 - (\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_i - (\Sigma^{-1})_{ii}}{S_i^2 \tau} \right\}$$

Gamma (dérivée croisée)

$$\partial_{S_i S_k} \widehat{V} = \frac{1}{N} e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ \frac{(a^{-1} Z_j)_i (a^{-1} Z_j)_k - (\Sigma^{-1})_{ik}}{\tau S_k S_i} \right\}$$

Les détails des calculs sont donnés dans l'annexe B.

Le chapitre suivant traitera de la mise en application des propositions (1) et (2).

Chapitre 4

Application numérique

Dans les chapitres précédents, nous avons déduit une estimation des paramètres de sensibilité des options sur plusieurs actifs sous-jacents à partir des approches proposées par Broadie et Glasserman.

Dans cette section, nous allons procéder à une application numérique sur des options à dimension N de nos estimations selon les 2 approches.

La première partie sera consacrée à une analyse comparative de nos estimations avec le modèle Black-Scholes pour une option d'échange d'un actif risqué pour un autre.

La seconde partie portera sur une option panier de dimension 2 et 5. Enfin la troisième partie viendra commenter et conclure les résultats obtenus.

4.1 L'option d'échange d'un actif risqué pour un autre

Une option d'échange d'un actif risqué pour un autre octroie à son détenteur le droit d'échanger une quantité déterminée d'un actif donné pour une certaine quantité d'un autre actif risqué spécifié et ce, à la date de maturité de l'option.

Considérons une option européenne $C(S_1, S_2)$ dont la fonction de paiement dépend de 2 actifs risqués. La valeur à l'échéance de cette option vaut

$$C(S_1, S_2) = \max(q_2 S_2 - q_1 S_1, 0) \quad (4.1)$$

où q_1 et q_2 sont des quantités positives et constantes.

La dynamique des actifs risqués est définie par :

$$\frac{dS_1}{S_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_1$$

$$\frac{dS_2}{S_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_2$$

où W_1 et W_2 sont 2 mouvements browniens dépendants de corrélation ρ .

4.1.1 Méthodes Monte Carlo pour la valeur et les paramètres de sensibilité pour une option d'échange

La valeur en monde neutre au risque de l'option d'échange est donnée par

$$C(t, S_1, S_2) = \exp(-r(T-t)) E[\Phi(q_1 S_1(T), q_2 S_2(T))] \quad (4.2)$$

avec

$$S_1(t) = S_1(0) \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)t + \sigma_1 \sqrt{t} Z_1\right]$$

et

$$S_2(t) = S_2(0) \exp\left[\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)t + \sigma_2 \sqrt{t} Z_2\right]$$

où $Z_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_3$, Z_1 et Z_3 étant des variables indépendantes $N(0, 1)$.

Les expressions de S_1 et S_2 permettent de réécrire (4.2) :

$$C(t, s_1, s_2) = e^{-r(T-t)} E \left\{ \max \left(q_2 s_2 e^{\left\{ \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_2 \sqrt{T-t} Z_2 \right\}} \right. \right. \\ \left. \left. - q_1 s_1 e^{\left\{ \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_1 \sqrt{T-t} Z_1 \right\}}, 0 \right) \right\}$$

A partir de cette expression, on peut déduire l'estimateur Monte Carlo sans biais de la valeur de l'option d'échange d'un actif risqué pour un autre \hat{V} au temps t :

$$\hat{V}(t, s_1, s_2) = \frac{e^{-r(T-t)}}{N} \sum_{j=1}^N \max \left(q_2 s_2 e^{\left\{ \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_2 \sqrt{T-t} Z_{2j} \right\}} \right. \\ \left. - q_1 s_1 e^{\left\{ \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_1 \sqrt{T-t} Z_{1j} \right\}}, 0 \right) \quad (4.3)$$

où $Z_{11}, \dots, Z_{1N}, Z_{31}, \dots, Z_{3N}$ sont des variables aléatoires indépendantes $N(0, 1)$ et $Z_{2j} = \rho Z_{1j} + \sqrt{1 - \rho^2} Z_{3j}$, $j = 1, \dots, N$.

Les estimations Monte Carlo des différents paramètres de sensibilité de (4.3) selon la méthode des trajectoires et celle du ratio de vraisemblance sont données par les propositions 1 et 2.

Afin de vérifier la précision de nos résultats sur ces estimations, nous les avons comparés à ceux générés dans un monde Black-Scholes.

4.1.2 Formules de Black-Scholes pour la valeur et les paramètres de sensibilités pour une option d'échange

Dans un modèle Black-Scholes, la valeur d'une option échange d'un actif risqué pour un autre est donnée par

$$C(t, S_1, S_2) = q_2 S_2(t) N(D_1) - q_1 S_1(t) N(D_2) \quad (4.4)$$

avec N la fonction cumulative normale,

$$D_1 = \frac{\ln\left(\frac{q_2 S_2(t)}{q_1 S_1(t)}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$D_2 = D_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

et $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$. Posons $\tau = T - t$. Cette expression de la valeur de l'option d'échange ne dépend pas du taux sans risque r . À partir de cette représentation de l'option d'échange tirée de Willmott (1998), l'on est à même d'en déduire une solution analytique des paramètres de sensibilité :

Proposition 3 *Les dérivées partielles premières par rapport aux actifs sous-jacents d'une option d'échange dans une formulation Black-Scholes sont données par :*

$$\Delta_1 = -q_1 N(D_2)$$

$$\Delta_2 = q_2 N(D_1)$$

Quant aux dérivées partielles secondes par rapport aux actifs sous-jacents, elles sont :

$$\Gamma_{11} = q_1 n(D_2) \frac{1}{S_1(t) \sigma \sqrt{\tau}}$$

$$\Gamma_{22} = q_2 n(D_1) \frac{1}{S_2(t) \sigma \sqrt{\tau}}$$

$$\Gamma_{12} = -q_1 n(D_2) \frac{1}{S_2(t) \sigma \sqrt{\tau}}$$

où $n(x)$ représente la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

Le paramètre de sensibilité Vega, sachant que $\Sigma = a^\top a$ avec

$$a = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho \sigma_2 \\ 0 & \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_2 \end{pmatrix},$$

se décompose en :

$$V_{a_{11}} = \left(\frac{a_{11} - a_{12}}{\sigma} \right) q_2 S_2(t) n(D_1) \sqrt{\tau}$$

$$V_{a_{12}} = V_{a_{21}} = \left(\frac{a_{12} - a_{11}}{\sigma} \right) q_2 S_2(t) n(D_1) \sqrt{\tau}$$

$$V_{a_{22}} = \left(\frac{a_{22}}{\sigma} \right) q_2 S_2(t) n(D_1) \sqrt{\tau}$$

La sensibilité par rapport au temps, Theta, est définie par

$$\Theta = -q_1 S_1(t) \sigma \frac{n(D_2)}{2\sqrt{\tau}}$$

Dans le cadre de notre formulation Black-Scholes, tel qu'on peut le voir dans (4.4), la sensibilité par rapport au taux d'intérêt sans risque est nulle puisque r n'apparaît pas dans la fonction de valeur de l'option.

$$Rho = 0$$

Nous avons ajouté les dérivées croisées afin de mesurer l'impact d'un mouvement simultané de la volatilité ou du prix de deux actifs sous-jacents.

Le détail des différentes formules est explicité en annexe C.

4.1.3 Description des données

Pour cette première application numérique, nous avons choisi 2 titres Intel (INT) et Microsoft (MSFT), tous deux listés sur le NASDAQ. Les données historiques utilisées sont les valeurs ajustées et portent sur une période allant du 27 Mai 2003 au 24 Mai 2005 pour un total de 503 observations :

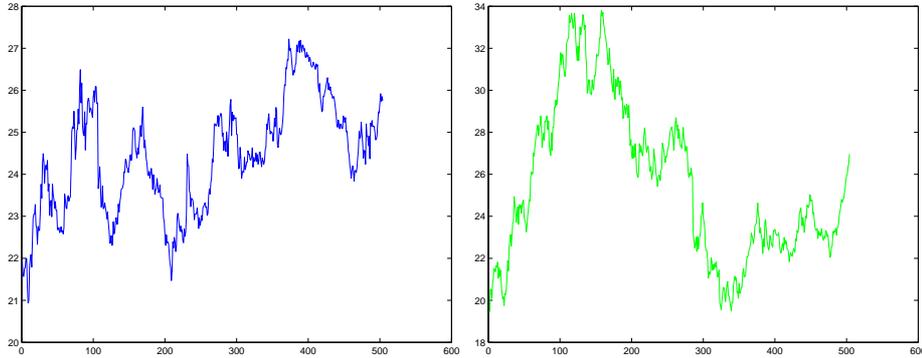


Figure 4.1: Evolution du titre MSFT Evolution du titre INT

Les estimations sur la volatilité et la corrélation des 2 titres ont été faites sur leurs rendements respectifs grâce aux fonctions Matlab COV (pour la variance covariance. Nous avons multiplié la matrice par 252 afin d'obtenir la variance annuelle) et CHOL (pour la décomposition de Cholesky). Nous avons la décomposition de Cholesky car elle permet une résolution simplifiée des matrices symétriques et produit une seule matrice après transformation, ce qui facilite les manipulations.

L'option d'échange porte sur $q_1 = q_2 = 1$ quantité de chacun des titres. S_1 représente le titre MSFT et S_2 le titre INT. La matrice de variance covariance exprimée à partir des rendements historiques est $\begin{pmatrix} 0.0388 & 0.0283 \\ 0.0283 & 0.0859 \end{pmatrix}$, ce qui correspond au vecteur $a = \begin{pmatrix} 0.1969 & 0.1436 \\ 0 & 0.2554 \end{pmatrix}$ et au coefficient de corrélation $\hat{\rho} = 0.4901$. La durée de vie de l'option $T = 6$ mois.

Pour la simulation Monte Carlo, le nombre de simulation $N = 1000000$ et le taux sans risque $r = 0.0259$.

Nous avons implanté les 2 méthodes d'estimation Monte Carlo ainsi que le modèle comparatif de Black-Scholes dans une routine Matlab. Les résultats obtenus pour différentes valeurs des sous-jacents sont présentés dans le tableau suivant 4.1.

