

Université de Montréal

**Calcul de Malliavin, processus de Lévy et applications en
finance : quelques contributions**

par

Jean-François Renaud

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

Orientation Mathématiques appliquées

juin 2007

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

**Calcul de Malliavin, processus de Lévy et applications en
finance : quelques contributions**

présentée par

Jean-François Renaud

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Martin Goldstein

(président-rapporteur)

Bruno Rémillard

(directeur de recherche)

Manuel Morales

(membre du jury)

Wim Schoutens

(examineur externe)

Anatole Joffe

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

22 juin 2007

RÉSUMÉ

Cette thèse est principalement constituée de trois articles traitant chacun, en totalité ou en partie, du calcul de Malliavin, des processus de Lévy et d'applications en finance.

Le premier chapitre est une introduction au calcul de Malliavin classique et une présentation de quelques applications récentes en finance mathématique. Le deuxième chapitre est essentiellement l'article *Explicit martingale representations for Brownian functionals and applications to option hedging* [68] écrit en collaboration avec Bruno Rémillard. Cet article présente de nouveaux résultats en lien avec le problème de représentation martingale pour des fonctionnelles du mouvement brownien faisant intervenir ses extrêmes. Les représentations sont particulièrement explicites dans le contexte du mouvement brownien géométrique. Ces résultats sont ensuite utilisés pour calculer des portefeuilles de couverture dans le modèle de Black-Scholes pour des options exotiques.

Le troisième chapitre est une courte présentation du calcul de Malliavin chaotique pour les martingales normales tel qu'introduit par Ma et al. [53]. Ensuite, au chapitre quatre, une revue de littérature spécifique au calcul de Malliavin chaotique pour les processus de Lévy est présentée. Ces deux chapitres sont en quelque sorte une introduction au cinquième chapitre. Celui-ci contient l'article *Malliavin calculus and Clark-Ocone formula for functionals of a square-integrable Lévy process* [69] écrit en collaboration avec Bruno Rémillard. Cet article élabore un calcul de Malliavin pour les processus de Lévy de carré intégrable. Une décomposition chaotique pour les fonctionnelles de ces processus de Lévy est obtenue et utilisée pour définir une dérivée de Malliavin. Celle-ci est une généralisation des dérivées classiques pour le mouvement brownien et les processus de Lévy purement discontinus. Ensuite, une formule de Clark-Ocone est obtenue et appliquée pour obtenir une représentation martingale explicite du maximum d'un processus de Lévy.

Finalement, le chapitre six contient l'article *Distribution of the present value of dividend payments in a Lévy risk model* [70] écrit en collaboration avec Xiaowen Zhou.

Cet article présente une utilisation de la solution du problème de sortie d'un intervalle par un processus de Lévy pour obtenir la loi de la valeur actualisée des dividendes versés par une compagnie d'assurances. Dans ce modèle, l'avoir de la compagnie est modélisé par un processus de Lévy n'admettant que des sauts dont la valeur est négative.

Mots clés : dérivée de Malliavin, formule de Clark-Ocone, représentation martingale, représentation chaotique, mouvement brownien, couverture d'options exotiques, théorie du risque, dividendes.

SUMMARY

This thesis consists mainly of three articles concerned totally or partly with Malliavin calculus, Lévy processes and financial applications.

The first chapter is an introduction to classical Malliavin calculus and a presentation of some recent financial applications. The second chapter contains the paper *Explicit martingale representations for Brownian functionals and applications to option hedging* [68] written with Bruno Rémillard. It presents new results on the martingale representation of path-dependent Brownian functionals of the maximal type. These representations are computed using the Clark-Ocone formula. As direct consequences, explicit martingale representations of the extrema of geometric Brownian motion and explicit hedging portfolios of exotic options are obtained in the Black-Scholes model.

The third chapter is a short presentation of a chaotic Malliavin calculus for normal martingales as introduced by Ma et al. [53]. The fourth chapter is a specific review of recent and known results on chaotic Malliavin calculus for Lévy processes. These two chapters introduce the fifth chapter which contains the paper *Malliavin calculus and Clark-Ocone formula for functionals of a square-integrable Lévy process* [69] written with Bruno Rémillard. In this paper, a Malliavin derivative for functionals of square-integrable Lévy processes is constructed and the corresponding Clark-Ocone formula derived. The Malliavin derivative is defined via chaos expansions involving stochastic integrals with respect to Brownian motion and Poisson random measure. It is an extension of the previous Malliavin derivatives for Brownian motion and pure-jump Lévy processes. As an illustration of the theory, an explicit martingale representation for the maximum of a Lévy process is computed.

Finally, the sixth chapter contains the paper *Distribution of the present value of dividend payments in a Lévy risk model* [70] written with Xiaowen Zhou. In this short paper, it is shown how fluctuation identities for Lévy processes with no positive jumps

yield the distribution of the present value of dividend payments until ruin in a Lévy insurance risk model with a dividend barrier.

Key words : Malliavin derivative, Clark-Ocone formula, martingale representation, chaos expansion, Brownian motion, exotic options, hedging, risk theory, dividends.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	iii
Summary	v
Remerciements	xi
Introduction	2
Le calcul de Malliavin.....	2
Les travaux fondateurs.....	3
Et les processus de Lévy dans tout ça?.....	3
Nos contributions.....	4
Chapitre 1. Calcul de Malliavin et quelques applications	6
1.1. Calcul de Malliavin pour le mouvement brownien.....	6
1.1.1. Dérivée de Malliavin.....	9
1.1.1.1. Définition au sens faible.....	10
1.1.2. Lien entre la décomposition chaotique et la dérivée de Malliavin.....	10
1.1.3. Quelques propriétés de la dérivée de Malliavin.....	11
1.1.4. Formule de Clark-Ocone.....	13
1.1.4.1. Intégrale de Skorohod.....	13
1.1.4.2. Formule de Clark-Ocone-Haussmann.....	14
1.1.5. Équations différentielles stochastiques.....	15
1.1.5.1. Une propriété de commutativité.....	16
1.1.5.2. Dérivée de Malliavin d'une diffusion.....	16
1.2. Problème de représentation martingale.....	17
1.2.1. Théorème de représentation d'Itô.....	17

1.2.2.	Représentations martingales explicites	18
1.2.3.	Représentation martingale pour les processus de Lévy	19
1.3.	Représentation des <i>Greeks</i>	19
1.3.1.	Modèle brownien	20
1.3.2.	Représentation du Δ	21
Chapitre 2.	Explicit martingale representations for Brownian functionals and applications to option hedging	24
2.1.	Introduction	24
2.2.	Martingale representation	26
2.2.1.	Clark-Ocone representation formula	26
2.2.2.	Hedging portfolios	27
2.3.	Maximum and minimum of Brownian motion	29
2.3.1.	The case $\theta = 0$	29
2.3.2.	The general case	30
2.4.	Path-dependent Brownian functionals	30
2.4.1.	The joint probability density function	34
2.5.	Maximum and minimum of geometric Brownian motion	34
2.6.	Applications : hedging for path-dependent options	37
2.6.1.	Standard lookback options	38
2.6.2.	Options on the volatility	38
2.7.	Acknowledgments	41
	Appendix : Some integral manipulations	41
Chapitre 3.	Calcul de Malliavin pour les martingales normales	43
3.1.	CRP et PRP	43
3.1.1.	Représentations chaotiques et prévisibles	44
3.1.2.	Lien entre CRP et PRP	45

3.2. Opérateur de dérivation	46
Chapitre 4. Calcul de Malliavin pour les processus de Lévy	48
4.1. Processus de Lévy	48
4.2. L'approche de Nualart et Schoutens	49
4.2.1. Orthogonalisation des martingales de Teugels	50
4.2.1.1. <i>Power jump processes</i> et martingales de Teugels	50
4.2.1.2. Orthogonalisation	51
4.2.2. Représentations chaotiques et prévisibles	52
4.2.3. Calcul de Malliavin associé	53
4.3. L'approche de Løkka	55
4.3.1. La fonction γ	55
4.3.2. Représentations prévisibles et chaotiques	56
4.3.3. Dérivée de Malliavin et formule de Clark-Ocone	56
4.3.4. Prolongement de Benth et al.	58
4.4. L'approche de Solé, Utzet et Vives	59
Chapitre 5. Malliavin calculus and Clark-Ocone formula for functionals of a square-integrable Lévy process	61
5.1. Introduction	61
5.2. Preliminary results on Lévy processes	64
5.2.1. Square-integrable Lévy processes	65
5.2.2. A particular choice for g	66
5.3. Martingale representations	67
5.4. Chaotic representations	70
5.4.1. Notation	70
5.4.2. Multiple integrals and Lévy chaos	71
5.4.3. Chaotic representation property	72
5.4.4. Explicit chaos representation	78

5.5. Malliavin derivatives and Clark-Ocone formula.....	80
5.5.1. Properties and interpretation of the Malliavin derivatives.....	82
5.5.2. A Clark-Ocone formula.....	83
5.6. Martingale representation of the maximum.....	84
5.7. Acknowledgements.....	86
Appendix A : Proof of Lemma 5.5.5	87
Appendix B : Interpretation of the directional derivatives.....	88
Chapitre 6. Distribution of the present value of dividend payments in a Lévy risk model.....	92
6.1. Introduction.....	92
6.2. A Lévy risk model and the exit problem	93
6.2.1. Exit from a finite interval and the scale functions.....	93
6.2.2. A Lévy risk model with dividend barrier.....	94
6.3. The moments when starting from b	95
6.3.1. Proof of Proposition 6.3.1	95
6.4. The moments when starting from u	98
6.5. The Laplace transform.....	98
6.6. Acknowledgements.....	100
Conclusion.....	101
Bibliographie	102
Annexe A. Autorisation, déclarations et permissions.....	A-i

REMERCIEMENTS

Je remercie mon directeur de recherche, Bruno Rémillard, pour son aide à plusieurs niveaux, mais surtout pour la confiance qu'il a porté en moi au cours de mon périple au doctorat.

I warmly thank Xiaowen Zhou for his contribution to this thesis but also for believing in me.

Je tiens à remercier Wim Schoutens d'avoir accepté d'évaluer la thèse en tant qu'examineur externe.

Je tiens à remercier de façon particulière Marlène Frigon pour son immense générosité. Vous avez été pour moi d'un grand réconfort et une oreille attentive dans les moments difficiles, mais aussi lors des bons moments.

Merci aux probabilistes du département qui ont participé à ma formation, mais qui m'ont avant tout donné le goût des probabilités : Anatole Joffe, Martin Goldstein, Richard Duncan et Daniel Dufresne, mon directeur de recherche à la maîtrise. Un premier merci à Manuel Morales pour sa gentillesse ; un deuxième, conjointement avec Louis Doray, pour l'opportunité qu'ils m'ont donnée de présenter à l'ARC06. Cet exposé est un point tournant de ma jeune *carrière*.

Merci à Yvan Saint-Aubin qui, lors de son mandat comme directeur du département, m'a donné ma première chance comme chargé de cours. Je lui en serai toujours reconnaissant.

Un merci spécial à Francis Forget et à Rony Touma pour leur soutien informatique et leur gentillesse.

Je remercie l'Institut de finance mathématique de Montréal pour son généreux soutien financier. Au risque de sombrer dans les clichés, je tiens à mentionner que sans leur bourse de doctorat cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Je tiens également à remercier Bruno Rémillard, l'Institut des sciences mathématiques, la Faculté des

études supérieures et le Département de mathématiques et statistique pour leur soutien financier qui fut tout aussi indispensable.

D'un point de vue plus personnel, je tiens à remercier mes parents Yvonne et Paul, mon frère Pierre-Luc ainsi que Julie-Anne, Gabriel et ma filleule *en construction*, et mes beaux-parents Jacques et Lise. Merci à Marc, Christian, Matthieu et Hugo ainsi qu'à tous ceux avec qui je partage les bons et les moins bons moments. Un merci à Renaud et Jean-Philippe pour les nombreux repas du midi passés à discuter mais surtout à *réinventer le monde*. Merci à vous tous d'être là !

La vie au DMS n'aurait pas été aussi agréable pour moi au cours des dernières années si ce n'avait été d'Alexandre et de Nicolas. Merci pour les innombrables cafés et discussions ! Merci à Samuel avec qui je partage mon amour pour le rock ! Merci à Anik et Étienne, et tout particulièrement à Marie-Odette, pour toutes ces années de vie en *colocation*... de bureau. Et finalement, merci à tous ceux que j'ai côtoyés au fil des années au DMS.

Mes remerciements les plus tendres vont évidemment à Julie et Anne-Sophie. Merci de rendre ma vie si belle !

¡NI UN PASO ATRÁS!

*Asociación Madres de Plaza de Mayo*¹

¹Pour de l'information, voir Goyer [32] et www.madres.org.

INTRODUCTION

Depuis quelques années, le calcul de Malliavin suscite beaucoup d'intérêt. L'une de ces raisons est sûrement la portée des applications en finance mathématique, particulièrement aux modèles basés sur le mouvement brownien. Suite à un symposium portant sur les applications du calcul de Malliavin en finance, la revue *Mathematical Finance* consacrait son volume de janvier 2003 en entier à cette nouvelle réalité. Parallèlement, des données empiriques montraient les limites des modèles financiers browniens, engendrant un regain d'intérêt pour les processus avec sauts, comme par exemple les processus de Lévy. Dans les modèles de la théorie du risque, c'est-à-dire les modèles du portefeuille d'une compagnie d'assurances, les processus de Lévy ont également connu un essor important. Cette situation, et ce besoin de *discontinuité*, a créé un terreau fertile pour le développement d'un calcul de Malliavin pour les processus de Lévy ainsi que pour le développement même des applications de cette importante famille de processus stochastiques.

LE CALCUL DE MALLIAVIN

Qu'est-ce que le calcul de Malliavin ? Il s'agit d'un calcul des variations stochastique ou, en d'autres mots, d'un calcul différentiel infini-dimensionnel sur l'espace de Wiener, c'est-à-dire sur l'espace canonique du mouvement brownien. C'est une fusion entre *théorie des probabilités* et *calcul différentiel*. Les premiers travaux sur le sujet remontent aux années 1970. Plus particulièrement, en 1976, Paul Malliavin publiait *Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators* [54] portant sur l'existence et la régularité de la fonction de densité de vecteurs aléatoires. La première application de cette théorie était de fournir une démonstration probabiliste du théorème de Hörmander (*Hörmander "sum of squares" theorem*) sur les opérateurs différentiels hypoelliptiques. Les travaux qui ont suivi se sont dirigés dans plusieurs directions. Nous

suggerons au lecteur de consulter le livre de Marta Sanz-Solé [72] où se trouve une énumération des domaines où le calcul de Malliavin a fait sa place. Pour un apprentissage général du calcul de Malliavin nous suggérons tout particulièrement le livre de David Nualart [57] auquel nous ferons abondamment référence.

LES TRAVAUX FONDATEURS

Nous ne sommes pas les seuls à croire que l'article *Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance* de Fournié, Lasry, Lebuchoux, Lions et Touzi [28] est à la source même de l'engouement récent pour le calcul de Malliavin. Cet article fait déjà office de pionnier dans les applications en finance, plus particulièrement dans les modèles du type Black-Scholes. Celui-ci a littéralement donné naissance à un domaine de recherche : l'application de la formule de dualité entre la dérivée de Malliavin et l'intégrale de Skorohod aux calculs de sensibilité du modèle par rapport à ses paramètres. Les travaux de Bernis et al. [8] et Benhamou [5] dans le cadre brownien, ceux de El-Khatib et Privault [24] et Privault et Wei [66] pour le processus de Poisson, et plus récemment, ceux de Bavouzet-Morel et Messaoud [4] et Davis et Johansson [17] dans le cadre des processus de Lévy sont tous des descendants directs de [28].

Utilisant des outils différents de la théorie, les applications au problème de couverture des options (*hedging*) ont aussi aidé à créer une aura positive autour du calcul de Malliavin. Cette fois-ci, la formule de Clark-Ocone (aussi appelée formule de Clark-Ocone-Haussmann) en est la cause. Les articles de Ocone et Karatzas [62] et de Karatzas, Ocone et Li [41], tous deux publiés en 1991, sont à la base du développement et de l'utilisation de la formule de Clark-Ocone en finance mathématique. Le résultat en est la formule de Clark-Ocone généralisée, aussi appelée *Karatzas-Ocone hedging formula*.

ET LES PROCESSUS DE LÉVY DANS TOUT ÇA ?

Le regain d'intérêt relativement récent pour les processus de Lévy peut aussi être imputé en partie aux besoins de la finance mathématique. Les articles de recherche sur le sujet ne se comptent plus. Dans la section précédente, nous avons rapidement fait mention du calcul de Malliavin pour le processus de Poisson et pour les processus de Lévy. L'intimité entre le mouvement brownien et les polynômes d'Hermite est au coeur de l'équivalence entre deux approches menant au calcul de Malliavin classique : l'approche variationnelle du type espace de Sobolev et l'approche chaotique du type espace de Fock. Pour le processus de Poisson, il y a plusieurs approches : l'approche

variationnelle par rapport à l'intensité des sauts (voir par exemple Bichteler et al. [11]) ainsi que celle par rapport à l'instant des sauts (voir par exemple Carlen et Pardoux [12]), mais il y a également une approche chaotique semblable à celle pour le mouvement brownien (voir par exemple Nualart et Vives [60]). Cette dernière approche a aussi donné naissance à plusieurs calculs de Malliavin pour les processus de Lévy. Nous en discuterons plus amplement au chapitre 4. Conséquemment, le calcul de Malliavin a commencé à étendre son influence dans l'autre domaine d'application d'intérêt pour cette thèse, soit la théorie du risque. En effet, l'article de Privault et Wei [66], cité un peu plus haut, utilise un calcul de Malliavin *poissonnien* pour le calcul de la sensibilité des probabilités de ruine par rapport aux paramètres du modèle.

NOS CONTRIBUTIONS

La présente thèse contient six chapitres, dont trois sont des articles acceptés ou soumis pour publication. Les trois autres chapitres présentent des éléments connus de la théorie.

Le premier chapitre est une introduction au calcul de Malliavin pour le mouvement brownien. On y présente également une utilisation de la formule de Clark-Ocone pour la résolution du problème de représentation martingale ainsi que l'idée maîtresse de l'article de Fournié et al. [28], c'est-à-dire la formule d'intégration par parties du calcul de Malliavin. Ce premier chapitre est suivi de l'article *Explicit martingale representations for Brownian functionals and applications to option hedging* [68], écrit en collaboration avec Bruno Rémillard et qui paraîtra sous peu dans la revue *Stochastic Analysis and Applications*. Dans cet article, nous utilisons des outils du calcul de Malliavin pour obtenir de nouvelles représentations martingales explicites de fonctionnelles du mouvement brownien. Notre motivation initiale fut l'article de Shiryaev et Yor [74] où l'on y fait mention de la difficulté d'utiliser le calcul de Malliavin pour des fonctionnelles dépendant de toute la trajectoire du mouvement brownien. Voilà pourquoi nous nous sommes spécifiquement intéressé aux fonctionnelles faisant intervenir le maximum et le minimum du mouvement brownien. Nous avons ainsi pu obtenir des portefeuilles de couverture explicites d'options exotiques dans le modèle classique de Black-Scholes.

Le chapitre trois est une courte présentation d'éléments choisis dans l'article de Ma, Protter et San Martin intitulé *Anticipating integrals for a class of martingales* [53]. Cet article généralise l'approche chaotique du calcul de Malliavin pour le mouvement brownien aux martingales normales. L'idée derrière cette approche a par la suite été

abondamment utilisée pour développer un calcul de Malliavin pour les processus de Lévy. Le chapitre quatre, quant à lui, est une revue de littérature de quelques calculs de Malliavin chaotiques pour les processus de Lévy. Plusieurs travaux très récents y sont présentés surtout pour l'intérêt de leur apport original. Les chapitres trois et quatre servent en partie à rendre justice à nos prédécesseurs desquels nous nous sommes inspirés pour le chapitre cinq.

Ce cinquième chapitre contient essentiellement l'article *Malliavin calculus and Clark-Ocone formula for functionals of a square-integrable Lévy process* [69], aussi rédigé en collaboration avec Bruno Rémillard et récemment soumis pour publication. L'objectif y est de prolonger le calcul de Malliavin aux processus de Lévy de carré intégrable. Nous fournissons donc une construction *détaillée* d'une dérivée de Malliavin chaotique menant à une formule de Clark-Ocone. Nous présentons également des outils pour faciliter les calculs et les utilisons pour obtenir une représentation martingale explicite du maximum d'un processus de Lévy.

Évidemment, cette thèse est l'aboutissement de quelques années de travail mais aussi d'apprentissage. En cours de route, lors de l'étude des processus de Lévy, un projet qui mènera à l'article *Distribution of the present value of dividend payments in a Lévy risk model* [70] s'est présenté. Cet article, écrit conjointement avec Xiaowen Zhou, compose le chapitre six et va paraître très prochainement dans la revue *Journal of Applied Probability*. Nous y utilisons la solution du problème de sortie d'un intervalle par un processus de Lévy dans un contexte financier. Plus précisément, nous obtenons la loi de la valeur actualisée des dividendes versés par une compagnie d'assurances en terme des *scale functions* du processus de Lévy sous-jacent. Ce processus sert à modéliser l'avoir financier de la compagnie. Ces résultats généralisent ceux obtenus dans le modèle de risque classique utilisant un processus de Poisson composé, mais aussi dans le modèle utilisant un processus de Poisson composé et perturbé par un mouvement brownien.

Puisque cette thèse est principalement constituée de trois articles comportant chacun une introduction, et puisqu'il y a en plus un résumé précédant la présente introduction, nous concluons ici afin de minimiser le sentiment de redondance que pourrait ressentir le lecteur. Bonne lecture !

Chapitre 1

CALCUL DE MALLIAVIN ET QUELQUES APPLICATIONS

Dans la première section de ce premier chapitre, nous introduisons le *calcul des variations stochastique* aussi appelé *calcul de Malliavin*. Nous adaptons l'approche de Nualart [57] mais en particulierisant au cas où le processus isonormal gaussien est une intégrale de Wiener-Itô. Quelques exemples, des détails et des commentaires ont été ajoutés pour faciliter la compréhension.

Comme le calcul de Malliavin est particulièrement efficace pour donner une réponse, quoique partielle, au problème de représentation martingale ainsi que pour obtenir des expressions utiles des *Greeks*, nous présentons ces deux applications dans les sections suivantes. La lecture de ces sections n'est pas essentielle à la compréhension du reste de la thèse, mais elle permet de donner une idée de l'utilisation qu'on peut faire du calcul de Malliavin en plus de venir appuyer l'introduction du chapitre 2.

Soit T un nombre réel strictement positif et soit $(B_t)_{t \in [0, T]}$ un mouvement brownien standard défini sur l'espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$, muni de la filtration brownienne augmentée $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, laquelle satisfait aux *conditions habituelles*. On suppose également que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

1.1. CALCUL DE MALLIAVIN POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN

L'intégrale de Wiener-Itô génère le processus $W = \{W(h), h \in L^2([0, T])\}$ indexé par $L^2([0, T])$ et défini par

$$W(h) = \int_0^T h(t) dB_t.$$

Il s'agit d'un processus isonormal gaussien, c'est-à-dire d'une famille gaussienne centrée telle que

$$\mathbb{E}[W(h)W(g)] = \langle h, g \rangle_{L^2([0, T])}, \forall h, g \in L^2([0, T]).$$

Le n^e polynôme d'Hermite étant donné par

$$H_n(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } n \geq 1; \\ 1 & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

on définit $\mathcal{H}_n$, le n^e chaos de Wiener, par la fermeture de l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de $\{H_n(W(h)) \mid h \in L^2([0, T]), \|h\| = 1\}$. On obtient alors la décomposition (orthogonale) en chaos de Wiener :

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n.$$

Il s'agit du théorème 1.1.1 dans [57]. Soit maintenant

$$\Sigma_n = \{(t_1, \dots, t_n) \in [0, T]^n \mid 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n\}.$$

Définissons

$$J_n(f) = \int_{\Sigma_n} f(t) dB_t^{\otimes n} = \int_0^T \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) dB_{t_1} \dots dB_{t_n},$$

pour chaque $f \in L^2([0, T]^n)$. Ainsi, on obtient que

$$\mathbb{E}[J_n(f)J_m(g)] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m; \\ \langle f, g \rangle_{L^2(\Sigma_n)} & \text{si } n = m, \end{cases}$$

pour $f, g \in L^2([0, T]^n)$, où J_0 est l'opérateur identité sur $\mathbb{R}$ et $L^2(\Sigma_0) = \mathbb{R}$. On note par $L_S^2([0, T]^n)$ l'ensemble des fonctions de $L^2([0, T]^n)$ qui sont symétriques. Ainsi, pour $f \in L_S^2([0, T]^n)$, on définit

$$I_n(f) \equiv \int_{[0, T]^n} f(t) dB_t^{\otimes n} \equiv \int_0^T \dots \int_0^T f(t_1, \dots, t_n) dB_{t_1} \dots dB_{t_n} = n! J_n(f).$$

Alors,

$$\mathbb{E}[I_n(f)I_m(g)] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m; \\ n! \langle f, g \rangle_{L^2([0, T]^n)} & \text{si } n = m, \end{cases}$$

où I_0 est l'opérateur identité sur $\mathbb{R}$, pour $f, g \in L_S^2([0, T]^n)$.

Voici maintenant une relation importante entre les polynômes d'Hermite et les intégrales multiples. Celle-ci est au coeur de l'équivalence entre le calcul de Malliavin variationnel et le calcul de Malliavin chaotique.

Théorème 1.1.1 (Théorème 1.1.2, [57])

Soit $H_n(x)$ le n^e polynôme d'Hermite et $h \in L^2([0, T])$ une fonction de norme 1. Alors,

$$n! H_n(W(h)) = \int_{[0, T]^n} h(t_1) \dots h(t_n) dB_{t_1} \dots dB_{t_n} = I_n(h^{\otimes n}),$$

où $h^{\otimes n}(t_1, \dots, t_n) = h(t_1) \dots h(t_n)$.

Conséquemment, on obtient que l'intégrale I_n est une surjection de $L^2([0, T]^n)$ sur $\mathcal{H}_n$ et, avec la décomposition en chaos, que toute variable aléatoire $F \in L^2(\Omega)$ peut être développée en série d'intégrales multiples :

$$F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n) \quad (1.1.1)$$

où $f_0 = \mathbb{E}(F)$. Il s'agit de la *décomposition en chaos de Wiener-Itô*. Les fonctions f_n de cette représentation sont uniquement déterminées par F et symétriques. Ainsi, $f_n \in L^2_S([0, T]^n)$ pour chaque n . Comme il s'agit d'une décomposition orthogonale, si $F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n)$, alors

$$\|F\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|_{L^2([0, T]^n)}^2.$$

Remarque 1.1.2

On peut aussi obtenir la décomposition en chaos de Wiener en appliquant successivement le théorème de représentation d'Itô. C'est ce que nous ferons au chapitre 5 dans le cas plus général d'un processus de Lévy.

