

Jean-Luc GARDÈRE

**Produits dérivés de crédit sur panier d'obligations et copules
pour modéliser la dépendance**

Mémoire
présenté
à HEC Montréal
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences de gestion (M.Sc.) en ingénierie financière

HEC MONTRÉAL

©Jean-Luc Gardère, 2005

Remerciements

Ce mémoire est l'achèvement de près de vingt années d'étude et est pour moi l'occasion de remercier plusieurs personnes qui ont contribué à ma réussite tout long de ma vie estudiantine.

En premier lieu, j'aimerais remercier mes directeurs, Bruno Rémillard et Nicolas Papageorgiou, pour leur soutien théorique et financier. J'aimerais également souligné leur disponibilité et leur implication intéressée tout au long de ce mémoire. Je souhaiterais aussi remercier l'Institut finance mathématique de Montreal (IFM2) pour son appui financier. Un grand merci aussi à mes lecteurs, les professeurs Debbie Dupuis et Tony Berrada.

Simultanément, je remercie tous mes professeurs qui, au cours de ces vingt dernières années, m'ont transmis leur passion et leur goût du savoir.

Merci aussi à tous mes amis pour leur support et tout spécialement à Ronan avec qui j'ai partagé l'aventure du mémoire, merci pour tes conseils et ton amitié sincère.

Finalement, mes remerciements les plus chaleureux vont à ma famille pour leur support constant tout au long de mes études. Ma soeur, Geneviève, pour son soutien, mes parents, Doris et Charles, qui ont fait tous les sacrifices afin de me donner les meilleures opportunités pour réussir dans la vie et dans mes études. Une pensée très spéciale aussi pour ma grand-mère, une personne chère à mes yeux, qui nous a quittés durant la rédaction de ce mémoire.

À tous MERCI, ce mémoire c'est un peu le vôtre.

Sommaire

Ce mémoire traite des produits dérivés de crédit sur un panier d'obligations de même que des copules comme outil de modélisation de la corrélation. Il est divisé en trois volets.

Premièrement, nous construisons un modèle qui nous permet à travers un processus de qualité de crédit, qui correspond au modèle Creditgrade[©], d'observer discrètement la cote d'une obligation. De plus, nous ajoutons un processus de saut qui donne à une obligation la possibilité d'atteindre directement le défaut à partir de n'importe quelle cote. Ainsi avec ce modèle, nous pouvons évaluer des produits dérivés de crédit autant sur le défaut que la décote.

Deuxièmement, nous calibrons des copules qui sont des outils mathématiques qui dans notre modèle nous permettent de modéliser la corrélation entre les différentes obligations d'un panier. Nous utilisons dans ce mémoire cinq copules dont deux elliptiques soit les copules gaussienne et Student et trois archimédiennes soit les copules de Clayton, Gumbel et Frank. Ces dernières ont l'avantage d'avoir seulement un paramètre à calibrer.

Troisièmement, nous évaluons des produits dérivés de crédit et montrons que ceux sur la décote sont plus chers que ceux sur le défaut. De plus, nos résultats indiquent qu'en utilisant des copules archimédiennes les prix sont plus élevés que dans le cas des copules elliptiques.

Table des matières

Introduction	1
1 Revue de littérature	5
1.1 Risque de crédit pour obligations risquées	5
1.1.1 Forme structurelle	5
1.1.2 Forme réduite	9
1.1.3 Modèles commerciaux	14
1.2 Copules, corrélation et produits dérivés de crédit	15
2 Le modèle	19
2.1 Qualité de crédit	20
2.2 Cote de crédit	21
2.3 Copule	22

2.4	Intégration	23
3	Qualité de crédit : <i>CreditGrade</i>[©]	25
3.1	Modèle <i>CreditGrade</i> [©]	25
3.2	Notre utilisation du modèle <i>CreditGrade</i> [©]	28
4	Cote de crédit : <i>Moody's</i>	30
4.1	Modèle <i>Moody's</i>	30
4.2	Notre utilisation du modèle <i>Moody's</i>	33
5	Copule : un outil pour modéliser la dépendance	34
5.1	Introduction aux copules	35
5.1.1	Définition	35
5.1.2	Théorème de Sklar	35
5.1.3	Propriétés intéressantes des copules	36
5.1.4	Pourquoi des copules ?	37
5.2	Copules associées à des distributions elliptiques	39
5.2.1	Copule gaussienne	39
5.2.2	Copule de Student	40

5.3	Copules archimédiennes	41
5.3.1	Copule de Clayton	44
5.3.2	Copule de Gumbel	45
5.3.3	Copule de Frank	46
6	Calibration des paramètres	49
6.1	Bornes de qualité de crédit	49
6.2	Temps de recote	50
6.3	Temps de défaut	51
6.4	Copules	53
6.4.1	Avant de commencer	53
6.4.2	Copule gaussienne	56
6.4.3	Copule de Student	57
6.4.4	Copule de Clayton	60
6.4.5	Copule de Gumbel	61
6.4.6	Copule de Frank	63
7	Résultats de l'estimation des paramètres	65

7.1	Données utilisées	65
7.2	Paramètres	66
7.2.1	Bornes de qualité de crédit	66
7.2.2	Temps de Recote	68
7.2.3	Temps de Défaut	68
7.2.4	Copules	69
8	Évaluation de produits dérivés de crédit	71
8.1	Produits dérivés de Crédit	72
8.1.1	Produits dérivés de défaut (PDD)	72
8.1.2	Produits dérivés de décote (PDC)	73
8.2	Paramètres	74
8.3	Résultats	75
	Conclusion	78
	Bibliographie	81

Liste des figures

7.1 Probabilité de défaut d'une obligation Aaa en fonction du temps 67

Liste des tableaux

4.1	Description des cotes de crédit Moody's	32
6.1	Exemple simple de transformation en pseudo-probabilité	56
7.1	Composition de l'actif sous-jacent (au 21 janvier 2005)	66
7.2	Estimation des paramètres des bornes de crédit	67
7.3	Estimation des paramètres de temps de recote	68
7.4	Probabilité de défaut un an de Moody's	69
7.5	Paramètres des copules archimédiennes	70
8.1	Taux de recouvrement selon la cote juste avant le défaut	74
8.2	Matrice de la perte de valeur de l'obligation lors d'une décote	74
8.3	Tableau des prix (en point de base) des produits dérivés selon la copule utilisée	75

8.4 Tableau des ratios entre les différents résultats 76

Introduction

Le risque de crédit n'est pas une nouvelle notion dans le jargon financier. Toutefois avec les récents accords de Bâles II, qui régissent le système bancaire international et qui entreront en vigueur sous peu, l'importance accordée à la gestion du risque de crédit sera accentuée et prendra une plus grande place dans l'ensemble des risques auquel une institution financière aura à affronter.

La gestion du risque de crédit est assez large et comprend par le fait même plusieurs niveaux dans sa gestion. Un premier niveau est le risque auquel une institution financière fait face lorsqu'elle prête de l'argent aux particuliers et aux entreprises. En effet, ces personnes et compagnies peuvent déclarer faillite et ainsi empêcher l'institution financière de récupérer la valeur totale du prêt. On appelle ce risque le risque commercial de crédit. Il est bien connu et relativement bien évalué avec différents modèles économétriques par les banques et les compagnies de carte de crédit.

Un autre niveau de risque de crédit est celui auquel sont confrontés les détenteurs de produits dérivés sur le marché de gré à gré. En effet, la contre-

partie peut décider de ne pas honorer le contrat et si celui-ci se trouve en jeu, des gains potentiels considérables peuvent être perdus. Les produits dérivés sur le marché gré à gré n'ont donc pas la même valeur que leurs jumeaux du marché organisé où la chambre de compensation s'assure du respect des contrats. Certains auteurs comme Johnson et Stulz (1987) et Klein et Inglis (2001) ont suggéré certains modèles pour évaluer des options vulnérables c'est-à-dire avec des options avec risque de défaut.

Finalement, un troisième niveau de risque de crédit et celui dont nous traiterons dans ce mémoire est associé aux titres à revenus fixes. C'est le risque que la valeur d'une obligation diminue suite à une baisse de sa qualité de crédit. Le cas limite étant l'incapacité de l'émetteur à payer les intérêts ou à rembourser le capital, c'est-à-dire le défaut. Ce troisième niveau nous intéresse particulièrement dans le contexte actuel puisqu'il est très lié avec les accords de Bâles II qui stipulent qu'un modèle interne de gestion de risque doit tenir de compte quatre caractéristiques importantes :

- **Concentration** : Prendre en considération l'endroit géographique ou le secteur où se situent les actifs.
- **Écart de taux d'intérêt** : Prendre en considération l'écart de rendement avec l'actif sans risque.
- **Décote** : Prendre en considération le risque associé à la décote de l'actif
- **Défaut** : Prendre en considération le risque que l'actif fasse défaut

Le risque de crédit associé à des titres à revenus fixes a entraîné au cours des dernières années l'émergence de produits dérivés de crédit comme des swap de défaut et des options sur écart de crédit qui paient un flux monétaire quand une obligation fait défaut ou est décotée permettant ainsi à des ges-

tionnaires de portefeuilles obligataires de se couvrir contre de possibles pertes substantielles. Plus récemment, d'autres produits dérivés sur portefeuille de titres à revenus fixes comme des swap $n^{\text{ième}}$ -à-faire-défaut ont vu le jour pour permettre aux gestionnaires obligataires de protéger l'ensemble ou une partie de leur portefeuille avec un seul produit dérivé. Toutefois l'évaluation de ce genre de produits dérivés nécessite de modéliser la corrélation entre le risque de crédit des obligations.

Dans les dernières années, plusieurs professionnels et académiciens ont proposé l'utilisation d'un outil mathématique, les copules, pour essayer de modéliser la structure de dépendance entre les obligations. Toutefois peu d'articles expliquent comment les calibrer et comment générer des vecteurs aléatoires à partir de celle-ci.

Nous aurons donc trois objectifs principaux dans ce mémoire :

1. Construire un modèle simple qui permet de prendre en considération le risque de défaut de même que le risque de décote.
2. Expliquer comment calibrer différents types de copules et comment générer un vecteur aléatoire corrélé.
3. Observer l'impact des différents types de copules sur le prix d'un produit dérivé de crédit permettant de se protéger contre le risque de défaut et de re-cote.

Ce mémoire débutera donc par une courte revue de littérature sur le risque de crédit, de même que sur l'utilisation des copules dans la modélisation de la structure de corrélation entre les obligations. Nous exposerons ensuite notre modèle et ses différentes composantes. Par la suite, nous expliquerons com-

ment calibrer les copules et comment les utiliser pour générer des variables aléatoires corrélées. Finalement, nous tenterons d'évaluer des produits dérivés de crédit et d'observer l'impact des différentes copules sur leur prix.

Chapitre 1

Revue de littérature

1.1 Risque de crédit pour obligations risquées

Les modèles de risque de crédit peuvent être séparés en deux grandes catégories : les modèles à forme structurelle et les modèles à forme réduite. Ces deux formes tentent de manière différente d'aborder le problème du moment ou du temps de défaut. Nous exposerons donc les articles clefs de ces deux approches ainsi que des modèles de marché.

1.1.1 Forme structurelle

Les modèles à forme structurelle sont les premiers modèles de risque de crédit et commencent avec l'intuition de Black et Scholes (1973) que la dette peut être vu comme une réclamation qui dépend de la valeur de la firme.

Toutefois c'est véritablement avec l'article de Merton (1974) que les bases de l'approche structurelle sont jetées. Ce dernier s'inspire du modèle Black-Scholes pour évaluer des obligations avec risque de défaut. Son modèle stipule que la valeur de la firme V suit un mouvement brownien géométrique (MBG) :

$$dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dW_t$$

où μ_V est le rendement instantané, σ_V l'écart type des rendements de la firme et W_t un mouvement brownien standard (MBS). De plus, il suppose qu'il est possible de construire un titre financier G dont la valeur au marché dépend de V et du temps t . Ainsi, en utilisant le théorème d'Itô, il trouve une équation différentielle stochastique pour G où G suit le même MBS que V . Il peut par la suite construire un portefeuille contenant V , G et un titre sans risque en proportion telle que la valeur du portefeuille soit déterministe; les MBS de V et G s'annulent. Finalement, pour qu'il n'y ait pas d'arbitrage, il faut que ce portefeuille rapporte le taux sans risque. On obtient ainsi l'équation aux dérivées partielles pour le produit dérivé F :

$$\sigma_V^2 V^2 \frac{\partial^2 G}{\partial V^2} + rV \frac{\partial G}{\partial V} - \frac{\partial G}{\partial t} - rG = 0.$$

Pour résoudre cette question, il faut 2 conditions aux bornes et une condition initiale. Ce sont ces conditions qui distinguent les F entre eux.

Dans son modèle, Merton suppose que la firme fait défaut lorsque sa valeur atteint 0, ce qui est peu réaliste, car nous observons souvent qu'une firme fait défaut sur sa dette bien avant que sa valeur n'atteigne 0. Black

et Cox (1976), pour leur part, vont plutôt supposer que le défaut survient lorsque la valeur de la firme descend en-dessous d'un certain niveau que nous appellerons barrière de défaut. Ceci leur a ainsi permis d'avoir des écarts de crédit un peu plus réalistes. Toutefois, leur modèle partage quand même plusieurs limites des modèles de Black-Scholes et Merton, comme une volatilité constante, un taux d'intérêt constant et une répartition, lors d'un défaut, du montant de recouvrement parmi les créanciers selon des règles de priorité strictes et absolues.

Leland (1994) modifie un peu l'approche de Merton (1973), en supposant que la dette est une obligation avec une maturité infinie et un coupon continue plutôt qu'une obligation zero-coupon. Cela lui permet donc de prendre en considération le service de la dette qui est déductible d'impôt. Ainsi dans son modèle, en plus des coûts de faillite, la déduction des intérêts sur la dette permet d'expliquer la valeur de la dette d'une firme. Leland et Toft (1996) relaxeront l'hypothèse de la maturité infinie dans leur modèle.

Deux articles, Jones, Mason et Rosenfeld (1984) et Brennan et Schwartz (1978) vont tenter d'implémenter de façon pratique les modèles structurels. Toutefois, ils observent des écarts de crédit plus élevés que le marché et le temps de calcul est coûteux. Ainsi, à cause d'un manque de résultats encourageants, les chercheurs vont perdre intérêt pour les modèles structurels.