Option d'échange entre 2 actifs risqués												
	S1=25.75 S2=26.96		Erreur stand		S1=21 S2=19		Erreur stand		S1=19 S2=25.75		Erreur stand	
Valeur de l'option												
Black-Scholes	2.60159				0.68031				6.83442			
Monte Carlo	2.60577				0.68209				6.83966			
Delta												
Black-Scholes	-0.5622 0.6335				-0.2628 0.3263				-0.9401 0.9591			
Trajectoires	-0.5626 0.6340		0.0010 0.0011		-0.2630 0.3266		0.0009 0.0011		-0.9398 0.9590		0.00052 0.00060	
Rapport de Vraisemblance	-0.5639 0.6351		0.0032 0.0028		-0.2636 0.3274		0.0018 0.0020		-0.9445 0.9613		0.0071 0.0043	
Vega												
Black-Scholes	1.4670 -1.4670 -1.4670 7.0238				0.9902 -0.9902 -0.9902 4.7409				0.3269 -0.3269 -0.3269 1.5650			
Trajectoires	1.4796 -1.0932 -1.0932 7.0373		0.0262 0.0263 0.0263 0.0281		0.9945 -0.8472 -0.8472 4.7499		0.0146 0.0145 0.0145 0.0194		0.3386 -0.3264 -0.3264 1.5907		0.0.257 0.0259 0.0259 0.0346	
Rapport de Vraisemblance	1.4451 -1.4724 -1.4724 7.0619		0.0773 0.0584 0.0584 0.1013		0.9827 -0.9893 -0.9893 4.7607		0.0350 0.0279 0.0279 0.0542		0.2823 - 0.3421 -0.3421 1.6175		0.1270 0.0852 0.0852 0.1351	
Gamma												
Black-Scholes	0.0829 -0.0792 -0.0792 0.0757				0.0842 -0.0930 -0.0930 0.1028				0.0339 -0.0250 -0.0250 0.0185			
Trajectoires	-				-							
Rapport de Vraisemblance	0.0808 -0.0776 -0.0776 0.0741		0.0017 0.0012 0.0012 0.0011		0.0820 -0.0909 -0.0909 0.1006		0.0013 0.0011 0.0011 0.0011		0.0328 -0.0253 -0.0253 0.0186		0.0047 0.0023 0.0023 0.0016	
Rho												
Black-Scholes	0				0				0			
Trajectoires	-2.5300e-014		0		1.0880e-014		0		7.8623e-013		0	
Rapport de Vraisemblance	0.00016		0		6.0023e-004		0		0.00030		0	
Theta												
Black-Scholes	-1.8722				-1.2637				-0.4171			
Trajectoires	-1.8761		0.0071		-1.2662		0.0050		-0.4237		0.0089	
Rapport de Vraisemblance	-1.8767		0.0290		-1.2675		0.0148		-0.4188		0.0421	

Tableau 4.1: Valeurs et paramètres de sensibilité d'une option d'échange

Le tableau ci-dessus présente 3 cas de figures : $S_1 < S_2$ l'option est légèrement dans la monnaie, $S_1 > S_2$, l'option est à la monnaie et enfin $S_1 < S_2$, l'option est très dans la monnaie. La colonne Erreur standard représente la variation en \pm qu'on pourrait observer pour un intervalle de confiance donné de 95%. L'erreur standard est calculée comme suit : $\pm 1.96 \frac{\sigma(\partial_\theta \hat{V})}{\sqrt{N}}$.

D'une manière générale, on note que la méthode des trajectoires produit une meilleure approximation des paramètres de sensibilité par rapport à celle du ratio de vraisemblance. De plus, l'erreur standard produite par la méthode de vraisemblance est plus grande que celle produite par la méthode des trajectoires surtout lorsque l'option est très dans la monnaie.

Tout comme dans l'article de Broadie et Glasserman (1996), la méthode des trajectoires est plus précise pour chacune des dérivées. Enfin, l'erreur standard la plus élevée est produite par la méthode du ratio de vraisemblance lorsque l'option est très dans la monnaie

4.2 L'option panier

La prochaine application numérique des propositions (1) et (2) porte sur une option panier de dimension $d = 2$ et $d = 5$. L'option panier est composée de d titres dont la dynamique est représentée par :

$$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i dt + \sigma_i dW_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, d$$

4.2.1 L'option panier de dimension 2

La valeur à l'échéance d'une option panier d'achat portant sur 2 titres risqués, de prix d'exercice K est définie par

$$C(T, S_1, S_2) = \max((S_1 + S_2) - K, 0)$$

L'estimateur Monte Carlo de la valeur de l'option panier au temps t est donné par

$$\hat{C}(t) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \max((\tilde{S}_{j1}(T) + \tilde{S}_{j2}(T)) - K, 0)$$

Les paramètres de sensibilité de cette option sont estimés par les propositions 1 et 2.

Description des données et résultats

Les données de cette simulation sont les mêmes que celles utilisées pour l'option d'échange dans la section précédente. La valeur initiale des titres S_1 et S_2 est de respectivement 25.76 et 26.96 et le prix d'exercice K est fixé à 52.9. La durée de vie de l'option, le taux sans risque, la matrice a ainsi que le nombre de simulations restent inchangés. Les résultats apparaissent dans le tableau 4.2.

Option Panier de 2 actifs risqués				
	S1=25.75		Erreur	
	S2=26.96		stand	
Option panier	3.8261			
Delta				
Resimulation	0.5758		0.0011	
	0.6062		0.0012	
Trajectoires	0.5757		0.0011	
	0.6062		0.0011	
Rapport de Vraisemblance	0.5760		0.0048	
	0.6044		0.0036	
Vega				
Resimulation	5.6746	5.9265	0.0271	0.0288
	5.9265	4.4236	0.0288	0.0317
Trajectoires	5.6744	6.0699	0.0268	0.0272
	6.0699	4.4231	0.0272	0.0313
Rapport de Vraisemblance	5.6791	5.7865	0.1555	0.0900
	5.7865	4.4325	0.0900	0.1163
Gamma				
Resimulation	0.0495	0.0482	0.0023	0.0012
	0.0482	0.0471	0.0012	0.0012
Trajectoires	-	-		
Rapport de Vraisemblance	0.0489	0.0470	0.0023	0.0012
	0.0470	0.0466	0.0012	0.0012
Rho				
Resimulation	15.5862		0.0293	
Trajectoires	15.4849		0.0287	
Rapport de Vraisemblance	13.9344		0.0700	
Theta				
Resimulation	-3.8868		0.0000	
Trajectoires	-3.7869		0.0120	
Rapport de Vraisemblance	-3.8383		0.0485	

Tableau 4.2: Valeurs et paramètres de sensibilité d'une option panier de 2 titres

Le calcul des paramètres de sensibilité pour l'option panier ne diffère pas de celui de l'option d'échange. La variante est la fonction de paiement, le reste du calcul reste inchangé.

A des fins de comparaison, nous avons ajouté la méthode de resimulation. Pour cela, nous avons perturbé les paramètres étudiés de $h = 0.0001$ (pour Gamma, $h = 0.05$). Le choix de h est le même que dans notre article de référence. Tout comme dans Broadie et Glasserman (1996), on note que la méthode des trajectoires génère des résultats très proches de ceux de la resimulation.

La tendance observée des résultats est la même que dans le précédent exemple : les valeurs données par les deux méthodes sont proches, et la méthode de vraisemblance génère plus d'incertitude que celle des trajectoires.

Sur un ordinateur de 1GB de Ram, les résultats pour 1000000 de trajectoires sont générés en 1.9929 secondes pour la méthode des trajectoires, 2.0730 secondes pour la méthode du ratio de vraisemblance et 3.9857 secondes pour la resimulation. La resimulation requiert 2 fois plus de temps de calcul que les méthodes des trajectoires et du ratio de vraisemblance.

4.2.2 L'option panier de dimension 5

La valeur d'une option panier d'achat portant sur 5 titres risqués avec un prix d'exercice K est définie par

$$C(T, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5) = \max((S_1(T) + S_2(T) + S_3(T) + S_4(T) + S_5(T)) - K, 0)$$

L'estimateur Monte Carlo de la valeur de l'option panier au temps t est donné par

$$\hat{C} = e^{-r(T-t)} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \max \left(\sum_{k=1}^5 \tilde{S}_{jk}(T) - K, 0 \right).$$

Les paramètres de sensibilité de cette option sont estimés par les propositions (1) et (2).

Description des données et résultats

Pour cet exemple, nous conservons les données historiques sur les deux titres utilisées pour les exemples précédents. Nous avons rajouté, pour le même nombre d'observations sur la même période, 3 autres titres listés sur le Nasdaq à notre panier, APPLE, DELL et CISCO. Leurs évolutions sont présentées ci-dessus :

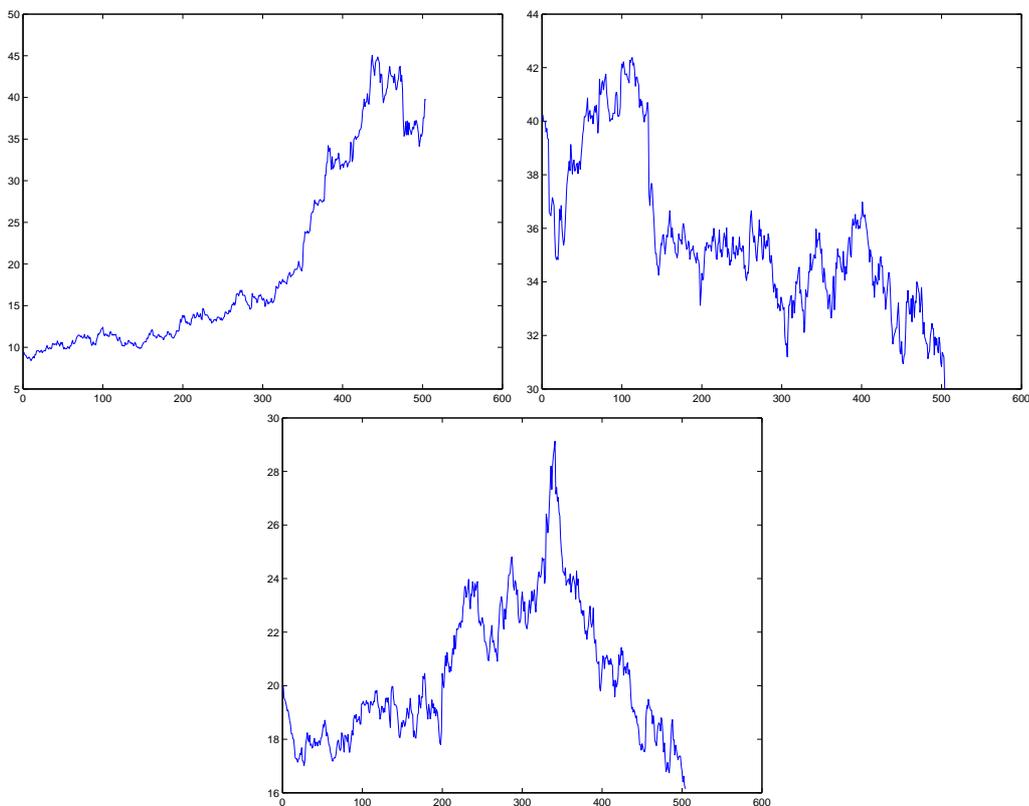


Figure 4.2: Evolution des Titres APPLE, DELL et CISCO

La valeur initiale des titres S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 est respectivement 25.76, 26.96 19.15, 35.05 et 21.5. Le prix d'exercice K est fixé à la monnaie à 129.28.