Terminons avec un exemple :

Exemple 1.1.3

Déterminons la décomposition en chaos de W_T^2 . Remarquons que $\|1\|_{L^2([0, T])} = \sqrt{T}$. Ainsi, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{T}}$ satisfait aux hypothèses du théorème 1.1.1. Comme $B_T^2 = TW \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \right)^2$ et comme $H_2(x) = \frac{1}{2!}(x^2 - 1)$,

$$W \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \right)^2 - 1 = \int_0^T \int_0^T \frac{1}{T} dB_s dB_t$$

et alors

$$B_T^2 = T + \int_0^T \int_0^T dB_s dB_t = \mathbb{E}[B_T^2] + I_2(1).$$

Évidemment, cette égalité peut être obtenue en appliquant la formule d'Itô.

1.1.1. Dérivée de Malliavin

Définissons maintenant l'outil central du calcul de Malliavin : la dérivée de Malliavin. Commençons par introduire un opérateur défini sur la famille des variables aléatoires lisses $\mathcal{S}$, c'est-à-dire l'ensemble des variables aléatoires de la forme

$$F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$$

pour $n \geq 1$, $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $h_i \in L^2([0, T])$ pour tout $i = 1, \dots, n$, où $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ est le sous-espace de $L^2(\Omega)$ des fonctions indéfiniment dérivables dont les dérivées de tout ordre sont bornées. Si $F \in \mathcal{S}$, alors $D_t F$ est défini par

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i(t),$$

pour chaque $t \in [0, T]$. Puisqu'il s'agit d'un opérateur fermable (traduction libre de *closable*), on définit, et on note de la même manière, son extension fermée

$$D: \mathbb{D}^{1,2} \rightarrow L^2([0, T] \times \Omega),$$

où $\mathbb{D}^{1,2}$ est l'espace de Hilbert obtenu par la fermeture de $\mathcal{S}$ par rapport à la semi-norme

$$\|F\|_{1,2} = \left\{ \mathbb{E}[F^2] + \mathbb{E} \left[\|DF\|_{L^2([0,T])}^2 \right] \right\}^{1/2}.$$

L'opérateur de dérivée $D: \mathbb{D}^{1,2} \rightarrow L^2([0, T] \times \Omega)$ est appelée *dérivée de Malliavin* de F si la variable aléatoire F est différentiable au sens de Malliavin, c'est-à-dire si F est élément de $\mathbb{D}^{1,2}$.

Remarque 1.1.4

On peut définir des espaces $\mathbb{D}^{1,p}$ de manière similaire.

Dans l'exemple (trivial) qui suit, on voit bien que la dérivée de Malliavin est la dérivée *naturelle* de l'intégrale de Wiener : les deux opérations sont en quelque sorte le contraire l'une de l'autre. Cette relation provient du fait que les intégrales stochastiques de Wiener et même d'Itô sont des cas particuliers de l'intégrale de Skorohod. Cette dernière est l'opérateur adjoint de la dérivée de Malliavin. Nous reviendrons plus tard sur ce concept.

Exemple 1.1.5

Si f est élément de $L^2([0, T])$, alors l'intégrale de Wiener

$$\int_0^T f(s) dB_s$$

est différentiable au sens de Malliavin, c'est-à-dire qu'elle est élément de $\mathbb{D}^{1,2}$, et sa dérivée est

$$D_t \left(\int_0^T f(s) dB_s \right) = f(t).$$

1.1.1.1. Définition au sens faible

La dérivée de Malliavin peut aussi être définie à partir des espaces de Wiener abstraits. En effet, si on considère l'espace canonique du mouvement brownien $\Omega = C_0([0, T])$, l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ s'annulant en 0, on peut montrer que

$$\langle DF, h \rangle_{L^2([0, T])} = \int_0^T D_t(F) h(t) dt$$

est une dérivée de Fréchet directionnelle, où h est un élément de l'espace de Cameron-Martin H^1 consistant des fonctions absolument continues admettant une dérivée de carré intégrable. Plus précisément,

$$\langle DF, h \rangle_{L^2([0, T])} = \frac{d}{d\epsilon} F \left(\omega + \epsilon \int_0^\cdot h(s) ds \right) \Big|_{\epsilon=0}$$

où $t \mapsto \int_0^t h(s) ds$ est un élément de H^1 . Pour plus de détails, voir le livre de Nualart [57].

1.1.2. Lien entre la décomposition chaotique et la dérivée de Malliavin

Au chapitre 5, nous présenterons une dérivée de Malliavin chaotique pour des processus de Lévy. Cette définition est inspirée du théorème suivant donnant la relation entre la décomposition en chaos de Wiener d'une variable aléatoire et sa différentiabilité au sens de Malliavin.

Théorème 1.1.6 (Proposition 1.2.1, [57])

Soit F une variable aléatoire de carré intégrable admettant la représentation chaotique $F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n)$. Alors, F est différentiable au sens de Malliavin, c'est-à-dire $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, si et seulement si

$$\sum_{n \geq 1} nn! \|f_n\|_{L^2([0, T]^n)}^2 < \infty.$$

Dans ce cas, $D_t(F) = \sum_{n \geq 1} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t))$.

Ainsi, si

$$F = I_n(f_n) = \int_0^T \dots \int_0^T f_n(t_1, \dots, t_n) dB_{t_1} \dots dB_{t_n},$$

sa dérivée de Malliavin sera

$$D_t(F) = n \int_0^T \dots \int_0^T f_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t) dB_{t_1} \dots dB_{t_{n-1}}.$$

Exemple 1.1.7

Si h est une fonction de carré intégrable sur $[0, T]$, alors

$$F = \exp \left\{ \int_0^T h(t) dB_t \right\}$$

est un élément de $\mathbb{D}^{1,2}$. En effet, on peut montrer, en utilisant entre autre le théorème 1.1.1, que dans la décomposition chaotique de F , les fonctions f_n sont données par

$$f(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \exp \left\{ \frac{1}{2} \|h\|^2 \right\} h^{\otimes n}(t_1, \dots, t_n).$$

Ainsi, d'après le théorème 1.1.6, on a que $D_t(F) = h(t)F$. En particulier, si μ et σ sont des constantes, on a que

$$D_t(\exp \{ \mu T + \sigma B_T \}) = \sigma \exp \{ \mu T + \sigma B_T \}.$$

1.1.3. Quelques propriétés de la dérivée de Malliavin

Voici deux règles de la chaîne du calcul de Malliavin.

Proposition 1.1.8 (Proposition 1.2.2, [57])

Soit φ une fonction dans $C_b^1(\mathbb{R}^m)$, c'est-à-dire une fonction à valeurs réelles dont les dérivées partielles du premier ordre sont bornées. Si $F = (F^1, \dots, F^m)$ est élément de $(\mathbb{D}^{1,2})^m$, alors $\varphi(F)$ est élément de $\mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^m \partial_i \varphi(F) DF^i.$$

Dans l'article de Ocone et Karatzas [62], le résultat a été prolongé aux variables aléatoires dans $\mathbb{D}^{1,1}$ et aux fonctions dans $C^1(\mathbb{R}^m)$ satisfaisant à la condition suivante :

$$\mathbb{E} \left[|\varphi(F)| + \left\| \sum_{i=1}^m \partial_i \varphi(F) DF^i \right\| \right] < \infty.$$

Pour une démonstration de ce résultat, voir Ocone et Karatzas [62]. La prochaine proposition est un prolongement aux fonctions de Lipschitz de la précédente règle de la chaîne. Mais tout d'abord, voici un lemme.

Lemme 1.1.9 (Lemme 1.2.3, [57])

Soit $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{D}^{1,2}$ telle que F_n converge vers F dans $L^2(\Omega)$

et telle que $\sup_n \|DF_n\|_{L^2([0,T] \times \Omega)} < \infty$. Alors, $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et DF_n converge vers DF faiblement.

Un lemme semblable au précédent sera présenté au chapitre 5 dans le contexte des processus de Lévy.

Proposition 1.1.10 (Proposition 1.2.3, [57])

Soit $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Lipschitz, c'est-à-dire telle que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K \|x - y\|$$

pour tout x et y dans $\mathbb{R}^m$. Si $F = (F^1, \dots, F^m)$ est élément de $(\mathbb{D}^{1,2})^m$, alors $\varphi(F)$ est élément de $\mathbb{D}^{1,2}$ et il existe un vecteur aléatoire $G = (G_1, \dots, G_m)$ borné par K tel que

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^m G_i DF^i.$$

Si en plus la loi de F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$, alors

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^m \partial_i \varphi(F) DF^i.$$

Nous allons maintenant montrer que le maximum du mouvement brownien est différentiable au sens de Malliavin. Il s'agit de particulariser au cas brownien un résultat de Nualart et Vives [59]; voir aussi l'exercice 1.2.11 dans Nualart [57]. Ce lemme est utilisé dans l'article du chapitre 2.

Lemme 1.1.11

Soit $M_T = \sup_{t \in [0,T]} B_t$ le maximum du mouvement brownien sur $[0, T]$. La variable aléatoire M_T est élément de $\mathbb{D}^{1,2}$ et sa dérivée de Malliavin est donnée par

$$D_t(M_T) = \mathbb{I}_{[0,\tau]}(t)$$

où $\tau = \inf\{0 \leq t \leq T \mid M_t = M_T\}$ est le point (unique presque sûrement) où B atteint son maximum sur $[0, T]$.

DÉMONSTRATION. L'unicité de τ nous est donnée par la remarque 8.16 dans Karatzas et Shreve [42]. Pour chaque $n \geq 1$, posons

$$M_n = \varphi_n \left(B_0, B_{\frac{T}{2^n}}, B_{\frac{2T}{2^n}}, \dots, B_{\frac{(2^n-1)T}{2^n}}, B_T \right),$$

où $\varphi_n: \mathbb{R}^{2^n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de Lipschitz définie par

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_{2^n+1}) = \max\{x_1, \dots, x_{2^n+1}\}.$$

On a donc que M_n converge vers M presque sûrement. Aussi, par la proposition 1.1.10, chaque M_n est différentiable au sens de Malliavin et alors

$$\begin{aligned} D_t(M_n) &= \sum_{k=0}^{2^n} \partial_k \varphi_n(B_0, B_{\frac{T}{2^n}}, B_{\frac{2T}{2^n}}) \mathbb{I}_{[0, \frac{kT}{2^n}]}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{2^n} \mathbb{I}_{A_k} \mathbb{I}_{[0, \frac{kT}{2^n}]}(t), \end{aligned}$$

où $A_1 = \{M_n = B_{\frac{T}{2^n}}\}$ et $A_k = \{M_n \neq B_{\frac{T}{2^n}}, \dots, M_n \neq B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}, M_n = B_{\frac{kT}{2^n}}\}$ pour $k \in \{2, 3, \dots, n\}$. Puisque $D_t(M_n)$ converge vers $\mathbb{I}_{[0, \tau]}(t)$ lorsque n tend vers l'infini, le lemme 1.1.9 termine la démonstration. $\square$

1.1.4. Formule de Clark-Ocone

Pour démontrer le théorème de représentation de Clark-Ocone, nous devons d'abord introduire l'intégrale de Skorohod, c'est-à-dire l'opérateur adjoint de la dérivée de Malliavin.

1.1.4.1. Intégrale de Skorohod

La dérivée de Malliavin est un opérateur non-borné et fermé sur l'espace $\mathbb{D}^{1,2}$, lequel est dense dans $L^2(\Omega)$. On peut donc définir son opérateur adjoint, noté δ et appelé *opérateur de divergence* ou *intégrale de Skorohod*. Par définition d'un opérateur adjoint, le domaine de δ est l'ensemble des éléments u de $L^2([0, T] \times \Omega)$ qui sont tels que

$$|\langle DF, u \rangle_{L^2([0, T] \times \Omega)}| = |\mathbb{E}[\int_0^T D_t(F) u_t dt]| \leq c \|F\|_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, où c est une constante pouvant dépendre de u . Pour chaque élément u dans $\text{Dom}(\delta)$, on peut caractériser $\delta(u)$ avec l'équation suivante :

$$\mathbb{E}[F \delta(u)] = \mathbb{E}[\int_0^T D_t(F) u(t) dt] \quad (1.1.2)$$

pour tout $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. On remarque qu'il s'agit d'une égalité de produits scalaires respectivement dans $L^2(\Omega)$ et $L^2([0, T] \times \Omega)$. L'équation (1.1.2) est souvent appelée *formule d'intégration par parties*. On peut aussi représenter l'opérateur δ à l'aide des décompositions chaotiques.

Proposition 1.1.12 (Proposition 1.3.1, [57])

Soit u un élément de $L^2([0, T] \times \Omega)$ de la forme

$$u(t) = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n(\cdot, t)).$$

Alors, u est élément du domaine de δ si et seulement si la somme $\sum_{n \geq 0} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$ converge dans $L^2(\Omega)$, où $\tilde{f}_n$ est la symétrisation de f_n . Dans ce cas,

$$\delta(u) = \sum_{n \geq 0} I_{n+1}(\tilde{f}_n).$$

La formule d'intégration par parties est particulièrement intéressante lorsque le processus u est adapté : dans ce cas l'intégrale de Skorohod coïncide avec l'intégrale d'Itô.

Proposition 1.1.13 (Proposition 1.3.4, [57])

L'espace (fermé) des processus adaptés de carré intégrable $L_a^2([0, T] \times \Omega)$ est contenu dans $\text{Dom}(\delta)$ et, si $u \in L_a^2([0, T] \times \Omega)$, alors

$$\delta(u) = \int_0^T u(t) dB_t.$$

1.1.4.2. Formule de Clark-Ocone-Haussmann

Avant de présenter la formule de Clark-Ocone, voici un lemme nous indiquant comment se comportent les décompositions chaotiques par rapport à une espérance conditionnelle. Il s'agit d'un cas particulier du lemme 1.2.4 dans [57].

Lemme 1.1.14

Considérons la variable aléatoire $F = I_n(f)$, où $f \in L_S^2([0, T]^n)$ et où $n \geq 1$. Alors,

$$\mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_t] = I_n \left(f \mathbb{I}_{[0, t]^n} \right).$$

Ce lemme a une forme similaire lorsque F est représentée par une somme infinie. Conséquemment, pour $0 < s < T$, si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ et si F est $\mathcal{F}_s$ -mesurable, alors $D_t F = 0$ presque partout sur $]s, T] \times \Omega$. Voici finalement la formule de représentation de Clark-Ocone.

Proposition 1.1.15 (Proposition 1.3.5, [57])

Si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, alors

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \mathbb{E}[D_t(F) \mid \mathcal{F}_t] dB_t.$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n)$. Alors, en appliquant dans l'ordre le théorème 1.1.6 et le lemme précédent, on obtient que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_t(F) \mid \mathcal{F}_t] &= \sum_{n \geq 1} n \mathbb{E}[I_{n-1}(f_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t)) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \sum_{n \geq 1} n I_{n-1}(f_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t) \mathbb{I}_{[0,t]}(t_1) \dots \mathbb{I}_{[0,t]}(t_{n-1})) \\ &= \sum_{n \geq 1} n I_{n-1}(f_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t) \mathbb{I}_{\{t_1 \vee \dots \vee t_{n-1} \leq t\}}). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la proposition 1.1.13 et la proposition 1.1.12, on a que

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbb{E}[D_t(F) \mid \mathcal{F}_t] dB_t &= \delta(\mathbb{E}[D_t(F) \mid \mathcal{F}_t]) \\ &= \sum_{n \geq 1} I_n(f_n) \\ &= F - \mathbb{E}[F]. \end{aligned}$$

□

Cette formule a été généralisée aux variables aléatoires dans l'espace $\mathbb{D}^{1,1}$ par Karatzas et al. [41].

1.1.5. Équations différentielles stochastiques

Sous quelques conditions, un *processus de diffusion* est différentiable au sens de Malliavin. En effet, considérons l'équation différentielle stochastique (ÉDS) homogène suivante :

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t \quad (1.1.3)$$

sur $[0, T]$ avec condition initiale $X_0 = x \in \mathbb{R}$. On suppose que les fonctions

$$b, \sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

sont de classe $C_b^1(\mathbb{R})$. Sous ces hypothèses, cette ÉDS admet une unique solution (forte) que nous notons $(X_t)_{t \in [0, T]}$. Considérons aussi la solution de l'ÉDS

$$dY_t = b'(X_t)Y_t dt + \sigma'(X_t)Y_t dB_t \quad (1.1.4)$$

sur $[0, T]$ avec condition initiale $Y_0 = 1$. Sa solution $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ est appelée *first variation process*. Nous avons donc que

$$Y_t = \exp \left(\int_0^t \left(b'(X_s) - \frac{1}{2} (\sigma'(X_s))^2 \right) ds + \int_0^t \sigma'(X_s) dB_s \right) \quad (1.1.5)$$

pour chaque $t \in [0, T]$.

1.1.5.1. Une propriété de commutativité

Avant d'obtenir la dérivée de Malliavin de $(X_t)_{t \in [0, T]}$, nous présentons la *propriété de commutativité* entre l'intégrale de Skorohod et la dérivée de Malliavin. Celle-ci sera particulièrement intéressante lorsque le processus intégré au sens de Skorohod sera adapté. Soit u un processus élément de $L^2([0, T] \times \Omega)$ tel que $u(t) = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n(\cdot, t))$. Alors, $u \in \mathbb{L}^{1,2}$ si et seulement si

$$\sum_{n \geq 1} nn! \|f_n\|_{L^2([0, T]^{n+1})}^2 < \infty.$$

Dans ce cas, $u(t) \in \mathbb{D}^{1,2}$ pour presque tout $t \in [0, T]$. Voici l'équation (1.4.6) de [57] que nous présentons sous forme de lemme.

Lemme 1.1.16

Supposons que

- (1) u est élément de $\mathbb{L}^{1,2}$;
- (2) $s \mapsto D_t(u(s))$ est élément de $\text{Dom}(\delta)$;
- (3) $t \mapsto \int_0^T D_t(u(s)) dB_s$ est élément de $L^2([0, T] \times \Omega)$.

Alors, $\delta(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$ et

$$D_t(\delta(u)) = u(t) + \int_0^T D_t(u(s)) dB_s.$$

1.1.5.2. Dérivée de Malliavin d'une diffusion

Soit $(X_t)_{t \in [0, T]}$ et $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ les solutions des équations différentielles stochastiques (1.1.3) et (1.1.4).

Proposition 1.1.17

Pour chaque $t \in [0, T]$, X_t est différentiable au sens du calcul de Malliavin et sa dérivée de Malliavin est donnée par

$$D_s(X_t) = Y_t(Y_s)^{-1} \sigma(X_s) \mathbb{I}_{\{s \leq t\}}$$

pour $s \geq 0$.

DÉMONSTRATION. Puisque, pour $t \in [0, T]$,

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s,$$

d'après le lemme 1.1.16 et la *règle de la chaîne*, on a que X_t est différentiable et sa dérivée est donnée par

$$D_r(X_t) = \begin{cases} \sigma(X_r) + \int_r^t b'(X_s) D_r(X_s) ds + \int_r^t \sigma'(X_s) D_r(X_s) dB_s & \text{si } r \leq t; \\ 0 & \text{si } t < r \leq T. \end{cases}$$

Donc, pour chaque $r \in [0, T[$, on a que $(D_r(X_t))_{t \in [r, T]}$ est la solution de

$$dZ_t = b'(X_t) Z_t dt + \sigma'(X_t) Z_t dB_t$$

sur $[r, T]$ avec condition initiale $Z_r = \sigma(X_r)$. Conséquemment,

$$\begin{aligned} D_r(X_t) &= \sigma(X_r) \exp \left(\int_r^t \left(b'(X_s) - \frac{1}{2} (\sigma'(X_s))^2 \right) ds + \int_r^t \sigma'(X_s) dB_s \right) \mathbb{I}_{\{r \leq t\}} \\ &= \sigma(X_r) Y_t(Y_r)^{-1} \mathbb{I}_{\{r \leq t\}} \end{aligned}$$

d'après l'équation (1.1.5). □

Il est à noter que la dernière proposition est essentiellement l'exercice 2.2.1 de [57]; cette proposition est utilisée dans Fournié et al. [28].

1.2. PROBLÈME DE REPRÉSENTATION MARTINGALE

Le problème de représentation martingale consiste à se demander si on peut représenter une martingale par une intégrale stochastique. Une présentation succincte et *à-jour* de ce problème se trouve dans l'article de Davis [16].

1.2.1. Théorème de représentation d'Itô

Le théorème de représentation d'Itô stipule ni plus ni moins que le mouvement brownien possède la propriété de représentation martingale.

Théorème 1.2.1 (Théorème 1.1.3, [57])

Soit X une martingale brownienne, c'est-à-dire une martingale par rapport à la filtration du mouvement brownien, alors il existe un unique processus adapté $\varphi \in L^2([0, T] \times \Omega)$ tel que

$$X_t = \int_0^t \varphi_s dB_s$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Il est intéressant de remarquer que le théorème d'Itô entraîne que toute martingale brownienne est continue. Il existe des analogues en plusieurs dimensions et pour les martingales locales du théorème de représentation d'Itô.

On appelle fonctionnelle brownienne toute variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. On obtient alors facilement le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.2

Pour toute fonctionnelle brownienne de carré intégrable F , il existe un unique processus adapté φ tel que

$$F = \mathbb{E}(F) + \int_0^T \varphi_t dB_t.$$

1.2.2. Représentations martingales explicites

Comme le théorème de représentation d'Itô n'est qu'un théorème d'existence et d'unicité, il est naturel de se poser la question suivante : comment peut-on obtenir des expressions de l'intégrand φ ? Plus particulièrement, lorsque la fonctionnelle dépend *fortement* de la trajectoire du mouvement brownien et que l'utilisation de la formule d'Itô semble impossible, comment obtenir φ ?

Récemment, Shiryaev et Yor [74] ont proposé une méthode basée justement sur la formule d'Itô pour obtenir des représentations martingales explicites. Leur idée est d'associer à la fonctionnelle F sa martingale de Lévy $X_t = \mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_t]$ qu'on tentera ensuite de représenter sous la forme $f(t, B_t)$ afin d'appliquer la formule d'Itô. Comme $t \mapsto f(t, B_t)$ est une martingale, seule l'intégrale par rapport au mouvement brownien doit apparaître, c'est-à-dire que

$$f(t, B_t) = \int_0^t \partial_2 f(s, B_s) dB_s.$$

Lorsque $t = T$, on obtient une représentation martingale explicite pour F . Les auteurs appliquent cette méthodologie pour obtenir entre autre la représentation martingale du maximum du mouvement brownien :

Théorème 1.2.3

Soit $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$ pour $t \in [0, T]$. Alors, la représentation martingale de M_T est donnée par :

$$M_T = \mathbb{E}[M_T] + 2 \int_0^T \left[1 - \Phi \left(\frac{M_t - B_t}{\sqrt{T-t}} \right) \right] dB_t,$$

où $\Phi(x) = \mathbb{P}\{N(0, 1) \leq x\}$.

Le précédent théorème était connu avant l'article de Shiryaev et Yor [74] ; par exemple, il se trouve également dans Rogers et Williams [71].

La formule de Clark-Ocone de la proposition 1.1.15 est une réponse plus intéressante que celle proposée par le théorème de représentation d'Itô au problème de représentation martingale. En fait, cette formule nous dit que si F est différentiable au sens du calcul de Malliavin alors

$$\varphi_t = \mathbb{E}[D_t F \mid \mathcal{F}_t].$$

Par exemple, en utilisant le lemme 1.1.11 conjointement avec la formule de Clark-Ocone, on obtient facilement le théorème 1.2.3. En effet, si $F = M_T$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_t F \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbb{P}\{0 \leq t \leq \tau \mid \mathcal{F}_t\} \\ &= \mathbb{P}\{b - a \leq M_{T-t}\} \\ &= 2\mathbb{P}\left\{\frac{b-a}{T-t} \leq B_1\right\} \\ &= 2\left[1 - \Phi\left(\frac{M_t - B_t}{\sqrt{T-t}}\right)\right], \end{aligned}$$

où $a = B_t$ et $b = M_t$.

1.2.3. Représentation martingale pour les processus de Lévy

Le processus de Poisson possède aussi la propriété de représentation martingale, c'est-à-dire qu'on peut représenter les fonctionnelles du processus de Poisson par une intégrale stochastique par rapport au processus de Poisson. Ce n'est toutefois pas le cas pour tous les processus de Lévy. Par contre, en général, on peut quand même obtenir une représentation intégrale par rapport au mouvement brownien et à la mesure aléatoire associée au processus de Lévy. Pour plus de détails, le lecteur est référé à Jacod et Shiryaev [40], Kunita [46] et Davis [16]. On peut construire des décompositions chaotiques par rapport au processus de Poisson mais aussi par rapport à certains processus de Lévy. Nous considérerons ces questions au chapitre 5.

1.3. REPRÉSENTATION DES *Greeks*

Dans cette section, nous présentons quelques résultats provenant de l'article de Fournié et al. [28] et concernant le calcul des *Greeks*. Cet article est probablement à la source de l'engouement suscité par le calcul de Malliavin pour les applications en finance.

Qu'est-ce qu'un *Greek*? Si l'objectif est d'étudier la sensibilité du prix d'un actif par rapport à un paramètre du modèle, il est naturel de vouloir calculer la dérivée de la fonction représentant ce prix en fonction du paramètre. Ce sont les *Greeks*. Par

exemple, soit F le *payoff* d'un actif financier défini sur un sous-jacent dont le prix est modélisé par le processus $(X_t)_{t \geq 0}$, où $X_0 = x$. Alors, F dépend de la constante x et peut donc être noté F^x . On définit alors le *Delta* de cet actif par

$$\Delta = u'(x),$$

où $u(x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F^x]$, $\mathbb{Q}$ étant la mesure risque-neutre. Dans ce contexte, $u(x)$ est le prix de l'actif en fonction du paramètre x représentant dans ce cas-ci la valeur initiale du sous-jacent.

Le prix $u(x)$ étant une espérance, il peut être calculé numériquement à l'aide de méthodes Monte Carlo. L'approche naturelle pour calculer numériquement $u'(x)$ est d'approcher la dérivée par des quotients différentiels qui seront obtenus par simulation. En d'autres mots, il faut calculer des termes de la forme

$$\frac{u(x + \varepsilon) - u(x)}{\varepsilon}$$

pour des valeurs de ε assez petites, où $u(x + \varepsilon)$ et $u(x)$ sont estimés par des méthodes Monte Carlo. Plusieurs travaux ont montré que cette approche était inefficace pour des *payoffs* discontinus et aussi simple que celui d'un *call* européen. Pour plus de détails sur les enjeux numériques, voir Fournié et al. [28].

Le calcul de Malliavin nous permet de représenter les *Greeks* sous une forme particulièrement intéressante pour les calculs numériques.