Il faut attendre près de deux décennies pour que l'intérêt reprenne pour cette approche, et ce avec Longstaff et Schwartz (1995). Dans leur article, ils tentent de combiner le risque de défaut et le risque de marché dans un même modèle à deux facteurs, soit la valeur de la firme qui suit un mouvement

brownien géométrique et le taux d'intérêt qui suit un processus Ornstein-Uhlenbeck, en construisant une variable qui, lorsqu'elle atteint un certain niveau, indique la détresse financière. Ils permettent aussi une corrélation entre ces deux facteurs, ce qui augmente le réalisme de leur modèle. Ils apportent aussi certaines innovations au niveau des règles de partage entre les créanciers du montant de recouvrement. Ils supposent que, lorsque la firme est en détresse financière, elle fait défaut sur toutes ces dettes et que le partage du montant de recouvrement n'est pas fait selon des règles strictes, comme les modèles de Merton (1974) et Black et Cox(1976) en font l'hypothèse. Cette nouvelle hypothèse, semble réaliste puisqu'on observe souvent une violation de ces règles sur le marché. Toutefois, Longstaff et Schwartz (1995) ne tentent pas de modéliser les interactions complexes qui régissent le partage du montant de recouvrement, ils vont plutôt le prendre comme exogène. De plus, leur modèle réussit à générer des *courbes d'écart de crédit monotones croissantes et quadratiques*, ce qui semble correspondre selon une étude empirique de Sarig et Warga (1989) avec ce que nous observons sur le marché, c'est-à-dire des courbes monotones croissantes pour les obligations de qualité et des courbes quadratiques pour les obligations spéculatives. Finalement, leur modèle semble donner des écarts de crédit d'une amplitude similaire à ceux du marché.

Toutefois, aucun des modèles mentionnés précédemment n'arrive à expliquer les écarts courts termes entre une obligation risquée et une obligation non risquée, car, le processus de la valeur de la firme étant continu, la probabilité de faire défaut à court terme, étant donné que la valeur de la firme est loin du niveau de défaut, est presque nulle ; ce qui contredit ce qu'on observe

en pratique sur les marchés. Pour remédier à ce problème, Zhou (1997) propose un processus de diffusion avec sauts pour la valeur de la firme. Il justifie cette procédure en argumentant que la valeur de la firme n'est observable que discrètement. En effet, on n'a qu'à penser aux états financiers qui sortent trimestriellement pour les entreprises publiques. Ainsi pendant cette période de trois mois, il peut se produire plusieurs événements, comme des scénarios catastrophes, qui entraîneraient le défaut. Duffie et Lando (2001) proposent, eux aussi, dans le cadre de l'approche structurelle un modèle où il est possible de sauter directement au défaut dû à une asymétrie d'information comptable. Finalement, Ericsson et Renault (2002) tentent d'expliquer un saut possible au défaut par un manque de liquidité.

Bref, la principale force des modèles à forme structurelle est qu'ils permettent d'expliquer la cause du défaut, c'est-à-dire lorsqu'il y a une diminution trop élevée de la valeur de la firme. Toutefois cette dernière variable, commune à tous les modèles structurels, n'est pas observable et est très difficile à estimer. Ceci rend les modèles de l'approche structurelle difficiles à appliquer en pratique.

1.1.2 Forme réduite

Les modèles à forme réduite tentent de pallier aux limitations de la forme structurelle, c'est-à-dire l'évaluation de la valeur de la firme, et proposent de modéliser les temps de défaut ou les événements de défaut à l'aide de variables exogènes à la valeur de la firme. Malheureusement, ils perdent la propriété explicative du défaut que possèdent les modèles à forme struc-

turelle. L'évaluation d'obligations avec risque de défaut par un modèle à forme réduite comprend généralement trois variables importantes soit le taux d'intérêt, l'intensité du défaut, qui définit la probabilité de défaut, et le montant de recouvrement, qui est le montant que le détenteur de l'obligation peut espérer récupérer en cas de défaut.

Parmi les articles fondateurs de cette approche, on retrouve celui de Jarrow et Turnbull (1995). Dans celui-ci, les auteurs proposent un modèle où l'événement de défaut ne dépend pas de la valeur de la firme mais plutôt d'une intensité de défaut qui est exogène à la firme. Toutefois, l'hypothèse majeure de leur modèle réside dans le taux de recouvrement qui est de type *return of treasury*, c'est-à-dire que lorsqu'il y a défaut, le montant de recouvrement est investi dans une obligation sans risque ayant la même échéance que l'obligation qui a fait défaut. Ainsi, dans le contexte d'évaluation en temps discret (arbre binomial), ils n'ont pas à se soucier du moment de défaut (temps d'arrêt) et peuvent évaluer une obligation risquée comme un produit dérivé européen. Leur modèle en temps continu modélise l'événement de défaut à l'aide d'un processus de Poisson, ceci entraîne donc que le temps de défaut suit une loi exponentielle. De plus, il est possible d'inclure différents processus de diffusion pour le taux d'intérêt, ce qui rend ce modèle attrayant. Celui-ci suppose aussi que l'intensité de défaut, le taux d'intérêt et le montant de recouvrement sont indépendants. Bien que leur modèle semble très intuitif et attrayant, les hypothèses de l'intensité constante et du montant de recouvrement constant sont moins réalistes de même que l'indépendance entre les trois variables importantes mentionnées plus haut.

Deux articles clefs de la littérature se sont attaqués aux failles de l'article de Jarrow et Turnbull (1995), plus précisément à l'intensité de défaut constante. Le premier de Jarrow, Lando et Turnbull (1997) propose de modéliser le processus de défaut par un processus de Markov homogène et continu à états finis. Les états peuvent représenter les différentes cotes de crédit qu'octroient certaines agences comme Standard&Poors et Moody's. On obtient ainsi une matrice appelée matrice de transition qui contient les probabilités de passer d'un état à un autre. Comme la probabilité de faire défaut varie d'un état à l'autre, l'intensité de défaut n'est pas constante pour des obligations ayant différentes cotes. Ce modèle basé sur la migration des cotes de crédit est intéressant et s'apparente à celui du RiskMetrics Group : CreditMetrics. De plus, les auteurs proposent aussi d'associer aux divers états différents montants de recouvrement. Toutefois, comme le modèle précédent, le taux d'intérêt, l'intensité de défaut et le montant de recouvrement sont indépendants. D'autres auteurs ont tenté, toujours dans un contexte de migration de crédit, de modéliser la corrélation entre ces variables. Das et Tuffano (1996) ont proposé un montant de recouvrement stochastique dépendant d'une variable latente qui serait elle-même corrélée à une variable latente du taux d'intérêt. Lando (1998), pour sa part, propose une intensité de défaut stochastique qui serait corrélée avec le taux d'intérêt. Ainsi, il suppose que la probabilité de transition dépend d'une variable d'état utilisée pour modéliser la structure à terme des taux d'intérêt. Un autre point faible de l'approche de Jarrow, Lando et Turnbull (1997) est qu'elle suppose que toutes les firmes avec la même cote de crédit ont le même écart entre le rendement de leurs

obligations et le taux sans risque. Ce qui n'est pas nécessairement vrai lorsqu'on observe le marché.

Une autre voie empruntée pour améliorer le modèle de Jarrow et Turnbull (1995) a été celle de Duffie et Singleton (1999). Ils présentent un modèle où la distribution du moment de défaut est caractérisée par un processus d'intensité qui permet d'obtenir la probabilité conditionnelle de défaut à l'instant présent étant donné qu'il n'y pas encore eu de défaut. Les auteurs ne proposent pas de forme particulière pour l'intensité de défaut, toutefois Li (2000), lui, suppose une relation linéaire avec le temps. D'autres auteurs comme Hamilton, James et Webber (2002) proposent un processus de retour vers la moyenne à la Cox-Ingersoll-Ross. Cependant le plus grand apport de Duffie et Singleton (1999) est de montrer qu'on peut évaluer une obligation zero-coupon risquée $P^*(t, T)$ de la même manière qu'une obligation non risquée en changeant le taux d'intérêt sans risque par un taux ajusté pour le risque.

$$P^*(t, T) = E_t^Q \left[\exp \left(- \int_t^T R_T dt \right) X \right]$$

et

$$R_t = r_t + h_t L_t$$

où R_t est le taux risqué, r_t le taux sans risque, h_t la probabilité de défaut, L_t le taux de recouvrement de la valeur marchande de l'obligation risquée et X sa valeur nominale.

Pour arriver à cela, ils font une hypothèse très importante, c'est-à-dire que le montant de recouvrement est une fraction du prix juste avant le défaut

(*recovery of market value*), et non une fraction de la valeur nominale comme le font d'autres. Ainsi, il est possible de construire une structure à terme des taux ajustés pour le risque en utilisant des modèles pour taux sans risque et ensuite d'évaluer des obligations avec risque de défaut.

De leur côté, Hamilton, James et Weber (2002) proposent un modèle qui intègre l'approche de migration de crédit de Jarrow, Lando et Turnbull (1997) et la flexibilité du modèle de Duffie et Singleton (1999). Leur modèle permet donc à une institution financière de combiner les données du marché (cotes de crédit) avec un modèle de qualité de crédit interne. Dans leur modèle l'intensité de défaut dépend de la qualité de crédit qui varie entre 0 et 1 où 1 est une borne absorbante qui représente le défaut. De plus, le spectre $[0, 1)$ est divisé en autant d'intervalles qu'il y a de cotes de crédit différentes (excluant l'état de défaut). Les auteurs proposent un processus Cox-Ingersoll-Ross, auquel on a ajouté un processus de saut dont le paramètre est l'intensité de défaut (permet de sauter directement au défaut), pour modéliser la qualité de crédit. Ainsi, lorsqu'il y a une re-cote, on observe le processus de qualité de crédit au temps de re-cote, pour connaître la nouvelle cote de crédit. De plus, l'intensité de défaut dépend elle-même de la qualité de crédit, ce qui fait en sorte qu'elle n'est pas constante. Chaque cote de crédit a aussi sa propre structure à terme qui est générée de la même manière que Duffie et Singleton (1999) et il y a indépendance entre le taux d'intérêt, l'intensité de défaut et le montant de recouvrement.

1.1.3 Modèles commerciaux

CreditMetrics[©] est un modèle commercial développé par RiskMetrics Group qui s'apparente à la forme réduite de Jarrow, Lando et Turnbull (1997) et son utilisation de matrice de transition dans un contexte de migration. De plus, il s'inspire aussi du modèle de Merton (1974) et de la forme structurelle pour l'estimation de la corrélation entre les défauts (cas à plusieurs obligations). Dans ce modèle, le taux d'intérêt est déterministe et l'incertitude provient du taux de recouvrement de même que de la migration de crédit qui suivent des processus aléatoires. Ce modèle repose sur l'hypothèse que toutes obligations ayant la même cote de crédit ont le même risque de défaut et que ce risque est mesuré par la probabilité de défaut historique.

Le RiskMetrics Group a aussi récemment développé le modèle CreditGrade[©] qui est de type structurel. Ce dernier permet d'évaluer la probabilité de défaut sur un intervalle de temps donné selon cinq paramètres : la valeur de la firme, sa volatilité, son endettement par action, l'espérance du taux de recouvrement et la volatilité de celui-ci. Tous ces paramètres sont déterministes, sauf la valeur de la firme qui suit un mouvement brownien géométrique. De plus, le taux de recouvrement n'est connu qu'au moment du défaut et suit une loi lognormale. En supposant l'indépendance entre la valeur de la firme et le taux de recouvrement, les auteurs trouvent une formule fermée pour la probabilité de défaut. Nous nous inspirerons en partie de ce modèle dans ce mémoire.

Un autre modèle est KMV[©] (Kealhofer, McQuown et Vasicek), développé par la firme du même nom. L'hypothèse importante de leur modèle est que

toute l'information disponible est comprise dans la valeur au marché du titre. Ainsi, la qualité de crédit pourrait être une fonction de valeur au marché des actifs, c'est une hypothèse que nous ferons aussi dans ce mémoire.

Finalement, on peut penser au modèle CreditRisk+[©] de Credit Suisse Financial Product qui s'inspire de l'actuariat et de l'approche de portefeuille pour modéliser le risque de défaut. Aucune hypothèse n'est faite sur les causes du défaut et celles-ci sont aléatoires. Chaque obligation a une volatilité pour son taux de défaut, le modèle peut ainsi capter une corrélation entre les obligations.

1.2 Copules, corrélation et produits dérivés de crédit

Nous avons présenté plusieurs modèles de risque de crédit qui permettent d'évaluer une obligation avec risque de défaut ou un produit dérivé sur celle-ci. Toutefois ces modèles sont insuffisants pour évaluer un portefeuille d'obligation ou un produit dérivé de crédit écrit sur un panier d'obligations. En effet, pour évaluer ce genre de produit, il faut réussir à modéliser la corrélation entre la qualité de crédit des obligations.

Pour introduire la corrélation entre les défauts dans un contexte d'approche structurelle, plusieurs auteurs dont Hull et White (2001) et Li (1999) vont corréler les MBG des valeurs des firmes. D'autres modèles commerciaux comme ceux de CreditMetrics[©] et KMV[©] proposent le même genre d'ap-

proche. Ils utilisent ainsi l'argument de Merton qui suppose que le défaut est conditionné par la valeur de la firme. Dans le cas de l'approche réduite, certains articles comme Duffie (1998) et Duffie et Garlenu(2001) vont introduire la corrélation à travers le processus des intensités de défaut. Toutefois la corrélation qui en résulte est trop faible. D'autres auteurs comme Davis et Lo (1999) et Jarrow et Yu (2001) vont proposer, toujours sous l'approche réduite, des modèles de contagion du défaut, c'est-à-dire que lorsqu'une obligation fait défaut, cela déclenche le défaut de d'autres obligations avec une certaine probabilité. Cependant, cette approche entraîne souvent des défauts simultanés, ce qui n'est pas très pratique pour l'évaluation de certains produits dérivés de crédit comme des swap $n^{\text{ième}}$ -à-faire-défaut.

D'un autre côté, Hamilton, James et Weber (2002) montrent que la mesure de corrélation ordinaire n'est pas adéquate dans le cas des événements de crédit puisque les lois marginales ne sont pas gaussiennes. En effet, les queues des distributions marginales sont trop épaisses à droite et trop minces à gauche. Comme l'information dans les queues est très importante, les auteurs proposent l'utilisation de copules, car, en choisissant bien la copule, nous pouvons capter plusieurs structures de dépendance.

Li (1999) étend le modèle de CreditMetrics[©] à un modèle utilisant une copule gaussienne. La contribution majeure de ce modèle a été de pouvoir modéliser la dépendance entre les temps de défaut au lieu de la dépendance entre les événements de défaut. En gardant la structure de dépendance gaussienne, le cadre du modèle CreditMetrics[©] peut être maintenu et fait en sorte que le calibrage n'est pas très difficile. C'est ce qui fait en sorte qu'aujourd'hui

d'hui la copule gaussienne et son extension, la copule de Student, sont parmi les copules les plus populaires pour évaluer des produits dérivés de crédit comprenant plusieurs obligations.