La matrice a est donnée par

$$a = \begin{pmatrix} 0.1969 & 0.1436 & 0.1307 & 0.0035 & -0.0246 \\ 0 & 0.2554 & 0.0805 & 0.0161 & -0.027 \\ 0 & 0 & 0.3659 & 0.0022 & -0.0103 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2184 & 0.1675 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2441 \end{pmatrix}$$

et la matrice de corrélation est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4901 & 0.3295 & 0.0158 & -0.0823 \\ 0.4901 & 1 & 0.3383 & 0.0719 & -0.1193 \\ 0.3295 & 0.3383 & 1 & 0.0293 & -0.0773 \\ 0.0158 & 0.0719 & 0.0293 & 1 & 0.5513 \\ -0.0823 & -0.1193 & -0.0773 & 0.5513 & 1 \end{pmatrix}$$

La durée de vie de l'option, le taux sans risque ainsi que le nombre de simulations restent inchangés. Les résultats apparaissent dans le tableau 4.3.

Option Panier de 5 actifs risqués											
S1=25.75 S2=26.96 S3=19.15 S4=35.05 S5=21.5											
											Erreur
Valeur de l'option											
Monte Carlo	5.99698										
Delta											
Trajectoires	0.5291										0.0011
	0.5513										0.0011
	0.5641										0.0012
	0.5361										0.0011
	0.5360										0.0011
Rapport de Vraisemblance	0.5251										0.0074
	0.5535										0.0051
	0.5629										0.0051
	0.5343										0.0053
	0.5378										0.0063
Vega											
Trajectoires	4.0132	5.2476	3.6504	5.3982	3.1312	0.0274	0.0301	0.0220	0.0355	0.0218	
	5.2476	3.2419	2.6937	4.2735	2.3532	0.0301	0.0308	0.0219	0.0366	0.0225	
	3.6504	2.6937	1.9019	3.3317	1.9601	0.0220	0.0219	0.0236	0.0372	0.0230	
	5.3982	4.2735	3.3317	5.6483	4.4494	0.0355	0.0366	0.0372	0.0382	0.0242	
	3.1312	2.3532	1.9601	4.4494	1.6625	0.0218	0.0225	0.0230	0.0242	0.0242	
Rapport de Vraisemblance	4.1203	4.1745	2.9469	5.4362	3.3075	0.2128	0.1203	0.0843	0.1678	0.1237	
	4.1745	3.2131	2.2663	4.0718	2.5281	0.1203	0.1540	0.0806	0.1568	0.1157	
	2.9469	2.2663	1.9175	3.3136	1.9908	0.0843	0.0806	0.1061	0.1568	0.1134	
	5.4362	4.0718	3.3136	5.6567	3.5587	0.1678	0.1568	0.1557	0.2078	0.1191	
	3.3075	2.5281	1.9908	3.5587	1.7460	0.1237	0.1157	0.1134	0.1191	0.1420	
Gamma											
Trajectoires											
Rapport de Vraisemblance	0.0299	0.0271	0.0265	0.0280	0.0275	0.0034	0.0018	0.0017	0.0018	0.0021	
	0.0271	0.0278	0.0272	0.0269	0.0276	0.0018	0.0016	0.0012	0.0012	0.0015	
	0.0265	0.0272	0.0284	0.0269	0.0264	0.0017	0.0012	0.0015	0.0012	0.0015	
	0.0280	0.0269	0.0269	0.0279	0.0280	0.0018	0.0012	0.0012	0.0018	0.0016	
	0.0275	0.0276	0.0264	0.0280	0.0302	0.0021	0.0015	0.0015	0.0016	0.0025	
Rho											
Trajectoires	31.7654										0.0625
Rapport de Vraisemblance	32.1730										0.1597
Theta											
Trajectoires	-6.3720										0.0198
Rapport de Vraisemblance	-7.4213										0.0986

Tableau 4.3: Valeurs et paramètres de sensibilité d'une option panier de 5 titres

Le but de cet exercice est de montrer que les extensions que nous proposons dans les propositions 1 et 2 sont également facilement applicables à des options de dimension plus élevée. L'application des deux propositions à la dimension 5 de l'option panier ne requiert pas changement dans les formules. Quant à l'implémentation, il n'y a pas de calcul supplémentaire par rapport à l'option de dimension 2. Enfin, pour ce qui est de la précision des estimateurs, on conserve la même tendance observée avec les deux premiers exemples.

Chapitre 5

Conclusion

Ce mémoire a porté sur l'estimation des paramètres de sensibilité "Greeks" des valeurs d'options portant sur plusieurs actifs sous-jacents au moyen des simulations Monte Carlo.

Pour Cela, nous avons choisi comme approche de départ celles proposées par Broadie et Glasserman (1996) : la méthode des trajectoires "Pathwise method" et celle du ratio de vraisemblance "Likelihood ratio method". Cet article s'intéressait au cas des options comportant un actif sous-jacent.

La problématique ici était de transposer ces méthodes aux cas d'options dont la valeur dépend de plusieurs actifs sous-jacents pouvant être corrélés entre eux.

Pour ce faire, nous avons utilisé les simulations Monte Carlo comme méthode numérique pour leurs performances dans l'évaluation des valeurs d'op-

tions comportant plusieurs variables d'état.

Dans un premier temps nous avons exprimé les actifs sous-jacents en fonction de leur dépendance les uns des autres grâce à une décomposition de Cholesky.

Pour la méthode des trajectoires, nous avons écrit l'estimateur Monte Carlo de la valeur de l'option à partir des différentes trajectoires possibles pour chacun des actifs sous-jacents. Nous avons ensuite déduit les dérivées partielles qui nous intéressent de la valeur de l'option sur chacune des trajectoires.

Concernant la méthode du ratio de vraisemblance, nous avons exprimé l'estimateur Monte Carlo de la valeur de l'option sous forme d'une intégrale de la fonction de densité du prix de l'option. Nous avons obtenu nos dérivées partielles de la valeur de l'option en dérivant la fonction de densité par rapport aux paramètres qui nous intéressaient.

En procédant ainsi, nous avons pu dégager une expression des estimateurs de Delta, Vega, Rho et Theta pour chacune des deux méthodes et l'estimateur de Gamma pour la méthode du rapport de vraisemblance.

Nous avons ensuite testé la performance de nos estimateurs en comparant les résultats qu'ils produisaient à ceux générés par le modèle de Black-Scholes et par la technique de resimulation. Notre extension de Broadie et Glasserman (1996) permet d'approximer les paramètres de sensibilité d'options portant sur plusieurs actifs sous-jacents. De manière générale, la méthode des trajectoires est plus précise que celle du rapport de vraisemblance et les estimateurs sont plus précis lorsque l'option est à la monnaie.

Enfin pour compléter notre étude, nous avons montré que ces extensions étaient facilement adaptables à des options de différentes dimensions, nous avons illustré les cas avec 2 et 5 actifs sous-jacents.

Ces extensions sont facilement applicables et implantables et requièrent un court temps de simulation (1.9929 secondes et 2.0730 secondes pour les méthodes des trajectoires et du ratio de vraisemblance contre 3.9857 secondes pour la resimulation). Elles seraient donc très utiles à un usager qui souhaite connaître et contrôler le risque de son option multidimensionnelle. Dans un souci de précision, celui-ci pourrait ajouter des techniques de réduction de variance à son modèle afin d'en améliorer la convergence.

Enfin pour une meilleure généralisation, il serait intéressant d'étudier l'applicabilité de la méthode des trajectoires aux cas d'options dont la fonction de paiement est discontinue. Il y a lieu de penser que cela fonctionne si l'ensemble des discontinuités est de mesure de Lebesgue nulle.

Appendices A

Méthode des trajectoires

A.1 Forme générale

Dans le cadre d'une simulation des valeurs d'options européennes portant sur plusieurs sous-jacents, les titres peuvent être représentés comme suit :

$$(\tilde{S}_j)_i = s_i e^{\left(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2}\right)\tau + \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^i a_{ki} Z_{jk}} \quad (\text{A.1})$$

avec $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq N$, $Z = (Z_1, \dots, Z_d)^\top \sim N_d(0, 1)$ indépendants et $\tau = T - t$ la durée de vie restante avant l'échéance de l'option.

La valeur à l'échéance T de l'option européenne venant au temps t donnée par

$$\begin{aligned}
\hat{V} &= e^{-r\tau} E \{ \Phi(S_T) \} \\
&\approx e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j)
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Si Φ est dérivable presque partout et admet des dérivées partielles, alors pour tout $i = 1, \dots, d$, la dérivée par rapport à un paramètre θ se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
\partial_\theta \hat{V} &= \partial_\theta(e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \partial_\theta \{ \Phi(\tilde{S}_j) \} \\
&= \partial_\theta(e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\nabla \Phi(\tilde{S}_j))^\top \partial_\theta(\tilde{S}_j) \\
&= \partial_\theta(e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^d \partial_k \Phi(\tilde{S}_j) \partial_\theta \tilde{S}_{jk}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

A.2 Delta

A partir de l'expression générale de $\partial_\theta \hat{V}$, déterminons cette dérivée pour $\theta = S$ c'est à dire Δ .

$$\begin{aligned}
\partial_{s_i} \hat{V} &= \partial_{s_i}(e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla \Phi(\tilde{S}_j)^\top \partial_{s_i} \tilde{S}_j \\
&= e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \partial_{s_i} \tilde{S}_{ji}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

où $\partial_i \Phi$ correspond à la dérivée par rapport à la $i^{\text{ème}}$ composante de Φ , car pour $i \neq k$, $(\partial_{s_i} \tilde{S}_j)_k = 0$.

Trouvons ensuite $\partial_{s_i} \tilde{S}_{ji}$. On a

$$\begin{aligned} \partial_{s_i} (\tilde{S}_j)_i &= \partial_{s_i} \left(s_i e^{(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2})\tau + \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^i a_{ki} Z_{jk}} \right) \\ &= e^{(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2})\tau + \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^i a_{ki} Z_{jk}} \\ &= \frac{\tilde{S}_{ji}}{s_i}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

d'où

$$\hat{\Delta} = \partial_{s_i} \hat{V} = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \partial_i \Phi (\tilde{S}_{ji}) \frac{\tilde{S}_{ji}}{s_i} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d. \quad (\text{A.6})$$

A.3 Vega

Le même raisonnement appliqué génère l'estimateur sans biais de $\hat{\mathcal{V}}$. Puisque le vecteur de volatilité est défini par a^\top , la dérivée partielle par rapport à la volatilité sera calculée par rapport à $(a_{11}, \dots, a_{1d}, a_{22}, \dots, a_{2d}, \dots, a_{dd})^\top$.

$$\begin{aligned} \partial_{a_{ik}} &= \partial_{a_{ik}} (e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi (\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \partial_k \Phi (\tilde{S}_j) \partial_{a_{ik}} \tilde{S}_{jk} \\ &= e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \partial_k \Phi (\tilde{S}_j) \partial_{a_{ik}} \tilde{S}_{jk} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Évaluons d'abord cette dérivée pour $i = k$, soit $\partial_{a_{ii}} \tilde{S}_{ji}$.