1.3.1. Modèle brownien

Considérons un marché complet sur l'horizon de temps $[0, T]$. Symboliquement, on considère un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{Q})$, où la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ est la filtration brownienne augmentée, provenant d'un mouvement brownien standard $(B_t)_{t \in [0, T]}$, et où la mesure $\mathbb{Q}$ est neutre au risque. La dynamique du prix de l'actif risqué est donné par la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t \tag{1.3.1}$$

sur $[0, T]$ avec condition initiale $X_0 = x$. Supposons aussi que les fonctions b et σ satisfont aux hypothèses de la section 1.1.5 et demandons que le coefficient de diffusion σ soit *uniformément elliptique*, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$|\sigma(x)| \geq \varepsilon$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Tel que nous l'avons vu à la proposition 1.1.17, le processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est différentiable au sens du calcul de Malliavin et sa dérivée de Malliavin est donnée par

$$D_s X_t = Y_t Y_s^{-1} \sigma(X_s) \mathbb{I}_{\{s \leq t\}},$$

où le processus $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ est la solution de

$$dY_t = b'(t, Y_t) Y_t dt + \sigma'(Y_t) Y_t dB_t,$$

sur $[0, T]$ avec $Y_0 = 1$. Les dérivées des coefficients de la précédente ÉDS sont prises par rapport à la deuxième variable. Rappelons que dans ce cas, $\frac{\partial}{\partial x} X_t = Y_t$ pour tout $\omega \in \Omega$.

1.3.2. Représentation du Δ

Considérons une variable aléatoire de carré intégrable

$$F^x = \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \quad (1.3.2)$$

pour une fonction $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et pour des instants $0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$ fixés. Considérons aussi la fonction

$$u(x) = \mathbb{E}[\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})]$$

représentant le prix d'un actif avec *payoff* F^x . Si $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^m)$, alors on peut permuter la dérivée et l'espérance dans l'équation (1.3) (la définition de Δ). Dans ce cas,

$$\Delta = u'(x) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial x} \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \right],$$

où $\frac{\partial}{\partial x} \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) = \sum_{i=1}^m \partial_i \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) Y_{t_i}$. Introduisons maintenant la famille de fonctions suivante :

$$\Gamma_m = \left\{ a \in L^2([0, T]) \left| \int_0^{t_i} a(t) dt = 1, \forall i = 1, \dots, m \right. \right\}.$$

Voici un des résultats principaux de l'article de Fournié et al. [28]. Nous présentons également la preuve puisque les techniques qui y sont utilisées ont été souvent reprises par d'autres auteurs.

Théorème 1.3.1 (Proposition 3.2, [28])

Si ϕ est telle que $\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \in L^2(\Omega)$, alors pour tout $a \in \Gamma_m$,

$$u'(x) = \mathbb{E}[\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \pi] \quad (1.3.3)$$

pour $\pi = \int_0^T a(t) Y_t \sigma^{-1}(X_t) dB_t$.

DÉMONSTRATION. Supposons premièrement que $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. Pour chaque t_i , $D_t X_{t_i} = Y_{t_i} Y_t^{-1} \sigma(X_t) \mathbb{I}_{\{t \leq t_i\}}$ et alors $Y_{t_i} = Y_t D_t X_{t_i} \sigma^{-1}(X_t)$. Ainsi,

$$Y_{t_i} = \int_0^T a(t) Y_t D_t X_{t_i} \sigma^{-1}(X_t) dt$$

pour tout $a \in \Gamma_m$. Donc, en utilisant successivement la règle de la chaîne, la formule d'intégration par parties et l'équivalence entre l'intégrale de Skorohod et l'intégrale d'Itô pour des processus adaptés, nous obtenons que

$$\begin{aligned} u'(x) &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m \partial_i \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) Y_{t_i} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T \left[\sum_{i=1}^m \partial_i \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) D_t X_{t_i} \right] a(t) Y_t \sigma^{-1}(X_t) dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T D_t \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) (a(t) Y_t \sigma^{-1}(X_t)) dt \right] \\ &= \mathbb{E} [\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \delta(a(t) Y_t \sigma^{-1}(X_t))] \\ &= \mathbb{E} [\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \pi]. \end{aligned}$$

Notons que π dépend de x . Le résultat étant vérifié pour des fonctions lisses, nous allons montrer le cas général en approximant ϕ par une suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$ de fonctions dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$. Puisque $\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ est de carré intégrable, on a que

$$\phi(x_1, \dots, x_m) \in L^2(\mathbb{R}^m, \mu_X)$$

où μ_X est la loi du vecteur $X = (X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$. Ainsi, il existe une suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$ de fonctions de classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ telle que $\phi_n(x_1, \dots, x_m)$ tend vers $\phi(x_1, \dots, x_m)$ dans la norme de $L^2(\mathbb{R}^m, \mu_X)$. De manière équivalente, $\phi_n(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ tend vers $\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ dans la norme de $L^2(\Omega)$. Posons maintenant $u_n(x) = \mathbb{E}[\phi_n(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})]$ et

$$\varepsilon_n(x) = \mathbb{E} [(\phi_n(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) - \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}))^2].$$

Ainsi, pour tout x , $u_n(x)$ tend vers $u(x)$ et $\varepsilon_n(x)$ tend vers 0. En posant $g(x) = \mathbb{E}[\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) \pi]$ et en utilisant la première partie de la démonstration, on obtient que

$$\begin{aligned} |u'_n(x) - g(x)| &= |\mathbb{E}[(\phi_n(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) - \phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})) \pi]| \\ &\leq (\varepsilon_n(x) \psi(x))^{1/2} \end{aligned}$$

où $\psi(x) = \mathbb{E}[\pi^2]$. Par continuité (voir Protter [67]), on obtient aussi que

$$\sup_{x \in K} |u'_n(x) - g(x)| \leq (\varepsilon_n(x_0)\psi(x_0))^{1/2},$$

où le terme à la droite de l'inégalité tend vers 0. L'inégalité est vérifiée pour un certain $x_0 \in K$ et pour tout ensemble compact K dans $\mathbb{R}$. Nous avons donc la convergence uniforme de u' vers g sur tout compact. Conséquemment, u est continûment différentiable et $u' = g$. $\square$

Un fait à remarquer est que le *poids* π ne dépend pas de la fonction de *payoff* et peut donc être utilisé pour tous les *payoffs* faisant intervenir les mêmes instants (et remplissant la condition d'intégrabilité de l'équation (1.3.2)). Par exemple, le delta d'un *call* vanille, d'un *put* vanille et de toute autre option européenne admet le même poids.

Chapitre 2

EXPLICIT MARTINGALE REPRESENTATIONS FOR BROWNIAN FUNCTIONALS AND APPLICATIONS TO OPTION HEDGING

Résumé

La formule de Clark-Ocone est utilisée pour obtenir des représentations martingales explicites pour des fonctionnelles du mouvement brownien. Comme cas particuliers, on trouve des formules pour les représentations martingales des extrêmes du mouvement brownien géométrique ainsi que des formules pour la couverture d'options exotiques.

Abstract

Using Clark-Ocone formula, explicit martingale representations for path-dependent Brownian functionals are computed. As direct consequences, explicit martingale representations of the extrema of geometric Brownian motion and explicit hedging portfolios of path-dependent options are obtained.

2.1. INTRODUCTION

The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals, also known as martingale representation, has been widely studied over the years. The first proof of what is now known as Itô's representation theorem was implicitly provided by Itô [38] himself. This theorem states that any square-integrable Brownian functional is equal to a stochastic integral with respect to Brownian motion. Many years later, Dellacherie [18] gave a simple new proof of Itô's theorem using Hilbert space techniques. Many other articles were written afterward on this problem and its applications but

one of the pioneer works on explicit descriptions of the integrand is certainly the one by Clark [14]. Those of Hausmann [35], Ocone [61], Ocone and Karatzas [62] and Karatzas et al. [41] were also particularly significant. A nice survey article on the problem of martingale representation was written by Davis [16].

Even though this problem is closely related to important issues in applications, for example finding hedging portfolios in finance, much of the work on the subject did not have finding explicit representations as its ultimate goal, at least as it is intended in this work. In many papers using Malliavin calculus or some kind of differential calculus for stochastic processes, the results are quite general but unsufficiently explicit : the integrands in the stochastic integral representations always involve predictable projections or conditional expectations and some kind of gradients.

Recently, Shiryaev and Yor [74] proposed a method based on Itô's formula to find explicit martingale representations for Brownian functionals. They mention in their introduction that the search for explicit representations is an *uneasy business*. Even though they consider the Clark-Ocone formula as a general way to find stochastic integral representations, they raise the question of whether it is possible to handle it efficiently even in simple cases.

In the present paper, we show that Clark-Ocone formula is easier to handle than one might think at first. Using this tool from Malliavin calculus, explicit martingale representations for path-dependent Brownian functionals, i.e. random variables involving Brownian motion and its running extrema, are computed. No conditional expectations nor gradients appear in the closed-form representations obtained.

The method of Shiryaev and Yor [74] yields in particular the explicit martingale representation of the running maximum of Brownian motion. In the following, this representation will be obtained once more as an easy consequence of our main result. Moreover, the explicit martingale representations of the maximum and the minimum of geometric Brownian motion will be computed. Using these representations in finance, hedging portfolios will be obtained for strongly path-dependent options such as lookback and spread lookback options, i.e. options on some measurement of the volatility.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2, the problem of martingale representation is presented and, in Section 3, the martingale representations of the maximum and the minimum of Brownian motion are recalled. Martingale representations for more general Brownian functionals are given in Section 4 and those for the extrema of geometric Brownian motion are given in Section 5. Finally, in Section 6, our

main result is applied to the maximum of Brownian motion and, in Section 7, explicit hedging portfolios of exotic options are computed.

2.2. MARTINGALE REPRESENTATION

Let $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ be a standard Brownian motion defined on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, where $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ is the augmented Brownian filtration which satisfies *les conditions habituelles*. If F is a square-integrable random variable, Itô's representation theorem tells us that there exists a unique adapted process $(\varphi_t)_{t \in [0, T]}$ in $L^2([0, T] \times \Omega)$ such that

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \varphi_t dB_t. \quad (2.2.1)$$

In other words, there exists a unique martingale representation or, more precisely, the integrand φ in the representation exists and is unique in $L^2([0, T] \times \Omega)$. The expression martingale representation comes from the fact that Itô's representation theorem is essentially equivalent to the representation of Brownian martingales (see Karatzas and Shreve [42]). Unfortunately, the problem of finding explicit representations is still unsolved.

2.2.1. Clark-Ocone representation formula

When F is Malliavin differentiable, the process φ appearing in Itô's representation theorem, i.e. in Equation (2.2.1), is given by

$$\varphi_t = \mathbb{E}[D_t F \mid \mathcal{F}_t]$$

where $t \mapsto D_t F$ is the Malliavin derivative of F . This is the Clark-Ocone representation formula.

More precisely, let $W(h) = \int_0^T h(s) dB_s$ be defined for $h \in L^2([0, T])$. For a smooth Brownian functional F , i.e. a random variable of the form

$$F = f(W(h_1), \dots, W(h_n))$$

where f is a smooth bounded function with bounded derivatives of all orders, the Malliavin derivative is defined by

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i(t)$$

where ∂_i stands for the i^{th} partial derivative. Note that $D_t(\int_0^T h(s) dB_s) = h(t)$ and in particular $D_s(B_t) = \mathbb{I}_{\{s \leq t\}}$.

The operator D being closable, it can be extended to obtain the Malliavin derivative

$$D: \mathbb{D}^{1,2} \rightarrow L^2([0, T] \times \Omega)$$

where the domain $\mathbb{D}^{1,2}$ is the closure of the set of smooth functionals under the seminorm

$$\|F\|_{1,2} = \left\{ \mathbb{E}[F^2] + \mathbb{E} \left[\|DF\|_{L^2([0,T])}^2 \right] \right\}^{1/2}.$$

Random variables in $\mathbb{D}^{1,2}$ are said to be Malliavin differentiable. An interesting fact is that $\mathbb{D}^{1,2}$ is dense in $L^2(\Omega)$. This means that Clark-Ocone representation formula is not restricted to a small subset of Brownian functionals.

Fortunately, the Malliavin derivative satisfies some chain rules. First of all, if $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuously differentiable function with bounded partial derivatives and if $F = (F^1, \dots, F^m) \in (\mathbb{D}^{1,2})^m$, then $g(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ and $D(g(F)) = \sum_{i=1}^m \partial_i g(F) DF^i$. If $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ is instead a Lipschitz function, then $g(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ still holds. If in addition the law of F is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure on $\mathbb{R}^m$, then $D(g(F)) = \sum_{i=1}^m \partial_i g(F) DF^i$. These last results will be useful in the sequel.

For more on Malliavin calculus, a concise presentation is available in the notes of Øksendal [63] and a more detailed and general one in the book of Nualart [57].

2.2.2. Hedging portfolios

As mentioned in the introduction, stochastic integral representations appear naturally in mathematical finance. Since the work of Harrison and Pliska [34], it is known that the completeness of a market model and the computation of hedging portfolio rely on these representations. One can illustrate this connection by considering the classical Black-Scholes model. Under the probability measure $\mathbb{P}$, the price dynamics of the risky and the risk-free assets follow respectively

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, & S_0 = s; \\ dA_t = r A_t dt, & A_0 = 1, \end{cases}$$

where r is the interest rate, μ is the drift and σ is the volatility. Let $\mathbb{Q}$ be the unique equivalent martingale measure of this complete market model and let $B^\mathbb{Q}$ be the corresponding $\mathbb{Q}$ -Brownian motion. Note that under the risk neutral measure $\mathbb{Q}$,

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dB_t^\mathbb{Q}, \quad S_0 = s,$$

so that for any $t \geq 0$,

$$S_t = s e^{(r-\sigma^2/2)t + \sigma B_t^\mathbb{Q}}.$$

Let G be the payoff of an option on S and (η_t, ξ_t) the self-financing trading strategy replicating this option, i.e. a process over the time interval $[0, T]$ such that

$$dV_t = \eta_t dA_t + \xi_t dS_t \quad \text{and} \quad V_T = G$$

where $V_t = \eta_t A_t + \xi_t S_t$, ξ_t is the number of shares of the risky asset, $\xi_t S_t$ is the amount invested in it, η_t is the number of shares of the risk-free asset and $\eta_t A_t$ is the amount invested without risk. Then, the price of the option at time t is given by V_t . It is clear that η_t is a linear combination of ξ_t and V_t . When the price is known, the problem of finding the hedging portfolio is the same as finding ξ_t .

It is easily deduced that

$$\xi_t = e^{-r(T-t)} (\sigma S_t)^{-1} \varphi_t, \quad (2.2.2)$$

where φ_t is the integrand in the martingale representation of $\mathbb{E}^\mathbb{Q}[G \mid \mathcal{F}_t]$, i.e.,

$$e^{r(T-t)} V_t = \mathbb{E}^\mathbb{Q}[G \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^\mathbb{Q}[G] + \int_0^t \varphi_s dB_s^\mathbb{Q}.$$

We will use Equation (2.2.2) extensively in the section on financial applications.

For example, let $G = (S_T - K)^+$, where K is a constant. This is the payoff of a call option. Since S_T is a Malliavin differentiable random variable and since $f(x) = (x - K)^+$ is a Lipschitz function, one obtains that $D_t G = \sigma S_T \mathbb{I}_{\{S_T > K\}}$. Then

$$\varphi_t = \mathbb{E}^\mathbb{Q}[\sigma S_T \mathbb{I}_{\{S_T > K\}} \mid \mathcal{F}_t] = g(t, S_t),$$

where

$$\begin{aligned} g(t, a) &= \sigma a e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)} \mathbb{E} \left[e^{\sigma \sqrt{T-t} Z} \mathbb{I}_{\left\{ Z > \frac{\log(K/a) - (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right\}} \right] \\ &= \sigma a e^{r(T-t)} \Phi \left(\frac{\log(a/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right), \end{aligned}$$

with $Z \sim N(0, 1)$. Therefore

$$\xi_t = \Phi \left(\frac{\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right),$$

recovering the well-known formula of the Black-Scholes hedging portfolio for call options.

Note that even if the payoff of the option involves the non-smooth function $f(x) = (x - K)^+$, the Malliavin calculus approach is applicable. As mentioned in the preceding subsection, f only needs to be a continuously differentiable function with bounded derivative, or a Lipschitz function if it is applied to a random variable with an absolutely continuous law with respect to Lebesgue measure. This was the case for S_T .

2.3. MAXIMUM AND MINIMUM OF BROWNIAN MOTION

Let $B^\theta = (B_t^\theta)_{t \in [0, T]}$ be a Brownian motion with drift θ , i.e. $B_t^\theta = B_t + \theta t$, where $\theta \in \mathbb{R}$. Its running maximum and its running minimum are respectively defined by

$$M_t^\theta = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s^\theta \quad \text{and} \quad m_t^\theta = \inf_{0 \leq s \leq t} B_s^\theta.$$

When $\theta = 0$, M_t and m_t will be used instead. The range process of B_t^θ is then defined by $R_t^\theta = M_t^\theta - m_t^\theta$ and $R \equiv R^\theta$ if $\theta = 0$.

A result of Nualart and Vives [59] leads to the following lemma; see also Section 2.1.4 in Nualart [57].

Lemma 2.3.1

The random variables M_T^θ and m_T^θ are elements of $\mathbb{D}^{1,2}$ and their Malliavin derivatives are given by

$$D_t(M_T^\theta) = \mathbb{I}_{[0, \tau_M^\theta]}(t) \quad \text{and} \quad D_t(m_T^\theta) = \mathbb{I}_{[0, \tau_m^\theta]}(t)$$

for $t \in [0, T]$, where $\tau_M^\theta = \inf\{0 \leq t \leq T \mid M_t^\theta = M_T^\theta\}$ and $\tau_m^\theta = \inf\{0 \leq t \leq T \mid m_t^\theta = m_T^\theta\}$ are the almost surely unique random points where B^θ attains respectively its maximum and its minimum.

This lemma will be of great use in the sequel.

2.3.1. The case $\theta = 0$

If $\theta = 0$, the martingale representation of the maximum of Brownian motion is

$$M_T = \sqrt{\frac{2T}{\pi}} + \int_0^T 2 \left[1 - \Phi \left(\frac{M_t - B_t}{\sqrt{T-t}} \right) \right] dB_t \quad (2.3.1)$$

where $\Phi(x) = \mathbb{P}\{N(0, 1) \leq x\}$ and $\mathbb{E}[M_T] = \sqrt{\frac{2T}{\pi}}$ because

$$M_T \stackrel{d}{=} |B_T| \stackrel{d}{=} \sqrt{T}|N(0, 1)|.$$

This representation can be found in the book of Rogers and Williams [71]. Their proof uses Clark's formula (see Clark [14]), which is essentially a Clark-Ocone formula on the canonical space of Brownian motion. As mentioned in the introduction, it can also be computed using the completely different method of Shiryaev and Yor [74]. Obviously, the martingale representation of the minimum of Brownian motion is a direct consequence :

$$m_T = \sqrt{\frac{2T}{\pi}} - \int_0^T 2 \left[1 - \Phi \left(\frac{B_t - m_t}{\sqrt{T-t}} \right) \right] dB_t.$$

2.3.2. The general case

If one extends this by adding a drift to Brownian motion, the results are similar. In the papers of Graversen et al. [33] and Shiryaev and Yor [74], the integrand in the martingale representation of M_T^θ is computed. Indeed, the stationary and independent increments of B^θ yield

$$\mathbb{E} \left[M_T^\theta \mid \mathcal{F}_t \right] = M_t^\theta + \int_{M_t^\theta - B_t^\theta}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ M_{T-t}^\theta > z \right\} dz.$$

Thus, $t \mapsto M_t^\theta + \int_{M_t^\theta - B_t^\theta}^{\infty} \mathbb{P} \{ M_{T-t}^\theta > z \} dz$ is a martingale and a function of (B_t^θ, M_t^θ) . An application of Itô's formula to this martingale and coefficient analysis yield the martingale representation of M_T^θ . The integrand in this integral representation is given by

$$1 - \Phi \left(\frac{M_t^\theta - B_t^\theta - \theta(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right) + e^{2\theta(M_t^\theta - B_t^\theta)} \left[1 - \Phi \left(\frac{M_t^\theta - B_t^\theta + \theta(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right) \right]. \quad (2.3.2)$$

The integrand in the representation of m_T^θ , the minimum of Brownian motion with drift θ , is then easily deduced and given by

$$- \left[1 - \Phi \left(\frac{B_t^\theta - m_t^\theta - \theta(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right) \right] - e^{2\theta(B_t^\theta - m_t^\theta)} \left[1 - \Phi \left(\frac{B_t^\theta - m_t^\theta + \theta(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right) \right]. \quad (2.3.3)$$

Consequently, the integrand in the martingale representation of R^θ , i.e. the range process of B^θ , is given by the difference of formula (2.3.2) and formula (2.3.3).

It is worth mentioning that all these stochastic integral representations can be easily derived from the main result of this paper, i.e. Theorem 2.4.1.

2.4. PATH-DEPENDENT BROWNIAN FUNCTIONALS

For a function $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ with gradient $\nabla F = (\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F)$, define $\text{Div}_{x,y}(F) = \partial_x F + \partial_y F$, $\text{Div}_{x,z}(F) = \partial_x F + \partial_z F$, and so on. Then, $\text{Div}(F)$ is the divergence of F , i.e. $\text{Div}(F) = \partial_x F + \partial_y F + \partial_z F$.

Before stating and proving our main result, let us mention that the joint law of (B_t, m_t, M_t) is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. The joint probability density function will be denoted by $g_{B,m,M}(x, y, z; t)$.

Theorem 2.4.1

If $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuously differentiable function with bounded partial derivatives or a Lipschitz function, then the Brownian functional $X = F(B_T^\theta, m_T^\theta, M_T^\theta)$ admits the following martingale representation :

$$X = \mathbb{E}[X] + \int_0^T f(B_t^\theta, m_t^\theta, M_t^\theta; t) dB_t,$$

where

$$\begin{aligned} f(a, b, c; t) = & e^{-\frac{1}{2}\theta^2\tau} \\ & \times \mathbb{E} \left[\text{Div } F(B_\tau + a, m_\tau + a, M_\tau + a) e^{\theta B_\tau} \mathbb{I}_{\{m_\tau \leq b-a, c-a \leq M_\tau\}} \right. \\ & + \text{Div}_{x,y} F(B_\tau + a, m_\tau + a, c) e^{\theta B_\tau} \mathbb{I}_{\{m_\tau \leq b-a, M_\tau \leq c-a\}} \\ & + \text{Div}_{x,z} F(B_\tau + a, b, M_\tau + a) e^{\theta B_\tau} \mathbb{I}_{\{b-a \leq m_\tau, c-a \leq M_\tau\}} \\ & \left. + \partial_x F(B_\tau + a, b, c) e^{\theta B_\tau} \mathbb{I}_{\{b-a \leq m_\tau, M_\tau \leq c-a\}} \right] \end{aligned}$$

for $b < a < c$, $b < 0$, $c > 0$, and $\tau = T - t$.

PROOF. If F is a continuously differentiable function with bounded partial derivatives or if F is a Lipschitz function, then, using one of the Malliavin calculus chain rules given in Subsection 2.2.1, the Brownian functional X is an element of the space $\mathbb{D}^{1,2}$ and its Malliavin derivative is given by

$$D_t X = \nabla F(B_T^\theta, m_T^\theta, M_T^\theta) \cdot (D_t(B_T^\theta), D_t(m_T^\theta), D_t(M_T^\theta)).$$

This is true in both cases since the law of $(B_T^\theta, m_T^\theta, M_T^\theta)$ is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure.

Define an equivalent probability measure $\mathbb{Q}$ on $\mathcal{F}$ by $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_T$, where $Z_t = \exp\{-\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\}$ for $t \in [0, T]$. Notice that $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = (Z_T)^{-1}$. Since $D_t X$ is $\mathcal{F}$ -measurable for each $t \in [0, T]$, using the abstract Bayes rule (see Lemma 5.3 in Karatzas and Shreve [42]), one obtains

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_t X \mid \mathcal{F}_t] &= Z_t \mathbb{E}^\mathbb{Q}[(Z_T)^{-1} D_t X \mid \mathcal{F}_t] \\ &= e^{\frac{1}{2}\theta^2(T-t)} \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[e^{\theta(B_T - B_t)} D_t X \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}\theta^2(T-t)} \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[e^{\theta(B_T^\theta - B_t^\theta)} D_t X \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

By Girsanov's theorem, B^θ is a standard Brownian motion under $\mathbb{Q}$ with respect to the filtration generated by B .