Schönbucher et Schubert (2001) ont étendu le modèle de Li (1999) en généralisant l'approche par copules en permettant l'utilisation de différentes classes de copules, mais aussi en spécifiant une dynamique pour les intensités de défaut individuelles. De plus, ils proposent l'utilisation d'une classe générale de copules, appelée archimédienne, plutôt que la copule gaussienne ou copule de Student, car ces dernières impliquent une indépendance peu réaliste entre les structures à terme risquées. Hamilton, James et Weber (2002) reprennent cet argument et proposent eux aussi une copule de type archimédienne, plus précisément la copule de Ait-Mikhail-Haq. Dans leur modèle, la copule mesure la dépendance entre les obligations de différentes classes et suppose que les obligations ayant la même cote de crédit sont indépendantes. D'autres modèles comme Rogge et Schönbucher (2003), qui n'utilisent pas la migration de crédit, supposent que toutes les obligations sont dépendantes.

Des études empiriques comme Das et al.(2002), montre que la corrélation entre les défauts est positive. De leur côté, Mashal, Naldi et Zeevi (2003) supposent que la copule pour les rendements des actions d'une firme est la même que celle des rendements de la valeur de la firme. Ainsi, il est possible de calibrer cette dernière avec de l'information facilement accessible. De plus, comme les données sur les défauts sont difficilement accessibles, ils proposent d'utiliser la copule des rendements de la firme comme valeur de remplacement

(proxy) de la copule des défauts. Zhou (2001), pour sa part, montre à travers un modèle structurel que si la corrélation entre les valeurs des firmes est positive, la corrélation entre les intensités de défaut est aussi positive sous la probabilité physique.

Chapitre 2

Le modèle

Notre modèle de crédit s'inspire de celui de Hamilton, James et Weber (2002), c'est-à-dire que nous tentons d'intégrer un modèle de qualité de crédit avec un modèle de marché basé sur des cotes de crédit. Nous essayons aussi, tout comme eux, de modéliser la corrélation entre les différentes obligations d'un portefeuille à l'aide de copules.

De plus, notre modèle permet qu'une obligation saute directement au défaut de n'importe quelle cote, mais aussi qu'elle soit recotée à n'importe quelle classe de crédit et ce, sans utiliser de matrice de transition.

Nous expliquons donc dans ce chapitre comment nous construisons ce modèle à travers un modèle de qualité de crédit et de cote de crédit, puis comment nous intégrons ces derniers tout en introduisant une dépendance entre les titres de dette à l'aide de copules.

2.1 Qualité de crédit

Comme dans Hamilton, James et Weber (2002), notre processus de qualité de crédit q_t est un indice continu qui peut dépendre de plusieurs variables et qui représente une évaluation du risque de crédit. Le processus varie entre $[0, 1]$, c'est en quelque sorte une probabilité de défaut. Lorsque $q_t^{(i)} = 1$, le titre de dette i est en défaut, à l'opposé, lorsque $q_t^{(i)} = 0$, le titre de dette i est considéré comme sans risque. De plus, le processus q_t est stochastique, la composante stochastique peut être introduite par une variable de q_t qui elle-même est stochastique ou directement par q_t en stipulant, comme le fait Hamilton, Weber et James (2002), un processus aléatoire pour la qualité de crédit qui varie entre $[0, 1]$.

Dans notre cas, nous avons plutôt opté pour introduire l'élément stochastique à travers la valeur de la firme V_t qui suit un mouvement brownien géométrique. Nous avons donc $q_t = h(V_t)$ où $dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dW_t$ et W un mouvement brownien standard. En utilisant le théorème d'Itô, nous obtenons une équation différentielle stochastique pour q_t de la forme

$$dq_t = \alpha(t, V_t)dt + \beta(t, V_t)dW_t.$$

Comme le font Hamilton, James et Weber (2002), nous ajoutons un terme aléatoire qui permet d'atteindre le défaut à tout moment, car le processus q_t , défini par la probabilité de défaut est toujours inférieur à 1. Ce terme aléatoire, représente un temps de défaut, c'est-à-dire que $q_t = 1$ si $t \geq \tau$ où $\tau \sim \text{Exp}(\lambda)$ est un temps de défaut aléatoire indépendant de W . On obtient

donc l'équation :

$$dq_t = \alpha(t, V_t)dt + \beta(t, V_t)dW_t + (1 - q_t)dN_t,$$

où $N_t = \mathbb{I}_{t \geq \tau}$. Toutefois, comme q est une fonction strictement décroissante de V , on peut exprimer V en fonction de q , lorsque $\tau > t$, et l'on obtient une forme générale du type

$$dq_t = \alpha'(t, q_t)dt + \beta'(t, q_t)dW_t + (1 - q_t)dN_t.$$

Dans ce mémoire nous avons choisi d'utiliser le modèle de CreditGrade[©], mais le processus de qualité de crédit peut être un modèle interne à une institution financière, un modèle de la littérature où tout autre modèle vendu par certaines entreprises privées.

2.2 Cote de crédit

La cote de crédit ou classe de crédit est un deuxième élément important de notre modèle. Comme la qualité de crédit, la cote de crédit c_t est un indice du niveau risque de crédit d'un titre de dette, mais contrairement à q_t , c_t prend des valeurs discrètes, $c_t \in [1, \dots, C]$. Lorsque $c_t^{(i)} = 1$, le titre de dette est presque sans risque et lorsque que $c_t^{(i)} = C$ le titre de dette est en défaut ou proche du défaut.

Normalement les cotes de crédit sont octroyées par des agences indépendantes, comme Moody's, Standard & Poor's et Fitch, et elles sont représentées sous forme alpha-numérique. De plus, les modèles que ces compagnies utilisent pour décider des cotes des titres de dette sont basés non seulement sur des aspects quantitatifs, mais aussi sur des aspects qualitatifs, comme des analyses ou des appréciations d'expert.

2.3 Copule

Dans un contexte de portefeuille de titre de dette, il est peu réaliste de poser comme hypothèse que les niveaux de risque de crédit entre les titres sont indépendants. Les copules nous permettent alors de modéliser cette dépendance. Nous expliquons au *chapitre 5*, plus en détail ce qu'est une copule, leurs caractéristiques, leurs propriétés et leur utilité.

Dans notre modèle, la corrélation entre les niveaux de risque de crédit des titres de dette est introduite à travers la qualité de crédit. Dans notre cas, la dépendance est plus spécifiquement entre les valeurs des différentes firmes du portefeuille $V_t^{(i)}$ où $i = 1, \dots, m$ comme le proposent plusieurs auteurs dont Hull et White (2001) et Li(1999). En effet, comme la qualité de crédit est fonction de la valeur de la firme, on montrera plus loin que les $q_t^{(i)}$ et $V_t^{(i)}$ ont la même copule, donc la même structure de corrélation. Dans le cas où les $q_t^{(i)}$ sont directement stochastiques, nous pouvons introduire la corrélation directement au niveau des termes aléatoires des $q_t^{(i)}$.

2.4 Intégration

Notre modèle essaie d'intégrer un modèle discret (cote de crédit) avec un modèle continu (qualité de crédit). Pour ce faire, nous associons une cote de crédit c_t à un intervalle de q_t . Cette intervalle est délimité par b_{k-1} et b_k qui sont respectivement la borne inférieure et supérieure de la cote de crédit k , nous avons aussi $b_0 = 0$ et $b_C = 1$. Rappelons que $q_t \in [0, 1]$. Donc on devrait avoir

$$q_{t,k} \in [b_{k-1}, b_k[, \quad k = 1, \dots, C$$

où $q_{t,k}$ est la qualité de crédit au temps t ayant une cote de crédit k . Toutefois, la cote de crédit n'est pas observée de manière continue, mais plutôt de manière discrète dans le temps, à chaque temps de recote. À ce moment, nous pouvons observer q_t pour connaître c_t . Dans notre modèle, le temps de recote suit une loi exponentielle d'intensité $\lambda^{(R)}$ et chaque cote de crédit a son propre paramètre d'intensité. Nous avons donc $\tau_k^{(R)} \sim \exp(\lambda_k^{(R)})$. De plus, nous supposons que les temps de recote des obligations sont indépendants.

Pour le temps de défaut, nous supposons, comme Hamilton, James et Weber (2002), qu'il suit une loi exponentielle non-homogène de paramètre $\lambda_t^{(D),i}$, appelé intensité de défaut, qui est fonction de la qualité de crédit.

$$\lambda_t^{(D),i} = \lambda^{(D)} \phi(q_t^i) \quad i = 1, \dots, m,$$

où $\phi(q_t^i)$ est une fonction croissante. Ainsi l'intensité de défaut est plus élevée pour les obligations plus risquées et plus faible pour les obligations moins

risquées. Dans notre modèle, on définira $\phi(q_t^i) = \frac{q_t^i}{1-q_t^i}$ comme Hamilton, James et Weber (2002).

Nous obtenons donc que

$$Pr(\tau^{(D),i} < t) = 1 - \exp\left(\int_0^t -\lambda_t^{(D),i} dt\right) \quad i = 1, \dots, m, .$$

Dans le cas multi-obligations, nous obtiendrons une équation différentielle stochastique pour $V_t^{(i)}$ de la forme

$$dV_t^{(i)} = \mu_V^{(i)} V_t^{(i)} dt + \sigma_V^{(i)} V_t^{(i)} dW_t^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

où les $W_t^{(i)}$ sont des mouvements browniens standards corrélés entre eux selon une structure donnée par la copule choisie. Pour les $q_t^{(i)}$, nous avons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dq_t^{(i)} = \alpha(t, V_t^{(i)}) dt + \beta(t, V_t^{(i)}) dW_t^{(i)} + (1 - q_t^{(i)}) dN_t, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, C,$$

où les $\tau_j^{(i)}$ sont dépendants entre eux, selon la même copule que les $V^{(i)}$ comme le font Mashal, Naldi et Zeevi (2003).

Chapitre 3

Qualité de crédit : *CreditGrade*©

3.1 Modèle *CreditGrade*©

Le modèle *CreditGrade*© est de type structurel, c'est-à-dire que le défaut survient lorsque la valeur de la firme passe en dessous d'un certain niveau appelé barrière de défaut. Dans le modèle *CreditGrade*©, cette barrière est aléatoire. De plus, le modèle suppose que la valeur de la firme suit un processus stochastique de type mouvement brownien géométrique

$$dV_t = \mu_V V dt + \sigma_V V dW_t$$

où W est un mouvement brownien standard, σ_V la volatilité des rendements de la valeur de la firme et μ_V , le rendement moyen.

Les auteurs supposent que $\mu_V = 0$. Ils justifient cette hypothèse en argumentant que ce qui est important dans l'évaluation de crédit ce n'est pas le coefficient de dérive en soit, mais plutôt ce dernier relativement à la barrière de défaut. Ainsi en présumant qu'en moyenne une compagnie émet plus de dette et/ou paie des dividendes pour maintenir un niveau de levier constant, il en résulte que le coefficient de dérive est le même pour la dette et le prix de l'action de la firme. Il s'ensuit donc que le coefficient de dérive de la firme par rapport à celui de la dette est 0, par conséquent, il est aussi de 0 par rapport à la barrière de défaut.

Comme une barrière de défaut statique implique des écarts de crédit courts termes peu réalistes, les auteurs supposent que le taux de recouvrement L est aléatoire et suit une loi lognormale de moyenne \bar{L} et d'écart type λ .

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \mathbf{E}L \\ \lambda^2 &= \text{Var}(\log(L)) \\ LD &= \bar{L}De^{-\lambda Z - \lambda^2/2}\end{aligned}$$

où D est la dette par action et Z suit une loi normale centrée réduite indépendante du mouvement brownien W . La variable aléatoire Z est inconnue au temps $t = 0$ et est connue seulement au moment du défaut. Ainsi, il y a un élément d'incertitude dans le montant de recouvrement et la barrière peut être atteinte à n'importe quel moment, ce qui ressemble à un saut au défaut. En effet, il n'y a pas de défaut tant que

$$V_0 e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2} > \bar{L} D e^{\lambda Z - \lambda^2/2}$$

Ainsi la probabilité de survie pour un temps t n'est rien d'autre que la probabilité que la valeur de la firme reste au-dessus de la barrière pour ce même temps t . En intégrant par rapport à la distribution de la barrière, on obtient la probabilité de survie suivante

$$Pr_s(t) = \Phi_2 \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\log(b)}{\lambda}, -\frac{A_t}{2} + \frac{\log(b)}{A_t}; \frac{\lambda}{A_t} \right) - b \cdot \Phi_2 \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\log(b)}{\lambda}, -\frac{A_t}{2} - \frac{\log(b)}{A_t}; -\frac{\lambda}{A_t} \right)$$

où

$$b = \frac{V_0 e^{\lambda^2}}{\overline{LD}}$$

$$A_t = \sqrt{\sigma^2 t + \lambda^2}$$

$\Phi_2(x_1, x_2, \rho)$ représente une loi normale bivariée.

Dans le modèle CreditGrade[©], les auteurs s'arrêtent là en ce qui concerne la probabilité de survie, toutefois, nous observons que $Pr_s(0) \neq 1$, ce qui est faux puisque nous connaissons l'information à $t = 0$ et nous supposons que la firme n'a pas fait défaut. Ainsi, une probabilité de survie plus réaliste serait

$$Ps(t) = \frac{Pr_s(t)}{Pr_s(0)}$$

où

$$Pr_s(0) = \Phi \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\log(b)}{\lambda} \right)$$

La probabilité de défaut est donc tout simplement $Pd(t) = 1 - Ps(t)$

Comme le modèle CreditGrade[©] se veut avant tout une application pratique de l'approche structurelle, les auteurs ont proposé des moyens pour approximer certaines variables qui ne sont pas observables comme la valeur de la firme et sa volatilité. Ainsi, ils trouvent

$$\begin{aligned} V_0 &\approx S_0 + \bar{L}D \\ \sigma_V &\approx \sigma_S \frac{S}{S + \bar{L}D} \approx \sigma_{S^*} \frac{S^*}{S^* + \bar{L}D} \end{aligned}$$

où S_0 est le prix de l'action à $t = 0$, σ_{S^*} la volatilité du prix de l'action sur une certaine période et S^* la moyenne du prix de l'action sur cette même période. Les auteurs ont testé des périodes de 500, 750 et 1000 jours et prétendent que celle de 1000 jours présente les meilleurs résultats ; c'est donc pour celle-ci que nous avons opté.