On a

$$\begin{aligned}\partial_{a_{ii}}(\tilde{S}_j)_i &= \partial_{a_{ii}} \left(s_i e^{(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2})\tau + \sqrt{\tau} \sum_{l=1}^i a_{il} Z_{jl}} \right) \\ &= \tilde{S}_{ji} (\sqrt{\tau} Z_{ji} - a_{ii} \tau)\end{aligned}\tag{A.8}$$

et l'on obtient

$$\partial_{a_{ii}} \hat{V} = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \tilde{S}_{ji} (\sqrt{\tau} Z_{ji} - a_{ii} \tau).\tag{A.9}$$

A présent, déterminons cette dérivée pour $1 \leq i < k \leq d$, soit $\partial_{a_{ik}} \tilde{S}_{jk}$:

$$\begin{aligned}\partial_{a_{ik}}(\tilde{S}_j)_k &= \partial_{a_{ik}} \left(s_k e^{(r - \frac{\Sigma_{kk}}{2})\tau + \sqrt{\tau} \sum_{l=1}^k a_{kl} Z_{jl}} \right) \\ &= \tilde{S}_{jk} (\sqrt{\tau} Z_{ji} - a_{ik} \tau),\end{aligned}\tag{A.10}$$

et on arrive à

$$\partial_{a_{ik}} \hat{V} = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \partial_k \Phi(\tilde{S}_j) \tilde{S}_{jk} (\sqrt{\tau} Z_{ji} - a_{ik} \tau).\tag{A.11}$$

A.4 Theta

Une autre des dérivées est celle par rapport à τ

$$\begin{aligned}\partial_\tau \hat{V} &= \partial_\tau (e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^d \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \partial_\tau \tilde{S}_{ji} \\ &= (-r) e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^d \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \partial_\tau \tilde{S}_{ji} \\ &= -r \hat{V} + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^d \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \partial_\tau \tilde{S}_{ji}.\end{aligned}\tag{A.12}$$

Cherchons $\partial_\tau \tilde{S}_{ji}$:

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \tilde{S}_{ji} &= \partial_\tau \left(s_i e^{(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2})\tau + \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^i a_{ki} Z_{jk}} \right) \\
&= \left(\left(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \sum_{k=1}^i a_{ki} Z_{jk} \right) s_i e^{(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2})\tau + \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^i a_{ki} Z_{jk}} \\
&= \left(\left(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2} \right) + \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \sum_{k=1}^i a_{ki} Z_{jk} \right) \tilde{S}_{ji}. \tag{A.13}
\end{aligned}$$

En remplaçant (A.13) dans (A.12), on obtient

$$-\partial_\tau \hat{V} = r\hat{V} - e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^d \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \left(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \sum_{k=1}^i a_{ki} Z_{jk} \right) \tilde{S}_{ji}. \tag{A.14}$$

A.5 Rho

Enfin, la dérivée par rapport au taux sans risque r s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned}
\partial_r \hat{V} &= \partial_r (e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^d \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \partial_r \tilde{S}_{ji} \\
&= (-\tau) e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^d \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \partial_r \tilde{S}_{ji} \\
&= -\tau \hat{V} + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^d \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \partial_r \tilde{S}_{ji}. \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Cherchons $\partial_r \tilde{S}_{ji}$:

$$\begin{aligned}
\partial_r \tilde{S}_{ji} &= \partial_r \left(s_i e^{(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2})\tau + \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^i a_{ki} Z_{jk}} \right) \\
&= \tau \left(s_i e^{(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2})\tau + \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^i a_{ki} Z_{jk}} \right) \\
&= \tau \tilde{S}_{ji}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

En remplaçant dans (A.16) l'équation (A.15), on arrive à

$$\partial_r \hat{V} = -\tau \hat{V} + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^d \partial_i \Phi(\tilde{S}_j) \tau \tilde{S}_{ji}. \tag{A.17}$$

A.6 Gamma

Concernant les dérivées secondes, tout comme dans le cas à une dimension, la méthode des trajectoires ne permet pas générer Gamma. Dans beaucoup de cas, les dérivées secondes de Φ sont nulles presque partout. Ici également on utilisera la formule de Black-Scholes pour déterminer le Gamma par rapport à chacun des titres. Quant aux dérivées croisées, nous ne sommes pas en mesure de les évaluer non plus.

Appendices B

Méthode du rapport de vraisemblance

B.1 Forme générale

Selon la distribution des actifs sous-jacents, la valeur de l'option est modélisée comme suit :

$$\begin{aligned} V &= e^{-r\tau} E \{ \Phi(S_T) \} \\ &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \left(s_i e^{(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2})\tau + \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^i a_{ki} z_k} \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d z_k^2}}{(2\pi)^{d/2}} dz \end{aligned}$$

pour $1 \leq i \leq d$

Nous cherchons à définir la fonction du rapport de vraisemblance dans le cas d'actifs sous-jacents multiples. Pour ce faire, effectuons le changement de

variables suivant :

$$x_i = s_i e^{\left(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2}\right)\tau + \sqrt{\tau} \sum_{k=1}^i a_{ki} z_k}, \quad i = 1, \dots, d,$$

où la densité jointe des z est donnée par

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d z_k^2}.$$

Pour trouver $dx = \text{Jacobiën} dz$, remarquons que

$$\frac{\partial x_i}{\partial z_k} = x_i a_{ki} \sqrt{\tau} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d \text{ et } k \leq i$$

\implies

$$\begin{aligned} dx &= \left(\prod_{i=1}^d x_i \right) \det(a) \\ &= \left(\prod_{i=1}^d a_{ii} x_i \right) \tau^{d/2}. \end{aligned}$$

De même,

$$z^\top z = \frac{1}{\tau} \zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta$$

avec $\Sigma^{-1} = (a^\top a)^{-1}$ et $\zeta = a^\top Z \sqrt{\tau}$. On peut alors écrire la fonction de densité de x comme suit :

$$f(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^d (a_{ii} x_i) (2\pi\tau)^{d/2}} e^{-\frac{1}{2\tau} \zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta}$$

Remarquons que f est dérivable par rapport à chacun des paramètres qui nous intéresse.

On peut alors représenter V en faisant apparaître $f(x)$ dans son expression :

$$V = e^{-r\tau} \int \Phi(x) f(x) dx$$

et par conséquent, on a

$$\partial_\theta V = \partial_\theta (e^{-r\tau}) \int \Phi(x) f(x) dx + e^{-r\tau} \int \Phi(x) \partial_\theta f(x) dx = \partial_\theta (e^{-r\tau}) I + e^{-r\tau} J, \quad (\text{B.1})$$

où

$$I = \int \Phi(x) f(x) dx$$

et

$$J = \int \Phi(x) \partial_\theta f(x) dx.$$

\tilde{S} étant une variable aléatoire, I peut être estimé par :

$$\hat{I} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j). \quad (\text{B.2})$$

De même,

$$\begin{aligned} J &= \int \Phi(x) \partial_\theta f(x) dx \\ &= \int \Phi(x) \frac{\partial_\theta f(x)}{f(x)} f(x) dx \\ &= \int \{\Phi(x) \partial_\theta \ln f(x)\} f(x) dx \\ &= E \left[\Phi(\tilde{S}) \partial_\theta \ln f(x) \right] \quad \text{et donc peut être estimé par} \\ \hat{J} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \partial_\theta \{\ln f(x)\}_{|x=\tilde{S}_j}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

En remplaçant I et J dans (B.1) par leurs estimations (B.2) et (B.3), une estimation sans biais de $\partial_\theta V$ est donnée par

$$\widehat{\partial_\theta V} = \partial_\theta (e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \partial_\theta \{\ln f(x)\}_{|x=\tilde{S}_j}. \quad (\text{B.4})$$

B.2 Delta

Calculons l'estimation de la dérivée partielle de V par rapport à S_i :

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_{S_i} V} &= \partial_{S_i} (e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \partial_{S_i} \{\ln f(x)\}_{|x=\tilde{S}_j} \\ &= e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \partial_{S_i} \{\ln f(x)\}_{|x=\tilde{S}_j}. \end{aligned}$$

Calculons à présent $\partial_{S_i} \ln f(x)$:

$$\begin{aligned} \partial_{S_i} \ln f(x) &= -\frac{1}{2\tau} \partial_{S_i} (\varsigma^\top \Sigma^{-1} \varsigma) - \partial_{S_i} \ln \left(x_1 \dots x_d a_{11} a_{22} \dots a_{dd} (2\pi\tau)^{d/2} \right) \\ &= -\frac{1}{2\tau} \partial_{S_i} (\varsigma^\top \Sigma^{-1} \varsigma) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Cette dernière dérivée s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned} \partial_{S_i} (\varsigma^\top \Sigma^{-1} \varsigma) &= (\partial_{S_i} \varsigma^\top) \Sigma^{-1} \varsigma + \varsigma^\top (\partial_{S_i} \Sigma^{-1}) \varsigma + \varsigma^\top \Sigma^{-1} (\partial_{S_i} \varsigma) \\ &= (\partial_{S_i} \varsigma^\top) \Sigma^{-1} \varsigma + \varsigma^\top \Sigma^{-1} (\partial_{S_i} \varsigma) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

où

$$\partial_{S_i} \varsigma^\top = (\partial_{S_i} \varsigma_1, \partial_{S_i} \varsigma_2, \dots, \partial_{S_i} \varsigma_i, \dots, \partial_{S_i} \varsigma_d).$$

$\partial_{S_i} \varsigma_k = 0$ pour $i \neq k$ car $\varsigma_k = \ln\left(\frac{x_k}{S_k}\right) - \left(r - \frac{\Sigma_{kk}}{2}\right)\tau$ n'est pas une fonction de S_i pour $i \neq k$, et donc

$$\partial_{S_i} \varsigma^\top = (0, \dots, 0, \dots, \partial_{S_i} \varsigma_i, \dots, 0)$$

et

$$\begin{aligned} \partial_{S_i} \varsigma_i &= \partial_{S_i} \left(\ln\left(\frac{x_i}{S_i}\right) - \left(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2}\right)\tau \right) \\ &= -\frac{1}{S_i}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$(\partial_{S_i} \varsigma) \Sigma^{-1} \varsigma = -\frac{1}{S_i} (\Sigma^{-1} \varsigma)_i. \quad (\text{B.7})$$

Preuve. Preuve de (B.7) (Rémillard (2004))

$$\begin{aligned} (\partial_{S_i} \varsigma^\top) \Sigma^{-1} \varsigma &= \left(0, \dots, -\frac{1}{S_i}, 0, \dots, 0\right) \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & \cdots & \Sigma_{1d}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{d1}^{-1} & \cdots & \Sigma_{dd}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \vdots \\ \zeta_d \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{S_i} (\Sigma_{i1}^{-1}, \dots, \Sigma_{id}^{-1}) \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \vdots \\ \zeta_d \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{S_i} \sum_{k=1}^d \Sigma_{ik}^{-1} \varsigma_k \end{aligned}$$

Calculons $\Sigma^{-1} \varsigma$:

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & \cdots & \Sigma_{1d}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{d1}^{-1} & \cdots & \Sigma_{dd}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \vdots \\ \zeta_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^d \Sigma_{1k}^{-1} \varsigma_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^d \Sigma_{dk}^{-1} \varsigma_k \end{pmatrix}$$

la i ème ligne correspond à $\sum_{k=1}^d \Sigma_{ik}^{-1} \zeta_k = (\Sigma^{-1} \zeta)_i$ ■

Par la suite,

$$\begin{aligned} \zeta^\top \Sigma^{-1} (\partial_{S_i} \zeta) &= (\zeta^\top \Sigma^{-1})_i \left(-\frac{1}{S_i} \right) \\ &= -\frac{1}{S_i} (\Sigma^{-1} \zeta)_i \end{aligned} \quad (B.8)$$

car $\partial_{S_i} \zeta^\top = (0, \dots, -\frac{1}{S_i}, 0, \dots, 0)$ et puisque Σ est symétrique alors $(\zeta^\top \Sigma^{-1})_i = (\Sigma^{-1} \zeta)_i$.