Using Lemma 2.3.1 and the fact that for any random variable Z and partition $(A_i)_i$ of Ω the equality $Z = \sum_i Z \mathbb{I}_{A_i}$ holds, one gets

$$\begin{aligned} D_t X &= \text{Div}(F) \mathbb{I}_{[0, \tau_m^\theta]}(t) \mathbb{I}_{[0, \tau_M^\theta]}(t) + \text{Div}_{x,y}(F) \mathbb{I}_{[0, \tau_m^\theta]}(t) \mathbb{I}_{(\tau_M^\theta, \infty)}(t) \\ &\quad + \text{Div}_{x,z}(F) \mathbb{I}_{(\tau_m^\theta, \infty)}(t) \mathbb{I}_{[0, \tau_M^\theta]}(t) + \partial_x(F) \mathbb{I}_{(\tau_m^\theta, \infty)}(t) \mathbb{I}_{(\tau_M^\theta, \infty)}(t). \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Next, note that $t < \tau_M^\theta$ if and only if $M_t^\theta < M_T^\theta$ and $t < \tau_m^\theta$ if and only if $m_t^\theta > m_T^\theta$. It can be shown that the random variables τ_M^θ and τ_m^θ have absolutely continuous laws. In fact, under $\mathbb{Q}$, τ_M^θ/T and τ_m^θ/T both have a Beta(1/2, 1/2) distribution. As a result,

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{[0, \tau_M^\theta]}(t) &= \mathbb{I}_{[0, \tau_M^\theta)}(t) = \mathbb{I}_{\{M_t^\theta < M_T^\theta\}}(t) \\ \mathbb{I}_{[0, \tau_m^\theta]}(t) &= \mathbb{I}_{[0, \tau_m^\theta)}(t) = \mathbb{I}_{\{m_t^\theta > m_T^\theta\}}(t) \end{aligned}$$

almost surely. Hence, the expression of $D_t X$ previously obtained in Equation (2.4.1) becomes

$$\begin{aligned} D_t X &= \text{Div}(F) \mathbb{I}_{\{m_t^\theta > m_T^\theta, M_t^\theta < M_T^\theta\}}(t) + \text{Div}_{x,y}(F) \mathbb{I}_{\{m_t^\theta > m_T^\theta, M_t^\theta = M_T^\theta\}}(t) \\ &\quad + \text{Div}_{x,z}(F) \mathbb{I}_{\{m_t^\theta = m_T^\theta, M_t^\theta < M_T^\theta\}}(t) + \partial_x(F) \mathbb{I}_{\{m_t^\theta = m_T^\theta, M_t^\theta = M_T^\theta\}}(t). \end{aligned}$$

Then, using the Markov property of $(B^\theta, m^\theta, M^\theta)$ under $\mathbb{Q}$, we get that $\mathbb{E}[D_t X \mid \mathcal{F}_t] e^{\frac{1}{2}\theta^2\tau}$ is equal to

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[\text{Div} F(B_\tau^\theta + a, m_\tau^\theta + a, M_\tau^\theta + a) e^{\theta B_\tau^\theta} \mathbb{I}_{\{m_\tau^\theta \leq b-a, c-a \leq M_\tau^\theta\}} \right] \\ &+ \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[\text{Div}_{x,y} F(B_\tau^\theta + a, m_\tau^\theta + a, c) e^{\theta B_\tau^\theta} \mathbb{I}_{\{m_\tau^\theta \leq b-a, M_\tau^\theta \leq c-a\}} \right] \\ &+ \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[\text{Div}_{x,z} F(B_\tau^\theta + a, b, M_\tau^\theta + a) e^{\theta B_\tau^\theta} \mathbb{I}_{\{b-a \leq m_\tau^\theta, c-a \leq M_\tau^\theta\}} \right] \\ &+ \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[\partial_x F(B_\tau^\theta + a, b, c) e^{\theta B_\tau^\theta} \mathbb{I}_{\{b-a \leq m_\tau^\theta, M_\tau^\theta \leq c-a\}} \right] \end{aligned}$$

where $\tau = T - t$, $a = B_t^\theta$, $b = m_t^\theta$ and $c = M_t^\theta$. Since the law of $(B^\theta, m^\theta, M^\theta)$ under $\mathbb{Q}$ and the law of (B, m, M) under $\mathbb{P}$ are equal, $\mathbb{E}[D_t X \mid \mathcal{F}_t] e^{\frac{1}{2}\theta^2\tau}$ is then equal to

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\text{Div} F(B_\tau + a, m_\tau + a, M_\tau + a) e^{\theta B_\tau} \mathbb{I}_{\{m_\tau \leq b-a, c-a \leq M_\tau\}} \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\text{Div}_{x,y} F(B_\tau + a, m_\tau + a, c) e^{\theta B_\tau} \mathbb{I}_{\{m_\tau \leq b-a, M_\tau \leq c-a\}} \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\text{Div}_{x,z} F(B_\tau + a, b, M_\tau + a) e^{\theta B_\tau} \mathbb{I}_{\{b-a \leq m_\tau, c-a \leq M_\tau\}} \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[\partial_x F(B_\tau + a, b, c) e^{\theta B_\tau} \mathbb{I}_{\{b-a \leq m_\tau, M_\tau \leq c-a\}} \right]. \end{aligned}$$

The statement follows from Clark-Ocone formula. $\square$

Using Theorem 2.4.1, the results of Section 2.3, i.e. the martingale representations of the extrema of Brownian motion, are easily derived. For example, one obtains the martingale representation of M_T by considering the function $F(x, y, z) = z$. Indeed,

$$\begin{aligned}
f(a, b, c; t) &= \mathbb{E} \left[\mathbb{I}_{\{m_{T-t} \leq b-a, c-a \leq M_{T-t}\}} + \mathbb{I}_{\{b-a \leq m_{T-t}, c-a \leq M_{T-t}\}} \right] \\
&= \mathbb{P} \{c - a \leq M_{T-t}\} \\
&= \int_{c-a}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi(T-t)}} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} dz \\
&= 2 \int_{\frac{c-a}{\sqrt{T-t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= 2 \left[1 - \Phi \left(\frac{c-a}{\sqrt{T-t}} \right) \right]
\end{aligned}$$

since the density function of M_t is given by $z \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} \mathbb{I}_{\{z \geq 0\}}$.

Remark 2.4.2

As mentioned before, the expectation appearing in the integrand of the martingale representation of Theorem 2.4.1 is a simple expectation, i.e. it is not a conditional expectation, and the integrand does not involve any gradient. This expectation can also be written in the following form :

$$\begin{aligned}
&\int_{c-a}^{\infty} \int_{-\infty}^{b-a} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Div } F(x+a, y+a, z+a) g(dx, dy, dz; \tau) \\
&\quad + \int_0^{c-a} \int_{-\infty}^{b-a} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Div}_{x,y} F(x+a, y+a, c) g(dx, dy, dz; \tau) \\
&\quad + \int_{c-a}^{\infty} \int_{b-a}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Div}_{x,z} F(x+a, b, z+a) g(dx, dy, dz; \tau) \\
&\quad + \int_0^{c-a} \int_{b-a}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x F(x+a, b, c) g(dx, dy, dz; \tau) \quad (2.4.2)
\end{aligned}$$

where $g(dx, dy, dz; s) = e^{\theta x + \frac{1}{2}\theta^2 s} g_{B,m,M}(x, y, z; s) dx dy dz$.

Here,

$$\int_A \int_B \int_C G(x, y, z) g(dx, dy, dz; s)$$

means

$$\int_{z \in A} \int_{y \in B} \int_{x \in C} G(x, y, z) g(dx, dy, dz; s).$$

In order to apply Theorem 2.4.1, one needs the joint distribution of the random vector (B_t, m_t, M_t) . This is recalled next.

2.4.1. The joint probability density function

The expression of the joint law of (B_t, m_t, M_t) was obtained by Feller [27]. Let $y, z > 0$ and $-y \leq a < b \leq z$. If $\phi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$, then it is known that

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{B_t \in (a, b), -y \leq m_t, M_t \leq z\} \\ = \int_a^b \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi_t(2k(y+z) + x) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi_t(2k(y+z) + 2z - x) \right) dx. \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} g_{B,m,M}(x, y, z; t) = 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[k^2 \phi_t''(2k(y+z) + x) \right. \\ \left. - n(n-1) \phi_t''(2k(y+z) + 2z - x) \right] \end{aligned}$$

where $\phi_t''(x) = \frac{(x^2-1)}{t^2} \phi_t(x)$.

Rearranging terms, one obtains that $g_{B,m,M}(x, y, z; t)$ is also given by

$$\begin{aligned} 4 \sum_{k \geq 1} k^2 \phi_t''(2k(y+z) + x) + 4 \sum_{k \geq 1} k^2 \phi_t''(2k(y+z) - x) \\ - 4 \sum_{k \geq 2} k(k-1) \phi_t''(2k(y+z) + 2z - x) \\ - 4 \sum_{k \geq 1} k(k+1) \phi_t''(2k(y+z) - 2z + x). \end{aligned}$$

Integrating with respect to z , one obtains the joint PDF of (B_t, m_t) :

$$g_{B,m}(x, y; t) = \frac{2(x-2y)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2t}(x-2y)^2} \mathbb{I}_{\{y \leq x\}} \mathbb{I}_{\{y \leq 0\}}.$$

The same work can be done to compute the joint PDF of (B_t, M_t) . Its expression is given in the proof of Proposition 2.5.1.

2.5. MAXIMUM AND MINIMUM OF GEOMETRIC BROWNIAN MOTION

In this section, Theorem 2.4.1 is applied to produce explicit martingale representations for the maximum and the minimum of geometric Brownian motion. These particular Brownian functionals are important in finance and fortunately the upcoming representations are plainly explicit.

For a stochastic process $(X_t)_{t \in [0, T]}$, let its running extrema be denoted respectively by

$$M_t^X = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s \quad \text{and} \quad m_t^X = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s.$$

The range process of X is then given by $R_t^X = M_t^X - m_t^X$.

Proposition 2.5.1

If X is a geometric Brownian motion, i.e. $X_t = e^{\mu t + \sigma B_t}$ for $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma > 0$, its maximum on $[0, T]$ admits the following martingale representation :

$$M_T^X = \mathbb{E}[M_T^X] + \int_0^T g(B_t^\theta, M_t^\theta) dB_t.$$

Here, $\theta = \frac{\mu}{\sigma}$ and $g(a, b)$ is given by

$$\begin{aligned} \frac{\sigma e^{\sigma a}}{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} & \left\{ (\mu + \sigma^2) e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \right. \\ & \times \left[1 - \Phi \left(\frac{\sigma(b-a) - (\mu + \sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \\ & \left. + \mu \left(e^{\sigma(b-a)} \right)^{\frac{2}{\sigma^2}(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sigma(b-a) + \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \right\}, \quad (2.5.1) \end{aligned}$$

for $a < b$ and $b > 0$.

PROOF. Applying Theorem 2.4.1 with $F(x, y, z) = e^{\sigma z}$ and using the density function of (B_s, M_s) , i.e.

$$g_{B,M}(x, y; s) = \frac{2(2y-x)}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{1}{2s}(2y-x)^2} \mathbb{I}_{\{y \geq x\}} \mathbb{I}_{\{y \geq 0\}},$$

the integrand in the representation of M_T^X is given by

$$2\sigma e^{\sigma a - \frac{1}{2}\theta^2\tau} \int_{b-a}^{\infty} \int_{-\infty}^y e^{\sigma y + \theta x} \frac{(2y-x)}{\sqrt{2\pi\tau^3}} e^{-\frac{1}{2\tau}(2y-x)^2} dx dy \quad (2.5.2)$$

where $a = B_t^\theta$, $b = M_t^\theta$ and $\tau = T - t$. Fortunately, in this case, the integrand can be greatly simplified and so the rest of the proof involves only elementary calculations.

For $a \leq b$, let I denote only the integral in Equation (2.5.2). If $z = 2y - x$, then

$$\begin{aligned} I &= e^{\frac{1}{2}\theta^2\tau} \int_{b-a}^{\infty} e^{(\sigma+2\theta)y} \int_y^{\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi\tau^3}} e^{-\frac{1}{2\tau}(z+\theta\tau)^2} dz dy \\ &= e^{\frac{1}{2}\theta^2\tau} \int_{b-a}^{\infty} e^{(\sigma+2\theta)y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{1}{2\tau}(y+\theta\tau)^2} dy \\ &\quad - \theta e^{\frac{\theta^2\tau}{2}} \int_{b-a}^{\infty} e^{(\sigma+2\theta)y} \left(1 - \Phi \left(\frac{y+\theta\tau}{\sqrt{\tau}} \right) \right) dy \\ &= e^{\frac{1}{2}\theta^2\tau} I_1 - \theta e^{\frac{1}{2}\theta^2\tau} I_2, \end{aligned}$$

where the integrals I_1 and I_2 are obviously defined. If $z = \frac{y+\theta\tau}{\sqrt{\tau}}$ and $\beta = \sigma + 2\theta$, then

$$I_1 = e^{-\beta\theta\tau} e^{\frac{1}{2}\beta^2\tau} \left[1 - \Phi \left(\frac{b-a - (\theta + \sigma)\tau}{\sqrt{\tau}} \right) \right],$$

and

$$I_2 = -\frac{e^{\beta(b-a)}}{\beta} \left(1 - \Phi \left(\frac{b-a+\theta\tau}{\sqrt{\tau}} \right) \right) + \frac{1}{\beta} I_1.$$

Finally,

$$I = e^{\frac{1}{2}\theta^2\tau} \left(1 - \frac{\theta}{\beta} \right) I_1 + \frac{\theta}{\beta} e^{\frac{1}{2}\theta^2\tau} e^{\beta(b-a)} \left(1 - \Phi \left(\frac{b-a+\theta\tau}{\sqrt{\tau}} \right) \right).$$

The statement follows. $\square$

The martingale representation of the minimum of geometric Brownian motion is not completely a direct consequence of the last corollary since the exponential function is not linear. However, the proof is almost identical to the proof of Proposition 2.5.1.

Corollary 2.5.2

If X is a geometric Brownian motion, i.e. $X_t = e^{\mu t + \sigma B_t}$ for $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma > 0$, its minimum m_T^X admits the following martingale representation :

$$m_T^X = \mathbb{E} [m_T^X] + \int_0^T h(B_t^\theta, m_t^\theta) dB_t.$$

Here, $\theta = \frac{\mu}{\sigma}$ and $h(a, b)$ is given by

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma e^{\sigma a}}{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left\{ (\mu + \sigma^2) e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \right. \\ & \quad \times \left[1 - \Phi \left(\frac{\sigma(a-b) + (\mu - \sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \\ & \quad \left. + \mu \left(e^{\sigma(b-a)} \right)^{\frac{2}{\sigma^2}(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \left[1 - \Phi \left(\frac{\sigma(a-b) - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \right\}, \quad (2.5.3) \end{aligned}$$

for $a > b$ and $b < 0$.

In Proposition 2.5.1, the expression of g is not simplified further because its actual form will be useful to get Black-Scholes like formulas in the upcoming financial applications. Moreover, it gives this other interesting expression of $g(B_t^\theta, M_t^\theta)$ in terms of (X_t, M_t^X) :

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma X_t}{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left\{ (\mu + \sigma^2) e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \right. \\ & \quad \times \left[1 - \Phi \left(\frac{\ln(M_t^X/X_t) - (\mu + \sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \\ & \quad \left. + \mu \left(\frac{M_t^X}{X_t} \right)^{\frac{2}{\sigma^2}(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \left[1 - \Phi \left(\frac{\ln(M_t^X/X_t) + \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \right\}. \quad (2.5.4) \end{aligned}$$

Of course, a similar expression for $h(B_t^\theta, m_t^\theta)$ in terms of (X_t, m_t^X) is available. The representation of R_T^X , the range process of geometric Brownian motion $X_t = \exp\{\mu t + \sigma B_t\}$ at time T , is now obvious.

Corollary 2.5.3

The random variable R_T^X admits a martingale representation with the following integrand :

$$\begin{aligned} g(B_t^\theta, M_t^\theta) - h(B_t^\theta, m_t^\theta) &\equiv \frac{\sigma X_t}{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left\{ (\mu + \sigma^2) e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \right. \\ &\quad \times \left[\Phi \left(\frac{\ln(X_t/m_t^X) + (\mu - \sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \Phi \left(\frac{\ln(M_t^X/X_t) - (\mu + \sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \right. \\ &\quad + \mu \left(\frac{M_t^X}{X_t} \right)^{\frac{2}{\sigma^2}(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \left[1 - \Phi \left(\frac{\ln(M_t^X/X_t) + \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \\ &\quad \left. \left. - \mu \left(\frac{m_t^X}{X_t} \right)^{\frac{2}{\sigma^2}(\mu + \frac{\sigma^2}{2})} \left[1 - \Phi \left(\frac{\ln(X_t/m_t^X) - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right] \right\} \right\} \end{aligned}$$

the difference of the integrands in Equation (2.5.1) and Equation (2.5.3), i.e. the integrands in the representations of M_T^X and m_T^X respectively.

2.6. APPLICATIONS : HEDGING FOR PATH-DEPENDENT OPTIONS

As mentioned earlier, martingale representation results are important in mathematical finance for option hedging. With the previous explicit representations, one can compute explicit hedging portfolios for some strongly path-dependent options. For example, options involving the maximum and/or the minimum of a risky asset can be replicated explicitly. To get the complete hedging portfolio of such options, i.e. (η_t, ξ_t) (see the introduction), recall that one also needs the price of the option. The prices of the options in consideration can be found in the literature.

Recall from the introduction the classical Black-Scholes risk-neutral market model :

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t, & S_0 = 1; \\ dA_t = rA_t dt, & A_0 = 1, \end{cases}$$

where $\mathbb{P}$ and B stand for the risk-neutral probability measure and the corresponding $\mathbb{P}$ -Brownian motion respectively. In this case, $S_t = e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$ and then all the notation

introduced earlier is adapted, i.e.

$$\begin{aligned}\mu &= r - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \theta &= \frac{\mu}{\sigma} = \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}.\end{aligned}$$

From Equation (2.2.2), the amount to invest in a risky asset to replicate an option with payoff G is

$$\xi_t = e^{-r(T-t)} (\sigma S_t)^{-1} \varphi_t. \quad (2.6.1)$$

2.6.1. Standard lookback options

Let's compute the explicit hedging portfolio of a standard lookback put option. The payoff of a standard lookback put option is given by $G = [M_T^S - S_T]^+ = M_T^S - S_T$.

Corollary 2.6.1

The number of shares to invest in the risky asset to replicate a standard lookback put option is

$$\xi_t = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) \left\{ [1 - \Phi(d_1(t))] + e^{-r(T-t)} \left(\frac{M_t^S}{S_t}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} [1 - \Phi(d_2(t))] \right\},$$

for $t \in [0, T[$, where

$$\begin{aligned}d_1(t) &= \frac{\sigma M_t^\theta - \sigma B_t^\theta - (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \\ d_2(t) &= \frac{\sigma M_t^\theta - \sigma B_t^\theta + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}.\end{aligned}$$

PROOF. Apply Equation (2.6.1) and Proposition 2.5.1 with the representation in Equation (2.5.4). $\square$

The preceding portfolio was computed by Bermin [7] in a slightly different manner.

The payoff and the hedging portfolio of a standard lookback call option are similar to those of the standard lookback put option. The prices of these two options are in the article by Conze and Viswanathan [15] and the book by Musiela and Rutkowski [56].

2.6.2. Options on the volatility

The range of a risky asset is a particular measure of the volatility. Payoffs involving the range are therefore very sensitive to the volatility of the market. First, consider a contract which gives its owner $G = M_T^S - m_T^S$ at maturity, i.e. a payoff equivalent to buying the maximum at the price of the minimum.

Corollary 2.6.2

The number of shares to invest in a risky asset to replicate a contingent claim with payoff $M_T^S - m_T^S$ is

$$\begin{aligned} \xi_t = e^{-r(T-t)} & \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) \left(\frac{M_t^S}{S_t}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} [1 - \Phi(d_2(t))] \\ & + \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) [\Phi(d_3(t)) - \Phi(d_1(t))] \\ & + e^{-r(T-t)} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) \left(\frac{m_t^S}{S_t}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} [1 - \Phi(d_4(t))] , \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

for $t \in [0, T]$, where

$$\begin{aligned} d_3(t) &= \frac{\sigma B_t^\theta - \sigma m_t^\theta + (r - \frac{3\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_4(t) &= \frac{\sigma B_t^\theta - \sigma m_t^\theta - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

PROOF. Apply Equation (2.6.1) with the representation given by Corollary 2.5.3. $\square$

The price of this option is easily derived from those of standard lookback put and call options. Since

$$M_T^S - m_T^S = (M_T^S - S_T) - (m_T^S - S_T)$$

and since the pricing operator is linear, the price of an option with payoff $M_T^S - m_T^S$ is the difference of the prices of the standard lookback options just considered.

One can generalize the previous payoff by considering a spread lookback call option, i.e. an option with payoff

$$[(M_T^S - m_T^S) - K]^+$$

where $K \geq 0$ is the strike price. The amount to invest in the risky asset will depend on whether the option is *in-the-money* or *out-of-the-money*. Notice that $t \mapsto M_t^S - m_t^S$ is an increasing function.

Corollary 2.6.3

If $\Psi(y, z; s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} g_{B,m,M}(x, y, z; s) dx$, $\tau = T - t$ and $A = \{(y, z) \mid K \leq e^{\sigma z} - e^{\sigma y}\}$, the number of shares of the risky asset one must purchase to replicate a spread lookback

call option ξ_t is equal to

$$\begin{aligned} & \int_{M_t^\theta - B_t^\theta}^{\infty} \int_{-\infty}^{m_t^\theta - B_t^\theta} (e^{\sigma z} - e^{\sigma y}) \mathbb{I}_A(y + B_t^\theta, z + B_t^\theta) \Psi(y, z; \tau, \theta) dy dz \\ & - \mathbb{I}_{\{M_t^S \geq K\}} \int_0^{M_t^\theta - B_t^\theta} \int_{-\infty}^{m_t^\theta - B_t^\theta} e^{\sigma y} \mathbb{I}_A(y + B_t^\theta, M_t^\theta) \Psi(y, z; \tau, \theta) dy dz \\ & + \mathbb{I}_{\{m_t^S \leq 1-K\}} \int_{M_t^\theta - B_t^\theta}^{\infty} \int_{m_t^\theta - B_t^\theta}^0 e^{\sigma z} \mathbb{I}_A(m_t^\theta, z + B_t^\theta) \Psi(y, z; \tau, \theta) dy dz \end{aligned}$$

times $\exp\{-r\tau - \frac{1}{2\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})^2\tau\}$ when $R_t^S = M_t^S - m_t^S < K$, i.e. when the option is out-of-the-money, with ξ_t given by Equation (2.6.2) as soon as $R_t^S = M_t^S - m_t^S \geq K$, i.e. as soon as the option is in-the-money.

PROOF. Define $F(B_T^\theta, m_T^\theta, M_T^\theta) = [(M_T^S - m_T^S) - K]^+$ where F is the Lipschitz function $F(x, y, z) = (e^{\sigma z} - e^{\sigma y}) \mathbb{I}_{\{e^{\sigma z} - e^{\sigma y} \geq K\}}$. Clearly, $\partial_x F \equiv 0$, $\partial_y F = -\sigma e^{\sigma y} \mathbb{I}_{\{e^{\sigma z} - e^{\sigma y} \geq K\}}$ and $\partial_z F = \sigma e^{\sigma z} \mathbb{I}_{\{e^{\sigma z} - e^{\sigma y} \geq K\}}$. Using Theorem 2.4.1 and Equation (2.6.1), one gets that ξ_t is equal to

$$e^{-r\tau} (S_t)^{-1} e^{\sigma B_t^\theta - \frac{1}{2}\theta^2\tau}$$

times

$$\begin{aligned} & \int_{M_t^\theta - B_t^\theta}^{\infty} \int_{-\infty}^{m_t^\theta - B_t^\theta} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\sigma z} - e^{\sigma y}) e^{\theta x} \mathbb{I}_A(y + B_t^\theta, z + B_t^\theta) \\ & g(x, y, z; \tau) dx dy dz \\ & - \int_0^{M_t^\theta - B_t^\theta} \int_{-\infty}^{m_t^\theta - B_t^\theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma y + \theta x} \mathbb{I}_A(y + B_t^\theta, M_t^\theta) g(x, y, z; \tau) dx dy dz \\ & + \int_{M_t^\theta - B_t^\theta}^{\infty} \int_{m_t^\theta - B_t^\theta}^0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma z + \theta x} \mathbb{I}_A(m_t^\theta, z + B_t^\theta) g(x, y, z; \tau) dx dy dz, \end{aligned}$$

since $A = \{(y, z) \mid K \leq e^{\sigma z} - e^{\sigma y}\}$ and where $g = g_{B, m, M}$. This completes the proof. $\square$

It is possible to simplify the function Ψ . The details are given in the Appendix. Of course, the payoff and the hedging portfolio of a spread lookback put option are similar and the computations of the latter follow the same steps. Numerical prices of these options can be found in He et al. [36].

In Corollary 2.6.3, if $K = 0$ then $\mathbb{I}_A \equiv 1$ and the payoff becomes $M_T^S - m_T^S$. Consequently, the hedging portfolio in Corollary 2.6.2 is recovered, as one would expect.

2.7. ACKNOWLEDGMENTS

The authors wish to thank the Associate Editor and the referees for a careful reading of the paper and helpful comments. Partial funding in support of this work was provided by a doctoral scholarship of the Institut de Finance Mathématique de Montréal, as well as by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada and by the Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies.

APPENDIX : SOME INTEGRAL MANIPULATIONS

On the way to computing

$$\Psi(y, z; s) = \int_{\mathbb{R}} e^{\theta x} g_{B, m, M}(x, y, z; s) dx$$

where $g(\cdot; s)$ is the joint PDF of (B_s, m_s, M_s) , one has to compute integrals of the form :

$$\int_y^z e^{\theta x} \phi''\left(\frac{x+a}{\sqrt{s}}\right) dx,$$

for some constant a and where $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Integrating by parts twice yields the following :

$$\begin{aligned} \int_y^z e^{\theta x} \phi''\left(\frac{x+a}{\sqrt{s}}\right) dx &= \sqrt{s} \left[e^{\theta z} \phi'\left(\frac{z+a}{\sqrt{s}}\right) - e^{\theta y} \phi'\left(\frac{y+a}{\sqrt{s}}\right) \right] \\ &\quad - s\theta \left[e^{\theta z} \phi\left(\frac{z+a}{\sqrt{s}}\right) - e^{\theta y} \phi\left(\frac{y+a}{\sqrt{s}}\right) \right] \\ &\quad + \sqrt{s} \theta^2 e^{s\frac{\theta^2}{2} - a\theta} \left[\Phi\left(\frac{z+a-s\theta}{\sqrt{s}}\right) - \Phi\left(\frac{y+a-s\theta}{\sqrt{s}}\right) \right] \\ &= \sqrt{s} e^{s\frac{\theta^2}{2}} e^{-a\theta} \{ \phi'(\bar{z}) - \phi'(\bar{y}) \\ &\quad + \theta^2 \Phi'(\bar{z}) - \theta^2 \Phi'(\bar{y}) \}, \end{aligned}$$

where $\bar{w} = \frac{w+a-s\theta}{\sqrt{s}}$, for $w = y, z$. To simplify, define

$$H(y, z, a; s) = e^{-a\theta} \{ \phi'(\bar{z}) - \phi'(\bar{y}) + \theta^2 \Phi'(\bar{z}) - \theta^2 \Phi'(\bar{y}) \}.$$

Then,

$$\int_y^z e^{\theta x} \phi''\left(\frac{x+a}{\sqrt{s}}\right) dx = \sqrt{s} e^{s\frac{\theta^2}{2}} H(y, z, a; s).$$

Consequently, $\Psi(y, z; s)$ is given by

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{s} e^{s \frac{\theta^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 H(y, z, 2ny - 2nz; s) \\
& - \frac{4}{s} e^{s \frac{\theta^2}{2}} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) H(y, z, -2ny + 2(n-1)z; s) \\
& + \frac{4}{s} e^{s \frac{\theta^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 H(y, z, -2ny + 2nz; s) \\
& - \frac{4}{s} e^{s \frac{\theta^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) H(y, z, 2ny - 2(n+1)z; s).
\end{aligned}$$

Chapitre 3

CALCUL DE MALLIAVIN POUR LES MARTINGALES NORMALES

L'étroite relation entre le mouvement brownien et les polynômes d'Hermite permet d'obtenir une équivalence entre l'approche variationnelle et l'approche chaotique du calcul de Malliavin. Mais peut-on espérer autant de régularité pour des processus plus généraux ?

Dans le cas brownien, une autre façon d'obtenir la décomposition en chaos de Wiener-Itô est d'itérer le théorème de représentation d'Itô. C'est l'approche qu'ont utilisée Ma, Protter et San Martin [53] pour prolonger le calcul chaotique aux martingales normales.

Dans ce court chapitre, nous présentons cette approche puisque c'est sur celle-ci que repose le chapitre 5 ainsi que les travaux de León et al. [49], Løkka [51] et ceux de Benth et al. [6], lesquels nous citerons abondamment d'ici la fin de cette thèse.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et filtré, dont la filtration satisfait aux *conditions habituelles* et est engendrée par un processus X .

3.1. CRP ET PRP

Quels sont les liens entre représentation prévisible et représentation chaotique ? Mais avant tout, quelles sont les définitions de ces deux concepts ? Nous suivrons d'assez près l'exposé de Ma et al. [53], lui-même inspiré de Dellacherie, Maisonneuve et Meyer [19]. Nous utilisons également Émery [26]. Mais tout d'abord, donnons la définition de martingale normale.