3.2 Notre utilisation du modèle CreditGrade[©]

Comme qualité de crédit, nous avons choisi la probabilité donnée par CreditGrade[©] de faire défaut à l'intérieur d'un an, donc $q_t = h(V_t) = 1 - P_s(1)$ évalué en V_t . En d'autres mots, on remplace V_0 par V_t et on fixe l'horizon de la probabilité de survie à un an. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} q_t(1, V_t) = & 1 - \left[\Phi_2 \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\log(bt)}{\lambda}, -\frac{A}{2} + \frac{\log(bt)}{A}; \frac{\lambda}{A} \right) \right. \\ & \left. - b_t \cdot \Phi_2 \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\log(bt)}{\lambda}, -\frac{A}{2} - \frac{\log(bt)}{A}; -\frac{\lambda}{A} \right) \right] \end{aligned}$$

où

$$dV_t = \sigma_V V_t dW_t, \quad b_t = \frac{V_t e^{\lambda^2}}{\overline{LD}}, \quad A = \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2}$$

En faisant un lemme d'Itô, on obtient l'équation de diffusion de q_t

$$\begin{aligned} dq_t = & -\frac{\sigma^2}{2} \left\{ \frac{N(Z)}{\lambda} \left[\phi(x_1)(1 + x_1 V_t) - b_t \phi(x_2) \left(1 + V_t \left(x_2 - \frac{e^{\lambda^2}}{\overline{LD}} \right) \right) \right] \right. \\ & + \frac{N(W)}{A} \left[\phi(y_1)(1 + y_1 V_t) + b_t \phi(y_2) \left(1 + V_t \left(y_2 - \frac{e^{\lambda^2}}{\overline{LD}} \right) \right) \right] \\ & \left. - \frac{\phi(W)W}{A \log(b_t)} \left[\phi(y_1) + \phi(y_2) \right] \right\} dt \\ & + \sigma \left\{ \frac{N(Z)}{\lambda} [\phi(x_1) - b\phi(x_2)] + \frac{N(W)}{A} [\phi(y_1) + b\phi(y_2)] - \frac{e^{\lambda^2}}{\overline{LD}} \Phi_2(x_2, y_2, \rho_2) \right\} dW_t \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\lambda}{2} + \frac{\log(b_t)}{\lambda}, & x_2 &= \frac{\lambda}{2} + \frac{\log(b_t)}{\lambda} \\ y_1 &= -\frac{A}{2} + \frac{\log(b_t)}{A}, & y_2 &= -\frac{A}{2} - \frac{\log(b_t)}{A}, & \rho_2 &= -\frac{\lambda}{A} \\ Z &= -\frac{\sigma}{2}, & W &= -\frac{\log(b_t)\sigma}{A\lambda} \\ b_t &= \frac{V_t e^{\lambda^2}}{\overline{LD}}, & A &= \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

$N(x)$: fonction cumulative de la loi normale standard évaluée au point x

$$\phi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Malheureusement, les coefficients α et β ne sont pas fonction de q_t , mais plutôt de V_t . Donc, l'équation différentielle stochastique de q_t est peu utile.

Chapitre 4

Cote de crédit : *Moody's*

4.1 Modèle Moody's

Comme modèle de cote de crédit, nous avons choisi celui de l'agence Moody's qui est l'une des agences de référence sur le marché. Comme les modèles de cotes de crédit, il comporte plusieurs éléments qualitatifs.

Voici quelques-uns de ces principes de base :

1. **Mettre l'accent sur le qualitatif** : L'agence Moody's utilise bien sûr des données quantitatives pour faire ses analyses, mais pas dans un cadre rigide. Elle préfère mettre l'accent sur des analyses individuelles des émissions et des émetteurs de dettes selon leur expérience passée, l'information disponible et une analyse de crédit impartiale.

2. **Se concentrer sur le long terme** : En se concentrant sur le long terme, l'agence Moody's permet d'éviter que les cotes ne changent aux moindres variations de l'offre et de la demande. Pour y arriver, elle regarde chez les entreprises leur capacité de rembourser leur dette à long terme, les stratégies de la direction et les changements législatifs dans l'industrie dans laquelle elles évoluent. De plus, elle regarde les perspectives pour tout un cycle économique et parfois plus loin.

3. **Constance globale** : Moody's essaie aussi dans l'attribution de ses cotes d'avoir de la constance pour assurer la comparabilité du niveau de risque de crédit entre différentes entreprises. Pour ce faire, elle utilise non seulement des avis d'expert à l'interne, mais aussi à l'externe afin d'avoir une certaine distance face à ses analyses.

4. **Niveau et prévisibilité des flux monétaires** : Ce principe est très important, car il évalue la capacité d'une firme à produire des flux monétaires en quantités suffisantes et à temps pour rencontrer ses obligations sur sa dette. Moody's regarde aussi beaucoup la capacité de réagir des entreprises en période d'incertitude.

5. **Scénarios défavorables plausibles** : L'agence Moody's regarde différents scénarios défavorables mais plausibles qui peuvent varier en fonction de la firme étudiée et de son secteur d'activité et estime sa capacité à rembourser sa dette dans de telles circonstances. Moody's n'a pas de scénario catastrophe qu'elle fait passer à toutes les firmes qu'elle évalue,

elle utilise beaucoup le cas par cas.

6. Regarder au-delà des pratiques comptables : Comme différentes compagnies utilisent différentes pratiques comptable, l'agence Moody's doit prendre en compte ces différences lorsqu'elle analyse des entreprises. De plus, les chiffres comptables ne disent pas tout et Moody's doit souvent aller plus loin pour trouver certaines informations pertinentes.

En plus de ces différents principes de base, l'agence Moody's prend aussi en compte des facteurs propres à chaque secteur et industrie.

Moody's peut octroyer 9 cotes différentes voici ce qu'elles signifient :

Tableau 4.1: Description des cotes de crédit Moody's

Cote	Description
Aaa	Obligation jugée de qualité la plus élevée avec un risque de crédit minimal.
Aa	Obligation jugée de qualité élevée avec un risque de crédit faible.
A	Obligation considérée de qualité moyenne supérieure avec un risque de crédit faible.
Baa	Obligation considérée de qualité moyenne avec un risque de crédit modéré. Peu avoir certaines caractéristiques spéculatives. Plus basse cote dans laquelle certains fonds institutionnels peuvent investir.
Ba	Obligation comportant des éléments spéculatifs avec un risque de crédit substantiel.
B	Obligation considérée comme spéculative avec un risque de crédit élevé.
Caa	Obligation jugée de faible qualité avec un risque de crédit très élevé.
Ca	Obligation très spéculative qui a de bonne chance de faire défaut dans un avenir rapproché. L'espérance de recouvrement du capital et des intérêts est bonne.
C	Obligation de la plus faible qualité, habituellement en défaut, où l'espérance de recouvrement du capital et des intérêts est faible.

L'agence Moody's attribue aussi pour chaque cote entre Aa et Caa, le chiffre 1, 2 ou 3. Ce spécificateur numérique permet d'indiquer si l'obligation se situe dans la partie supérieure, milieu ou inférieure de la classe de crédit ; le chiffre 1 étant attribué à la tranche supérieure.

4.2 Notre utilisation du modèle Moody's

Comme pour certaines classes de crédit, il n'y a pas beaucoup de données disponibles, nous avons décidé, dans le cadre de notre modèle, de regrouper certaines d'entre elles. Ainsi, nous avons éliminé les spécificateurs numériques et avons regroupé les cotes Caa, Ca et C.

Nous nous retrouvons donc avec sept classes de crédit qu'on numérote de 1 à 7 pour simplifier la notation ; 1 étant la meilleure cote et 7 la pire. On obtient donc que $c_t \in [1, 7]$ où $c_t \in \mathbb{N}_+$.

Chapitre 5

Copule : un outil pour modéliser la dépendance

La modélisation de la dépendance entre les événements de crédit de différentes obligations est importante pour l'évaluation de produits dérivés de type panier. En effet, quand un événement de crédit survient sur une obligation, cela a une influence sur la probabilité des autres obligations d'avoir aussi des événements de crédit. Normalement, cette dépendance est positive. L'utilisation de copules permet dans ce contexte de modéliser cette dépendance et ainsi de reproduire la structure de dépendance entre les événements de crédit. Dans ce chapitre, nous tenterons d'expliquer ce qu'est une copule et comment elles se définissent. Nous mettrons l'accent sur cinq copules en particulier soit la copule gaussienne, de Student, de Clayton, de Gumbel et de Frank.

5.1 Introduction aux copules

5.1.1 Définition

Une fonction $\mathbf{C} : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ est une copule si :

1. Il y a m variables aléatoires à valeurs dans $[0, 1]$ de telle façon que \mathbf{C} soit leur fonction de répartition
2. \mathbf{C} a des marges uniformément distribuées, c'est-à-dire que pour tout $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, m$

$$\mathbf{C}(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$$

Les copules modélisent la dépendance, donc les distributions marginales ne sont pas vraiment importantes. La raison pour laquelle on se concentre sur la copule et non sur les marges est donnée par le **théorème de Sklar**.

5.1.2 Théorème de Sklar

Si H est une fonction de répartition à m -dimensions, alors il existe une m -copule \mathbf{C} tel que pour tout $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$$H(x_1, \dots, x_m) = \mathbf{C}(F(x_1), \dots, F(x_m)),$$

où (F_1, \dots, F_m) sont les fonctions de distributions univariées associées. La copule C est unique si les marges sont continues. Inversement, si \mathbf{C} est une m -copule et (F_1, \dots, F_m) sont des fonctions de distributions univariées, alors

la H définie ci-haut est une fonction de répartition à m dimensions avec des marges (F_1, \dots, F_m) .

Si les marges sont continues, la copule de $(X_1, \dots, X_m) \sim H$ est la fonction de répartition de $(F(X_1), \dots, F(X_m))$.

De plus, si $(F(X_1), \dots, F(X_m))$ sont des fonctions de distributions strictement croissantes alors pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in (0, 1)^m$, on a :

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_m^{-1}(u_m)).$$

5.1.3 Propriétés intéressantes des copules

1. Bornes de Fréchet-Hoeffding

Pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in [0, 1]^m$ on a

$$W^m(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq M^m(\mathbf{u}),$$

où $W^m(\mathbf{u}) = \min(u_1, \dots, u_m)$ et $M^m(\mathbf{u}) = \max(u_1 + \dots + u_m - m + 1, 0)$.

$W^m(\mathbf{u})$ et $M^m(\mathbf{u})$ sont les meilleures bornes possibles.

À noter : M^m est une copule pour $m \geq 2$ et W_m est une copule pour $m = 2$.

2. Transformations monotones

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont des fonctions strictement croissantes, alors la copule associée à $(\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_m(X_m))$ est la même que celle associée à

(X_1, \dots, X_m) .

3. Indépendance

Si (X_1, \dots, X_m) sont des variables aléatoires indépendantes, alors la copule associée est donnée par :

$$\Pi(\mathbf{u}) = u_1 u_2 \dots u_m, \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in [0, 1]^m.$$

Elle est appelée copule d'indépendance.

5.1.4 Pourquoi des copules ?

Les copules sont apparues comme un outil pour modéliser la corrélation parce que la corrélation linéaire avait ses limites. Lindskog (2000), nous explique les désavantages de la corrélation linéaire et les avantages de l'utilisation des copules.

Désavantages de la corrélation linéaire

- La corrélation linéaire $\rho_l(X, Y)$ n'est pas définie si la variance de X et Y est infinie.
- La corrélation linéaire est souvent mal interprétée.

- La corrélation n'est pas invariante lorsqu'on applique une transformation strictement croissante $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ c'est-à-dire :

$$\rho_l(T(X), T(Y)) \neq \rho_l(X, Y)$$

- Si F et G sont respectivement les distributions marginales de X et Y , les corrélations linéaires $\rho_l \in [-1, 1]$ ne peuvent, en général, pas être toutes obtenues, même par un choix judicieux de la distribution jointe.

Avantages des copules

- Une meilleure compréhension de la dépendance et un plus grand nombre de structures de dépendance possible.
- Une base pour des techniques permettant de simuler des vecteurs de variables aléatoires corrélées.
- Un outil pour construire des distributions multivariées en se basant sur des données observées.
- Une façon d'étudier les effets de différentes structures de dépendance pour des fonctions de variables aléatoires dépendantes.

5.2 Copules associées à des distributions elliptiques

Les copules gaussiennes et de Student sont populaires, car il est possible de facilement générer un vecteur aléatoire corrélé, leur structure de corrélation est bien connue et elles sont jusqu'à un certain point maniables analytiquement.

5.2.1 Copule gaussienne

La copule gaussienne est la copule implicite dans le modèle CreditMetrics. Elle a été popularisée par Li (1999) et Li (2000) dans le domaine du risque de crédit et reste encore une des copules les plus utilisées sur le marché pour l'évaluation de produits dérivés de crédit. Toutefois, la copule gaussienne ne peut pas mesurer la dépendance entre les queues des distributions, car elle est *tail independent*, ceci n'est pas une bonne propriété lorsqu'on veut évaluer la dépendance entre les événements rares comme les événements de crédit.

La copule gaussienne est définie comme suit :

$$\mathbf{C}_{\Sigma}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_m) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_m)),$$

où Φ_{Σ} est la fonction de répartition de loi normale centrée réduite multivariée de paramètre Σ et Φ^{-1} la fonction inverse de la distribution de loi normale

centrée réduite univariée. De plus, la densité de la copule gaussienne s'écrit :

$$\mathbf{c}_{\Sigma}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_m) = \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varsigma}'(\Sigma^{-1} - \mathbb{I})\boldsymbol{\varsigma}\right),$$

où $\varsigma_j = \Phi^{-1}(u_j)$ et \mathbb{I} est une matrice identité $m \times m$. Le paramètre Σ est une matrice de corrélation, donc symétrique et contenant des 1 sur sa diagonale.

5.2.2 Copule de Student

La copule de Student est selon une étude de Mashal, Naldi et Zeevi (2003), celle qui présente la meilleure estimation de la corrélation entre les valeurs des firmes. Ainsi, la copule de Student permet grâce au paramètre de degré de liberté d'avoir des queues de distribution plus épaisses et par le fait même d'expliquer des mouvements extrêmes que la copule gaussienne ne peut expliquer.

La copule de Student est définie comme suit :

$$\mathbf{C}_{\Sigma, \nu}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_m) = T_{\Sigma, \nu}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_j), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_m)),$$

où $T_{\Sigma, \nu}$ est la fonction de répartition de loi de Student multivariée de paramètre Σ et ν , et t_{ν}^{-1} la fonction inverse de la distribution de la loi de Student de paramètre ν . De plus, la densité de la copule de Student s'écrit :

$$\mathbf{c}_{\Sigma, \nu}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_m) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+m}{2})[\Gamma(\frac{\nu}{2})]^m (1 + \frac{1}{\nu}\boldsymbol{\varsigma}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\varsigma})^{-\frac{\nu+m}{2}}}{[\Gamma(\frac{\nu+1}{2})]^m \Gamma(\frac{\nu}{2}) \prod_{j=1}^m (1 + \frac{\varsigma_j^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}},$$

où $\varsigma_j = t_\nu^{-1}(u_{ij})$ Les paramètres Σ et ν sont respectivement la matrice de corrélation et le degré de liberté.