En remplaçant (B.7) et (B.8) dans (B.6) on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_{S_i} (\zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta) &= -\frac{1}{S_i} \{ (\Sigma^{-1} \zeta)_i + (\Sigma^{-1} \zeta)_i \} \\ &= -\frac{2}{S_i} (\Sigma^{-1} \zeta)_i \end{aligned}$$

On peut alors réécrire (B.5)

$$\begin{aligned} \partial_{S_i} \{ \ln f(x) \}_{|x=\tilde{S}_j} &= -\frac{1}{2\tau} \partial_{S_i} (\zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta) \\ &= -\frac{1}{2\tau} \left(-\frac{2}{S_i} (\Sigma^{-1} \zeta)_i \right) \\ &= \frac{1}{S_i \tau} (\Sigma^{-1} \zeta)_i \\ &= \frac{1}{S_i \tau} (\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_i \\ &= \frac{1}{S_i \sqrt{\tau}} (a^{-1} Z_j)_i \end{aligned}$$

car $(\Sigma^{-1} \zeta)_i = (\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_i$ pour $x = \tilde{S}_j$.

Il en résulte l'expression suivante de Delta

$$\widehat{\partial_{S_i} V} = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{S_i \sqrt{\tau}} (a^{-1} Z_j)_i \Phi(\tilde{S}_j) \quad (\text{B.9})$$

B.3 Gamma

On a

$$\partial_{S_i S_k} V = \partial_\theta (e^{-r\tau}) \int \Phi(x) f(x) dx + e^{-r\tau} \int \Phi(x) \partial_{S_i S_k} f(x) dx \quad (\text{B.10})$$

L'estimation de $I = \int \Phi(x) f(x) dx$ reste telle que trouvée à l'équation (B.2). Évaluons $J = \int \Phi(x) \partial_{S_i S_k} f(x) dx$.

On a

$$\begin{aligned} J &= \int \Phi(x) \partial_{S_i S_k} f(x) dx \\ &= \int \Phi(x) \frac{\partial_{S_i} (\partial_{S_k} f(x))}{f(x)} f(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Or,

$$\partial_{S_i} (\partial_{S_k} \ln f(x)) = \frac{\partial_{S_i} \partial_{S_k} f(x)}{f(x)} - \left(\frac{\partial_{S_i} f(x)}{f(x)} \right) \left(\frac{\partial_{S_k} f(x)}{f(x)} \right) \quad (\text{B.12})$$

d'où

$$\frac{\partial_{S_i} \partial_{S_k} f(x)}{f(x)} = \partial_{S_i} (\partial_{S_k} \ln f(x)) + (\partial_{S_i} \ln f(x)) (\partial_{S_k} \ln f(x)) \quad (\text{B.13})$$

Ceci nous permet de réécrire J comme suit :

$$\begin{aligned} J &= \int \Phi(x) \{ \partial_{S_i} (\partial_{S_k} \ln f(x)) + (\partial_{S_i} \ln f(x)) (\partial_{S_k} \ln f(x)) \} f(x) dx \\ &= E \left[\Phi(\tilde{S}) \{ \partial_{S_i} (\partial_{S_k} \ln f(x)) + (\partial_{S_i} \ln f(x)) (\partial_{S_k} \ln f(x)) \} \right], \end{aligned}$$

qui peut être estimée par

$$\hat{J} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \{ \partial_{S_i} (\partial_{S_k} \ln f(x)) + (\partial_{S_i} \ln f(x)) (\partial_{S_k} \ln f(x)) \}. \quad (\text{B.14})$$

En remplaçant I et J dans (B.10) par leurs estimations, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_{S_i S_k} V} &= \hat{I} \partial_{S_i S_k} (e^{-r\tau}) + e^{-r\tau} \hat{J} \\ &= e^{-r\tau} \hat{J} \\ &= \frac{1}{N} e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \{ \partial_{S_i} (\partial_{S_k} \ln f(x)) + (\partial_{S_i} \ln f(x)) (\partial_{S_k} \ln f(x)) \}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

avec

$$\partial_{S_i} \ln f(x) = \frac{1}{\tau S_i} (\Sigma^{-1} \zeta)_i \quad (\text{B.16})$$

et

$$\partial_{S_k} \ln f(x) = \frac{1}{\tau S_k} (\Sigma^{-1} \zeta)_k \quad (\text{B.17})$$

ce qui nous permet de réécrire (B.15) comme suit :

$$\widehat{\partial_{S_i S_k} V} = \frac{1}{N} e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ \frac{1}{S_i S_k \tau^2} (\Sigma^{-1} \zeta)_i (\Sigma^{-1} \zeta)_k + \partial_{S_i} (\partial_{S_k} \ln f(x)) \right\}. \quad (\text{B.18})$$

Calculons $\partial_{S_i} (\partial_{S_k} \ln f(x))$:

$$\begin{aligned} \partial_{S_i} (\partial_{S_k} \ln f(x)) &= \partial_{S_i} \left\{ \frac{1}{\tau S_k} (\Sigma^{-1} \zeta)_k \right\} \\ &= \frac{1}{\tau} \partial_{S_i} \left\{ \frac{1}{S_k} \sum_{l=1}^d (\Sigma^{-1})_{kl} \zeta_l \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Si $i = k$ alors,

$$\begin{aligned} \partial_{S_i} (\partial_{S_k} \ln f(x)) &= \frac{1}{\tau} \partial_{S_i} \left\{ \frac{1}{S_i} \sum_{l=1}^d (\Sigma^{-1})_{il} \zeta_l \right\} \\ &= -\frac{1}{S_i^2 \tau} (\Sigma^{-1} \zeta)_i + \frac{1}{\tau S_i} \sum_{l=1}^d (\Sigma^{-1})_{il} \partial_{S_i} \zeta_l \\ &= -\frac{1}{S_i^2 \tau} (\Sigma^{-1} \zeta)_i + \frac{1}{\tau S_i} \left(-\frac{1}{S_i} (\Sigma^{-1})_{ii} \right) \\ &= -\frac{1}{S_i^2 \tau} (\Sigma^{-1} \zeta)_i - \frac{1}{\tau S_i^2} (\Sigma^{-1})_{ii}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Par contre, si $i \neq k$ alors,

$$\begin{aligned} \partial_{S_i} (\partial_{S_k} \ln f(x)) &= \frac{1}{\tau S_k} \partial_{S_i} \sum_{l=1}^d (\Sigma^{-1})_{kl} \zeta_l \\ &= \frac{1}{\tau S_k} \sum_{l=1}^d (\Sigma^{-1})_{kl} \partial_{S_i} \zeta_l \\ &= \frac{1}{\tau S_k} \left(-\frac{1}{S_i} (\Sigma^{-1})_{ki} \right) \\ &= -\frac{1}{\tau S_k S_i} (\Sigma^{-1})_{ik}. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

En remplaçant (B.20) dans (B.18), on obtient l'expression suivante de l'es-

timination de la dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
\partial_{S_i S_i} \widehat{V} &= \frac{1}{N} e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ \frac{1}{S_i^2 \tau^2} (\Sigma^{-1} \zeta)_i^2 - \frac{1}{S_i^2 \tau} ((\Sigma^{-1} \zeta)_i + (\Sigma^{-1})_{ii}) \right\} \\
&= \frac{1}{N} e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ \frac{1}{S_i^2 \tau^2} (\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_i^2 - \frac{1}{S_i^2 \tau} ((\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_i + (\Sigma^{-1})_{ii}) \right\} \\
&= \frac{1}{N} e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ \frac{(\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_i^2 - (\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_i - (\Sigma^{-1})_{ii}}{S_i^2 \tau} \right\}. \tag{B.22}
\end{aligned}$$

Concernant l'estimation des dérivées croisées, en remplaçant (B.21) dans (B.18), elles sont exprimées comme suit

$$\begin{aligned}
\partial_{S_i S_k} \widehat{V} &= \frac{1}{N} e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ \frac{1}{S_i S_k \tau^2} (\Sigma^{-1} \zeta)_i (\Sigma^{-1} \zeta)_k - \frac{1}{\tau S_k S_i} (\Sigma^{-1})_{ik} \right\} \\
&= \frac{1}{N} e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ \frac{1}{S_i S_k \tau^2} (\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_i (\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_k - \frac{1}{\tau S_k S_i} (\Sigma^{-1})_{ik} \right\} \\
&= \frac{1}{N} e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ \frac{(a^{-1} Z_j)_i (a^{-1} Z_j)_k - (\Sigma^{-1})_{ik}}{\tau S_k S_i} \right\}. \tag{B.23}
\end{aligned}$$

B.4 Vega

En partant de B.4, déterminons l'estimation de Vega :

$$\begin{aligned}
\partial_{a_{ik}} \widehat{V} &= \partial_{a_{ik}} (e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \partial_{a_{ik}} \{\ln f(x)\}_{|x=\tilde{S}_j} \\
&= e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \partial_{a_{ik}} \{\ln f(x)\}_{|x=\tilde{S}_j} \tag{B.24}
\end{aligned}$$

Étudions la dérivée par rapport à $\ln f(x)$:

$$\partial_{a_{ik}} \{\ln f(x)\} = -\frac{1}{\tau} \partial_{a_{ik}} \left\{ \frac{1}{2} \zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta \right\} \quad (\text{B.25})$$

$$- \partial_{a_{ik}} \left\{ \ln \left(x_1 x_2 \dots x_d a_{11} a_{22} \dots a_{dd} (2\pi)^{d/2} \right) \right\}, \quad (\text{B.26})$$

avec

$$\partial_{a_{ik}} \left\{ \frac{1}{2} \zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta \right\} = \partial_{a_{ik}} \left\{ \frac{1}{2} \zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_{a_{ik}} \zeta^\top) \Sigma^{-1} \zeta + \frac{1}{2} \zeta^\top (\partial_{a_{ik}} \Sigma^{-1}) \zeta \quad (\text{B.27})$$

$$+ \frac{1}{2} \zeta^\top \Sigma^{-1} (\partial_{a_{ik}} \zeta). \quad (\text{B.28})$$

Posons $I_1 = \frac{1}{2} (\partial_{a_{ik}} \zeta^\top) \Sigma^{-1} \zeta$, $I_2 = \frac{1}{2} \zeta^\top (\partial_{a_{ik}} \Sigma^{-1}) \zeta$ et enfin $I_3 = \frac{1}{2} \zeta^\top \Sigma^{-1} (\partial_{a_{ik}} \zeta)$.