Définition 3.1.1

On dit que $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale normale s'il s'agit d'une martingale de carré intégrable telle que

$$\langle X \rangle_t = ct,$$

où c est une constante.

On pourrait demander que $t \mapsto \langle X \rangle_t$ soit une fonction déterministe. Le mouvement brownien et le processus de Poisson sont donc deux exemples de martingales normales.

3.1.1. Représentations chaotiques et prévisibles

Tout d'abord un peu de notation. Modifions légèrement la définition du symbole Σ_n donnée au chapitre 1 et définissons

$$\Sigma_n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < t_1 < \dots < t_n\};$$

$$\Sigma_n(T) = \{(t_1, \dots, t_n) \in [0, T]^n \mid 0 < t_1 < \dots < t_n\}.$$

Ainsi, d'après Meyer [55], si X est une martingale normale, l'intégrale itérée

$$J_n(g) = \int_0^\infty \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} g(t_1, \dots, t_n) dX_{t_1} \dots dX_{t_n}$$

est bien définie pour tout $g \in L^2(\Sigma_n)$. On définit ensuite l'intégrale multiple I_n par

$$I_n(g) = n! J_n(g). \quad (3.1.1)$$

On peut prolonger une fonction définie sur Σ_n à tout $\mathbb{R}_+^n$ pour que celle-ci soit symétrique et nulle sur les *diagonales*, c'est-à-dire sur

$$\Delta_n = \{(t_1, \dots, t_n) \mid \exists t_i = t_j, i \neq j\}.$$

Inversement, lorsqu'on veut restreindre à Σ_n une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^n$, on choisira plutôt de restreindre un représentant de la classe d'équivalence de f dans L^2 s'annulant sur les diagonales. On utilise ainsi le fait que la mesure de Lebesgue attribue une mesure nulle aux diagonales (mais pas nécessairement $d[X]_t$).

On note par $L_S^2(\mathbb{R}_+^n)$ et $L_S^2([0, T]^n)$ les espaces des fonctions symétriques de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue.

Définition 3.1.2 (Définition 3.2, [53])

Si $n \geq 1$, on définit le n^e chaos de X dans $L^2(\Omega)$ par $\mathcal{H}_n(X) = I_n(L_S^2(\mathbb{R}_+^n))$, où I_n est l'application définie à l'équation (3.1.1). De plus, I_0 est l'application identité sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathcal{H}_0(X) = \mathbb{R}$.

Les I_n sont des quasi-isométries : si $g \in L_S^2(\mathbb{R}_+^n)$, alors

$$\|I_n(g)\|_{L^2(\Omega)}^2 = (n!)^2 \|g\|_{L^2(\Sigma_n)}^2 = n! \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2.$$

Les chaos de X , en tant que sous-espaces de $L^2(\Omega)$, sont tels que

$$\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}_n(X) \subsetneq L^2(\Omega). \quad (3.1.2)$$

En général, l'inclusion est stricte.

Définition 3.1.3 (Définition 3.2, [53])

On dit que X possède la propriété de représentation chaotique ou la CRP (chaotic representation property) si l'équation (3.1.2) est une égalité ou si, de manière équivalente, toute variable aléatoire $F \in L^2(\Omega)$ peut s'écrire sous la forme

$$F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n) = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n),$$

où $I_0(f_0) = f_0 = \mathbb{E}[F]$ et $f_n \in L_S^2(\mathbb{R}_+^n)$ pour $n \geq 1$.

La décomposition en chaos de Wiener-Itô présentée au chapitre 1 nous donne donc un exemple de martingale normale possédant la CRP : il s'agit du mouvement brownien. Le mouvement brownien est aussi un exemple de martingale possédant la propriété de représentation prévisible ou la PRP (*predictable representation property*) dont voici une définition plus précise qu'au chapitre 1 :

Définition 3.1.4

On dit qu'une martingale de carré intégrable X possède la PRP si toute variable aléatoire $F \in L^2(\Omega)$ peut s'écrire sous la forme

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^\infty \varphi_t dX_t$$

pour un certain processus φ .

3.1.2. Lien entre CRP et PRP

Quelles sont les martingales possédant la CRP ? Plusieurs exemples ont été construits en utilisant entre autres les *équations de structure* : voir Émery [25]. Et quelles sont celles possédant la PRP ? On montre assez facilement que la CRP est une propriété

plus forte que la PRP : si $F \in L^2(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned} F &= \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n) \\ &= \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} n! J_n(f_n) \\ &= \mathbb{E}[F] + \int_0^{\infty} \varphi_t dX_t \end{aligned}$$

où φ est la projection prévisible du processus

$$t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n! \int_0^t \dots \int_0^{t_2} f_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t) dX_{t_1} \dots dX_{t_{n-1}}.$$

Qu'en est-il de l'implication inverse ? Dans le cas discret, on a l'équivalence entre CRP et PRP : voir Émery [25]. Mais pas en général : voir Émery [26] où un contre-exemple est donné.

3.2. OPÉRATEUR DE DÉRIVATION

Nous prolongeons maintenant la définition de l'opérateur de dérivation du calcul de Malliavin brownien au contexte des martingales normales possédant la CRP. Ainsi, pour le reste de cette section, nous supposons que X est une martingale normale possédant la CRP.

Notons par $\mathbb{D}^{1,2}$ le sous-espace de $L^2(\Omega)$ défini de la façon suivante :

$$\mathbb{D}^{1,2} = \left\{ F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n) \left| \sum_{n=1}^{\infty} n n! \|f_n\|_n^2 < \infty \right. \right\},$$

où $\|\cdot\|_n = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}$. L'espace $\mathbb{D}^{1,2}$ est dense dans $L^2(\Omega)$ puisque toute variable aléatoire représentée par une somme finie d'intégrales multiples est évidemment dans $\mathbb{D}^{1,2}$.

Définition 3.2.1

Soit D l'opérateur linéaire $D: \mathbb{D}^{1,2} \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ défini par

$$D_t F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t))$$

pour tout $t \geq 0$, où $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ est représentée par $\sum_{n \geq 0} I_n(f_n)$; c'est l'opérateur de dérivation.

L'opérateur ainsi obtenu est le prolongement de la dérivée de Malliavin classique. La définition est directement inspirée de la caractérisation du théorème 1.1.6. Tout comme dans le cas brownien, on peut généraliser l'intégrale stochastique par une intégrale *qui anticipe* ; c'est l'analogue de l'intégrale de Skorohod et il s'agit toujours de l'opérateur adjoint de la dérivée D ; voir Ma et al. [53].

Contrairement au cas brownien, on ne peut obtenir une équivalence entre la dérivée ainsi définie et une dérivée variationnelle ; voir l'exemple donné à la page 91 dans l'article de Ma et al. [53].

On obtient aussi une formule de Clark-Ocone pour expliciter la représentation prévisible par rapport à la martingale X :

Théorème 3.2.2 (Théorème 4.5, [53])

Soit X une martingale normale possédant la CRP. Alors, pour $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, on a

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^\infty p(D_t F) dX_t,$$

où $p u$ est la projection prévisible du processus u .

Chapitre 4

CALCUL DE MALLIAVIN POUR LES PROCESSUS DE LÉVY

En général, les processus de Lévy ne possèdent pas la propriété de représentation chaotique comme pour le mouvement brownien ou le processus de Poisson. Alors, comment construire un calcul de Malliavin chaotique pour les processus de Lévy ?

Dans ce chapitre, nous présentons quelques calculs de Malliavin pour les processus de Lévy. Il ne s'agit pas d'une revue de littérature exhaustive, mais plutôt d'une description de certains travaux que nous jugeons particulièrement intéressants et menant à une formule de Clark-Ocone pour les processus de Lévy. D'autres auteurs se sont plutôt attardés aux applications aux équations différentielles stochastiques ainsi qu'aux densités de processus avec sauts ; voir par exemple Picard [64, 65].

Nous avons choisi de présenter les trois approches suivantes :

- (1) Nualart et Schoutens [58] et León, Solé, Utzet et Vives [49] ;
- (2) Løkka [51] et Benth, Di Nunno, Løkka, Øksendal et Proske [6] ;
- (3) Solé, Utzet et Vives [75].

4.1. PROCESSUS DE LÉVY

Un processus à valeurs réelles $X = (X_t)_{t \geq 0}$, défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, est appelé processus de Lévy s'il possède des accroissements indépendants et stationnaires, s'il est continu en probabilité et si $\mathbb{P}\{X_0 = 0\} = 1$. Nous supposons que X est la version càdlàg (continue à droite, limite à gauche) de ce processus, que la tribu $\mathcal{F}$ est engendrée par X et que l'espace est muni de la filtration naturelle de X . Cette filtration satisfait aux conditions habituelles, c'est-à-dire qu'elle

est complète et continue à droite. La fonction caractéristique de X est donnée par

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda X_t}] = e^{t\psi(\lambda)},$$

où

$$\psi(\lambda) = i\alpha\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{i\lambda z} - 1 - i\lambda z \mathbb{I}_{\{|z|\leq 1\}}(z) \right] \nu(dz).$$

C'est la formule de Lévy-Khintchine. On appelle (σ^2, ν, b) le triplet générateur de X . La mesure ν , appelée la mesure de Lévy de X , est σ -finie sur $\mathbb{R}$ et est telle que $\nu(\{0\}) = 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge z^2) \nu(dz) < \infty.$$

La décomposition de Lévy-Itô de X est donnée par

$$X_t = \alpha t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} z N(ds, dz) + \int_0^t \int_{|z|<1} z \tilde{N}(ds, dz) \quad (4.1.1)$$

où W est un mouvement brownien et où $\tilde{N}$ est la mesure aléatoire de Poisson compensée de X associée à la mesure aléatoire de Poisson N . Cette mesure compensée est définie à partir de

$$\tilde{N}([0, t] \times A) = N([0, t] \times A) - t\nu(A).$$

où la mesure aléatoire de Poisson N , indépendante du mouvement brownien W , admet comme mesure de compensation $\lambda \times \nu$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour plus de détails sur les processus de Lévy, nous référons le lecteur aux livres de Schoutens [73], Protter [67] et Bertoin [9].

4.2. L'APPROCHE DE NUALART ET SCHOUTENS

À la base de la construction du calcul de Malliavin chaotique présentée au chapitre précédent, il y a l'hypothèse que la martingale normale considérée possède la CRP, c'est-à-dire la propriété de représentation chaotique. Ainsi, pour obtenir un calcul de Malliavin semblable pour les processus de Lévy, la première étape serait d'obtenir une décomposition chaotique. Si tel était le cas, les étapes subséquentes pourraient alors s'inspirer du travail de Ma et al. [53].

D'une façon particulièrement ingénieuse, Nualart et Schoutens [58] ont obtenu une propriété de représentation chaotique pour des processus de Lévy. Par la suite, León et al. [49] ainsi que Davis et Johansson [17] ont respectivement construit le calcul de Malliavin correspondant alors que leurs successeurs l'ont appliqué aux calculs de sensibilité suivant l'approche de Fournié et al. [28].

4.2.1. Orthogonalisation des martingales de Teugels

Pour obtenir leur représentation chaotique, Nualart et Schoutens ont utilisés les *power jump processes* ainsi que les martingales de Teugels. Mais tout d'abord, nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.2.1

Il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\int_{(-\varepsilon, \varepsilon)^c} e^{\delta|z|} \nu(dz) < \infty.$$

On a alors que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |z|^i \nu(dz) < \infty,$$

pour tout $i \geq 2$, et que

$$\lambda \mapsto \mathbb{E}[e^{i\lambda X_t}]$$

est analytique dans un voisinage de 0. Conséquemment, X_t possède des moments (en valeur absolue) de tout ordre et les polynômes sont denses dans $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{P} \circ X_t^{-1})$, pour tout t .

4.2.1.1. Power jump processes et martingales de Teugels

Pour chaque entier $i \geq 1$, définissons le processus $X^{(i)} = (X_t^{(i)})_{t \geq 0}$ par

$$X_t^{(i)} = \begin{cases} X_t & \text{si } i = 1; \\ \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^i & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

C'est ce qu'on appelle les *power jump processes*. Ces processus *sautent* en même temps que X mais l'amplitude de leurs sauts est possiblement différente. À partir de cette définition, on obtient que

$$\mathbb{E}[X_t^{(1)}] = \mathbb{E}[X_t] = tm_1$$

et, lorsque $i \geq 2$,

$$\mathbb{E}[X_t^{(i)}] = \mathbb{E}\left[\sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^i\right] = t \int_{-\infty}^{\infty} z^i \nu(dz) = tm_i,$$

où $m_1 = \mathbb{E}[X_1]$ et $m_i = \int_{-\infty}^{\infty} z^i \nu(dz)$, si $i \geq 2$.

Remarque 4.2.2

Si X est un processus de Poisson, alors $X^{(i)} = X$ pour tout $i \geq 1$, et si X est un mouvement brownien, alors $X^{(i)} = 0$ pour tout $i \geq 2$.

Pour chaque entier $i \geq 1$, définissons également le processus $Y^{(i)} = (Y_t^{(i)})_{t \geq 0}$ par

$$Y_t^{(i)} = X_t^{(i)} - \mathbb{E}[X_t^{(i)}] = X_t^{(i)} - m_i t.$$

On en déduit que

$$\langle Y^{(i)}, Y^{(j)} \rangle_t = m_{i+j} t$$

lorsque $i, j \geq 2$, et que

$$[Y^{(i)}, Y^{(j)}]_t = X_t^{(i+j)} + \mathbb{I}_{\{i=j=1\}} \sigma^2 t$$

lorsque $i, j \geq 1$. Chaque processus $Y^{(i)}$ est une martingale normale appelée martingale de Teugels d'ordre i .

4.2.1.2. Orthogonalisation

Il est possible d'*orthogonaliser* les martingales de Teugels. L'idée est d'associer à chacune un polynôme provenant d'un même espace et ensuite d'orthogonaliser ces polynômes. Plus précisément, construisons une famille de martingales $\{H^{(i)}; i \geq 1\}$ telle que ses éléments soient deux-à-deux fortement orthogonaux, c'est-à-dire telle que les processus $t \mapsto H_t^{(i)} H_t^{(j)}$ (ou de manière équivalente $t \mapsto [H^{(i)}, H^{(j)}]_t$) soient des martingales uniformément intégrables (UI). Pour plus de détails sur les notions d'orthogonalité pour les martingales de carré intégrable, le lecteur est référé au livre de Protter [67]. On veut que chaque $H^{(i)}$ soit une combinaison linéaire des i premières martingales de Teugels, c'est-à-dire que chaque $H^{(i)}$ soit de la forme :

$$H^{(i)} = Y^{(i)} + a_{i,i-1} Y^{(i-1)} + a_{i,i-2} Y^{(i-2)} + \dots + a_{i,1} Y^{(1)}.$$

Soit S_1 l'espace des polynômes moniques sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'espace des polynômes dont le coefficient de la plus grande puissance est égal à 1. Munissons cet espace du produit scalaire suivant :

$$\langle P(x), Q(x) \rangle_1 = \int_{\mathbb{R}} P(x) Q(x) x^2 \nu(dx) + \sigma^2 P(0) Q(0).$$

D'après l'hypothèse 4.2.1, ce produit scalaire est bien défini. Remarquons que

$$\langle x^{i-1}, x^{j-1} \rangle_1 = \int_{\mathbb{R}} x^{i+j} \nu(dx) + \sigma^2 \mathbb{I}_{\{i=j=1\}} = m_{i+j} + \sigma^2 \mathbb{I}_{\{i=j=1\}},$$

lorsque $i, j \geq 1$. Deuxièmement, notons par S_2 l'espace des processus de la forme

$$a_1 Y^{(1)} + a_2 Y^{(2)} + \dots + a_n Y^{(n)}$$

et muni du produit scalaire

$$\langle Y^{(i)}, Y^{(j)} \rangle_2 = m_{i+j} + \sigma^2 \mathbb{I}_{\{i=j=1\}}$$

pour $i, j \geq 1$. Ainsi, l'identification $x^{i-1} \longleftrightarrow Y^{(i)}$ définit une bijection isométrique entre S_1 et S_2 . Il suffit donc d'orthogonaliser les polynômes $\{1, x, x^2, \dots\}$ dans S_1 pour obtenir une orthogonalisation des martingales $\{Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots\}$ dans S_2 .

On supposera, à partir de maintenant, que la famille $\{H^{(i)}; i \geq 1\}$ est celle ainsi obtenue. Il s'agit donc d'un sous-ensemble de martingales de carré intégrables deux-à-deux fortement orthogonales.

4.2.2. Représentations chaotiques et prévisibles

Définissons maintenant des intégrales multiples par rapport aux $\{H^{(i)}; i \geq 1\}$ en utilisant des notations semblables à celles du chapitre 3. Tout sera bien défini puisque ce sont des martingales de carré intégrable.

Pour deux vecteurs d'entiers positifs $(i_1, \dots, i_k)$ et $(j_1, \dots, j_l)$ différents, l'orthogonalité des martingales $H^{(i)}$ entraîne l'orthogonalité dans $L^2(\Omega)$ des variables aléatoires de la forme

$$F = \int_0^\infty \int_0^{t_k^-} \dots \int_0^{t_2^-} f(t_1, \dots, t_k) dH_{t_1}^{(i_1)} \dots dH_{t_k}^{(i_k)}$$

et

$$G = \int_0^\infty \int_0^{t_l^-} \dots \int_0^{t_2^-} g(t_1, \dots, t_l) dH_{t_1}^{(j_1)} \dots dH_{t_l}^{(j_l)}.$$

C'est entre autre grâce à cette propriété que les décompositions chaotiques seront obtenues. Nous utiliserons également la *structure polynomiale* de cette orthogonalité. À ce sujet, voici un lemme. Notons qu'une petite erreur s'est glissée dans la preuve parue dans l'article [58] lors de l'utilisation de la formule d'intégration par parties; celle-ci n'affecte toutefois pas le résultat final.

Lemme 4.2.3 (Lemme 2, [58])

Pour $k \geq 1$ et $t_0 \geq 0$ fixés, le processus $t \mapsto (X_{t+t_0} - X_{t_0})^k$ admet une représentation chaotique par rapport aux $\{H^{(i)}; i \geq 1\}$, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions déterministes et de carré intégrable $h_{(i_1, \dots, i_j)}^{(k)}$ telles que

$$\begin{aligned} (X_{t+t_0} - X_{t_0})^k &= \mathbb{E} \left[(X_{t+t_0} - X_{t_0})^k \right] \\ &+ \sum_{j=1}^k \sum_{(i_1, \dots, i_j)} \int_{t_0}^{t+t_0} \int_{t_0}^{t_1^-} \dots \int_{t_0}^{t_{j-1}^-} h_{(i_1, \dots, i_j)}^{(k)}(t, t_0, t_1, \dots, t_j) dH_{t_j}^{(i_j)} \dots dH_{t_1}^{(i_1)}, \end{aligned}$$

où $(i_1, \dots, i_j)$ parcourt $\{1, 2, \dots, k\}^j$.

Ainsi, la famille $\mathcal{P}$ des variables aléatoires de carré intégrable de la forme

$$X_{t_1}^{k_1} (X_{t_2} - X_{t_1})^{k_2} \dots (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})^{k_n},$$

où $n \geq 0$ et $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ et où les $k_1, \dots, k_n$ sont des entiers positifs, est une famille totale dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire que les combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{P}$ forment un sous-espace dense de $L^2(\Omega)$.

Voici la propriété de représentation chaotique (CRP) pour le processus de Lévy X .

Théorème 4.2.4 (Théorème 1, [58])

Toute variable aléatoire de carré intégrable F admet une représentation chaotique de la forme :

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_j)} \int_0^{\infty} \int_0^{t_j-} \dots \int_0^{t_2-} f_{(i_1, \dots, i_j)}(t_1, \dots, t_j) dH_{t_1}^{(i_1)} \dots dH_{t_j}^{(i_j)}, \quad (4.2.1)$$

où $(i_1, \dots, i_j)$ parcourt $\mathbb{N}^j$ et où chaque $f_{(i_1, \dots, i_j)}$ est une fonction déterministe de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^j$.

Conséquemment, nous obtenons la propriété de représentation prévisible (PRP) correspondante :

Théorème 4.2.5 (Théorème 2, [58])

Toute variable aléatoire de carré intégrable F admet une représentation prévisible de la forme :

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_t^{(i)} dH_t^{(i)}, \quad (4.2.2)$$

où chaque processus $\varphi^{(i)}$ est prévisible (par rapport à la filtration de X).

4.2.3. Calcul de Malliavin associé

Maintenant que nous avons une décomposition chaotique pour le processus de Lévy X , il devient assez naturel d'appliquer la *machinerie* de Ma et al. [53] pour obtenir un opérateur de dérivation et un calcul de Malliavin. C'est ce qu'ont fait León et al. [49] en l'adaptant au contexte d'une infinité d'intégrateurs, c'est-à-dire aux $H^{(i)}$. Au chapitre 5, nous nous inspirerons de cette construction pour obtenir une dérivée de Malliavin pour les processus de Lévy de carré intégrable. Toutefois, nous désirons avertir le lecteur que

nous avons fait le choix de préserver la notation originalement introduite par León et al. dans leur article pour ce qui suit plutôt que d'uniformiser avec la notation semblable, mais différente, du chapitre 5.

Définissons les ensembles

$$\Sigma_n^{(k)}(t) = \{(t_1, \dots, \widehat{t_k}, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid 0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t \leq t_{k+1} < \dots < t_n\},$$

où $\widehat{i}$ signifie que cette entrée est omise, et les intégrales itérées $J_n^{(i_1, \dots, i_n)}$ par

$$J_n^{(i_1, \dots, i_n)}(f) = \int_0^\infty \int_0^{t_n^-} \dots \int_0^{t_2^-} f(t_1, \dots, t_n) dH_{t_1}^{(i_1)} \dots dH_{t_n}^{(i_n)}.$$

Remarquons que si $j \neq k$, les ensembles $\Sigma_n^{(k)}(t)$ et $\Sigma_n^{(j)}(t)$ sont disjoints. Ainsi, pour une variable aléatoire de la forme

$$F = J_n^{(i_1, \dots, i_n)}(f),$$

on peut définir sa dérivée de Malliavin dans la l^e direction par

$$D_t^{(l)} F = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{i_k=l\}} J_{n-1}^{(i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_n)}(f(\underbrace{\dots}_{k-1}, t, \dots) \mathbb{I}_{\Sigma_n^{(k)}(t)}).$$

On définit alors l'espace des variables aléatoires différentiables dans la l^e direction, et noté $\mathbb{D}^{(l)}$, par les variables aléatoires de la forme

$$F = \mathbb{E}(F) + \sum_{j=1}^\infty \sum_{(i_1, \dots, i_j)} J_n^{(i_1, \dots, i_j)}(f_{(i_1, \dots, i_j)})$$

et satisfaisant à la condition d'intégrabilité

$$\sum_{j=1}^\infty \sum_{(i_1, \dots, i_j)} \sum_{k=1}^j \mathbb{I}_{\{i_k=l\}} q_{i_1} \dots \widehat{q_{i_k}} \dots q_{i_n} \int_0^\infty \|f_{(i_1, \dots, i_j)}(\cdot, t, \cdot) \mathbb{I}_{\Sigma_n^{(k)}(t)}\| dt < \infty.$$

La dérivée de Malliavin de F dans la l^e direction est alors définie par

$$D_t^{(l)} F = \sum_{j=1}^\infty \sum_{(i_1, \dots, i_j)} \sum_{k=1}^j \mathbb{I}_{\{i_k=l\}} J_{n-1}^{(i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_n)}(f_{(i_1, \dots, i_n)}(\cdot, t, \cdot) \mathbb{I}_{\Sigma_n^{(k)}(t)}).$$

Il n'est pas évident *a priori* que cette définition de la dérivée coïncide avec celle de Ma et al. [53] dans le cas où $H^{(i_1)} = \dots = H^{(i_n)}$, mais cela est bel et bien le cas. À partir de ces définitions de dérivées directionnelles, on obtient une formule du type Clark-Ocone :

Théorème 4.2.6 (Théorème 1.8, [49])

Si $F \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \mathbb{D}^{(l)}$, alors

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} p(D_t^{(k)} F) dH_t^{(k)}.$$

Remarque 4.2.7

Récemment, Davis et Johansson [17] ont poursuivi la construction de Nualart et Schoutens [58] et León et al. [49] en développant davantage ce calcul de Malliavin. Ils ont obtenu l'opérateur adjoint de la dérivée et l'ont utilisé pour des calculs de sensibilité dans l'esprit de l'article de Fournié et al. [28].

4.3. L'APPROCHE DE LØKKA

Une autre approche menant à un calcul de Malliavin pour des processus de Lévy a été développée récemment par Løkka [51]. L'auteur reprend les étapes menant à la dérivée de Malliavin brownienne via les représentations chaotiques pour les processus de Lévy de la forme

$$X_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z \tilde{N}(ds, dz).$$

Ceux-ci sont de carré intégrable. Nous supposons donc que X est de cette forme pour toute la section. Nous serons plus concis dans notre présentation de cette approche puisque nous la généraliserons au chapitre 5. Contrairement à la section précédente, nous avons modifié la notation originale de l'article pour qu'elle coïncide avec notre notation.

4.3.1. La fonction γ

En général, la variable aléatoire $e^{\lambda X_t}$ n'est pas de carré intégrable. Heureusement, en modifiant les sauts par une fonction bien choisie, cela devient possible. Plus précisément, définissons la bijection $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ par

$$\gamma(z) = \begin{cases} e^z - 1 & \text{si } z < 0, \\ 1 - e^{-z} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, pour chaque fonction continue h définie sur $[0, T]$, la variable aléatoire

$$Y_T = \exp \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} h(t) \gamma(z) \tilde{N}(dt, dz) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(e^{h(t) \gamma(z)} - 1 - h(t) \gamma(z) \right) \nu(dz) dt \right\}$$

est de carré intégrable. De plus, le processus

$$\widehat{X}_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(z) \tilde{N}(ds, dz),$$

engendre la même filtration que X_t , c'est-à-dire que de modifier l'amplitude des sauts n'affecte pas la famille des fonctionnelles de X .

4.3.2. Représentations prévisibles et chaotiques

Les variables aléatoires Y_T sont des exponentielles de Doléans-Dade (voir Protter [67] pour une définition). Considérées à l'instant T , elles possèdent la représentation prévisible suivante :

$$Y_T = 1 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} Y_{t-} (e^{h(t)\gamma(z)} - 1) \tilde{N}(dt, dz). \quad (4.3.1)$$

Ces variables aléatoires sont denses dans $L^2(\Omega)$. La juxtaposition de ces deux faits nous donne la propriété de représentation prévisible suivante :

Proposition 4.3.1 (Proposition 3, [51])

Si $F \in L^2(\Omega)$, alors il existe un unique processus prévisible de carré intégrable ψ tel que

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi(t, z) \tilde{N}(dt, dz).$$

En itérant la représentation de Doléans-Dade de l'équation (4.3.1), on obtient une représentation chaotique pour les variables aléatoires Y_T . En utilisant le fait qu'elles forment un ensemble dense, la représentation chaotique s'étend à tout l'espace $L^2(\Omega)$.