5.3 Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes forment des familles de copules qui possèdent plusieurs propriétés intéressantes dont la manipulation analytique, ce qui permet parfois d'aboutir à des formes fermées ou générales. De plus, la structure de dépendance qu'elle implique semble plus réaliste que celle des copules gaussienne et de Student pour ce qui concerne les événements de crédit, ajouté à ceci que les membres les plus utilisés ne contiennent qu'un paramètre, ce qui fait que ces classes de copules sont relativement faciles à calibrer.

Définition

Une copule archimédienne $C : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ est une copule dont la distribution peut être représentée de la façon suivante :

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \mathbf{C}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_m) = \phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \phi(u_i) \right)$$

avec une fonction appropriée $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\phi(1) = 0$ et $\lim_{u_j \rightarrow 0^+} \phi(u_j) = \infty$. $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée la fonction génératrice de la copule. De plus,

nous devons avoir $(-1)^j d^j \phi(s)/ds^j > 0$ pour $1 \leq j \leq m$. Finalement, si

$$\phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \phi(u_i) \right)$$

définit une copule pour tout $m \geq 2$, ce qui est le cas si $(-1)^m d^m \phi(s)/ds^m > 0$ pour $m \geq 1$, alors $\phi^{-1}(\cdot)$ doit être la transformée de Laplace d'une variable aléatoire V , c'est-à-dire que

$$\phi^{-1}(t) = E(e^{-tV}), \quad t \geq 0.$$

Barbe et al. (2003) montre que pour certaines copules archimédiennes comme les copules de Clayton, de Gumbel et de Frank, il est possible de trouver leur densité à partir d'une forme générale qui est

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}) = \frac{\partial^m}{\partial u_1, \dots, \partial u_m} \mathbf{C}(\mathbf{u}) = \phi'(u_1) \cdots \phi'(u_j) \cdots \phi'(u_m) f_{m-1}(\mathbf{C}(\mathbf{u})),$$

où $\phi'(u_j)$ est la dérivée d'ordre 1 de ϕ par rapport à u_j et f_{m-1} une fonction récursive de la forme

$$f_{m-1}(t) = \frac{d^m}{ds^m} \phi^{-1} \Big|_{s=\phi(t)}, \quad m \geq 1.$$

Toutefois, certaines copules archimédiennes n'admettent que la corrélation positive, mais ceci n'est pas nécessairement gênant puisque la corrélation entre les événements de crédit est généralement positive, comme nous le montre Das et al.(2002).

Générer un vecteur aléatoire corrélé avec une copule archimédienne

Grâce à la procédure de Marshall et Olkin (1988), il nous est possible de générer un vecteur de variables aléatoires corrélées selon la structure de dépendance d'une copule archimédienne si celle-ci existe pour n'importe quelle dimension. Dans ce cas, la corrélation est uniquement positive. Voici la procédure :

Si $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et son inverse $\phi^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont des fonctions continues et strictement décroissantes où ϕ^{-1} est une transformée de Laplace pour une variable aléatoire Y strictement positive, on peut alors suivre l'algorithme suivant :

1. Générer un vecteur $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_m)$, indépendant et identiquement distribué de façon uniforme sur $[0, 1]$.
2. Générer une variable aléatoire Y avec les propriétés suivantes :
 - Y est indépendant de \mathbf{V}
 - La transformée de Laplace de Y est $\phi^{-1}(\cdot)$
3. On définit :

$$U_i := \phi^{-1} \left(-\frac{1}{Y} \ln(V_i) \right) \quad \text{où } i = 1, \dots, m.$$

Alors la fonction de répartition jointe des U_i est :

$$P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_m) = \phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \phi(u_i) \right)$$

et les U_i ont une copule archimédienne avec la fonction génératrice ϕ comme fonction de répartition.

Notez que si on remplace $\phi^{-1}(t)$ par $\phi^{-1}(t/\theta)$, où $\theta > 0$ est une constante, les variables générées sont les mêmes.

5.3.1 Copule de Clayton

Pour la copule de Clayton nous avons

$$\begin{aligned} \text{fonction génératrice :} & \quad \phi_{\theta}(t) = \frac{(t^{-\theta} - 1)}{\theta}, \quad \theta > 0 \\ \text{fonction génératrice inverse :} & \quad \phi_{\theta}^{-1}(s) = (1 + \theta s)^{-\frac{1}{\theta}} \end{aligned}$$

Nous trouvons donc que la copule de Clayton est donnée par

$$\mathbf{C}_{\theta} = \mathbf{C}_{\theta}(\mathbf{u}) = \left(1 - m + \sum_{j=1}^m u_j^{-\theta} \right)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \text{dérivée :} & \quad \phi'_{\theta}(t) = \frac{d}{dt}\phi_{\theta}(t) = -t^{-(\theta+1)} \\ \text{fonction récursive :} & \quad f_{m-1}(\mathbf{C}_{\theta}) = (-1)^m \mathbf{C}_{\theta}^{1+m\theta} \prod_{j=0}^{m-1} (1 + j\theta), \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de trouver la fonction de densité :

$$\mathbf{c}_{\theta}(\mathbf{u}) = \mathbf{C}_{\theta}^{1+m\theta} \prod_{j=1}^m [1 + (j-1)\theta] u_j^{-(\theta+1)}$$

Il est intéressant de mentionner que lorsque $\theta = 0$, nous obtenons avec un développement à la limite que $\phi_0(t) = -\log(t)$ ce qui implique que dans ce cas la copule de Clayton est égal à la copule d'indépendance.

Finalement, pour générer un vecteur aléatoire corrélé avec la procédure Marshall et Olkin (1988), on doit prendre $Y \sim \text{Gamma}(1/\theta)$.

5.3.2 Copule de Gumbel

Pour la copule de Gumbel nous avons

$$\begin{aligned} \text{fonction génératrice :} \quad & \phi_\theta(t) = [-\log(t)]^{\frac{1}{\theta}}, \quad 0 < \theta < 1 \\ \text{fonction génératrice inverse :} \quad & \phi_\theta^{-1}(s) = \exp(-s^\theta) \end{aligned}$$

Nous trouvons donc la distribution de la copule de Gumbel :

$$\mathbf{C}_\theta = \mathbf{C}_\theta(\mathbf{u}) = \exp \left(- \left[\sum_{j=1}^m (-\log(u_j))^{\frac{1}{\theta}} \right]^\theta \right).$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \text{dérivée :} \quad & \phi'_\theta(t) = \frac{d}{dt} \phi_\theta(t) = -\frac{[-\log(t)]^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{\theta t} \\ \text{fonction récursive :} \quad & f_{m-1}(\mathbf{C}_\theta) = (-1)^m \theta \mathbf{C}_\theta [-\log(\mathbf{C}_\theta)]^{1-m/\theta} P_{m-1}^g(-\log(\mathbf{C}_\theta)), \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

où $p_1(z)^g = 1$ et $p_{m-1}^g(z) = \theta z[p_{m-2}^g(z) - p_{m-2}^g(z)] + (m-1-\theta)p_{m-2}^g(z)$ pour $m \geq 2$. Ainsi, nous trouvons la fonction de densité :

$$\mathbf{c}_\theta(\mathbf{u}) = \mathbf{C}_\theta \theta^{1-m} [-\log(\mathbf{C}_\theta)]^{1-m/\theta} p_{m-1}^g(-\log(\mathbf{C}_\theta)) \prod_{j=1}^m \frac{[-\log(u_j)]^{\frac{(1-\theta)}{\theta}}}{u_j}.$$

Nous voyons facilement que dans le cas de la copule de Gumbel, nous obtenons la copule d'indépendance lorsque $\theta = 1$. De plus, comme la copule de Clayton, la copule de Gumbel n'admet que de la corrélation positive.

Finalement, pour générer un vecteur aléatoire corrélé avec la procédure Marshall et Olkin (1988), il faut prendre Y qui suit une loi stable positive de paramètre θ .

5.3.3 Copule de Frank

Pour la copule de Frank nous avons

$$\begin{aligned} \text{fonction génératrice :} \quad & \phi_\theta(t) = -\log\left(\frac{\theta^t - 1}{\theta - 1}\right), \quad 0 < \theta < 1 \\ \text{fonction génératrice inverse :} \quad & \phi_\theta^{-1}(s) = \frac{\log(1 + \exp(-s)(\theta - 1))}{\log(\theta)} \end{aligned}$$

Nous trouvons donc la distribution de la copule de Frank :

$$\mathbf{C}_\theta = \mathbf{C}_\theta(\mathbf{u}) = \frac{\log\left(1 + (\theta - 1)^{1-m} \prod_{j=1}^m (\theta^{u_j} - 1)\right)}{\log(\theta)}.$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \text{dérivée :} \quad & \phi'_\theta(x) = \frac{d}{dt}\phi_\theta(t) = \frac{\theta^t \log(\theta)}{1 - \theta^t} \\ \text{fonction récursive :} \quad & f_{m-1}(\mathbf{C}_\theta) = \frac{p_{m-1}^f(\theta^{-\mathbf{C}_\theta})}{\log(\theta)}, \quad m \geq 1, \end{aligned}$$

où $p_1^f(z) = z - 1$ et $p_{m-1}^f(z) = z(1 - z)p_{m-2}^f(z)$ pour $m \geq 2$. Ainsi, nous trouvons la fonction de densité :

$$\mathbf{c}_\theta(\mathbf{u}) = p_{m-1}^f(\theta^{-\mathbf{C}_\theta})[\log(\theta)]^{m-1} \prod_{j=1}^m \frac{\theta^{u_j}}{1 - \theta^{u_j}}.$$

Dans le cas de la copule de Frank, nous observons avec un développement limite qu'elle est égale à la copule d'indépendance lorsque $\theta = 1$. De plus, la dépendance est positive si $0 < \theta < 1$ et négative si $1 < \theta < \infty$

Finalement, pour générer un vecteur aléatoire corrélé avec la procédure Marshall et Olkin (1988), il faut prendre Y qui suit une distribution d'une série logarithmique sur \mathbb{N}_+ avec comme paramètre θ et dont la fonction de masse s'exprime ainsi lorsque $0 < \theta < 1$:

$$P[Y = k] = -\frac{(1 - \theta)^k}{\log(\theta)k}.$$

Lorsque θ est proche de 0, la simulation peut être difficile à cause d'instabilités numériques.

Dans le cas où $\theta > 1$, la copule de Frank n'est pas toujours définie, il faut alors vérifier que $(-1)^j d^j \phi(s)/ds^j > 0$ pour $1 \leq j \leq m$. De plus, même dans les cas où elle existe, on ne peut pas utiliser la méthode de Marshall et Olkin (1988). Dans ce cas, on doit procéder en utilisant les fonctions inverses des lois conditionnelles.

Chapitre 6

Calibration des paramètres

Comme la calibration est une partie importante de la mise en pratique d'un modèle, dans ce chapitre, nous expliquons comment estimer les différents paramètres du modèle, de même que comment générer des variables aléatoires à partir des paramètres estimés.

6.1 Bornes de qualité de crédit

Pour estimer les bornes, nous faisons une maximisation, c'est-à-dire que nous essayons de trouver les bornes qui font en sorte qu'un nombre maximum de qualité de crédit à des dates données se retrouvent dans l'intervalle associé à la cote de leur obligation. Nous cherchons donc

$$\max_{b_1, b_2, \dots, b_{C-1}} \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^I \mathbb{I}_{\{q_{t,k}^{(i)} \in [b_{k-1}, b_k)\}} \quad \text{où } k = 1, 2, \dots, C,$$

où $q_{t,k}^{(i)}$ est la qualité de crédit au temps t de l'obligation i ayant une cote de crédit k et $b_0 = 0$, de même que $b_C = 1$.

6.2 Temps de recote

Calibrer

Dans notre modèle, nous avons posé comme hypothèse que le temps de recote suit une loi exponentielle d'intensité $\lambda^{(R)}$. De plus, comme chaque classe de crédit a son propre processus de temps de recote, indépendant des autres classes, nous avons donc C paramètres à estimer. On pose alors

$$\widehat{\lambda}_j^{(R)} = \frac{\sum_{i=1}^I T_j^{(i)}}{\sum_{i=1}^I N_j^{(i)}}, \quad j = 1, \dots, C,$$

où $T_j^{(i)}$ est le temps passé par l'obligation i dans la cote j durant la période où s'échelonnent les données et $N_j^{(i)}$ le nombre de fois que l'obligation i , étant cotée j , a été recotée durant cette même période. Il est important de noter que la période n'est pas la même pour toutes les obligations.

Générer des temps de recote aléatoires

Pour générer des temps de recote aléatoire, il suffit de générer un vecteur aléatoire uniforme indépendant $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_m)$ sur $[0, 1]^m$ où m est le nombre d'obligations dans le portefeuille et de le remplacer dans l'équation

inverse d'une loi exponentielle.

$$\tau_{ik}^{(R)} := -\lambda_k^{(R)} \log(V_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, C,$$

où $\tau_{ik}^{(R)}$ est un temps de recote aléatoire pour une obligation i coté k et $\lambda_k^{(R)}$ l'intensité de recote pour une obligation coté k .

6.3 Temps de défaut

Calibrer

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, le temps de défaut suit une loi exponentielle non homogène. La probabilité est

$$Pr^{(D)} = Pr(\tau^{(D)} < t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda^{(D)} \frac{q_t}{1 - q_t} dt\right)$$

Si on remplace q_t par $a_k = \frac{b_{k-1} + b_k}{2}$, soit le point milieu de la qualité de crédit pour les cotes de crédit $k = 1, 2, \dots, C$, on obtient une équation pour chaque cote de crédit. Ensuite pour estimer $\lambda^{(D)}$, on cherche $\hat{\lambda}^{(D)} = \operatorname{argmin}_{\lambda^{(D)} \in [0,1]} F(\lambda^{(D)})$, où

$$F(\lambda^{(D)}) = \sum_{k=1}^C \left[Pr_k^{(D)} - \left(1 - \exp\left(\lambda^{(D)} \frac{a_k}{1 - a_k} T\right)\right) \right]$$

où $T = 1$ et $Pr_k^{(D)}$ est la probabilité historique 1 an de faire défaut selon Moody's étant donné que la cote de crédit est k .