On a donc

$$\partial_{a_{ik}} \left\{ \frac{1}{2} \zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta \right\} = I_1 + I_2 + I_3. \quad (\text{B.29})$$

Voyons d'abord quelques détails. Tout d'abord, $\Sigma = a^\top a$ et

$$\Sigma_{mn} = \sum_{h=1}^d a_{hm} a_{hn} = \sum_{h=1}^{\min(m,n)} a_{hm} a_{hn}.$$

Alors on voit que pour $1 \leq i \leq k \leq d$, on a

$$\partial_{a_{ik}} \Sigma_{mn} = \begin{cases} 2a_{ik} & \text{si } m = n = k \\ a_{in} & \text{si } m = k \neq n \\ a_{im} & \text{si } n = k \neq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

En outre pour le calcul de I_2 déterminons les expressions suivantes :

$$\partial_{a_{ik}} \Sigma_{hl}^{-1} = -\Sigma^{-1} (\partial_{a_{ik}} \Sigma) \Sigma^{-1}. \quad (\text{B.31})$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{a_{ik}} I = \partial_{a_{ik}} (\Sigma \Sigma^{-1}) \\ &= (\partial_{a_{ik}} \Sigma) \Sigma^{-1} + \Sigma (\partial_{a_{ik}} \Sigma^{-1}), \end{aligned}$$

d'où

$$\partial_{a_{ik}} \Sigma^{-1} = -\Sigma (\partial_{a_{ik}} \Sigma) \Sigma^{-1}.$$

■

Notons $A = (\partial_{a_{ik}} \Sigma) \Sigma^{-1}$. Alors

$$A_{ml} = \sum_{n=1}^d (\partial_{a_{ik}} \Sigma)_{mn} (\Sigma^{-1})_{nl} = \sum_{n=1}^d (\partial_{a_{ik}} \Sigma_{mn}) (\Sigma^{-1})_{nl}.$$

Posons à présent $B = \Sigma^{-1} A$. Alors,

$$\begin{aligned} B_{hl} &= (\Sigma^{-1} A)_{hl} \\ &= \sum_{m=1}^d \Sigma_{hm}^{-1} A_{ml} \\ &= \sum_{m=1}^d \left\{ \Sigma_{hm}^{-1} \sum_{n=1}^d (\partial_{a_{ik}} \Sigma_{mn}) \Sigma_{nl}^{-1} \right\} \\ &= \sum_{m=1}^d \sum_{n=1}^d \{ \Sigma_{hm}^{-1} (\partial_{a_{ik}} \Sigma_{mn}) \Sigma_{nl}^{-1} \} \\ &= \sum_{m=1}^d \{ \Sigma_{hm}^{-1} (\partial_{a_{ik}} \Sigma_{mm}) \Sigma_{ml}^{-1} \} + \sum_{m=1}^d \sum_{m=1, m \neq n}^d \{ \Sigma_{hm}^{-1} (\partial_{a_{ik}} \Sigma_{mn}) \Sigma_{nl}^{-1} \} \\ &= 2 \Sigma_{hk}^{-1} (a_{ik}) \Sigma_{kl}^{-1} + \sum_{n \neq k}^d \{ \Sigma_{hk}^{-1} (a_{in}) \Sigma_{nl}^{-1} \} + \sum_{m \neq k}^{k-1} \{ \Sigma_{hm}^{-1} (a_{im}) \Sigma_{kl}^{-1} \} \\ &= \sum_{n=1}^d \{ \Sigma_{hk}^{-1} a_{in} \Sigma_{nl}^{-1} \} + \sum_{m=1}^d \{ \Sigma_{hm}^{-1} a_{im} \Sigma_{kl}^{-1} \}. \end{aligned} \tag{B.32}$$

Or $(a\Sigma^{-1})_{il} = (\Sigma^{-1}a^\top)_{li}$ et

$$(a\Sigma^{-1}) = \left(aa^{-1} (a^\top)^{-1} \right) = (a^\top)^{-1} = (a^{-1})^\top, \quad (\text{B.33})$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} (a\Sigma^{-1})_{il} &= \left((a^{-1})^\top \right)_{il} \\ &= (a^{-1})_{li}. \end{aligned}$$

De la même manière,

$$B_{hl} = (a^{-1})_{li} (\Sigma^{-1})_{hk} + (a^{-1})_{hi} (\Sigma^{-1})_{kl}. \quad (\text{B.34})$$

On sait que $\partial_{a_{ik}} \Sigma_{hl}^{-1} = -B_{hl}$. Ceci nous permet d'écrire

$$\partial_{a_{ik}} \Sigma_{hl}^{-1} = - (a^{-1})_{li} (\Sigma^{-1})_{hk} - (a^{-1})_{hi} (\Sigma^{-1})_{kl}. \quad (\text{B.35})$$

Reprenons le calcul de Vega et calculons les différentes expressions des I contenues dans

$$I_1 = \frac{1}{2} (\partial_{a_{ik}} \zeta^\top) \Sigma^{-1} \zeta \quad (\text{B.36})$$

et

$$\partial_{a_{ik}} \zeta^\top = (\partial_{a_{ik}} \zeta_1, \dots, \partial_{a_{ik}} \zeta_j, \dots, \partial_{a_{ik}} \zeta_d) \quad (\text{B.37})$$

Or,

$$\zeta_h = \ln \left(\frac{x_h}{S_h} \right) - r\tau + \frac{\Sigma_{hh}}{2} \tau, \quad (\text{B.38})$$

et d'après (B.30),

$$\partial_{a_{ik}} \Sigma_{hh} = \begin{cases} 2a_{ik} & \text{si } h = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.39})$$

ce qui implique

$$\partial_{a_{ik}} \zeta^\top = \left(0, \dots, 0, \frac{2a_{ik}}{2} \tau, 0, \dots, 0 \right) \quad (\text{B.40})$$

d'où

$$I_1 = \frac{1}{2} a_{ik} \tau (\Sigma^{-1} \zeta)_k. \quad (\text{B.41})$$

En effet,

$$\Sigma^{-1} \zeta = \begin{pmatrix} (\Sigma^{-1} \zeta)_1 \\ \vdots \\ (\Sigma^{-1} \zeta)_d \end{pmatrix}. \quad (\text{B.42})$$

De même,

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} a_{ik} \tau (\zeta^\top \Sigma^{-1})_k \\ &= \frac{1}{2} a_{ik} \tau (\Sigma^{-1} \zeta)_k. \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

D'après la définition de B on peut réécrire I_2 comme suit :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \zeta^\top B \zeta \\ &= \frac{1}{2} \left((\zeta_1, \dots, \zeta_d) \begin{pmatrix} \sum B_{1h} \zeta_h \\ \vdots \\ \sum B_{dh} \zeta_h \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

En remplaçant B par son expression, on arrive à

$$\zeta^\top B_{lh} \zeta_h = - \sum_{l=1}^d \left\{ \zeta_l (a^{-1})_{li} \sum_{h=1}^d \Sigma_{hk}^{-1} \zeta_h \right\} \quad (\text{B.45})$$

$$- \sum_{l=1}^d \left\{ \zeta_l (a^{-1})_{lk} \sum_{h=1}^d \Sigma_{hi}^{-1} \zeta_h \right\}. \quad (\text{B.46})$$

Ensuite, (B.45) est donné par

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^d \left\{ \zeta_l (a^{-1})_{li} \sum_{h=1}^d \Sigma_{hk}^{-1} \zeta_h \right\} &= \left(\sum_{l=1}^d \zeta_l (a^{-1})_{li} \right) \left(\sum_{h=1}^d \Sigma_{hk}^{-1} \zeta_h \right) \\
&= \left(\sum_{l=1}^d \zeta_l (a^{-1})_{li} \right) (\Sigma^{-1} \zeta)_k \\
&= \left(\sum_{l=1}^d (a \Sigma^{-1})_{il} \zeta_l \right) (\Sigma^{-1} \zeta)_k \\
&= (a \Sigma^{-1} \zeta)_i (\Sigma^{-1} \zeta)_k, \tag{B.47}
\end{aligned}$$

car $\Sigma^{-1} = a^{-1} (a^\top)^{-1}$, d'où $a \Sigma^{-1} = (a^\top)^{-1}$ et par conséquent $(a \Sigma^{-1})_{li} = (a^{-1})_{li} = (a^\top)^{-1}_{il}$, tandis que (B.46) correspond à

$$\left\{ \zeta_l (a^{-1})_{lk} \sum_{h=1}^d \Sigma_{hi}^{-1} \zeta_h \right\} = (\Sigma^{-1} \zeta)_k (a \Sigma^{-1} \zeta)_i, \tag{B.48}$$

ce qui nous permet d'aboutir à l'expression suivante de B :

$$\zeta^\top B_{lh} \zeta_h = -2 (a \Sigma^{-1} \zeta)_i (\Sigma^{-1} \zeta)_k. \tag{B.49}$$

En remplaçant $\zeta^\top B \zeta$ par son expression en (B.49), on obtient l'expression suivante de I_2

$$I_2 = - (a \Sigma^{-1} \zeta)_i (\Sigma^{-1} \zeta)_k$$

Avec les différentes expressions des I dans (B.29) on obtient

$$\begin{aligned}
\partial_{a_{ik}} \left\{ -\frac{1}{2} \zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta \right\} &= \frac{1}{2} a_{ik} \tau (\Sigma^{-1} \zeta)_k - (a \Sigma^{-1} \zeta)_i (\Sigma^{-1} \zeta)_k + \frac{1}{2} a_{ik} \tau (\Sigma^{-1} \zeta)_k \\
&= a_{ik} \tau (\Sigma^{-1} \zeta)_k - (a \Sigma^{-1} \zeta)_i (\Sigma^{-1} \zeta)_k \tag{B.50}
\end{aligned}$$

ce qui nous donne l'expression suivante de (B.24)

$$\widehat{\partial_{a_{ik}} V} = e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tau} ((a\Sigma^{-1}\zeta)_i (\Sigma^{-1}\zeta)_k - a_{ik}\tau (\Sigma^{-1}\zeta)_k) \\ -\partial_{a_{ik}} \ln(x_1 x_2 \dots x_d a_{11} a_{22} \dots a_{dd} (2\pi)^{d/2}) \end{array} \right\} \Big|_{x=\tilde{S}_j} \quad (\text{B.51})$$