Théorème 4.3.2 (Théorème 4, [51])

Si $F \in L^2(\Omega)$, alors il existe une unique suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions déterministes et symétriques telle que

$$F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n).$$

Dans le théorème précédent, les intégrales multiples sont définies de façon analogue au cas brownien, c'est-à-dire que $I_n(f) = n! J_n(f)$ où

$$J_n(f) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \dots \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}} f((t_1, z_1), \dots, (t_n, z_n)) \tilde{N}(dt_1, dz_1) \dots \tilde{N}(dt_n, dz_n).$$

4.3.3. Dérivée de Malliavin et formule de Clark-Ocone

Pour définir la dérivée de Malliavin dans ce contexte, on peut s'appuyer encore une fois sur l'approche de Ma et al. [53]. Ainsi, définissons l'espace des fonctionnelles

différentiables au sens de Malliavin par

$$\mathbb{D}^{1,2} = \left\{ F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n) \mid \sum_{n=1}^{\infty} n n! \|f_n\|^2 < \infty \right\},$$

et définissons la dérivée de Malliavin par $D: \mathbb{D}^{1,2} \rightarrow L^2([0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega)$ et

$$D_{t,z}F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t, z))$$

pour chaque $F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n)$ élément de $\mathbb{D}^{1,2}$. Il est clair que, comme dans le cas brownien, $\mathbb{D}^{1,2}$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Voici finalement la formule de Clark-Ocone correspondant à cette construction :

Théorème 4.3.3 (Théorème 7, [51])

Si $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, alors

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} {}^p(D_{t,z}F) \tilde{N}(dt, dz).$$

Remarque 4.3.4

Il n'est pas nécessaire d'utiliser la projection prévisible dans l'énoncé de la précédente formule de Clark-Ocone. Une simple espérance conditionnelle suffit puisque $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$ pour chaque instant déterministe t .

Dans la suite de l'article, l'auteur montre l'équivalence entre cette dérivée de Malliavin obtenue à partir des développements en chaos et celle définie par Picard [65] en ajoutant une masse. En fait, l'auteur montre qu'elles coïncident sur l'espace $\mathbb{D}^{1,2}$. Le lemme suivant est particulièrement intéressant :

Lemme 4.3.5 (Lemme 9, [51])

Soit g une fonction lisse et à support compact sur $\mathbb{R}^k$. Si

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\left(g(X_{s_1} + z\mathbb{I}_{[0,s_1]}(t), \dots, X_{s_k} + z\mathbb{I}_{[0,s_k]}(t)) - g(X_{s_1}, \dots, X_{s_k}) \right)^2 \right] \nu(dz) dt < \infty,$$

alors la fonctionnelle $G = g(X_{s_1}, \dots, X_{s_k})$ est différentiable au sens de Malliavin, c'est-à-dire que $G \in \mathbb{D}^{1,2}$, et sa dérivée est donnée par

$$D_{t,z}G = g(X_{s_1} + z\mathbb{I}_{[0,s_1]}(t), \dots, X_{s_k} + z\mathbb{I}_{[0,s_k]}(t)) - g(X_{s_1}, \dots, X_{s_k}).$$

4.3.4. Prolongement de Benth et al.

Même s'il fut publié en 2003, l'article de Benth et al. [6] est une suite des travaux de Løkka [51] qui furent publiés en 2004. Notre présentation de cet article sera concise. L'article s'intéresse aux applications en finance mathématique, plus précisément au problème de couverture minimisant la variance (*minimal variance hedging*). Mais, en cours de route, on y entame une discussion sur quelques dérivées de Malliavin pour les processus de Lévy. On y discute des approches de Nualart et Schoutens, León et al. ainsi que celle de Løkka, mais aussi de l'approche de Di Nunno [21] qui ne fait pas appel aux représentations chaotiques et dont nous n'avons pas présenté la construction.

Benth et al. prolongent le calcul de Malliavin de Løkka aux processus de Lévy de la forme

$$X_t = \sigma W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z \tilde{N}(ds, dz). \quad (4.3.2)$$

Ils proposent une définition de dérivée de Malliavin très semblable mais différente de celle que nous présenterons au chapitre 5. Premièrement, il s'agit d'itérer la représentation prévisible par rapport au mouvement brownien et à la mesure aléatoire de Poisson pour obtenir des représentations chaotiques mixtes. Par la suite, contrairement à nous, ils choisissent de définir la dérivée de manière analogue au cas brownien et aux processus purement discontinus, c'est-à-dire sans tenir compte de la relation de commutativité entre la dérivée de Malliavin et son opérateur adjoint. En fait, leur dérivée est de la forme :

$$D_u^{\{i\}} \xi = \sum_{n \geq 1} \sum_{j_1, \dots, j_{n-1}=1,2} J_{n-1} \left(g_n^{(j_1, \dots, j_{n-1}, i)}(\cdot, u_n^{(j_n)}) \right)$$

pour $i = 1, 2$ représentant respectivement le mouvement brownien et la mesure aléatoire de Poisson. Les intégrales itérées J_n sont définies de façon analogue à ce que nous avons vu précédemment mais en tenant compte du fait qu'il y a maintenant deux intégrateurs.

Remarque 4.3.6

Au moment d'écrire ces lignes, nous avons toujours des doutes quant à savoir si cette définition de dérivée de Malliavin pour les processus de Lévy de la forme donnée à l'équation (4.3.2) coïncide réellement avec la dérivée de Malliavin classique et celle de Løkka sur les sous-domaines correspondants. Comme aucune preuve de leur construction n'est fournie, il est difficile pour nous de se convaincre de cette équivalence...

4.4. L'APPROCHE DE SOLÉ, UTZET ET VIVES

Très récemment, Solé et al. [75] ont développé un calcul de Malliavin pour les processus de Lévy à partir d'un espace canonique. On sait déjà que la dérivée de Malliavin classique définie sur l'espace de Wiener est équivalente à celle définie à partir des décompositions en chaos de Wiener-Itô alors que Løkka [51] a quant à lui montré l'équivalence entre sa dérivée chaotique et la dérivée de Picard [65] définie sur l'espace canonique du processus de Poisson. Pour leur part, Solé et al. s'attaquent à un processus de Lévy quelconque avec la représentation de Lévy-Itô suivante :

$$X_t = \alpha t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{|z| \geq 1} z N(ds, dz) + \int_0^t \int_{|z| < 1} z \tilde{N}(ds, dz).$$

Suivant l'approche de Itô [39], ils prolongent X à une mesure aléatoire. Il s'agit d'une généralisation de ce qui est fait à la section 1.1.2 de Nualart [57] pour les mesures gaussiennes. En considérant la mesure $\mu(dt, dz) = \sigma^2 dt \delta_0(dz) + z^2 dt \nu(dz)$, où $d\delta_0$ est la mesure de Dirac au point 0 et où μ est définie par

$$\mu(E) = \sigma^2 \int_{E(0)} dt + \int_{E'} z^2 \nu(dz) dt$$

pour $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $E(0) = \{t \in \mathbb{R}_+ \mid (t, 0) \in E\}$ et $E' = E \setminus \{(t, 0) \in E\}$, on peut définir

$$M(E) = \sigma \int_{E(0)} W(dt) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{(t, z) \in E \mid 1/n < |z| < n\}} z \tilde{N}(dt, dz),$$

pour E tel que $\mu(E) < \infty$. La convergence est dans $L^2(\Omega)$.

Conséquemment, sur l'espace $L_n^2 = L^2((\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})^n, \mu^{\otimes n})$, on peut définir l'intégrale multiple $I_n(f)$ comme sur l'espace de Wiener (voir [57]) :

- si $f = \mathbb{I}_{E_1 \times \dots \times E_n}$, où les $E_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ sont deux-à-deux disjoints et chacun de mesure μ -finie, alors on définit

$$I_n(f) = M(E_1) \dots M(E_n);$$

- ensuite, on prolonge I_n à tout L_n^2 par linéarité et continuité.

On obtient ainsi la propriété de représentation chaotique suivante :

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I_n(L_n^2).$$

Conséquemment, toute variable aléatoire F qui appartient à $L^2(\Omega)$ admet une représentation de la forme

$$F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n)$$

et, comme dans le cas brownien, si $\sum_{n \geq 1} nn! \|f_n\|_{L_n^2}^2$ est finie, la dérivée de F peut être définie par $DF: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et

$$D_z F = \sum_{n \geq 1} n I_{n-1}(f_n(z, \cdot))$$

où $z \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Les auteurs construisent ensuite un espace canonique pour les processus de Lévy à partir duquel ils redéfinissent la dérivée de Malliavin tout juste présentée. Cet espace canonique est un espace-produit construit à partir de l'espace de Wiener et d'un espace lui-même construit comme produit infini d'espaces canoniques pour des processus de Poisson composés. Pour un processus de Lévy purement discontinu, cette dérivée est légèrement différente de celle de Løkka [51]. Pour plus de détails, voir Solé et al. [75].

Chapitre 5

MALLIAVIN CALCULUS AND CLARK-OCONE FORMULA FOR FUNCTIONALS OF A SQUARE-INTEGRABLE LÉVY PROCESS

Résumé

Dans cet article, nous construisons une dérivée de Malliavin pour les fonctionnelles d'un processus de Lévy de carré intégrable. La dérivée de Malliavin est définie à l'aide d'une propriété de représentation chaotique faisant intervenir des intégrales stochastiques par rapport au mouvement brownien et à la mesure aléatoire de Poisson. Une formule de Clark-Ocone en est déduite et est ensuite appliquée au maximum d'un processus de Lévy pour obtenir une représentation martingale explicite.

Abstract

In this paper, we construct a Malliavin derivative for functionals of square-integrable Lévy processes and derive a Clark-Ocone formula. The Malliavin derivative is defined via chaos expansions involving stochastic integrals with respect to Brownian motion and Poisson random measure. As an illustration, we compute the explicit martingale representation for the maximum of a Lévy process.

5.1. INTRODUCTION

If $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ is a Brownian motion, then the Wiener-Itô chaos expansion of a square-integrable Brownian functional F is given by

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n \geq 1} \int_0^T \dots \int_0^T f_n(t_1, \dots, t_n) W(dt_1) \dots W(dt_n), \quad (5.1.1)$$

where $(f_n)_{n \geq 1}$ is a sequence of deterministic functions. This chaotic representation can be obtained by iterating Itô's representation theorem and can then be used to define the classical Malliavin derivative in the following way : if the chaos expansion of F satisfies an integrability condition, then F is Malliavin-differentiable and its Malliavin derivative DF is given by

$$D_t F = f_1(t) + \sum_{n \geq 1} (n+1) \int_0^T \dots \int_0^T f_{n+1}(t_1, \dots, t_n, t) W(dt_1) \dots W(dt_n), \quad (5.1.2)$$

for $t \in [0, T]$. This derivative operator is equal to a weak derivative on the Wiener space ; the close connection between Hermite polynomials and Brownian motion is at the hearth of that equivalence. See for instance Nualart [57].

Quite recently, Løkka [51] developed similar results for a square-integrable pure-jump Lévy process $L = (L_t)_{t \in [0, T]}$ given by

$$L_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z(\mu - \pi)(ds, dz),$$

where $\mu - \pi$ is the compensated Poisson random measure associated with L . In this setup, by mimicking the steps of the Wiener-Itô expansion, Løkka obtained a chaos representation property for the pure-jump Lévy process L just as in Equation (5.1.1) and then defined the corresponding Malliavin derivative as in Equation (5.1.2). Later, Benth et al. [6] introduced chaos expansions and a Malliavin derivative for more general Lévy processes, i.e. Lévy processes with a Brownian component. However, in the latter, neither proofs nor connections with the classical definitions was given.

Our first goal is to provide a detailed construction of a chaotic Malliavin derivative leading to a Clark-Ocone formula for Lévy processes. We extend the definitions of the Malliavin derivatives for Brownian motion and pure-jump Lévy processes to general square-integrable Lévy processes. Secondly, we derive additional results that are useful for computational purposes.

Our approach follows more or less the same steps as those leading to the Wiener-Itô chaos expansion and the chaotic Brownian Malliavin derivative, just as Løkka [51] did for pure-jump Lévy processes. The definition of the directional Malliavin derivatives is different from those of Benth et al. [6]. The main idea is to obtain a chaotic representation property (CRP) by iterating a well-chosen martingale representation property (MRP) and then defining directional Malliavin derivatives in the spirit of Ma et al.

[53]. However, in the context of a general square-integrable Lévy process, one has to deal with two integrators and therefore must be careful with the choice of derivative operators in order to extend the classical definitions. This choice will be made with the so-called commutativity relationships in mind and following León et al. [49]. In the Brownian motion setup, the commutativity relationship between Malliavin derivative and Skorohod integral is given by

$$D_t \int_0^T u_s W(ds) = u_t + \int_t^T D_t u_s W(ds), \quad (5.1.3)$$

when u is an adapted process. See Theorem 4.2 in Nualart and Vives [60] for the corresponding formula in the Poisson process setup.

We will get the MRP using a denseness argument involving Doléans-Dade exponentials. Our path toward the CRP is different from that of Itô [39] and Kunita and Watanabe [47] who used random measures; see also the recent formulation of that approach given by Kunita [46] and Solé et al. [75]. It is known that the CRP usually implies the MRP and that in general a Lévy process does not possess the MRP nor a predictable representation property. However, we show that the CRP and our well-chosen MRP are equivalent for square-integrable Lévy processes. Finally, just as in the Brownian and pure-jump Lévy setups, a Malliavin derivative and a Clark-Ocone formula are derived. As an illustration, we compute the explicit martingale representation for the maximum of a Lévy process.

This approach to Malliavin calculus for Lévy processes is different from the very interesting contributions of Nualart and Schoutens [58], León et al. [49] and Davis and Johansson [17]. They developed in sequence a Malliavin calculus for Lévy processes using different chaotic decompositions based on orthogonal polynomials. Their construction also relies on the fact that all the moments of their Lévy process exist. Many other chaos decompositions related to Lévy processes have been considered through the years : see for example the papers of Dermoune [20], Nualart and Vives [60], Aase et al. [1] and Lytvynov [52].

On the other hand, Kulik [45] developed a Malliavin calculus for Lévy processes in order to study the absolute continuity of solutions of stochastic differential equations with jumps, while Bally et al. [3] established an integration by parts formula in order to give numerical algorithms for sensitivity computations in a model driven by a Lévy process; see also Bavouzet-Morel and Messaoud [4]. Finally, in a very interesting paper,

Solé et al. [75] constructed a Malliavin calculus for Lévy processes through a suitable canonical space.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2, preliminary results on Lévy processes are recalled. In Section 3 and 4, martingale and chaotic representations are successively obtained. Then, in Section 5, the corresponding Malliavin derivative is constructed in order to get a Clark-Ocone formula. Finally, in Section 6, we apply this Clark-Ocone formula to compute the martingale representation of the maximum of a Lévy process.

5.2. PRELIMINARY RESULTS ON LÉVY PROCESSES

Let T be a strictly positive real number and let $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ be a Lévy process defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, i.e. X is a process with independent and stationary increments, is continuous in probability and starts from 0 almost surely. We assume that X is the *càdlàg* modification and that the probability space is equipped with the completed filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ generated by X . We also assume that the σ -field $\mathcal{F}$ is equal to $\mathcal{F}_T$.

This filtration satisfies *les conditions habituelles* and, for any fixed time t , $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$. Consequently, the filtration is continuous. This fact is crucial in the statement of our Clark-Ocone formula.

The reader not familiar with Lévy processes is invited to have a look at the books of Schoutens [73], Protter [67] and Bertoin [9].

From the Lévy Decomposition Theorem (see [67], Theorem 42), we know that X can be expressed as

$$X_t = \alpha t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{|z| \geq 1} z N(ds, dz) + \int_0^t \int_{|z| < 1} z \tilde{N}(ds, dz) \quad (5.2.1)$$

where α is a real number, σ is a strictly positive real number, W is a standard Brownian motion and $\tilde{N}$ is the compensated Poisson random measure associated with the Poisson random measure N . The Poisson random measure N is independent of the Brownian motion W . Its compensator measure is denoted by $\lambda \times \nu$, where λ is Lebesgue measure on $[0, T]$ and ν is the Lévy measure of X , i.e. ν is a σ -finite measure on $\mathbb{R}$ such that $\nu(\{0\}) = 0$ and

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge z^2) \nu(dz) < \infty.$$

Therefore the compensated random measure $\tilde{N}$ is defined by

$$\tilde{N}([0, t] \times A) = N([0, t] \times A) - t\nu(A).$$

This measure is equal to the measure $\mu - \pi$ mentioned in the introduction.

Finally, let $\mathcal{P}$ be the predictable σ -field on $[0, T] \times \Omega$ and $\mathcal{B}$ the Borel σ -field on $\mathbb{R}$. We recall that a process $\psi(t, z, \omega)$ is Borel predictable if it is $(\mathcal{P} \times \mathcal{B})$ -measurable.

5.2.1. Square-integrable Lévy processes

When the Lévy process X is square-integrable, it can also be expressed as

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z \tilde{N}(ds, dz), \quad (5.2.2)$$

where $\mu = \mathbb{E}[X_1]$. Indeed, in Equation (5.2.1) we have that

$$\alpha = \mathbb{E} \left[X_1 - \int_0^1 \int_{|z| \geq 1} z N(dt, dz) \right],$$

so $\mathbb{E}[X_t^2]$ is finite if and only if

$$\int_{\mathbb{R}} z^2 \nu(dz) = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^1 \int_{|z| \geq 1} z N(dt, dz) \right)^2 \right]$$

is finite. Note that in general $\mu \neq \alpha$.

Here is a consequence of Itô's formula.

Lemma 5.2.1

If h belongs to $L^2([0, T], \lambda)$ and if $(t, z) \mapsto e^{g(t, z)} - 1$ belongs to $L^1([0, T] \times \mathbb{R}, \lambda \times \nu)$, define $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ by

$$Z_t = \exp \left\{ \int_0^t h(s) W(ds) - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(s, z) N(ds, dz) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{g(s, z)} - 1) \nu(dz) ds \right\}. \quad (5.2.3)$$

The process Z is a square-integrable martingale if and only if $e^g - 1$ is an element of $L^2([0, T] \times \mathbb{R}, \lambda \times \nu)$.

PROOF. From the assumptions, we have that g belongs to $L^2([0, T] \times \mathbb{R}, \lambda \times \nu)$ and that Z is a well-defined positive local martingale. Then, if $\mathbb{E}[Z_T] = 1$, it is a martingale.

From Itô's formula, we also have that Z is the solution of

$$dZ_t = Z_{t-} h(t) W(dt) + Z_{t-} \int_{\mathbb{R}} (e^{g(t, z)} - 1) \tilde{N}(dt, dz), \quad Z_0 = 1.$$

Let $(\tau_n)_{n \geq 1}$ be the fundamental sequence of stopping times of Z . Since W and N are independent,

$$\mathbb{E}[Z_{t \wedge \tau_n}^2] = 1 + \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} Z_s^2 h^2(s) ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge \tau_n} Z_s^2 \int_{\mathbb{R}} (e^{g(s,z)} - 1)^2 \nu(dz) ds \right],$$

for every $n \geq 1$. Taking the limit when n goes to infinity yields

$$\mathbb{E}[Z_t^2] = 1 + \int_0^t \mathbb{E}[Z_s^2] h^2(s) ds + \int_0^t \mathbb{E}[Z_s^2] \int_{\mathbb{R}} (e^{g(s,z)} - 1)^2 \nu(dz) ds. \quad (5.2.4)$$

If we define $G(t) = h^2(t) + \int_{\mathbb{R}} (e^{g(t,z)} - 1)^2 \nu(dz)$, then the function $t \mapsto \mathbb{E}[Z_t^2]$ is the solution of

$$F'(t) = G(t)F(t), \quad F(0) = 1.$$

Hence,

$$\mathbb{E}[Z_t^2] = \exp \left\{ \int_0^t h^2(s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{g(s,z)} - 1)^2 \nu(dz) ds \right\} \quad (5.2.5)$$

and the statement follows. $\square$

For $h \in L^2([0, T], \lambda)$ and $e^g - 1 \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}, \lambda \times \nu)$, the process Z is the Doléans-Dade exponential of the square-integrable martingale $(\overline{M}_t)_{t \in [0, T]}$ defined by

$$\overline{M}_t = \int_0^t h(s) W(ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{g(s,z)} - 1) \tilde{N}(ds, dz).$$

In the literature, this is often denoted by $Z = \mathcal{E}(\overline{M})$, the stochastic exponential of $\overline{M}$.

5.2.2. A particular choice for g

If g is an element of $L^2([0, T] \times \mathbb{R}, \lambda \times \nu)$, then $e^g - 1$ is not necessarily square-integrable. One way to circumvent this problem is to introduce the bijection $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ defined by

$$\gamma(z) = \begin{cases} e^z - 1 & \text{if } z < 0, \\ 1 - e^{-z} & \text{if } z \geq 0. \end{cases} \quad (5.2.6)$$

Note that γ is bounded. Hence, if h is square-integrable on $[0, T]$ and if g is of the form $g(t, z) = \bar{g}(t)\gamma(z)$, where $\bar{g} \in C([0, T])$, i.e. $\bar{g}$ is a continuous function on $[0, T]$, then Z is square-integrable by Lemma 5.2.1.

The idea of introducing the function γ is taken from Løkka [51]. In that paper, it is also proved that the process $(N_t)_{t \in [0, T]}$ defined by

$$N_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z \tilde{N}(ds, dz) \quad (5.2.7)$$

and the process $(\widehat{N}_t)_{t \in [0, T]}$ defined by

$$\widehat{N}_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(z) \widetilde{N}(ds, dz)$$

generate the same filtration. Since

$$\mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_t^N$$

for every $t \in [0, T]$ (see Lemma 3.1 in [75]), we have the following lemma.

Lemma 5.2.2

For every $t \in [0, T]$,

$$\mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_t^N = \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_t^{\widehat{N}}.$$

As a consequence, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T^W \vee \mathcal{F}_T^{\widehat{N}}$.

This means that the processes $X_t = \mu t + \sigma W_t + N_t$ and $\widehat{X}_t = \mu t + \sigma W_t + \widehat{N}_t$ both generate the filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$.

5.3. MARTINGALE REPRESENTATIONS

Assumption 5.3.1

For the rest of the paper, we suppose that X is a square-integrable Lévy process with a decomposition as in Equation (5.2.2).

In general, a Lévy process does not possess the classical *predictable representation property* (PRP), i.e. an integrable random variable F (even with finite higher moments) can not always be expressed as

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T u_t dX_t,$$

where u is a predictable process and where the stochastic integral is understood as an integral with respect to a semimartingale. However, a martingale representation property exists for square-integrable functionals of X . It is a representation with respect to $W(dt)$ and $\widetilde{N}(dt, dz)$ simultaneously. This result can be found as far back as the paper of Itô [39]. In this section, we will provide a different proof. But first, here is a preparatory lemma.

Lemma 5.3.2

The linear subspace of $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ generated by

$$\{Y(h, g) \mid h \in L^2([0, T], \lambda), g \in C([0, T])\},$$

where the random variables $Y(h, g)$ are defined by

$$Y(h, g) = \exp \left\{ \int_0^T h(t) W(dt) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g(t) \gamma(z) \tilde{N}(dt, dz) \right\}, \quad (5.3.1)$$

is dense.

PROOF. We adapt the proof of Lemma 1.1.2 in the book of Nualart [57]. Let X be a square-integrable random variable such that

$$\mathbb{E}[XY(h, g)] = 0$$

for every $h \in L^2([0, T], \lambda)$ and $g \in C([0, T])$. Let $W(h) = \int_0^T h(t) W(dt)$ and $\tilde{N}(g) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g(t) \gamma(z) \tilde{N}(dt, dz)$. Hence,

$$\mathbb{E} \left[X \exp \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i W(h_i) + b_i \tilde{N}(g_i)) \right\} \right] = 0$$

for any $n \geq 1$, any $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}$ and any (sufficiently integrable) functions $\{h_1, \dots, h_n, g_1, \dots, g_n\}$. Then, for a fixed n and fixed functions $\{h_1, \dots, h_n, g_1, \dots, g_n\}$, the Laplace transform of the signed measure on $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ defined by

$$(A, B) \mapsto \mathbb{E} \left[X \mathbb{I}_A(W(h_1), \dots, W(h_n)) \mathbb{I}_B(\tilde{N}(g_1), \dots, \tilde{N}(g_n)) \right],$$

is identically 0. Consequently, the measure on $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ defined by $E \mapsto \mathbb{E}[X \mathbb{I}_E]$ vanishes on every rectangle $A \times B$ if it is a pre-image of the $\mathbb{R}^{2n}$ -dimensional random vector

$$(W(h_1), \dots, W(h_n), \tilde{N}(g_1), \dots, \tilde{N}(g_n)).$$

By linearity of the stochastic integrals, this is also true for random vectors of the form

$$(W(h_1), \dots, W(h_n), \tilde{N}(g_1), \dots, \tilde{N}(g_m)),$$

when m and n are different. Since $\mathcal{F}$ is generated by those random vectors, the measure is identically zero and $X = 0$. $\square$

We now state and prove a Martingale Representation Theorem with respect to the Brownian motion and the Poisson random measure simultaneously.