Générer des temps de défaut aléatoires corrélés

Comme le temps de défaut dans notre modèle est une loi de Poisson non-homogène, il est difficile de générer un temps de défaut directement. Ainsi, pour générer des temps de défaut aléatoire corrélés, nous allons utiliser une approximation en générant plusieurs lois de Poisson homogènes différentes sur un court intervalle de temps Δt . Donc nous avons pour $i = 1, \dots, m$

$$\lambda_{[t,t+\Delta t]}^{(D),i} = \int_t^{t+\Delta t} \lambda^{(D)} \frac{q_t^i}{1 - q_t^i} dt \approx \lambda^{(D)} \frac{q_t^i}{1 - q_t^i} \Delta t$$

où $\lambda_{[t,t+\Delta t]}^{(D),i}$ est l'intensité de défaut de l'obligation i sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. On a aussi que

$$Pr_{[t,t+\Delta t]}^{(D),i} = 1 - \exp -\lambda_{[t,t+\Delta t]}^{(D),i}$$

où $Pr_{[t,t+\Delta t]}^{(D),i}$ est la probabilité de défaut de l'obligation i sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. Il y aura défaut de l'obligation i sur $[t, t + \Delta t]$ si

$$Pr_{[t,t+\Delta t]}^{(D),i} > V_t^i$$

où V_t^i est un élément du vecteur aléatoire uniforme corrélé $\mathbf{V}_t = (V_t^1, \dots, V_t^m)$.
(voir section 6.4)

Finalement nous obtenons que

$$\tau^{(D),i} = \min \left\{ t^i \in \{Pr_{[t,t+\Delta t]}^{(D),i} > V_t^i\} \mid 0 < t^i < T^i \right\}$$

où $\tau^{(D),i}$ est le temps de défaut corrélé de l'obligation i et T^i sa date de maturité.

6.4 Copules

La calibration de copules se fait surtout par maximum de vraisemblance, en utilisant la méthode développée dans Genest, Ghoudi & Rivest (1995). Notez que les étapes peuvent différer d'un type de copule à l'autre. Ces étapes varieront en fonction du nombre de paramètres à estimer et de la famille des copules. Dans le cadre de ce mémoire, nous calibrerons cinq copules différentes soit les copules gaussiennes, de Student, de Clayton, de Gumbel et de Frank. Les trois dernières faisant partie de la famille des copules archimédiennes.

6.4.1 Avant de commencer

Valeur de remplacement (proxy)

Comme les événements de crédits se produisent à des intervalles irréguliers et que les données sur ce genre d'événement ne sont pas fréquentes, il est plus

facile d'utiliser les rendements des titres comme valeur de remplacement. De plus, nous démontrerons aussi que la copule entre les rendements des titres sera la même que celle entre $1 - q_t$. En effet, nous supposons que, pour des fonctions ψ_1 , ψ_2 et ψ_3 , on a

$$S_t = \psi_1(R_t), \quad V_t = \psi_2(S_t), \quad 1 - q_t = \psi_3(V_t),$$

où R , S et V représentent respectivement le rendement du titre, la valeur du titre, et la valeur de la firme au temps t , et $1 - q_t$ représente la probabilité de survie pour un an au temps t .

Nous pouvons justifier l'hypothèse que ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions croissantes, puisque plus le rendement d'un titre augmente plus son prix augmente et par le fait même plus la valeur de la firme augmente. D'après le modèle que l'on a choisi dans le chapitre 2, $1 - q_t$ représente la probabilité de survie pour un an au temps t , et elle est donnée par la probabilité que

$$V_t e^{\sigma W_t - \sigma^2/2} > \bar{L} D e^{\lambda Z - \lambda^2/2}.$$

Donc, plus V_t est grand, plus $1 - q_t$ est petit, *ceteris paribus*. Ainsi, nous pouvons conclure que ψ_3 est une fonction croissante. Nous avons donc

$$1 - q_t = \psi(R_t) \quad \text{où} \quad \psi = \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1.$$

Comme ψ_1 et ψ_2 et ψ_3 sont strictement croissants, nous pouvons conclure que ψ est strictement croissante. Comme nous l'avons vu précédemment, une des propriétés des copules est qu'elles ne varient pas pour des transformations strictement croissantes. Ainsi, on peut conclure que la copule des rendements de plusieurs titres est la même que celle des processus $1 - q_t$ correspondant aux firmes considérées.

Transformation des données

Rappelons que si les marges F_1, \dots, F_m des rendements R_1, \dots, R_m sont continues, la copule représente la fonction de répartition jointe des variables $F_1(R_1), \dots, F_m(R_m)$. Comme les marges sont inconnues, on doit approximer ces variables, représentant des probabilités, par des pseudo-probabilités, suivant la méthode proposée dans Genest, Ghoudi & Rivest (1995). Pour ce faire, nous remplaçons ces valeurs par leur rang Rg_{ij} divisés par $n + 1$, où n représentent le nombre d'observations. On a ainsi

$$X_{ij} = \frac{Rg_{ij}}{n + 1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

où les X_{ij} sont des nouvelles données transformées qui forment la matrice \mathbf{X} d'ordre $n \times m$ que nous utiliserons pour calibrer les copules.

Voici un exemple simple :

Tableau 6.1: Exemple simple de transformation en pseudo-probabilité

Rendement			Rang			Pseudo-prob		
Titre 1	Titre 2	Titre 3				÷ (n+1=5)		
1.25%	-1%	0.75%	4	2	4	0.8	0.4	0.8
0.5%	-2%	0%	1	1	2	0.2	0.2	0.4
1%	-0.5%	-0.5%	3	3	1	0.6	0.6	0.2
0.75%	1%	0.5%	2	4	3	0.4	0.8	0.6

6.4.2 Copule gaussienne

Calibrer

Pour calibrer la copule gaussienne, il faut estimer la matrice $\Sigma^{\mathbf{G}}_{m \times m}$ où m est le nombre de variables, dans notre cas des titres. Cette matrice est la matrice des coefficients de Van der Warden entre les pseudo probabilités dont les éléments sont égaux à

$$\widehat{\Sigma}^{\mathbf{G}}_{ij} = \text{corr}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) = \frac{\text{COV}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j)}{\sqrt{\text{VAR}(\mathbf{Y}_i)\text{VAR}(\mathbf{Y}_j)}}, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

où \mathbf{Y}_i est la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $\mathbf{Y} = \Phi^{-1}(\mathbf{X})$, la fonction Φ^{-1} , représentant la fonction inverse de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite univariée, étant appliquée à tous les éléments de la matrice \mathbf{X} . Comme la matrice $\widehat{\Sigma}^{\mathbf{G}}$ est symétrique et que les éléments de la diagonale sont toujours égaux à 1, il n'y a que $\frac{m(m-1)}{2}$ paramètres à estimer et ceux-ci varient entre -1 et 1.

Générer un vecteur aléatoire uniforme corrélé

Pour générer un vecteur aléatoire uniforme pour la copule gaussienne C_{Σ^G} , il faut d'abord générer un vecteur aléatoire normal $\mathbf{V} \sim N_m(0, \Sigma^G)$. On peut utiliser une décomposition de Cholesky pour induire la corrélation. Ensuite, on pose :

$$U_i := \Phi(V_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Le nouveau vecteur \mathbf{U} représente un vecteur aléatoire uniforme corrélé généré à partir de la copule gaussienne.

6.4.3 Copule de Student

Calibrer

Dans le cas de la copule de Student, il faut estimer le nombre de degré de liberté ν , ainsi qu'une matrice $\Sigma^S_{m \times m}$, qui est en quelques sortes une matrice de corrélation. La matrice de corrélation dans ce cas ne s'estime pas de la même façon que la copule gaussienne et nous choisissons de faire appel à la notion de tau de Kendall qui est une mesure de dépendance entre les rangs et qui varie aussi entre -1 et 1. La matrice de tau de Kendall qui est symétrique et dont les éléments de la diagonale sont égal à 1 se calcule ainsi

$$\tau_{ij} = \frac{(c_{ij} - d_{ij})}{c_{ij} + d_{ij}},$$

où c_{ij} représente le nombre de concordances, c'est-à-dire le nombre de paires (a, b) telles que $(X_{ia} - X_{ib})(X_{ja} - X_{jb}) > 0$, et d_{ij} est le nombre de discordances, c'est-à-dire le nombre de paires (k, l) telles que $(X_{ia} - X_{ib})(X_{ja} - X_{jb}) < 0$. On peut noter que $c_{ij} + d_{ij} = \binom{n}{2}$.

Une fois la matrice des tau de Kendall calculée, on peut estimer de façon préliminaire la matrice $\Sigma^{\mathbf{S}}$ par

$$\widehat{\Sigma}^{\mathbf{S}}_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau_{ij}\right),$$

d'après Abdous, Genest, Rémillard (2004).

Il faut faire attention, car avec cette méthode, il n'est pas garanti que $\widehat{\Sigma}^{\mathbf{S}}$ soit définie positive. Pour cela, il faut s'assurer que les valeurs propres soient toutes positives. On prend donc la valeur absolue de la matrice des valeurs propres dans les cas négatifs. Il suffit ensuite de recalculer $\widehat{\Sigma}^{\mathbf{S}}$ à partir des nouvelles valeurs propres et renormaliser $\widehat{\Sigma}^{\mathbf{S}}$ pour s'assurer d'avoir que les éléments de la diagonale soient égaux à 1.

$$\begin{aligned} \Sigma^{S'} &= Q'|D|Q \rightarrow \text{valeur absolue des valeur propres} \\ \Sigma_{ij}^S &= \frac{\Sigma_{ij}^{S'}}{\Sigma_{ii}^{S'}\Sigma_{jj}^{S'}} \rightarrow \text{normalisation} \end{aligned}$$

où Q est la matrice des vecteurs propres et D la matrice des valeurs propres.

Ensuite pour estimer ν , nous utilisons une procédure de maximum de vraisemblance. Nous essayons donc de maximiser la fonction de vraisemblance (L) ou son logarithme \mathcal{L} par rapport à ν , c'est-à-dire $\hat{\nu} = \operatorname{argmax}_{\nu > 0} L(\nu) =$

$\operatorname{argmax}_{\nu>0} \mathcal{L}(\nu)$, où

$$\begin{aligned}
L(\nu) &= \prod_{i=1}^n \mathbf{c}(u_{i1}, \dots, u_{ij}, \dots, u_{im}; \widehat{\Sigma}^{\mathbf{S}}; \nu) \\
&= \prod_{i=1}^n \left| \widehat{\Sigma}^{\mathbf{S}} \right|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+m}{2}) [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^m (1 + \frac{1}{\nu} \boldsymbol{\varsigma}' \widehat{\Sigma}^{\mathbf{S}}^{-1} \boldsymbol{\varsigma})^{-\frac{\nu+m}{2}}}{[\Gamma(\frac{\nu+1}{2})]^m \Gamma(\frac{\nu}{2}) \prod_{j=1}^m (1 + \frac{\varsigma_j^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}}, \\
\mathcal{L}(\nu) &= \sum_{i=1}^n \log \left(\left| \widehat{\Sigma}^{\mathbf{S}} \right|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+m}{2}) [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^m (1 + \frac{1}{\nu} \boldsymbol{\varsigma}' \widehat{\Sigma}^{\mathbf{S}}^{-1} \boldsymbol{\varsigma})^{-\frac{\nu+m}{2}}}{[\Gamma(\frac{\nu+1}{2})]^m \Gamma(\frac{\nu}{2}) \prod_{j=1}^m (1 + \frac{\varsigma_j^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}} \right),
\end{aligned}$$

où $\varsigma_j = t_{\nu}^{-1}(u_{ij})$. Comme la matrice $\widehat{\Sigma}^{\mathbf{S}}$ est déjà calculée avant la maximisation, il s'agit donc d'un problème d'optimisation à une variable qui est assez simple à résoudre.

Pour plus de précision, nous pouvons ré-estimer $\Sigma^{\mathbf{S}}$. En effet, maintenant que nous avons une première valeur $\nu^{(1)}$ pour estimer ν , nous trouvons que

$$\Sigma_{ij}^{\mathbf{S}^{(2)}} = \operatorname{corr}\left(t_{\nu^{(1)}}^{-1}(\mathbf{X}_i), t_{\nu^{(1)}}^{-1}(\mathbf{X}_j)\right)$$

puis, nous ré-estimons ν par maximum de vraisemblance. On peut généraliser

$$\Sigma_{ij}^{\mathbf{S}^{(k+1)}} = \operatorname{corr}\left(t_{\nu^{(k)}}^{-1}(\mathbf{X}_i), t_{\nu^{(k)}}^{-1}(\mathbf{X}_j)\right)$$

et $\nu^{(k)} = \operatorname{argmax}_{\nu>0} \mathcal{L}_k(\nu)$, où

$$\mathcal{L}_k(\nu) = \sum_{i=1}^n \log \left(\left| \Sigma^{\mathbf{S}^{(k)}} \right|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu^{(k)}+m}{2}) [\Gamma(\frac{\nu^{(k)}}{2})]^m (1 + \frac{1}{\nu^{(k)}} \boldsymbol{\varsigma}' (\Sigma^{\mathbf{S}^{(k)}})^{-1} \boldsymbol{\varsigma})^{-\frac{\nu^{(k)}+m}{2}}}{[\Gamma(\frac{\nu^{(k)}+1}{2})]^m \Gamma(\frac{\nu^{(k)}}{2}) \prod_{j=1}^m (1 + \frac{\varsigma_j^2}{\nu^{(k)}})^{-\frac{\nu^{(k)}+1}{2}}} \right)$$

où $\varsigma_j = t_{\nu^{(k)}}^{-1}(u_{ij})$. Cette procédure itérative s'arrête lorsque $|\nu^{(k)} - \nu^{(k-1)}| < \varepsilon$, pour une précision donnée ε .

Générer un vecteur aléatoire uniforme corrélé

Pour générer un vecteur aléatoire uniforme selon la copule de Student de paramètres ν et $\Sigma^{\mathbf{S}}$, il faut d'abord générer un vecteur aléatoire normal $\mathbf{V} \sim N_m(0, \Sigma^{\mathbf{S}})$ comme dans le cas de la copule gaussienne. Ensuite il faut générer une variable aléatoire $Y \sim \chi^2(\nu)$. Puis nous calculons un nouveau vecteur aléatoire de la manière suivante

$$U_i := t_\nu \left(\frac{V_i}{\sqrt{Y/\nu}} \right), \quad i = 1, \dots, m,$$

où t_ν est la fonction de répartition de la loi de Student univariée avec ν degrés de liberté. Le nouveau vecteur \mathbf{U} représente un vecteur aléatoire uniforme corrélé généré à partir de la copule de Student de paramètres ν et $\Sigma^{\mathbf{S}}$.

6.4.4 Copule de Clayton

Calibrer

Pour calibrer la copule de Clayton, il faut estimer le paramètre $\theta^C \in [0, \infty]$. Pour cela, nous utilisons la méthode de maximum de vraisemblance.