Lorsque $i \neq k$

$$\partial_{a_{ik}} \ln(x_1 x_2 \dots x_d a_{11} a_{22} \dots a_{dd} (2\pi)^{d/2}) = 0 \quad (\text{B.52})$$

La dérivée Vega par rapport à a_{ik} est alors estimée par

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_{a_{ik}} V} &= e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \frac{1}{\tau} ((a\Sigma^{-1}\zeta)_i (\Sigma^{-1}\zeta)_k - a_{ik}\tau (\Sigma^{-1}\zeta)_k) \\ &= e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) (\Sigma^{-1}\zeta)_k \left(\frac{1}{\tau} (a\Sigma^{-1}\zeta)_i - a_{ik} \right) \\ &= e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) (a^{-1}Z_j\sqrt{\tau})_k \left(\frac{1}{\tau} (aa^{-1}Z_j\sqrt{\tau})_i - a_{ik} \right) \\ &= e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) (a^{-1}Z_j)_k (Z_{ji} - \sqrt{\tau}a_{ik}) \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Lorsque $i = k$, alors

$$\partial_{a_{ii}} \ln(x_1 x_2 \dots x_d a_{11} a_{22} \dots a_{dd} (2\pi)^{d/2}) = \frac{1}{a_{ii}}. \quad (\text{B.54})$$

La dérivée Vega par rapport à a_{ii} est alors estimée par

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_{a_{ii}} V} &= e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ \frac{1}{\tau} ((a\Sigma^{-1}\zeta)_i (\Sigma^{-1}\zeta)_k - a_{ik}\tau (\Sigma^{-1}\zeta)_k) - \frac{1}{a_{ii}} \right\} \\ &= e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ (a^{-1}Z_j)_i (Z_{ji} - \sqrt{\tau}a_{ii}) - \frac{1}{a_{ii}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

B.5 Theta

Déduisons à présent Theta, la dérivée de la valeur de l'option par rapport à τ :

$$\begin{aligned}\widehat{\partial_\tau V} &= \partial_\tau (e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \partial_\tau \{\ln f(x)\}_{|x=\tilde{S}_j} \\ &= -re^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \partial_\tau \{\ln f(x)\}_{|x=\tilde{S}_j},\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\partial_\tau \ln f(x) &= \partial_\tau \left(-\frac{1}{2\tau} \zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta \right) - \partial_\tau \ln \left(x_1 x_2 \dots x_d a_{11} a_{22} \dots a_{dd} (2\pi\tau)^{d/2} \right) \\ &= -\left(\partial_\tau \frac{1}{2\tau} \right) \zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta - \frac{1}{2\tau} (\partial_\tau \zeta^\top) \Sigma^{-1} \zeta - \frac{1}{2\tau} \zeta^\top (\partial_\tau \Sigma^{-1}) \zeta \\ &\quad - \frac{1}{2\tau} \zeta^\top \Sigma^{-1} (\partial_\tau \zeta) - \partial_\tau \ln(\tau^{d/2}) \\ &= -\left(\partial_\tau \frac{1}{2\tau} \right) \zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta - \frac{1}{2\tau} (\partial_\tau \zeta^\top) \Sigma^{-1} \zeta \\ &\quad - \frac{1}{2\tau} \zeta^\top \Sigma^{-1} (\partial_\tau \zeta) - \frac{d}{2\tau}.\end{aligned}\tag{B.56}$$

Estimons les différentes dérivées de (B.56). D'abord,

$$\left(\partial_\tau \frac{1}{2\tau} \right) = -\frac{1}{2\tau^2}$$

et

$$\begin{aligned}
\zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta &= (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & \cdots & \Sigma_{1d}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{d1}^{-1} & \cdots & \Sigma_{dd}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_d \end{pmatrix} \\
&= (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^d \Sigma_{1k}^{-1} \zeta_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^d \Sigma_{lk}^{-1} \zeta_k \end{pmatrix} \\
&= (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \sum_{l=1}^d \left(\sum_{k=1}^d \Sigma_{lk}^{-1} \zeta_k \right) \\
&= (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \sum_{l=1}^d (\Sigma^{-1} \zeta)_l \\
&= (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \left(\sum_{l=1}^d (\Sigma^{-1} \zeta)_l \right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^d (\sqrt{\tau} a^\top Z_j)_k \right) \left(\sum_{l=1}^d (\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_l \right) \tag{B.57}
\end{aligned}$$

$$= \tau \left(\sum_{k=1}^d Z_j^\top Z_j \right), \tag{B.58}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left(\partial_\tau \frac{1}{2\tau} \right) \zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta &= -\frac{1}{2\tau^2} \left\{ \tau \left(\sum_{k=1}^d Z_j^\top Z_j \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{2\tau} \left(\sum_{k=1}^d Z_j^\top Z_j \right). \tag{B.59}
\end{aligned}$$

La deuxième expression quant à elle est donnée par

$$\partial_\tau \zeta^\top = \partial_\tau (\zeta_1, \dots, \zeta_d)$$

avec

$$\begin{aligned}\partial_\tau \zeta_k &= \partial_r \left(\ln \left(\frac{x_k}{S_k} \right) - \left(r - \frac{\Sigma_{kk}}{2} \right) \tau \right) \\ &= - \left(r - \frac{\Sigma_{kk}}{2} \right)\end{aligned}$$

et

$$\partial_\tau \zeta^\top = - \sum_{k=1}^d \left(r - \frac{\Sigma_{kk}}{2} \right),$$

d'où

$$\frac{1}{2\tau} (\partial_\tau \zeta^\top) \Sigma^{-1} \zeta = - \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \sum_{k=1}^d \left(r - \frac{\Sigma_{kk}}{2} \right) (a^\top Z_j)_k. \quad (\text{B.60})$$

Enfin, en partant de la première expression, on en déduit la troisième :

$$\frac{1}{2\tau} \zeta^\top \Sigma^{-1} (\partial_\tau \zeta) = - \frac{1}{2\sqrt{\tau}} \sum_{k=1}^d \left(r - \frac{\Sigma_{kk}}{2} \right) (a^\top Z_j)_k. \quad (\text{B.61})$$

En remplaçant (B.59) (B.60) (B.61) dans (B.56) on obtient

$$\begin{aligned}\partial_\tau \ln f(x) &= \frac{1}{2\tau} (Z_j^\top Z_j) + \frac{2}{2\sqrt{\tau}} \sum_{k=1}^d \left(r - \frac{\Sigma_{kk}}{2} \right) (a^\top Z_j)_k - \frac{d}{2\tau} \\ &= \frac{1}{2\tau} \left\{ (Z_j^\top Z_j) + 2\sqrt{\tau} \sum_{k=1}^d \left(r - \frac{\Sigma_{kk}}{2} \right) (a^\top Z_j)_k - d \right\} \\ &= \frac{1}{2\tau} \left\{ (Z_j^\top Z_j) + 2\sqrt{\tau} \sum_{k=1}^d \left(r - \frac{\Sigma_{kk}}{2} \right) (a^\top Z_j)_k - d \right\},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial_t V} &= -\widehat{\partial_\tau V} \\
&= r e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \\
&\quad - \frac{1}{2\tau N} e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ (Z_j^\top Z_j) + 2\sqrt{\tau} \sum_{k=1}^d \left(r - \frac{\Sigma_{kk}}{2} \right) (a^\top Z_j)_k - d \right\} \\
&= \left(r + \frac{d}{2\tau} \right) \widehat{V} \\
&\quad - \frac{1}{2\tau N} e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \left\{ (Z_j^\top Z_j) + 2\sqrt{\tau} \sum_{k=1}^d \left(r - \frac{\Sigma_{kk}}{2} \right) (a^\top Z_j)_k \right\}.
\end{aligned}$$

B.6 Rho

Enfin, trouvons l'estimation de la dérivée de V par rapport à r :

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial_r V} &= \partial_r (e^{-r\tau}) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \partial_r \{\ln f(x)\}_{|x=\tilde{S}_j} \\
&= -\tau e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \partial_r \{\ln f(x)\}_{|x=\tilde{S}_j}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\partial_r \{\ln f(x)\} &= -\frac{1}{2\tau} \partial_r (\zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta) - \partial_r \ln \left(x_1 x_2 \dots x_d a_{11} a_{22} \dots a_{dd} (2\pi\tau)^{d/2} \right) \\
&= -\frac{1}{2\tau} \partial_r (\zeta^\top \Sigma^{-1} \zeta) \\
&= -\frac{1}{2\tau} [(\partial_r \zeta^\top) \Sigma^{-1} \zeta + \zeta^\top (\partial_r \Sigma^{-1}) \zeta + \zeta^\top \Sigma^{-1} (\partial_r \zeta)] \\
&= -\frac{1}{2\tau} [(\partial_r \zeta^\top) \Sigma^{-1} \zeta + \zeta^\top \Sigma^{-1} (\partial_r \zeta)]
\end{aligned}$$

avec

$$\partial_r \zeta^\top = \partial_r (\zeta_1, \dots, \zeta_d)$$

et

$$\begin{aligned} \partial_r \zeta_i &= \partial_r \left(\ln \left(\frac{x_i}{S_i} \right) - \left(r - \frac{\Sigma_{ii}}{2} \right) \tau \right) \\ &= -\tau \end{aligned}$$

d'où

$$\partial_r \zeta^\top = (-\tau, \dots, -\tau)$$

ce qui donne

$$(\partial_r \zeta^\top) \Sigma^{-1} \zeta = -\sum_{k=1}^d \tau (\Sigma^{-1} \zeta)_k.$$

De même, $(\zeta^\top \Sigma^{-1})_i (\partial_r \zeta) = (\partial_r \zeta^\top)_i \Sigma^{-1} \zeta = -\tau (\Sigma^{-1} \zeta)_i$. On aboutit à

$$\begin{aligned} \partial_r \{\ln f(x)\} &= -\frac{1}{2\tau} \left(-2\tau \sum_{k=1}^d (\Sigma^{-1} \zeta)_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^d (\Sigma^{-1} \zeta)_k \\ &= \sum_{k=1}^d (\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_k, \end{aligned}$$

d'où

$$\partial_r \hat{V} = -\tau e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) + e^{-r\tau} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(\tilde{S}_j) \sum_{k=1}^d (\sqrt{\tau} a^{-1} Z_j)_k$$

Appendices C

Modèle de Black-Scholes pour l'option d'échange

La fonction de paiement d'échange entre 2 actifs risqués au temps T est donné par

$$\Phi(S_1, S_2, T) = \max(q_2 S_2 - q_1 S_1, 0). \quad (\text{C.1})$$

La valeur Black-Scholes au temps t de l'option d'échange de maturité T est donnée par :

$$\Phi(S_1(t), S_2(t), T) = q_2 S_2(t) N(D_1) - q_1 S_1(t) N(D_2),$$

avec N la fonction cumulative de la loi normale centrée réduite, q_1 et q_2 des

quantités positives et

$$D_1 = \frac{\ln\left(\frac{q_2 S_2(t)}{q_1 S_1(t)}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$D_2 = \frac{\ln\left(\frac{q_2 S_2(t)}{q_1 S_1(t)}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

pour $\tau = T - t$ et $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$.