Theorem 5.3.3

Let $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. There exist a unique Borel predictable process $\psi \in L^2(\lambda \times \nu \times \mathbb{P})$ and a unique predictable process $\phi \in L^2(\lambda \times \mathbb{P})$ such that

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \phi(t) W(dt) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi(t, z) \tilde{N}(dt, dz). \quad (5.3.2)$$

PROOF. For $h \in L^2([0, T], \lambda)$ and $g \in C([0, T])$, we know from the proof of Lemma 5.2.1 that

$$Y_t = \exp \left\{ \int_0^t h(s) W(ds) - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(s) \gamma(z) \tilde{N}(ds, dz) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(e^{g(s)\gamma(z)} - 1 - g(s)\gamma(z) \right) \nu(dz) ds \right\}$$

is a solution of

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_{s-} h(s) W(ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} Y_{s-} \left(e^{g(s)\gamma(z)} - 1 \right) \tilde{N}(ds, dz) \quad (5.3.3)$$

on $[0, T]$. Hence, Y_T admits a martingale representation as in Equation (5.3.2) with $\phi(t) = Y_{t-} h(t)$ and $\psi(t, z) = Y_{t-} (e^{g(t)\gamma(z)} - 1)$. These two processes are predictable. Note that

$$Y_T = Y(h, g) e^{-\theta_T(h, g)}$$

where

$$\theta_T(h, g) = \frac{1}{2} \int_0^T h^2(t) dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(e^{g(t)\gamma(z)} - 1 - g(t)\gamma(z) \right) \nu(dz) dt.$$

Since $\theta_T(h, g)$ is deterministic, $Y(h, g)$ also admits a martingale representation as in Equation (5.3.2) but this time with

$$\phi(t) = Y_{t-} h(t) e^{\theta_T(h, g)} \quad \text{and} \quad \psi(t, z) = Y_{t-} \left(e^{g(t)\gamma(z)} - 1 \right) e^{\theta_T(h, g)}.$$

Therefore, the first statement follows by a denseness argument. Indeed, from Lemma 5.3.2, since F is square-integrable, there exists a sequence $(F_n)_{n \geq 1}$ of square-integrable random variables such that F_n tends to F in the $L^2(\Omega)$ -norm when n goes to infinity. Moreover, the F_n 's are linear combinations of some $Y(h, g)$'s. Then, for each term in this sequence there exist ϕ_n and ψ_n such that

$$F_n = \mathbb{E}[F_n] + \int_0^T \phi_n(t) W(dt) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi_n(t, z) \tilde{N}(dt, dz).$$

Also, since

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F_n - F_m]^2 &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[F_n - F_m] + \int_0^T (\phi_n(t) - \phi_m(t)) W(dt) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\psi_n(t, z) - \psi_m(t, z)) \tilde{N}(dt, dz) \right]^2 \\
&= (\mathbb{E}[F_n - F_m])^2 + \int_0^T \mathbb{E}[\phi_n(t) - \phi_m(t)]^2 dt \\
&\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[\psi_n(t, z) - \psi_m(t, z)]^2 \nu(dz) dt,
\end{aligned}$$

we get that $(\phi_n)_{n \geq 1}$ and $(\psi_n)_{n \geq 1}$ are Cauchy sequences. It follows that there exist predictable processes $\psi \in L^2(\lambda \times \nu \times \mathbb{P})$ and $\phi \in L^2(\lambda \times \mathbb{P})$ for which the representation of Equation (5.3.2) is verified.

We now prove the second statement. If F admits two martingale representations with $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ (these have nothing to do with the previous sequences), then by Itô's isometry

$$0 = \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^2(\lambda \times \mathbb{P})}^2 + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\lambda \times \nu \times \mathbb{P})}^2$$

and then $\phi_1 = \phi_2$ in $L^2(\lambda \times \mathbb{P})$ and $\psi_1 = \psi_2$ in $L^2(\lambda \times \nu \times \mathbb{P})$. □

Remark 5.3.4

From now on, we will refer to this martingale representation property of the Lévy process X as the MRP.

5.4. CHAOTIC REPRESENTATIONS

We now define multiple integrals with respect to $W(dt)$ and $\tilde{N}(dt, dz)$ simultaneously and define Lévy chaos as an extension of Wiener-Itô chaos. Then, we show that any square-integrable Lévy functional can be represented by a chaos expansion. We refer the reader to the lecture notes of Meyer [55] for more details on multiple stochastic integrals.

5.4.1. Notation

In the following, we unify the notation of the Poisson random measure and the Brownian motion. Thus, the superscript (1) will refer to Brownian motion and the superscript (2) to the Poisson random measure. This is also the notation in [6].

Let $\mathcal{X} = [0, T] \times \mathbb{R}$. We introduce two (projection) operators $\Pi_1: \mathcal{X} \rightarrow [0, T]$ and $\Pi_2: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ defined by $\Pi_1(t, z) = t$ and $\Pi_2(t, z) = (t, z)$. Consequently, $\Pi_1([0, T] \times \mathbb{R}) = [0, T]$ and $\Pi_2([0, T] \times \mathbb{R}) = [0, T] \times \mathbb{R}$.

For $n \geq 1$, $t \in [0, T]$ and $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2\}^n$, we also introduce the following notations :

$$\Sigma_n(t) = \{(t_1, \dots, t_n) \in [0, T]^n \mid t_1 < \dots < t_n \leq t\}; \quad (5.4.1)$$

and

$$\begin{aligned} & \Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}([0, t] \times \mathbb{R}) \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \Pi_{i_1}(\mathcal{X}) \times \dots \times \Pi_{i_n}(\mathcal{X}) \mid \Pi_1(x_1) < \dots < \Pi_1(x_n) \leq t\}. \end{aligned}$$

Consequently, $\Sigma_n(T) = \Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X})$ when $i_k = 1$ for each $k = 1, 2, \dots, n$. If f is a function defined on $\Pi_{i_1}(\mathcal{X}) \times \dots \times \Pi_{i_n}(\mathcal{X})$, we write $f(x_1, \dots, x_n)$, where $x_k \in \Pi_{i_k}(\mathcal{X})$ for each $k = 1, 2, \dots, n$. If $\eta_1 = \lambda$ and $\eta_2 = \lambda \times \nu$, let $L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))$ be the space of square-integrable functions defined on $\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X})$ and equipped with the product measure $\eta_{i_1} \times \dots \times \eta_{i_n}$ defined on $\Pi_{i_1}(\mathcal{X}) \times \dots \times \Pi_{i_n}(\mathcal{X})$.

5.4.2. Multiple integrals and Lévy chaos

Fix $n \geq 1$ and $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2\}^n$. We define the iterated integral $J_{(i_1, \dots, i_n)}(f)$, for f in $L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))$, by

$$\begin{aligned} & J_{(i_1, \dots, i_n)}(f) \\ &= \int_{\Pi_{i_n}([0, T] \times \mathbb{R})} \dots \int_{\Pi_{i_1}([0, t_2 -] \times \mathbb{R})} f(x_1, \dots, x_n) M^{(i_1)}(dx_1) \dots M^{(i_n)}(dx_n) \end{aligned}$$

where $M^{(j)}(dx)$ equals $W(dt)$ if $j = 1$ and equals $\tilde{N}(dt, dz)$ if $j = 2$. The i_1 in $J_{(i_1, \dots, i_n)}$ stands for the innermost stochastic integral and the i_n stands for the outermost stochastic integral. For example, if $n = 3$ and $(i_1, i_2, i_3) = (1, 1, 2)$, then

$$\begin{aligned} & J_{(1, 1, 2)}(f) \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^{t_3 -} \left(\int_0^{t_2 -} f(t_1, t_2, (t_3, z_3)) W(dt_1) \right) W(dt_2) \right] \tilde{N}(dt_3, dz_3). \end{aligned}$$

As n runs through $\mathbb{N}$ and $(i_1, \dots, i_n)$ runs through $\{1, 2\}^n$, the iterated integrals generate orthogonal spaces in $L^2(\Omega)$ that we would like to call *Lévy chaos*. Indeed, since

$$\int_{\Pi_i([0, T] \times \mathbb{R})} f(x) M^{(i)}(dx)$$

and

$$\int_{\Pi_j([0,T] \times \mathbb{R})} g(x) M^{(j)}(dx)$$

are independent if $i \neq j$ and both have mean zero, using Itô's isometry iteratively, we get the following proposition.

Proposition 5.4.1

If $f \in L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))$ and if $g \in L^2(\Sigma_{(j_1, \dots, j_m)}(\mathcal{X}))$, then

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [J_{(i_1, \dots, i_n)}(f) J_{(j_1, \dots, j_m)}(g)] \\ = \begin{cases} (f, g)_{L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))} & \text{if } (i_1, \dots, i_n) = (j_1, \dots, j_m); \\ 0 & \text{if not.} \end{cases} \end{aligned}$$

We end this subsection with a definition.

Definition 5.4.2

For $n \geq 1$ and $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2\}^n$, the $(i_1, \dots, i_n)$ -tensor product of a function h defined on $[0, T]$ with a function g defined on $[0, T] \times \mathbb{R}$ is a function on $\Pi_{i_1}(\mathcal{X}) \times \dots \times \Pi_{i_n}(\mathcal{X})$ defined by

$$(h \otimes_{(i_1, \dots, i_n)} g)(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq k \leq n} h(\Pi_1(x_k))^{2-i_k} g(\Pi_2(x_k))^{i_k-1}.$$

For example,

$$(h \otimes_{(1,1)} g)(s, t) = h(s)h(t)$$

is a function defined on $[0, T] \times [0, T]$ and

$$(h \otimes_{(1,2,1)} g)(r, (s, y), t) = h(r)h(t)g(s, y)$$

is a function defined on $[0, T] \times ([0, T] \times \mathbb{R}) \times [0, T]$.

5.4.3. Chaotic representation property

For the rest of the paper, we will assume that $\sum_{(i_1, \dots, i_n)}$ means $\sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2\}^n}$. Recall that $Z = (Z_t)_{t \in [0, T]}$ was defined in Equation (5.2.3) by

$$\begin{aligned} Z_t = \exp \left\{ \int_0^t h(s) W(ds) - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(s, z) N(ds, dz) \right. \\ \left. - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{g(s, z)} - 1) \nu(dz) ds \right\}. \end{aligned}$$

Lemma 5.4.3

Let $h \in L^2([0, T])$ and $e^g - 1 \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}, \lambda \times \nu)$. Then, Z_T admits the following chaotic representation :

$$Z_T = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)} (h \otimes_{(i_1, \dots, i_n)} (e^g - 1)). \quad (5.4.2)$$

PROOF. We know from the proof of Lemma 5.2.1 that Z_T is square-integrable and that

$$Z_T = 1 + \int_0^T Z_{t-} h(t) W(dt) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} Z_{t-} (e^{g(t,z)} - 1) \tilde{N}(dt, dz). \quad (5.4.3)$$

Let $\phi^{(1)}(t) = Z_{t-} h(t)$ and $\phi^{(2)}(t, z) = Z_{t-} (e^{g(t,z)} - 1)$. We now iterate Equation (5.4.3).

Consequently,

$$\begin{aligned} Z_T = 1 &+ \int_0^T f^{(1)}(t) W(dt) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f^{(2)}(t, z) \tilde{N}(dt, dz) \\ &+ \int_0^T \int_0^{t-} Z_{s-} h(s) h(t) W(ds) W(dt) \\ &+ \int_0^T \int_0^{t-} \int_{\mathbb{R}} Z_{s-} (e^{g(s,y)} - 1) h(t) \tilde{N}(ds, dy) W(dt) \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^{t-} Z_{s-} h(s) (e^{g(t,z)} - 1) W(ds) \tilde{N}(dt, dz) \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^{t-} \int_{\mathbb{R}} Z_{s-} (e^{g(s,y)} - 1) (e^{g(t,z)} - 1) \tilde{N}(ds, dy) \tilde{N}(dt, dz) \end{aligned}$$

where

$$f^{(1)} = h = (h \otimes_{(1)} (e^g - 1)) \text{ and } f^{(2)} = e^g - 1 = (h \otimes_{(2)} (e^g - 1)).$$

Then, after n iterations, we get

$$\begin{aligned} Z_T = 1 &+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{(i_1, \dots, i_k)} J_{(i_1, \dots, i_k)} (f^{(i_1, \dots, i_k)}) \\ &+ \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \int_{\Pi_{i_n}([0, T] \times \mathbb{R})} \dots \int_{\Pi_{i_1}([0, t_2-] \times \mathbb{R})} \phi^{(i_1, \dots, i_n)}(x_1, \dots, x_n) \\ &M^{(i_1)}(dx_1) \dots M^{(i_n)}(dx_n) \end{aligned}$$

where $f^{(i_1, \dots, i_k)} = h \otimes_{(i_1, \dots, i_k)} (e^g - 1)$ and where $\phi^{(i_1, \dots, i_n)} = Z_{-}(h \otimes_{(i_1, \dots, i_n)} (e^g - 1))$.

This means that we can define a sequence $(\psi_n)_{n \geq 2}$ in $L^2(\Omega)$ by

$$\begin{aligned} \psi_n = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \int_{\Pi_{i_n}([0, T] \times \mathbb{R})} \dots \int_{\Pi_{i_1}([0, t_2-] \times \mathbb{R})} \phi^{(i_1, \dots, i_n)}(x_1, \dots, x_n) \\ M^{(i_1)}(dx_1) \dots M^{(i_n)}(dx_n). \end{aligned}$$

From Proposition 5.4.1,

$$\mathbb{E}[Z_T^2] = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \|f^{(i_1, \dots, i_k)}\|_{L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_k)}(\mathcal{X}))}^2 + \mathbb{E}[\psi_n^2]$$

for each $n \geq 2$. Hence we get that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)}(f^{(i_1, \dots, i_n)})$$

is a square-integrable series and that there exists a square-integrable random variable ψ such that ψ_n tends to ψ in the $L^2(\Omega)$ -norm. Consequently, it is enough to show that $\psi = 0$. Since $f^{(i_1, \dots, i_n)} = h \otimes_{(i_1, \dots, i_n)} (e^g - 1)$, using Proposition 5.4.1 once again, we get that

$$\begin{aligned} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \mathbb{E} \left[\left(J_{(i_1, \dots, i_n)}(f^{(i_1, \dots, i_n)}) \right)^2 \right] \\ = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ |i|=k}} \|h \otimes_{(i_1, \dots, i_n)} (e^g - 1)\|_{L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))}^2, \end{aligned}$$

where $|i| = |(i_1, \dots, i_n)| = \sum_{j=1}^n (2 - i_j)$ stands for the number of times the function h appears in the tensor product. Note that when $|i| = k$ there are $\binom{n}{k}$ terms in the innermost summation. Since $h^2 \otimes_{(i_1, \dots, i_n)} (e^g - 1)^2$ is a $(i_1, \dots, i_n)$ -tensor product, the function given by

$$\sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ |i|=k}} h \otimes_{(i_1, \dots, i_n)} (e^g - 1)$$

is symmetric on $\Pi_{i_1}(\mathcal{X}) \times \dots \times \Pi_{i_n}(\mathcal{X})$. Consequently,

$$\begin{aligned} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \mathbb{E} \left[\left(J_{(i_1, \dots, i_n)}(f^{(i_1, \dots, i_n)}) \right)^2 \right] \\ = \sum_{k=0}^n \int_{\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X})} \left[\sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ |i|=k}} h^2 \otimes_{(i_1, \dots, i_n)} (e^g - 1)^2 \right] d\eta_{i_1} \dots d\eta_{i_n} \\ = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \int_{\Pi_{i_1}(\mathcal{X}) \times \dots \times \Pi_{i_n}(\mathcal{X})} \left[\sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ |i|=k}} h^2 \otimes_{(i_1, \dots, i_n)} (e^g - 1)^2 \right] d\eta_{i_1} \dots d\eta_{i_n} \\ = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|h\|_{L^2(\lambda)}^{2k} \|e^g - 1\|_{L^2(\lambda \times \nu)}^{2(n-k)} \\ = \frac{1}{n!} \left(\|h\|_{L^2(\lambda)}^2 + \|e^g - 1\|_{L^2(\lambda \times \nu)}^2 \right)^n. \end{aligned}$$

From Equation (5.2.5), we know that

$$\mathbb{E}[Z_T^2] = \exp \left\{ \|h\|_{L^2(\lambda)}^2 + \|e^g - 1\|_{L^2(\lambda \times \nu)}^2 \right\}.$$

This means that $\psi = 0$ and the statement follows. $\square$

We are now ready to state and prove the chaotic representation property of the Lévy process X . The previous lemma and the idea of its proof will be of great use.

Theorem 5.4.4

Let $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. There exists a unique sequence

$$\left\{ f^{(i_1, \dots, i_n)}; n \geq 1, (i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2\}^n \right\},$$

whose elements are respectively in $L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))$, such that

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)} \left(f^{(i_1, \dots, i_n)} \right). \quad (5.4.4)$$

Consequently,

$$\mathbb{E}[F^2] = \mathbb{E}^2[F] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \|f^{(i_1, \dots, i_n)}\|_{L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))}^2. \quad (5.4.5)$$

PROOF. From Theorem 5.3.3, we know there exist a predictable process $\phi^{(1)} \in L^2(\lambda \times \mathbb{P})$ and a Borel predictable process $\phi^{(2)} \in L^2(\lambda \times \nu \times \mathbb{P})$ such that

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \phi^{(1)}(t) W(dt) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi^{(2)}(t, z) \tilde{N}(dt, dz).$$

Using Itô's isometry, it is clear that

$$\|\phi^{(1)}\|_{L^2(\lambda \times \mathbb{P})}^2 + \|\phi^{(2)}\|_{L^2(\lambda \times \nu \times \mathbb{P})}^2 \leq \mathbb{E}[F^2].$$

For almost all $t \in [0, T]$, $\phi^{(1)}(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ and then from Theorem 5.3.3 there exist processes $\phi^{(1,1)}$ and $\phi^{(1,2)}$ such that

$$\phi^{(1)}(t) = \mathbb{E}[\phi^{(1)}(t)] + \int_0^t \phi^{(1,1)}(t, s) W(ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi^{(1,2)}(t, s, y) \tilde{N}(ds, dy).$$

Similarly, for almost all $(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, $\phi^{(2)}(t, z) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ and

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(t, z) &= \mathbb{E}[\phi^{(2)}(t, z)] + \int_0^t \phi^{(2,1)}(t, z, s) W(ds) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi^{(2,2)}(t, z, s, y) \tilde{N}(ds, dy). \end{aligned}$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
F = \mathbb{E}[F] &+ \int_0^T g^{(1)}(t) W(dt) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g^{(2)}(t, z) \tilde{N}(dt, dz) \\
&+ \int_0^T \int_0^{t-} \phi^{(1,1)}(t, s) W(ds) W(dt) \\
&+ \int_0^T \int_0^{t-} \int_{\mathbb{R}} \phi^{(1,2)}(t, s, y) \tilde{N}(ds, dy) W(dt) \\
&+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^{t-} \phi^{(2,1)}(t, z, s) W(ds) \tilde{N}(dt, dz) \\
&+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^{t-} \int_{\mathbb{R}} \phi^{(2,2)}(t, z, s, y) \tilde{N}(ds, dy) \tilde{N}(dt, dz).
\end{aligned}$$

where $g^{(1)}(t) = \mathbb{E}[\phi^{(1)}(t)]$ and $g^{(2)}(t, z) = \mathbb{E}[\phi^{(2)}(t, z)]$. After n steps of this procedure, i.e. after n iterations of Theorem 5.3.3, we get as in the proof of Lemma 5.4.3 that

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{(i_1, \dots, i_k)} J_{(i_1, \dots, i_k)}(f^{(i_1, \dots, i_k)}) + \psi_n$$

where $f^{(i_1, \dots, i_k)} \in L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_k)}(\mathcal{X}))$, for each $1 \leq k \leq n-1$ and $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2\}^k$, where

$$\begin{aligned}
\psi_n = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \int_{\Pi_{i_n}([0, T] \times \mathbb{R})} \cdots \int_{\Pi_{i_1}([0, t_2] \times \mathbb{R})} \phi^{(i_1, \dots, i_n)}(x_1, \dots, x_n) \\
M^{(i_1)}(dx_1) \cdots M^{(i_n)}(dx_n),
\end{aligned}$$

and where $\phi^{(i_1, \dots, i_n)} \in L^2(\eta_{i_1} \times \cdots \times \eta_{i_n} \times \mathbb{P})$, for each $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2\}^n$.

From Proposition 5.4.1,

$$\mathbb{E}[F^2] = \mathbb{E}[F]^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \|f^{(i_1, \dots, i_k)}\|_{L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_k)}(\mathcal{X}))}^2 + \mathbb{E}[\psi_n^2],$$

for each $n \geq 2$ and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)}(f^{(i_1, \dots, i_n)})$$

is a square-integrable series. Consequently, we know that there exists a square-integrable random variable ψ such that ψ_n tends to ψ in the $L^2(\Omega)$ -norm. It is enough to show that $\psi = 0$. Using the argument leading to Proposition 5.4.1, i.e. the fact that two iterated stochastic integrals of different order are orthogonal, we get that for a fixed $n \geq 2$,

$$\left(J_{(i_1, \dots, i_k)}(f^{(i_1, \dots, i_k)}), \psi_n \right)_{L^2(\Omega)} = 0$$

for every $1 \leq k \leq n-1$, $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2\}^k$ and $f^{(i_1, \dots, i_k)} \in L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_k)}(\mathcal{X}))$. Thus,

$$\left(J_{(i_1, \dots, i_n)}(f^{(i_1, \dots, i_n)}), \psi \right)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (5.4.6)$$

for every $n \geq 1$, $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, 2\}^n$ and $f^{(i_1, \dots, i_n)} \in L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))$.

We now assume that $g = \bar{g}\gamma$ where $\bar{g}$ belongs to $C([0, T])$. Using Equation (5.4.6), we have that ψ is orthogonal to each random variable $Y(h, g)$ defined in Equation (5.3.1) since from Lemma 5.4.4 they each possess a chaos decomposition. We also know from Lemma 5.3.2 that these random variables are dense in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, so $\psi = 0$. This means that every square-integrable Lévy functional can be express as a series of iterated integrals. The statement follows. $\square$

Remark 5.4.5

From now on, we will refer to the chaotic representation property of Theorem 5.4.4 as the CRP.

Remark 5.4.6

As mentioned before, in general the CRP implies the MRP. Indeed, if F is a square-integrable Lévy functional with chaos decomposition

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)} \left(f^{(i_1, \dots, i_n)} \right),$$

then

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \phi(t) W(dt) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi(t, z) \tilde{N}(dt, dz),$$

with

$$\begin{aligned} \phi(t) &= f^{(1)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)} \left(f^{(i_1, \dots, i_n, 1)}(\cdot, t) \mathbb{I}_{\Sigma_n(t)} \right), \\ \psi(t, z) &= f^{(2)}(t, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)} \left(f^{(i_1, \dots, i_n, 2)}(\cdot, (t, z)) \mathbb{I}_{\Sigma_n(t)} \right). \end{aligned}$$

This last remark, together with our journey from the MRP of Theorem 5.3.3 to the CRP of Theorem 5.4.4, yields the following interesting proposition.

Proposition 5.4.7

For a square-integrable Lévy process, the MRP and the CRP are equivalent.

5.4.4. Explicit chaos representation

In the next proposition, we compute the explicit chaos representation of a *smooth* Lévy functional.

Proposition 5.4.8

Let f be a smooth function with compact support in $\mathbb{R}^k$, i.e. let $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$, and let t_j belong to $[0, T]$ for each $j = 1, \dots, k$. Then,

$$f(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) = \mathbb{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)}(f^{(i_1, \dots, i_n)}),$$

where

$$\begin{aligned} f^{(i_1, \dots, i_n)}(\Pi_{i_1}(s_1, w_1), \dots, \Pi_{i_n}(s_n, w_n)) \\ = -(2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{f}(y) \widehat{\phi}(-y) \prod_{1 \leq j \leq n} (i\sigma \xi_{s_j}^{t, y})^{2-i_j} (e^{iw_j \xi_{s_j}^{t, y}} - 1)^{i_j-1} dy. \end{aligned}$$

with

$$\phi(x) dx = \mathbb{P}\{X_t \in dx\},$$

where $X_t = (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$, and with

$$\xi_s^{t, y} = y_1 \mathbb{I}_{[0, t_1]}(s) + \dots + y_k \mathbb{I}_{[0, t_k]}(s),$$

for $t = (t_1, \dots, t_k)$ and $y = (y_1, \dots, y_k)$.

PROOF. We follow an idea in [51] and use Fourier transforms. By the Fourier inversion formula

$$f(x) = (2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{f}(y) e^{i\langle x, y \rangle} dy \quad (5.4.7)$$

where $\hat{f}$ is the Fourier transform of f and $\langle x, y \rangle$ denotes the scalar product in $\mathbb{R}^k$ of $x = (x_1, \dots, x_k)$ and $y = (y_1, \dots, y_k)$. Let $\phi^-(x) = \phi(-x)$. If we define $F(x) = \mathbb{E}[f(X_{t_1} + x_1, \dots, X_{t_k} + x_k)]$, then

$$F(x) = -(f * \phi^-)(x)$$

and also

$$F(x) = -(2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{f}(y) \widehat{\phi^-}(y) e^{i\langle x, y \rangle} dy.$$

Therefore, we have the following equality :

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})] = -(2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{f}(y) \widehat{\phi^-}(y) dy.$$

From Equation (5.4.7) and Equation (5.2.2), we have that

$$\begin{aligned} f(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) &= (2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{f}(y) e^{i\langle X_t, y \rangle} dy \\ &= (2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{f}(y) e^{i\mu\langle t, y \rangle} Y^{t,y} dy \end{aligned}$$

where

$$Y^{t,y} = \exp \left\{ \int_0^T i\sigma \xi_s^{t,y} W(ds) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} iz \xi_s^{t,y} \tilde{N}(ds, dz) \right\}.$$

Hence,

$$f(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) = (2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{f}(y) e^{i\mu\langle t, y \rangle} Z^{t,y} \mathbb{E}[Y^{t,y}] dy \quad (5.4.8)$$

where

$$\begin{aligned} Z^{t,y} = \exp \bigg\{ & \int_0^T i\sigma \xi_s^{t,y} W(ds) + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^T (\xi_s^{t,y})^2 ds \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} iz \xi_s^{t,y} N(ds, dz) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (e^{iz \xi_s^{t,y}} - 1) \nu(dz) ds \bigg\}. \end{aligned}$$

From Lemma 5.4.3, we know that

$$Z^{t,y} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)} \left((i\sigma \xi^{t,y}) \otimes_{(i_1, \dots, i_n)} (e^{iz \xi^{t,y}} - 1) \right).$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y^{t,y}] &= e^{-i\mu\langle t, y \rangle} \mathbb{E} \left[e^{i\langle X_t, y \rangle} \right] \\ &= -e^{-i\mu\langle t, y \rangle} \hat{\phi}(-y) \end{aligned}$$

Then, using Equation (5.4.8) and by Lebesgue's dominated convergence theorem,

$$\begin{aligned} f(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) &= -(2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{f}(y) \hat{\phi}(-y) dy \\ &\quad - (2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{f}(y) \hat{\phi}(-y) \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)} \left((i\sigma \xi^{t,y}) \otimes_{(i_1, \dots, i_n)} (e^{iz \xi^{t,y}} - 1) \right) dy \\ &= \mathbb{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)} (f^{(i_1, \dots, i_n)}). \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} f^{(i_1, \dots, i_n)}(\Pi_{i_1}(s_1, w_1), \dots, \Pi_{i_n}(s_n, w_n)) \\ = -(2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{f}(y) \hat{\phi}(-y) \left((i\sigma \xi^{t,y}) \otimes_{(i_1, \dots, i_n)} (e^{iz\xi^{t,y}} - 1) \right) dy. \end{aligned}$$

The statement follows from Definition 5.4.2. $\square$

5.5. MALLIAVIN DERIVATIVES AND CLARK-OCONE FORMULA

Before defining the Malliavin derivatives, we introduce a last notation : for $n \geq 1$ and $1 \leq k \leq n+1$, define

$$\Sigma_n^k(t) = \{(t_1, \dots, t_n) \in [0, T]^n \mid t_1 < \dots < t_{k-1} < t < t_k < \dots < t_n\},$$

i.e. t is at the k -th position between the t_j 's, where $t_0 = 0$ and $t_{n+1} = T$. Note that $\Sigma_n^{n+1}(t) = \Sigma_n(t)$, where the latter was defined earlier in Equation (5.4.1). In a multi-index $(i_1, \dots, i_n)$, we will use $\widehat{i}_k$ to denote the omission of the k -th index.