Nous cherchons donc $\hat{\theta}^C = \operatorname{argmax}_{\theta^C > 0} L(\theta^C) = \operatorname{argmax}_{\theta^C > 0} \mathcal{L}(\theta^C)$, où

$$\begin{aligned} L(\theta^C) &= \prod_{i=1}^n \mathbf{c}_{\theta^C}(x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{im}) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{C}_{\theta^C, \mathbf{i}}^{1+m\theta^C} \prod_{j=1}^m \left([1 - \theta^C(j-1)] x_{ij}^{-(\theta^C+1)} \right), \\ \mathcal{L}(\theta^C) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \log \left(\mathbf{C}_{\theta^C, \mathbf{i}}^{1+m\theta} \left([1 - \theta^C(j-1)] x_{ij}^{-(\theta^C+1)} \right) \right). \end{aligned}$$

Générer un vecteur aléatoire uniforme corrélé

Pour générer des variables distribuées selon une copule de Clayton de paramètre θ^C , nous utilisons la procédure Marshall & Olkin (88). Nous trouvons donc que

$$U_i := \left[1 - \frac{\log(V_i)}{Y} \right]^{-\frac{1}{\theta^C}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

où $Y \sim \text{Gamma}(1/\theta^C)$ et $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_m)$ est un vecteur de variables aléatoires uniformes indépendantes sur $[0, 1]^m$.

6.4.5 Copule de Gumbel

Calibrer

Pour calibrer la copule de Gumbel, il faut estimer le paramètre $\theta^G \in]0, 1]$. Pour cela, nous utilisons la méthode de maximum de vraisemblance. Nous

cherchons donc $\hat{\theta}^G = \operatorname{argmax}_{\theta^G \in]0,1[} L(\theta^G) = \operatorname{argmax}_{\theta^G \in]0,1[} \mathcal{L}(\theta^G)$, où

$$\begin{aligned}
L(\theta^G) &= \prod_{i=1}^n \mathbf{c}_{\theta^G}(x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{im}) \\
&= \prod_{i=1}^n \theta^{G^{1-m}} \mathbf{C}_{\theta^G, i} [-\log(\mathbf{C}_{\theta^G, i})]^{1-m/\theta^G} p_{m-1}^g(-\log(\mathbf{C}_{\theta^G, i})) \prod_{j=1}^m \frac{[-\log(x_{ij})]^{\frac{1-\theta^G}{\theta^G}}}{x_{ij}} \\
\mathcal{L}(\theta^G) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \log \left((\theta^{G^{1-m}} \mathbf{C}_{\theta^G, i} [-\log(\mathbf{C}_{\theta^G, i})]^{1-m/\theta^G} p_{m-1}^g(-\log(\mathbf{C}_{\theta^G, i})) \frac{[-\log(x_{ij})]^{\frac{1-\theta^G}{\theta^G}}}{x_{ij}}) \right).
\end{aligned}$$

Générer un vecteur aléatoire uniforme corrélé

Nous trouvons grâce à Marshall & Olkin (88) que pour générer des variables selon une copule de Gumbel de paramètre θ , on peut poser

$$U_i := \exp \left(- \left[- \frac{\log(V_i)}{Y} \right]^{\theta^G} \right), \quad i = 1, \dots, m,$$

où

$$Y := \sin((\theta^G)\pi W_1) [\sin(\pi W_1)]^{-\frac{1}{\theta^G}} \left[- \frac{\sin((1-\theta^G)\pi W_1)}{\log(W_2)} \right]^{\frac{1-\theta^G}{\theta^G}},$$

et $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_i, \dots, V_m, W_1, W_2)$ est un vecteur de variables aléatoires uniformes indépendantes sur $[0, 1]^{m+2}$.

6.4.6 Copule de Frank

Calibrer

Pour calibrer la copule de Frank, il faut estimer le paramètre $\theta^F \in]0, \infty[$. Pour cela, nous utilisons la méthode de maximum de vraisemblance. Nous cherchons donc $\hat{\theta}^F = \operatorname{argmax}_{\theta^F \in]0, \infty[} L(\theta^F) = \operatorname{argmax}_{\theta^F \in]0, \infty[} \mathcal{L}(\theta^F)$, où

$$\begin{aligned} L(\theta^F) &= \prod_{i=1}^n \mathbf{c}_{\theta^F}(x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{im}) \\ &= \prod_{i=1}^n p_{m-1}^f(\theta^{F - \mathbf{C}_{\theta^F, i}}) [\log(\theta^F)]^{m-1} \prod_{j=1}^m \frac{\theta^{F x_{ij}}}{1 - \theta^{F x_{ij}}}, \\ \mathcal{L}(\theta^F) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \log \left(p_{m-1}^f(\theta^{F - \mathbf{C}_{\theta^F, i}}) [\log(\theta^F)]^{m-1} \frac{\theta^{F x_{ij}}}{1 - \theta^{F x_{ij}}} \right). \end{aligned}$$

Générer un vecteur aléatoire uniforme corrélé

Nous trouvons grâce à Marshall & Olkin (88) que pour générer des variables selon une copule de Frank de paramètre $\theta^F \in]0, 1[$, on peut poser

$$U_i := \frac{\log \left(1 + \exp \left(-\frac{\log(V_i)}{Y} \right) (\theta^F - 1) \right)}{\log(\theta^F)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

où

$$Y := \left\lfloor \frac{1 + \log(W_1)}{\log(1 + (1 - \theta^F)W_2)} \right\rfloor,$$

et $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_i, \dots, V_m, W_1, W_2)$ est un vecteur de variables aléatoires uniformes indépendantes sur $[0, 1]^{m+2}$, et $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière de x . Notons que Y suit une loi logarithmique sur \mathbb{N}_+ .

Comme nous l'avons dit au *chapitre 5*, il est difficile de générer un vecteur aléatoire corrélé lorsque θ^F est proche de 0.

Chapitre 7

Résultats de l'estimation des paramètres

Ce chapitre présente le résultat de l'estimation des paramètres et les données qui ont été utilisées.

7.1 Données utilisées

Trois sources de données ont été utilisées pour estimer les paramètres nécessaires au modèle. La première est une base de données de l'agence de cotation de crédit Moody's qui contient plusieurs informations comme l'historique de recote de plusieurs centaines de compagnie. La deuxième est le site internet finance.yahoo.com qui permet d'avoir accès aux prix de fermeture historiques des actions de compagnies cotées en bourse. La dernière est

une base de données construite par un ancien étudiant de la MSc. (Tarek Dakhli) qui contient toutes les données historiques nécessaires pour calculer une qualité de crédit historique.

L'actif sous-jacent sur lequel les produits dérivés seront basés est un panier composé d'obligations de 10 entreprises.

Tableau 7.1: Composition de l'actif sous-jacent (au 21 janvier 2005)

COMPAGNIES	COTE	Prix (S_0)	Prix de référence	DPA	Volatilité
Alcoa Inc	A2	28.93	30.12	12.06	15.77 %
Coca-Cola Co	Aa3	40.91	45.14	5.28	9.90 %
DuPont Co	Aa3	46.71	40.36	9.80	11.77 %
Exxon Mobil Corp	Aaa	50.44	38.38	7.09	10.06 %
General Electric Co	Aaa	35.13	31.93	12.86	14.06 %
Honeywell Int Inc	A2	35.99	31.33	8.88	17.12 %
IBM Corp	A1	92.38	90.40	30.48	13.16 %
Procter & Gamble Co	Aa3	55.65	41.96	18.33	8.81 %
The Boeing Co	A3	50.07	41.43	29.49	14.74 %
United Tech Corp	A2	100.08	73.38	20.65	14.48 %

7.2 Paramètres

7.2.1 Bornes de qualité de crédit

Pour estimer les bornes de crédits, nous avons combiné la base de données sur les cotes de crédit historique avec celle sur les qualités de crédit historique. Nous avons ainsi pu constituer un échantillon de plus 600 cotes de crédit associés à leur qualité de crédit.

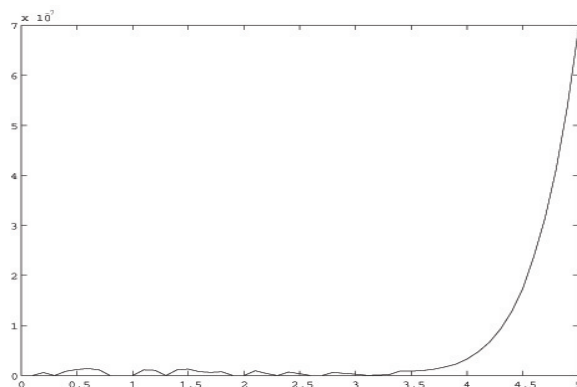
Voici les paramètres pour les bornes de crédits que nous avons estimés :

Tableau 7.2: Estimation des paramètres des bornes de crédit

Cote	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa,Ca,C	Défaut
Paramètre	\hat{b}_0	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3	\hat{b}_4	\hat{b}_5	\hat{b}_6	\hat{b}_7
Estimation	0	1.11E-16	2.11E-12	1.46E-08	4.90E-02	3.45E-02	3.19E-01	1

Ainsi on a par exemple que $q_{t,Aa}^{(i)} \in [1.11E - 16, 2.11E - 12[$.

Figure 7.1: Probabilité de défaut d'une obligation Aaa en fonction du temps



Compagnie : Bristol Myers Squibb co.

Prix de l'action : 111.75

Prix de référence (1000 jours) : 87.22

volatilité (1000 jours) : 33.79%

Dettes par action : 3.45

Date : 16 novembre 1998

Nous remarquons que les probabilités de défaut des obligations cotées Baa ou plus haut sont beaucoup plus faibles que les probabilités historiques de défaut de Moody's pour ces mêmes cotes. En effet, la probabilité de défaut du modèle Creditgrade[©] semble sous-estimer la probabilité de défaut historique pour les obligations ayant une bonne cote de crédit. Nous avons donc tracé

un graphique pour montrer le phénomène qui se produit dans ce cas. Nous observons ainsi que la probabilité de faire défaut dans la prochaine année est très petite pour une obligation Aaa.

7.2.2 Temps de Recote

En utilisant la base de données sur les cotes de crédit historique, nous avons pu extraire un échantillon de plus de 5000 temps de recote.

Voici les paramètres pour le temps de recote que nous avons estimés :

Tableau 7.3: Estimation des paramètres de temps de recote

Cote	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa,Ca,C,
Paramètre	$\hat{\lambda}_1^{(R)}$	$\hat{\lambda}_2^{(R)}$	$\hat{\lambda}_3^{(R)}$	$\hat{\lambda}_4^{(R)}$	$\hat{\lambda}_5^{(R)}$	$\hat{\lambda}_6^{(R)}$	$\hat{\lambda}_7^{(R)}$
Estimation	3.66	1.83	1.53	1.45	1.19	1.24	0.96

À noter que les temps moyens sont en années.

7.2.3 Temps de Défaut

Pour estimer le paramètre $\lambda^{(D)}$, nous avons utilisés les probabilités historiques de défaut sur un an de Moody's étant donné que l'obligation a une certaine cote :

Nous obtenons ainsi $\lambda^{(D)} = 0.6059$

Chapitre 8

Évaluation de produits dérivés de crédit

Dans ce dernier chapitre nous évaluerons deux classes de produits dérivés de crédit. La première que nous appellerons produits dérivés de défaut (PDD) regroupe des produits dérivés où le paiement est déclenché par le défaut d'une ou plusieurs obligations. L'autre que nous nommerons produits dérivés de décote (PDC) comprend des produits dérivés où le paiement est déclenché cette fois par la décote d'une ou plusieurs obligations.

Ce chapitre aura donc deux objectifs, soit comparer ces deux classes de produits dérivés de crédit et comparer l'impact des différentes copules sur le prix de ces produits dérivés. Nous rappelons que l'actif sous-jacent pour tous les produits dérivés évalués sera un panier comprenant les dix obligations mentionnées dans le *chapitre 7*.

8.1 Produits dérivés de Crédit

8.1.1 Produits dérivés de défaut (PDD)

Nous allons évaluer deux PDD soit une option 1er-à-faire-défaut (O1D) qui paie à l'acheteur un certain montant lorsqu'une obligation de l'actif sous-jacent fait défaut et une option 2e-à-faire-défaut (O2D) qui elle paie un montant seulement lorsqu'une deuxième obligation fait défaut. Le flux monétaire au temps t FM_t pour une O1D est

$$FM_t^{(D,1)} = \sum_{i=1}^m \mathbb{I}_{t > \tau_i} (1 - R_{k_i}) p_i \quad t \leq T$$

et pour l'O2D

$$FM_t^{(D,2)} = \sum_{j=1}^m \mathbb{I}_{t > \tau_j} \sum_{i=j+1}^m \mathbb{I}_{t > \tau_i} (1 - R_{k_i}) p_i \quad t \leq T$$

où T est l'échéance de l'option, τ_i est le temps de défaut de obligation i , R_{k_i} le taux de recouvrement de l'obligation i ayant une cote de départ k et p_i la proportion dans l'actif sous-jacent de l'obligation i .

Ainsi le flux monétaire associé à une OD1 est $FM_{t^*}^{(D,1)}$ et $FM_{t^*}^{(D,2)}$ pour une OD2 où $t^* = \min\{t \in [0, T] | FM_t \neq 0\}$. Nous supposons qu'il n'y a pas de défauts simultanés.

8.1.2 Produits dérivés de décote (PDC)

Nous allons aussi évaluer deux PDC, c'est-à-dire une option 1er-êtré-décotée (O1C) qui paie un montant à l'acheteur lorsqu'une obligation de l'actif sous-jacent est décotée en-dessous de Baa et une option 2e-à-êtré-decotée(O2C) qui paie un montant lorsqu'une 2e obligation est decotée en-dessous de Baa.

Le flux monétaire au temps t FM_t associé à ce type d'option peut être exprimé ainsi pour l'O1C

$$FM_t^{(C,1)} = \sum_{i=1}^m \mathbb{I}_{t > \alpha_i} H_{k_i^{s-1}, k_i^s} p_i \quad t \leq T$$

et pour l'O2C comme ceci

$$FM_t^{(C,2)} = \sum_{j=1}^m \mathbb{I}_{t > \alpha_j} \sum_{i=j+1}^m \mathbb{I}_{t > \alpha_i} H_{k_i^{s-1}, k_i^s} p_i \quad t \leq T$$

où α_i est le temps où l'obligation i est décotée en-dessous de Baa et $H_{k_i^{s-1}, k_i^s}$ la perte due à la décote de k^{s-1} (ex : **Aa** avant) à k^s (ex : **Ba** après) de l'obligation i .

Ainsi le flux monétaire associé à une OC1 est $FM_{t^*}^{(C,1)}$ et $FM_{t^*}^{(C,2)}$ pour une OC2 où $t^* = \min\{t \in [0, T] | FM_t \neq 0\}$. Nous supposons ici aussi qu'il n'y a pas de défaut, ni de recote simultanés.