C.1 Delta

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \partial_{S_1}(q_2 S_2(t)N(D_1) - q_1 S_1(t)N(D_2)) \\ &= q_2 S_2(t)\partial_{S_1}(N(D_1)) - q_1 N(D_2) - q_1 S_1(t)\partial_{S_1}(N(D_2)) \\ &= q_2 S_2(t)n(D_1) - q_1 N(D_2) - q_1 S_1(t)n(D_2) \\ &= -q_1 N(D_2).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \partial_{S_2}(q_2 S_2(t)N(D_1) - q_1 S_1(t)N(D_2)) \\ &= q_2 N(D_1) + q_2 S_2(t)n(D_1) - q_1 S_1(t)n(D_2) \\ \Delta_2 &= q_2 N(D_1),\end{aligned}$$

avec $n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Preuve. Premièrement, notons que $D_2 = D_1 - \sigma\sqrt{\tau}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{n(D_1)}{n(D_2)} &= \frac{\exp\left(-\frac{D_1^2}{2}\right)}{\exp\left(-\frac{D_2^2}{2}\right)} \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}(D_1^2 - D_2^2)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}(D_1 - D_2)(D_1 + D_2)\right].\end{aligned}$$

Comme $D_1 - D_2 = \sigma\sqrt{\tau}$ et $D_1 + D_2 = 2\frac{\ln\left(\frac{q_2 S_2(t)}{q_1 S_1(t)}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{n(D_1)}{n(D_2)} &= \exp\left[-\ln\left(\frac{q_2 S_2(t)}{q_1 S_1(t)}\right)\right] \\ &= \frac{q_1 S_1(t)}{q_2 S_2(t)}.\end{aligned}$$

De cette égalité on déduit que $n(D_1)q_2 S_2(t) = n(D_2)q_1 S_1(t)$. ■

C.2 Vega

La matrice de variance covariance est donnée dans la proposition suivante :

Proposition 4

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \\ &= a^\top a \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

avec $a = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \rho\sigma_2 \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 \end{pmatrix}$. Nous allons exprimer Vega en fonction de chacun des éléments de la matrice a .

$$V_{a_{ik}} = \frac{\partial V}{\partial \sigma} (S_1(t), S_2(t), T) \frac{\partial \sigma}{\partial a_{ik}}.$$

Trouvons la première expression :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \sigma} (S_1(t), S_2(t), T) &= \partial_\sigma (q_2 S_2(t) N(D_1) - q_1 S_1(t) N(D_2)) \\ &= q_2 S_2(t) n(D_1) \partial_\sigma(D_1) - q_1 S_1(t) n(D_2) \partial_\sigma(D_2) \\ &= q_2 S_2(t) n(D_1) \partial_\sigma(D_2 + \sigma\sqrt{\tau}) - q_1 S_1(t) n(D_2) \partial_\sigma(D_2) \\ &= q_2 S_2(t) n(D_1) (\partial_\sigma D_2 + \sqrt{\tau}) - q_1 S_1(t) n(D_2) \partial_\sigma(D_2) \\ &= \partial_\sigma D_2 [q_2 S_2(t) n(D_1) - q_1 S_1(t) n(D_2)] + q_2 S_2(t) n(D_1) \sqrt{\tau} \\ &= q_2 S_2(t) n(D_1) \sqrt{\tau}. \end{aligned}$$

Trouvons ensuite la deuxième expression :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial a_{ik}} &= \frac{\partial a_{ik} \sigma^2}{\partial \sigma \sigma^2} \\ &= \frac{\partial a_{ik} \sigma^2}{2\sigma}. \end{aligned}$$

On obtient donc l'expression suivante de vega :

$$V_{a_{ik}} = q_2 S_2(t) n(D_1) \sqrt{\tau} \frac{\partial a_{ik} \sigma^2}{2\sigma}$$

Cette expression appliquée à chacun des éléments qui composent σ^2 nous donne la sensibilité de l'option par rapport à σ :

$$V_{a_{11}} = \left(\frac{a_{11} - a_{12}}{\sigma} \right) q_2 S_2(t) n(D_1) \sqrt{\tau}$$

$$V_{a_{12}} = V_{a_{21}} = \left(\frac{a_{12} - a_{11}}{\sigma} \right) q_2 S_2(t) n(D_1) \sqrt{\tau}$$

$$V_{a_{22}} = \left(\frac{a_{22}}{\sigma} \right) q_2 S_2(t) n(D_1) \sqrt{\tau}$$

C.3 Gamma

On a

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \partial_{S_1} \Delta_1 \\ &= \partial_{S_1} (-q_1 N(D_2)) \\ &= -q_1 n(D_2) \partial_{S_1}(D_2) \\ &= -q_1 n(D_2) \frac{1}{S_1(t) \sigma \sqrt{\tau}}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \partial_{S_2} \Delta_2 \\ &= \partial_{S_2} (q_2 N(D_1)) \\ &= q_2 n(D_1) \partial_{S_2}(D_1) \\ &= q_2 n(D_1) \frac{1}{S_2(t) \sigma \sqrt{\tau}}, \end{aligned}$$

et enfin la dérivée croisée

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12} &= \partial_{S_2} \Delta_1 \\
 &= \partial_{S_2} (-q_1 N(D_2)) \\
 &= -q_1 n(D_2) \partial_{S_2}(D_2) \\
 &= -q_1 n(D_2) \frac{1}{S_2(t) \sigma \sqrt{\tau}}.
 \end{aligned}$$

C.4 Rho

Dans le modèle Black-Scholes pour l'option d'échange entre deux actifs risqués, le taux sans risque r n'apparaît pas dans l'expression de la valeur de l'option. Par conséquent la sensibilité de l'option par rapport à r est nulle.

C.5 Theta

$$\begin{aligned}
 \text{Theta} &= \partial_t (q_2 S_2(t) N(D_1) - q_1 S_1(t) N(D_2)) \\
 &= q_2 S_2(t) n(D_1) \partial_t(D_1) - q_1 S_1(t) n(D_2) \partial_t(D_2)
 \end{aligned}$$

Puisque $D_1 - D_2 = \sigma \sqrt{\tau}$, on a

$$\begin{aligned}
 \partial_t(D_2) &= \partial_t D_1 - \sigma \sqrt{\tau} \\
 &= \partial_t D_1 + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}},
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Theta} &= q_2 S_2(t) n(D_1) \partial_t(D_1) - q_1 S_1(t) n(D_2) \partial_t(D_1) - q_1 S_1(t) n(D_2) \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} \\ &= -q_1 S_1(t) n(D_2) \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}. \end{aligned}$$

Références

- [1] Bernis,G., E.Gobet et A. Kohatsu-Higa, "Monte Carlo Evaluation of Greeks for Multidimensional Barrier and Lookback Options", *Mathematical Finance*, 13 (2003), pp 99-113.
- [2] Black, F. et M. Scholes, , "The pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, 81 (1973), pp 637-654.(1997)
- [3] Boyle, P., "Options : A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, 4 (1997), pp 323-238.
- [4] Brennan, M. and Swartz, E.,"Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims : A Synthesis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13 (1978), pp 462-474.
- [5] Broadie, M. et P. Glasserman, "Estimating Security Price Derivatives Using Simulation", *Management Science*, 42 (1996), pp. 269-285.
- [6] Carr, P., "Deriving derivatives orf derivative securities", *Journal of Computational Finance*, 4 (2000/2001), pp. 5-27.
- [7] Chung, S-L. and M. Shackleton," The Binomial Black-Scholes Model and The Greeks", *The Journal of Futures Markets*, 22 (2202), pp. 143-153.

- [8] Duan, J.-C., "An Enhanced Path-Derivative Monte Carlo Method for Computing Option Greeks" University of Toronto, Working paper.
- [9] Fournié, E., J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions et N. Touzi, "Applications of Malliavin Calculus to Monte Carlo Methods in Finance", *Finance and Stochastic*, 3(1999), 391-412.
- [10] Fournié, E., J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, et P.-L. Lions, "Applications of Malliavin Calculus to Monte-Carlo Methods in Finance. II", *Finance and Stochastic*, 5 (2001), 201-236.
- [11] François, P., "Options et Contrats à Terme : Recueil de textes ", Hec Montréal, (2004-2005).
- [12] Fu, M. C. et J. Hu "Sensitivity Analysis for Monte Carlo Simulation of Option Pricing", *Probability in the Engineering and Information Sciences*, 9 (1995), 417-449.
- [13] Glasserman, P. (2003), "Monte Carlo Methods in financial Engineering", Springer.
- [14] Glasserman, P. and Zhao, X., "Fast Greeks by Simulation in Forward Libor Models", *Journal of Computational Finance*, 3 (1999), pp. 5-39.
- [15] Hull, J. (1993), "Options, Futures, and Other Derivative Securities", Prentice Hall, 2nd edition.
- [16] Jaschke, S., "The Cornish-Fisher Expansion in the Context of Delta-Gamma-Normal Approximations ", *Journal of Risk*, 4 (2002), pp 33-52.
- [17] Lo, A.W., "Statistical Tests of Contingent Claims Asset-pricing Models", *Journal of Financial Economics*, 17 (1986), pp. 143-173.

- [18] Mina, J. and Ulmer A., "Delta-Gamma Four ways ", Technical Report, RiskMetrics Group, 1999.
- [19] Pelsser, A. and Vorst, T. , "The Binomial Model and The Greeks", The Journal of Derivatives, 1 (1994), pp. 45-49.
- [20] Reiss, O. and Wystup, U. "Computing Option Price Sensitivities Using Homogeneity And Other Tricks", The Journal of Derivatives, winter 2001, pp. 41-53.
- [21] Rémillard, B., "Méthodes Numériques en Ingénierie Financière : Notes de Cours ", Hec Montréal,(2004).
- [22] Tavella, D. and Randall, C. (2000), " Pricing Financial Instruments : The Finite Difference Method", John Wiley & Sons.
- [23] Tomas III, J. M. ;Yalamanchili, K. K., "An Application of Finite Elements to Option Pricing",The Journal of Futures Markets, 21 (2001), pp. 19-42.
- [24] Willard, Gregory A. , "Calculating Prices And Sensitivities For Path-independent Derivative Securities In Multifactor Models", The Journal of Derivatives, 5 (1997), pp.45-61.
- [25] Willmott, Paul, "Derivatives : The Theory And Practice Of Financial Engineering", John Wiley & Son, 1998.