Notons que si un défaut survient avant que l'obligation soit decotée en-dessous de Baa, c'est-à-dire que $\tau_i \leq \alpha_i$, le flux monétaire monétaire associé à l'option est celui du défaut et non de la recote.

8.2 Paramètres

Voici les taux de recouvrement et les taux de pertes en cas de recote que nous utilisons pour évaluer les produits dérivés de crédit.

Tableau 8.1: Taux de recouvrement selon la cote juste avant le défaut

Cote	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa,Ca,C
Taux de recouvrement	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.40	0.30

Tableau 8.2: Matrice de la perte de valeur de l'obligation lors d'une décote

	Ba	B	Caa,Ca,C
Aaa	0.25	0.35	0.50
Aa	0.20	0.25	0.35
A	0.15	0.25	0.30
Baa	0.10	0.15	0.25

Notons que ces taux sont basés sur la valeur nominale de l'obligation et non la valeur avant le défaut ou la recote. De plus, pour toutes les évaluations de produits dérivés, nous utiliserons un taux d'intérêt constant $r = 3\%$ et une date d'échéance d'option de $T = 2$. Nous avons aussi choisi la même proportion pour chacune des obligations comprises dans l'actif sous-jacent soit $p_1 = p_2 = \dots = p_m = \frac{1}{m}$. Finalement, nous supposons que la maturité de

chacune des obligations de l'actif sous-jacent est supérieure à l'échéance de l'option.

8.3 Résultats

Voici les résultats que nous avons compilés. Ils sont basés sur 10 000 simulations et sont exprimés en points de base.

Tableau 8.3: Tableau des prix (en point de base) des produits dérivés selon la copule utilisée

Copule	Défaut(PDD)		Décote(PDC)	
	OD1	OD2	OC1	OC2
Frank	98.9	42.7	122.8	63.6
Clayton	82.4	36.4	104.1	53.5
Gumbel	32.5	19.2	45.0	28.0
Student	21.0	4.5	32.0	8.4
Normale	18.0	3.3	29.0	7.0

Comme nous nous y attendions, l'utilisation de différentes copules donne des prix d'options totalement différents. Nous observons d'ailleurs que les prix d'options calculés à partir de copules archimédiennes sont plus élevés que ceux calculés avec les copules gaussiennes et Student et ceci autant pour les PDD que pour les PDC. Cela s'explique par le fait que, comme nous l'avons dit précédemment, les copules archimédiennes permettent de générer des variables aléatoires corrélées qui se retrouvent plus fréquemment dans les queues inférieures ou supérieures des distributions. Ainsi, nous observons plus souvent le défaut d'obligations ou la recote de celles-ci en dessous de Baa lorsque nous utilisons des copules archimédiennes.

Tableau 8.4: Tableau des ratios entre les différents résultats

Copule	OD1/OD2	OC1/OC2	OD1/OC1	OD2/OC2
Franck	2.315	1.929	0.806	0.671
Clayton	2.265	1.945	0.791	0.679
Gumbel	1.693	1.607	0.722	0.686
Student	4.667	3.810	0.656	0.536
Normal	5.455	4.143	0.621	0.471

Nous remarquons aussi que les options 1er-à-faire-défaut et 1er-à-être-recoté sont plus chères que celles qui nécessitent deux défauts ou recotes. Cela semble tout à fait logique puisque la probabilité d’avoir un défaut ou une recote est plus grande que celle d’en avoir deux. Une observation intéressante est que les ratios $OC1/OC2$ et $OD1/OD2$ semblent moins élevés pour les copules archimédiennes que pour les copules elliptiques. Ceci peut s’expliquer par le fait que les copules archimédiennes vont mieux chercher la corrélation dans les queues des distributions. Ainsi la probabilité de voir deux obligations recotées ou faire défaut dans un intervalle de temps rapproché augmente puisque ce sont des événements rares qui se situent normalement dans les extrémités d’une distribution. Il en résulte que les $OC2$ et les $OD2$ sont plus élevées et par le fait même que les ratios $OC1/OC2$ et $OD1/OD2$ sont plus petits *ceteris paribus*.

Nous observons aussi que les ratios $OD1/OC1$ et $OD2/OC2$ sont plus élevés pour les copules archimédiennes que les copules elliptiques, c’est-à-dire qu’il en coûte moins cher proportionnellement d’acheter une $OC1$ ou une $OC2$ évaluer avec des copules archimédiennes que lorsqu’elles sont évaluées avec une copule gaussienne ou Student. Ce phénomène peut être expliqué par le fait que les PDC, qui protègent autant contre un défaut que contre

une recote sous Baa, paient plus chers pour un défaut qu'une décote. Ainsi on peut supposer que l'utilisation de copules archimédiennes entraîne plus d'obligations cotées Baa ou supérieur à atteindre directement le défaut que l'utilisation de copules elliptiques.

Dans les copules elliptiques, il semble que la copule de Student permette d'aller chercher plus d'informations que la copule gaussienne. En effet, le paramètre ν d'une loi de Student permet de faire varier l'épaisseur des extrémités de la distribution et ainsi de mieux expliquer la corrélation. Du côté des copules archimédiennes, nous observons que la copule de Gumbel génère moins de variable aléatoires dans les queues des distributions que ses consoeurs.

Bref, l'utilisation de différentes copules a un impact sur le prix de produits dérivés de crédit. Il semble aussi que la famille des copules archimédiennes qui est plus sensible à la corrélation dans les extrémités des distributions engendre des prix de produits dérivés de crédit plus élevés que la famille de copules elliptiques.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons trois problématiques. Premièrement la construction d'un modèle qui permet de prendre en compte les différents aspects du risque de crédit. Deuxièmement la calibration de différentes copules et la génération de vecteurs aléatoires corrélés à partir de celle-ci. Troisièmement analyser l'impact du choix des copules sur le prix de produits dérivés de crédit.

Nous avons ainsi proposé un modèle qui permet de prendre en considération deux aspects importants du risque de crédit soit le risque de défaut et le risque qu'une obligation soit décotée. Pour ce, nous avons utilisé le modèle de qualité de crédit en temps continu Creditgrade[©] auquel nous avons ajouté un processus de saut permettant d'atteindre directement le défaut.

Grâce aux copules, nous avons pu modéliser la corrélation entre le temps de défaut des obligations et ainsi ajouter au modèle la possibilité d'évaluer des produits dérivés sur un panier d'obligation. Nous avons d'ailleurs exposé les caractéristiques de cinq d'entre elles c'est-à-dire deux copules elliptiques, soit les copules gaussienne et Student et trois copules archimédiennes soit

les copules de Clayton, Gumbel et Frank. Nous avons montré comment les calibrer et comment générer des vecteurs aléatoires corrélés à partir de celles-ci. Nous avons aussi trouvé comment grâce à une méthode de maximum de vraisemblance combinée à une méthode itérative il est possible de calibrer une copule de Student. De plus, en utilisant une fonction récursive de la dérivée de la fonction génératrice inverse des copules archidiennes, nous avons réussi à construire leur fonction de densité respective. C'est avec cette dernière que nous avons construit leur fonction de vraisemblance afin de les calibrer. Nous avons aussi expliqué comment avec la procédure Marshal-Olkin, qui nécessite la fonction génératrice et son inverse, il est possible de générer des vecteurs aléatoires corrélés pour des copules archimédiennes.

Finalement, en utilisant notre modèle et les cinq copules que nous avons utilisées, nous avons pu comparer l'impact de l'utilisation de différentes copules sur le prix du produit dérivé. Nous avons ainsi trouvé que les copules archimédiennes aboutissaient à des prix plus élevés que les copules elliptiques à cause de leur abilité à aller chercher la corrélation dans les extrémités des distributions. Nous avons aussi montré comme nous le supposions que les produits dérivés de crédit basés sur la decote coûtent plus chers que ceux basés sur le défaut.

Maintenant que nous savons que différentes copules ont différents impacts sur le prix d'un produit dérivé de crédit, il serait intéressant dans une prochaine étude de regarder comment choisir de manière optimale une copule. Il serait aussi d'intérêt de regarder comment il est possible de répliquer ce

genre de produits dérivés afin que les vendeurs de ces produits puissent se couvrir.

Bibliographie

- [1] B. ABDOUS, C. GENEST, B. RÉMILLARD, *Dependence Properties of Meta-Elliptical Distributions*. In Statistical Modeling and Analysis for Complex Data Problem, Springer New York Academic, 9 :267-280, 2005.
- [2] P. BARBE, C. GENEST, K. GHOUDI, B. Rémillard, *On Kendall's Process*, The Journal of Multivariate Analysis, 58 :197-229, 2003.
- [3] F. BLACK, J.C. COX. *Valuing Corporate Securities : Some Effects of Bond Indenture Provisions*, Journal Finance, 31/2 : 361-67, 1976.
- [4] F. BLACK, M. SCHOLES, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economics, 81 :637-659, 1973.
- [5] D. BRASSARD. *Étude comparative des mesures de risque et des modèles d'évaluation du risque de crédit*, Mémoire de maîtrise, HEC Montréal, 2002.
- [6] M. BRENNAN, E. SCHWARTZ. *Finite Difference Methods and Jump Processes in Pricing of Contingent Claims : A Synthesis*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 13(3) :461 :474, 1978.

- [7] L.V. CARTY. *Moody's Rating Migration and Credit Quality Correlation, 1972-1996*, Working paper, Moody's Investors Services, p.1-26, 1997.
- [8] S.R. DAS, L. FREED, G. GENG, N. KAPADIA. *Correlated Default Risk*, 46p, 2004.
- [9] S.R. DAS, P. TUFFANO. *Pricing Credit Sensitive Debt when Interest Rates, Credit Ratings and Credit Spreads are Stochastic*, Journal of Financial Engineering, 5 :161-98, 1996.
- [10] M. DAVIS, V. LO. *Modelling Default Correlation in Bond Portfolios*, In Carol Alexander Editor, ICIB Report on Credit Risk, 1999.
- [11] D. DUFFIE. *First-to-Default Valuation*, Working Paper, Graduate School of Business, Stanford University, 1998.
- [12] D. DUFFIE, N. GARLENU. *Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations*, Financial Analyst's Journal, 63(9) :633-664, 2001.
- [13] D. DUFFIE, D. LANDO. *Term Structures of Credit Spreads with Incomplete Accounting Information*, Econometrica, 57(1) :41-59, 2001.
- [14] J. ERICSSON, O. RENAULT. *Liquidity and Credit Risk*, Working Paper, EFA 2003 Annual Conference, 2002.
- [15] D. DUFFIE et K.J SINGLETON. *Modeling Term Structures of Defaultable Bonds*, Review of Financial Studies, 12 :687-720, 1999.
- [16] C. GENEST, K. GHOUDI, L.-P. RIVEST, *A Semiparametric Estimation Procedure of Dependence Parameters in Multivariate Families of Distributions*, Biometrika, 82(3) :543-552 1995.
- [17] D. HAMILTON, J. JAMES, N. WEBBER. *Copula Methods and the Analysis of Credit Risk*, Submitted paper, 2002.

- [18] J. HULL, A. WHITE. *Valuing Credit Default Swap : No Counterparty Default Risk*, Journal of Derivatives, 8 :29-40, 2001.
- [19] R.A. JARROW, D. LANDO, S.M. TURNBULL. *A Markov Model of the Term Structure of Credit Risk Spreads*, Review of Financial Studies, 10 :481-523, 1997.
- [20] R.A. JARROW, S.M. TURNBULL. *Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk*, Journal of Finance, 50 :53-85, 1995.
- [21] R.A. JARROW, F. YU. *Counterparty Risk and the Pricing of Defaultable Securities* , Journal of Finance, 56, 2001.
- [22] E. JONES, S. MASON, E. ROSENFELD. *Contingent Claims Analysis of corporate Capital Structures : An empirical Investigation*, Journal of Finance, 39 :611-627, 1984.
- [23] H. JOHNSON, R. STULZ. *The Pricing of Options with Default Risk*, Journal of Finance, 42 :267-280, 1987.
- [24] P. KLEIN, M. Inglis. *Pricing vulnerable European options when the option's payoff can increase the risk of financial distress*, Journal of Banking and Finance, 25 :993-1012, 2001.
- [25] D. LANDO. *On Cox Processes and Credit Risky Securities*, Rev. Derivatives Res., 2 :449-470, 1998.
- [26] H. LELAND. *Risky debt, bond covenants and optimal capitalstructure*, Journal of Finance, 49 :1213-1252, 1994.
- [27] H. LELAND. *Optimal capital structure, endogenous bankruptcy and the term structure of credit spreads*, Journal of Finance, 51 :987-1019, 1996.

- [28] D.X. LI. *The valuation of basket credit derivatives*, Credit Metrics Monitor, 2 :34-50, 1999.
- [29] D.X. LI. *On default Correlation : A Copula Function Approach*, The RiskMetrics Group, Working Paper, 99-07, 2000.
- [30] F. LINDSKOG. *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. Risklab, ETH Zurich, 34p.,2000
- [31] F.A. LONGSTAFF and E.S. SCHWARTZ. *A simple Approach to valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt*, Journal of Finance, 29 :789-819, 1995.
- [32] A.W. MARSHALL, I. OLKIN. *Families of Multivariate Distributions*, Journal of the American Statistical Association, 62 :30-44, 1988.
- [33] R. MASHAL, M. NALDI, A. ZEEVI. *Extreme events and Multi-Name Credit Derivatives*, In Credit Risk : Models and Management, Risk Waters Group, 313-338, 2003.
- [34] R. C. MERTON. *On the Pricing of Corporate Debt. : The risk Structure of Interest Rates*, Journal of Finance, 29 :449-470, 1974.
- [35] E. ROGGE, P.J. SCHÖNBUCHER. *Modelling Dynamic Portfolio Credit Risk*, Working paper, Departement of statistics, Bonn University, 2003.
- [36] O. SARIG, A. WARGA. *Some Empirical Estimates of the Risk Structure of Interest Rates*, Journal of Finance, 44 :1351-1360, 1989.
- [37] P.J. SCHÖNBUCHER, D. SCHUBERT. *Copula-dependent default risk intensity models*, Working paper, Departement of statistics, Bonn University, 2001.

- [38] P.J. SCHÖNBUCHER. *Credit Derivatives Pricing Models : Models, Pricing and Implementation*, Wiley & Sons, 369p., 2003.
- [39] C. ZHOU. *A Jump-Diffusion Approach to Modeling Credit Risk and Valuing Defaultable Securities*, Finance and Economics Discussion series, Federal Reserve Board, 15, 1997.
- [40] C. ZHOU. *An Analysis of default correlation and multiple default*, Review of Financial Studies, 14(2) :555-576, 2001.