We want to define two directional derivative operators in the spirit of León et al. [49] : one in the direction of the Brownian motion and one in the direction of the Poisson random measure. If $F = J_{(i_1, \dots, i_n)}(f)$, then we would like to define $D_t^{(1)}F$ and $D_{t,z}^{(2)}F$ as follows :

$$D_t^{(1)}F = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{i_k=1\}} J_{(i_1, \dots, \widehat{i}_k, \dots, i_n)} \left(f(\underbrace{\dots}_{k-1}, t, \underbrace{\dots}_{n-k}) \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}^k(t)} \right)$$

and

$$D_{t,z}^{(2)}F = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{i_k=2\}} J_{(i_1, \dots, \widehat{i}_k, \dots, i_n)} \left(f(\underbrace{\dots}_{k-1}, (t, z), \underbrace{\dots}_{n-k}) \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}^k(t)} \right)$$

where $J_{(\widehat{i})}(f) = f$.

Definition 5.5.1

Let $\mathbb{D}^{1,2} = \mathbb{D}^{(1)} \cap \mathbb{D}^{(2)}$, where if $j = 1$ or if $j = 2$, $\mathbb{D}^{(j)}$ is the subset of $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ consisting of the random variables F with chaotic representation

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)}(f^{(i_1, \dots, i_n)})$$

such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{i_k=j\}} \int_{\Pi_j(\mathcal{X})} \|f^{(i_1, \dots, i_n)}(\cdot, x, \cdot) \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}^k(t)}\|^2 \eta_j(dx) < \infty,$$

where the inside norm is the $L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, \widehat{i}_k, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))$ -norm.

From Theorem 5.4.4, it is clear that $\mathbb{D}^{1,2}$ is dense in $L^2(\Omega)$, since every random variable with a chaos representation given by a finite sum belongs to $\mathbb{D}^{1,2}$.

Definition 5.5.2

The Malliavin derivatives

$$D^{(1)}: \mathbb{D}^{(1)} \rightarrow L^2([0, T] \times \Omega) \text{ and } D^{(2)}: \mathbb{D}^{(2)} \rightarrow L^2([0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega)$$

are defined by

$$\begin{aligned} D_t^{(1)} F &= f^{(1)}(t) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{i_k=1\}} J_{(i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_n)} (f^{(i_1, \dots, i_n)}(\underbrace{\dots}_{k-1}, t, \underbrace{\dots}_{n-k}) \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}^k}(t)) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} D_{t,z}^{(2)} F &= f^{(2)}(t, z) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{i_k=2\}} J_{(i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_n)} (f^{(i_1, \dots, i_n)}(\underbrace{\dots}_{k-1}, (t, z), \underbrace{\dots}_{n-k}) \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}^k}(t)) \end{aligned}$$

if $F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)} (f^{(i_1, \dots, i_n)})$ is in $\mathbb{D}^{(1)}$ or $\mathbb{D}^{(2)}$.

Remark 5.5.3

For an iterated integral, the Malliavin derivatives have a property similar to the classical commutativity relationship. Indeed, if $F = J_{(i_1, \dots, i_n)}(f)$, then

$$D_{t,z}^{(2)} F = \int_t^T D_{t,z}^{(2)} J_{(i_1, \dots, i_{n-1})} (f(\cdot, s) \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}}(s)) W(ds)$$

if $i_n = 1$ and

$$\begin{aligned} D_{t,z}^{(2)} F &= J_{(i_1, \dots, i_{n-1})} (f(\cdot, (t, z)) \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}}(t)) \\ &+ \int_t^T \int_{\mathbb{R}} D_{t,z}^{(2)} J_{(i_1, \dots, i_{n-1})} (f(\cdot, (s, y)) \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}}(s)) \tilde{N}(ds, dy) \end{aligned}$$

if $i_n = 2$. A similar result holds for $D^{(1)} F$.

Remark 5.5.4

If $F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(f_n)$, where $J_n = J_{(1, \dots, 1)}$ is the iterated Brownian stochastic

integral of order n , then

$$\begin{aligned} D_t^{(1)} F &= f_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n J_{n-1}(f_n(\cdot, t, \cdot)) \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}^k(t)} \\ &= f_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} J_{n-1}(f_n(\cdot, t)), \end{aligned}$$

because $\sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}^k(t)} = \mathbb{I}_{[0,T]}(t)$. This is the classical Brownian Malliavin derivative of F . The same extension clearly holds for the pure-jump case if the 1's are replaced by 2's.

The definitions of $\mathbb{D}^{(1)}$ and $\mathbb{D}^{(2)}$ come from the fact that we want the codomains of $D^{(1)}$ and $D^{(2)}$ to be $L^2([0, T] \times \Omega)$ and $L^2([0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega)$ respectively. We finally define a norm for $DF = (D^{(1)}F, D^{(2)}F)$ in the following way :

$$\|DF\|^2 = \|D^{(1)}F\|_{L^2(\lambda \times \mathbb{P})}^2 + \|D^{(2)}F\|_{L^2(\lambda \times \nu \times \mathbb{P})}^2.$$

This is a norm on the product space $L^2(\lambda \times \mathbb{P}) \times L^2(\lambda \times \nu \times \mathbb{P})$.

5.5.1. Properties and interpretation of the Malliavin derivatives

We begin this section with a result concerned with the *continuity* of D . It is an extension of Lemma 1.2.3 in Nualart [57]. The proof is given in Appendix 5.7.

Lemma 5.5.5

If F belongs to $L^2(\Omega)$, if $(F_k)_{k \geq 1}$ is a sequence of elements in $\mathbb{D}^{1,2}$ converging to F in the $L^2(\Omega)$ -norm and if $\sup_{k \geq 1} \|DF_k\| < \infty$, then F belongs to $\mathbb{D}^{1,2}$ and $(DF_k)_{k \geq 1}$ converges weakly to DF in $L^2(\lambda \times \mathbb{P}) \times L^2(\lambda \times \nu \times \mathbb{P})$.

There is a similar and stronger result stated in [51] (Lemma 6); however we are unable to fill a gap in its proof.

The choice for the definitions of the Malliavin derivative operators was made to extend the classical Brownian Malliavin derivative as well as the Poisson random measure Malliavin derivative in a wider sense than Remark 5.5.4. As mentioned in the introduction, the classical Brownian Malliavin derivative can be defined by chaos expansions and as a weak derivative. In Nualart and Vives [60], it is proven that for the Poisson process there is an equivalence between the Malliavin derivative defined with chaos decompositions and another one defined by *adding a mass* with a translation operator. This last result was extended by Løkka [51] to Poisson random measures. But now we will follow an idea of León et al. [49] to prove that our derivative operators are

extensions of the classical ones. Their method relies on the commutativity relationships between stochastic derivatives and stochastic integrals and on quadratic covariation for semimartingales; consequently, it is easily adaptable to our more general context. The details are given in Appendix 5.7.

Theorem 5.5.6

On $\mathbb{D}^{(1)}$ the operator $D^{(1)}$ coincides with the Brownian Malliavin derivative and on $\mathbb{D}^{(2)}$ the operator $D^{(2)}$ coincides with the Poisson random measure Malliavin derivative.

Hence, if $F \in \mathbb{D}^{(1)}$, all the results about the classical Brownian Malliavin derivative, such as the chain rule for Lipschitz functions, can be applied to $D^{(1)}F$; see Nualart [57] for details. But this is also true for the Poisson random measure Malliavin derivative. For example, an important result in Løkka [51] is that if $F = g(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in \mathbb{D}^{(2)}$ and

$$(t, z) \mapsto g(X_{t_1} + z\mathbb{I}_{[0, t_1]}(t), \dots, X_{t_n} + z\mathbb{I}_{[0, t_n]}(t)) - g(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$$

belongs to $L^2(\lambda \times \nu \times \mathbb{P})$, then

$$D_{t,z}^{(2)}F = g(X_{t_1} + z\mathbb{I}_{[0, t_1]}(t), \dots, X_{t_n} + z\mathbb{I}_{[0, t_n]}(t)) - g(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}).$$

This is the *adding a mass* formula. Consequently, it also applies in the context of a square-integrable Lévy process.

5.5.2. A Clark-Ocone formula

We now state and prove a Clark-Ocone type formula. This formula gives explicitly the integrands in the martingale representation of Theorem 5.3.3 for a Malliavin-differentiable Lévy functional. It is interesting to note that no particular property of the directional derivatives are needed.

Theorem 5.5.7

If F belongs to $\mathbb{D}^{1,2}$, then

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \mathbb{E}[D_t^{(1)}F \mid \mathcal{F}_t] W(dt) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[D_{t,z}^{(2)}F \mid \mathcal{F}_t] \tilde{N}(dt, dz).$$

PROOF. Suppose that F has a chaos expansion given by

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)}(f^{(i_1, \dots, i_n)}).$$

If for example we consider the derivative operator $D^{(2)}$, then from Remark 5.4.6 we have to show that

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_{t,z}^{(2)}F \mid \mathcal{F}_t] \\ = f^{(2)}(t, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)}(f^{(i_1, \dots, i_n, 2)}(\cdot, (t, z)) \mathbb{I}_{\Sigma_n(t)}). \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

If $i_k = 2$, then

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[J_{(i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_n)}(f^{(i_1, \dots, i_n)}(\cdot, (t, z), \cdot) \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}^k(t)}) \mid \mathcal{F}_t] \\ = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 1, 2, \dots, n-1; \\ J_{(i_1, \dots, i_{n-1})}(f^{(i_1, \dots, i_{n-1}, 2)}(\cdot, (t, z)) \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}(t)}) & \text{if } k = n, \end{cases} \end{aligned}$$

because when $k = 1, 2, \dots, n-1$ the outermost stochastic integral in the iterated integral $J_{(i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_n)}$ starts after time t . By the definition of $D_{t,z}^{(2)}F$, this implies that Equation (5.5.1) is satisfied. The same argument works for the derivative operator $D^{(1)}$ and thus the result follows. $\square$

5.6. MARTINGALE REPRESENTATION OF THE MAXIMUM

Our main goal was to provide a detailed construction of a chaotic Malliavin derivative and a Clark-Ocone formula. Now, to illustrate the results, we compute the explicit martingale representation of the maximum of the Lévy process X .

For $0 \leq s < t \leq T$, define $M_{s,t} = \sup_{s \leq r \leq t} X_r$ and $M_t = M_{0,t}$. If $\mathbb{E}[M_T] < \infty$, then one can show that

$$\mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_t] = M_t + \int_{M_t - X_t}^{\infty} \bar{F}_{T-t}(z) dz, \quad (5.6.1)$$

where $\bar{F}_s(z) = \mathbb{P}\{M_s > z\}$; see Shiryaev and Yor [74] and Graversen et al. [33]. We will use this equality to prove the next proposition.

Proposition 5.6.1

If X a square-integrable Lévy process with Lévy-Itô decomposition

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z \tilde{N}(ds, dz),$$

then its running maximum admits the following martingale representation :

$$M_T = \mathbb{E}[M_T] + \int_0^T \phi(t) W(dt) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi(t, z) \tilde{N}(dt, dz)$$

with $\phi(t) = \sigma \bar{F}_{T-t}(a)$ and $\psi(t, z) = \mathbb{E}[(M_{T-t} + z - a)^+] - \int_a^\infty \bar{F}_{T-t}(x) dx$, where $a = M_t - X_t$.

PROOF. Since X is a square-integrable martingale with drift, from Doob's maximal inequality we have that M_T is a square-integrable random variable; see Theorem 20 in Protter [67]. Let $(t_k)_{k \geq 1}$ be a dense subset of $[0, T]$, let $F = M_T$ and, for each $n \geq 1$, define $F_n = \max\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}$. Clearly, $(F_n)_{n \geq 1}$ is an increasing sequence bounded by F . Hence, F_n converges to F in the $L^2(\Omega)$ -norm when n goes to infinity.

We want to prove that each F_n is Malliavin differentiable, i.e. that each F_n belongs to $\mathbb{D}^{1,2} = \mathbb{D}^{(1)} \cap \mathbb{D}^{(2)}$. This follows from the following two facts. First, since

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

is a Lipschitz function on $\mathbb{R}^n$ and since $D^{(1)}$ behaves like the classical Brownian Malliavin derivative on the Brownian part of F_n , we have that

$$0 \leq D_t^{(1)} F_n = \sum_{k=1}^n \sigma \mathbb{I}_{\{t \leq t_k\}} \mathbb{I}_{A_k} \leq \sum_{k=1}^n \sigma \mathbb{I}_{A_k} = \sigma,$$

where $A_1 = \{F_n = X_{t_1}\}$ and $A_k = \{F_n \neq X_{t_1}, \dots, F_n \neq X_{t_{k-1}}, F_n = X_{t_k}\}$ for $2 \leq k \leq n$. This implies that $\sup_{n \geq 1} \|D^{(1)} F_n\|_{L^2([0, T] \times \Omega)} \leq \sigma^2 T$. Secondly, since $D^{(2)}$ behaves like the Poisson random measure Malliavin derivative on the Poisson part of F_n , we have that

$$0 \leq |D_{t,z}^{(2)} F_n| = |\max\{X_{t_1} + z \mathbb{I}_{\{t < t_1\}}, \dots, X_{t_n} + z \mathbb{I}_{\{t < t_n\}}\} - F_n| \leq |z|,$$

where the equality is justified by the following inequality :

$$\left\| \max\{X_{t_1} + z \mathbb{I}_{\{t < t_1\}}, \dots, X_{t_n} + z \mathbb{I}_{\{t < t_n\}}\} - F_n \right\|_{L^2([0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega)}^2 \leq T \int_{\mathbb{R}} z^2 \nu(dz).$$

Indeed, if $z \geq 0$, then

$$0 \leq \max\{X_{t_1} + z \mathbb{I}_{\{t < t_1\}}, \dots, X_{t_n} + z \mathbb{I}_{\{t < t_n\}}\} - F_n \leq z,$$

and, if $z < 0$, then

$$\begin{aligned} 0 &\leq F_n - \max\{X_{t_1} + z \mathbb{I}_{\{t < t_1\}}, \dots, X_{t_n} + z \mathbb{I}_{\{t < t_n\}}\} \\ &= F_n + \min\{-X_{t_1} + |z| \mathbb{I}_{\{t < t_1\}}, \dots, -X_{t_n} + |z| \mathbb{I}_{\{t < t_n\}}\} \\ &= \min\{F_n - X_{t_1} + |z| \mathbb{I}_{\{t < t_1\}}, \dots, F_n - X_{t_n} + |z| \mathbb{I}_{\{t < t_n\}}\} \\ &\leq |z|. \end{aligned}$$

This implies that $\sup_{n \geq 1} \|D^{(2)} F_n\|_{L^2([0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega)} \leq T \int_{\mathbb{R}} z^2 \nu(dz)$.

Consequently, $\sup_{n \geq 1} \|DF_n\|^2 \leq T(\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} z^2 \nu(dz))$ and by Theorem 5.5.6 we have that F is Malliavin differentiable. By the uniqueness of a weak limit, this means that taking the limit of $D_t^{(1)}F_n$ when n goes to infinity yields

$$D_t^{(1)}F = \sigma \mathbb{I}_{[0, \tau]}(t),$$

where τ is the first random time when the Lévy process X (not the Brownian motion W) reaches its supremum on $[0, T]$, and

$$D_{t,z}^{(2)}F = \sup_{0 \leq s \leq T} (X_s + z \mathbb{I}_{\{t < s\}}) - M_T.$$

Hence,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[D_t^{(1)}F \mid \mathcal{F}_t \right] &= \sigma \mathbb{P} \{ M_t < M_{t,T} \mid \mathcal{F}_t \} \\ &= \sigma \mathbb{P} \{ M_{T-t} > a \}, \end{aligned}$$

where $a = M_t - X_t$. Since $M_{t,T} - X_t$ is independent of $\mathcal{F}_t$ and has the same law as M_{T-t} , then using Equation (5.6.1) we get that

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[D_{t,z}^{(2)}F \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq T} (X_s + z \mathbb{I}_{\{t < s\}}) - M_T \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} [\max\{M_t, M_{t,T} + z\} \mid \mathcal{F}_t] - \mathbb{E} [M_T \mid \mathcal{F}_t] \\ &= M_t + \mathbb{E} [(M_{t,T} + z - M_t)^+ \mid \mathcal{F}_t] - \mathbb{E} [M_T \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E} [(M_{T-t} + z - a)^+] - \int_a^\infty \bar{F}_{T-t}(x) dx. \end{aligned}$$

where $a = M_t - X_t$. The martingale representation follows from the Clark-Ocone formula of Theorem 5.5.7. $\square$

This result extends the martingale representation of the running maximum of Brownian motion.

5.7. ACKNOWLEDGEMENTS

Partial funding in support of this work was provided by a doctoral scholarship of the Institut de Finance Mathématique de Montréal (IFM2) and a scholarship of the Institut de Sciences Mathématiques (ISM), as well as by grants from the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) and the Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies (FQRNT).

APPENDIX A : PROOF OF LEMMA 5.5.5

We have that

$$\sup_{k \geq 1} \|D^{(1)}F_k\|_{L^2([0,T] \times \Omega)} < \infty$$

and

$$\sup_{k \geq 1} \|D^{(2)}F_k\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega)} < \infty.$$

Since $L^2([0, T] \times \Omega)$ and $L^2([0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega)$ are reflexive Hilbert spaces, there exist a subsequence $(k_j)_{j \geq 1}$, an element α in $L^2([0, T] \times \Omega)$ and an element β in $L^2([0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega)$ such that $D^{(1)}F_{k_j}$ converges to α in the weak topology of $L^2([0, T] \times \Omega)$ and $D^{(2)}F_{k_j}$ converges to β in the weak topology of $L^2([0, T] \times \mathbb{R} \times \Omega)$. Consequently, for any $h \in L^2([0, T])$, $g \in L^2([0, T] \times \mathbb{R})$ and $f \in L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))$, we have that

$$\left\langle D^{(1)}F_{k_j}, h \otimes J_{(i_1, \dots, i_n)}(f) \right\rangle_{L^2([0,T] \times \Omega)} \longrightarrow \left\langle \alpha, h \otimes J_{(i_1, \dots, i_n)}(f) \right\rangle_{L^2([0,T] \times \Omega)}$$

and

$$\left\langle D^{(2)}F_{k_j}, g \otimes J_{(i_1, \dots, i_n)}(f) \right\rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega)} \longrightarrow \left\langle \beta, g \otimes J_{(i_1, \dots, i_n)}(f) \right\rangle_{L^2([0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega)}$$

when j goes to infinity.

Let

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)}(f^{(i_1, \dots, i_n)})$$

and

$$F_{k_j} = \mathbb{E}[F_{k_j}] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)}(f_{k_j}^{(i_1, \dots, i_n)})$$

be the chaos representations of F and F_{k_j} . By definition, we have that

$$\begin{aligned} D_t^{(1)}F_{k_j} &= f_{k_j}^{(1)}(t) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{i_k=1\}} J_{(i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_n)}(f_{k_j}^{(i_1, \dots, i_n)}(\cdot, t, \cdot) \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}^k}(t)). \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

By the linearity of the iterated integrals, the convergence of F_{k_j} toward F implies that

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} J_{(i_1, \dots, i_n)} \left(f^{(i_1, \dots, i_n)} - f_{k_j}^{(i_1, \dots, i_n)} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \left\| f^{(i_1, \dots, i_n)} - f_{k_j}^{(i_1, \dots, i_n)} \right\|_{L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))}^2 \end{aligned}$$

goes to 0 when k tends to infinity. Consequently, it implies that each $f_{k_j}^{(i_1, \dots, i_n)}$ converges to $f^{(i_1, \dots, i_n)}$ when j goes to infinity. So, using Proposition 5.4.1 and the expression for the derivative in Equation (5.7.1), we get that

$$\begin{aligned} & \langle D^{(1)}F_{k_j}, h \otimes J_{(i_1, \dots, i_n)}(f) \rangle_{L^2([0, T] \times \Omega)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^T \mathbb{E} [J_{(i_1, \dots, i_n)}(f_{k_j}^{(i_1, \dots, i_{k-1}, 1, i_k, \dots, i_n)}(\cdot, t, \cdot) \mathbb{I}_{\Sigma_n^k(t)}) J_{(i_1, \dots, i_n)}(f)] h(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^T \langle f_{k_j}^{(i_1, \dots, i_{k-1}, 1, i_k, \dots, i_n)}(\cdot, t, \cdot) \mathbb{I}_{\Sigma_n^k(t)}, f \rangle_{L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))} h(t) dt \end{aligned}$$

and, as j goes to infinity, this quantity tends to

$$\sum_{k=1}^{n+1} \int_0^T \langle f^{(i_1, \dots, i_{k-1}, 1, i_k, \dots, i_n)}(\cdot, t, \cdot) \mathbb{I}_{\Sigma_n^k(t)}, f \rangle_{L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))} h(t) dt.$$

This holds for any multi-index $(i_1, \dots, i_n)$ and functions h and f . Consequently,

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= f^{(1)}(t) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{i_k=1\}} J_{(i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_n)}(f^{(i_1, \dots, i_n)}(\cdot, t, \cdot) \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}^k(t)}) \end{aligned}$$

and F belongs to $\mathbb{D}^{(1)}$ with $D^{(1)}F = \alpha$ by the unicity of the weak limit. Moreover, for any weakly convergent subsequence the limit must be equal to $D^{(1)}F$ and this implies the weak convergence of the whole sequence. The same argument works to prove that F belongs to $\mathbb{D}^{(2)}$ and that $(D^{(2)}F_k)_{k \geq 1}$ converges weakly to $D^{(2)}F$ in $L^2(\lambda \times \nu \times \mathbb{P})$.

APPENDIX B : INTERPRETATION OF THE DIRECTIONAL DERIVATIVES

We consider the product probability space

$$(\Omega_W \times \Omega_N, \mathcal{F}_W \times \mathcal{F}_N, \mathbb{P}_W \times \mathbb{P}_N)$$

which is the product of the canonical space of the Brownian motion W and the canonical space of the pure-jump Lévy process

$$N_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z \tilde{N}(ds, dz)$$

previously defined in Equation (5.2.7); see Solé et al. [75] for more details on this last canonical space. Since $L^2(\Omega_W \times \Omega_N)$ is isometric to $L^2(\Omega_W; L^2(\Omega_N))$ and to $L^2(\Omega_N; L^2(\Omega_W))$ as Hilbert spaces, we will use the theory of the Brownian Malliavin derivative and the Poisson random measure Malliavin derivative for Hilbert-valued

random variables (see [57] and [60]). This is possible because both operators are closable.

The Brownian Malliavin derivative for Hilbert-valued random variables will be denoted by D^W and the Poisson random measure Malliavin derivative for Hilbert-valued random variables by D^N . If we define $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_t)_{t \in [0, T]}$ on $\Omega_W \times \Omega_N$ by

$$\widetilde{W}_t(\omega, \omega') = \omega(t)$$

and $\widetilde{N} = (\widetilde{N}_t)_{t \in [0, T]}$ by

$$\widetilde{N}_t(\omega, \omega') = \omega'(t),$$

then the process $\widetilde{X}_t = \mu t + \sigma \widetilde{W}_t + \widetilde{N}_t$ has the same distribution as our initial Lévy process $X_t = \mu t + \sigma W_t + N_t$. For notational simplicity, in what follows we will write $W_t(\omega)$ and $N_t(\omega')$ instead of $\widetilde{W}_t(\omega, \omega')$ and $\widetilde{N}_t(\omega, \omega')$ respectively.

We will proceed by induction. If $F = \int_0^T f(t) W(dt)$, then clearly

$$D_t^{(1)} F = D_t^W F = f(t) \quad \text{and} \quad D_{t,z}^{(2)} F = D_{t,z}^N F = 0,$$

while if $G = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g(t, z) \widetilde{N}(dt, dz)$, then

$$D_t^{(1)} G = D_t^W G = 0 \quad \text{and} \quad D_{t,z}^{(2)} G = D_{t,z}^N G = g(t, z).$$

Thus, for a fixed $n \geq 1$, we assume that $D^{(1)}$ and D^W coincide for any random variable with chaos expansion of order n . First, let F be of the form

$$F = J_{(i_1, \dots, i_n, 1)}(f_1 \otimes \dots \otimes f_n \otimes f_{n+1}) = \int_0^T g(s) f_{n+1}(s) W(ds),$$

where

$$g(s) = J_{(i_1, \dots, i_n)}(f_1 \otimes \dots \otimes f_n \mathbb{I}_{\Sigma_n(s)}). \quad (5.7.2)$$

To ease the notation, $J_{(i_1, \dots, i_n)}(f_1 \dots f_n)$ will mean $J_{(i_1, \dots, i_n)}(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)$. Using the commutativity relationship of Remark 5.5.3 and the hypothesis of induction, we have that

$$\begin{aligned} D_t^{(1)} F &= f_{n+1}(t)g(t) + \int_t^T f_{n+1}(s) D_t^{(1)} g(s) W(ds) \\ &= f_{n+1}(t)g(t) + \int_t^T f_{n+1}(s) D_t^W g(s) W(ds), \end{aligned}$$

which is exactly $D_t^W F$, by the classical commutativity relationship of Equation (5.1.3).

Secondly, now let F be of the form

$$F = J_{(i_1, \dots, i_n, 2)}(f_1 \otimes \dots \otimes f_n \otimes f_{n+1}) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} g(s-) f_{n+1}(s, z) \widetilde{N}(ds, dz).$$

We will use of the *integration by parts formula* for semimartingales, that is

$$[Y^{(1)}, Y^{(2)}]_t = Y_t^{(1)} Y_t^{(2)} - \int_0^t Y_{s-}^{(1)} dY_s^{(2)} - \int_0^t Y_{s-}^{(2)} dY_s^{(1)}$$

if $Y^{(1)}$ and $Y^{(2)}$ are semimartingales; see Protter [67] for details. If $Y_t^{(1)} = g(t)$ and $Y_t^{(2)} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(s, z) \tilde{N}(ds, dz)$, we get that

$$\begin{aligned} F = g(T) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(s, z) \tilde{N}(ds, dz) \\ - \int_0^T \int_0^{t-} \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(s, z) \tilde{N}(ds, dz) dg(t) \\ - \left[g(\cdot), \int_0^\cdot \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(s, z) \tilde{N}(ds, dz) \right]_T. \end{aligned}$$

We now consider the two cases where $i_n = 1$ and $i_n = 2$ separately. We have that

$$g(t) = \begin{cases} \int_0^t h(s) f_n(s) W(ds) & \text{if } i_n = 1; \\ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(s-) f_n(s, z) \tilde{N}(ds, dz) & \text{if } i_n = 2, \end{cases}$$

where $h(s) = J_{(i_1, \dots, i_n)}(f_1 \otimes \dots \otimes f_{n-1} \mathbb{I}_{\Sigma_{n-1}(s)})$. If $i_n = 1$, then

$$\begin{aligned} F = g(T) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(t, z) \tilde{N}(dt, dz) \\ - \int_0^T \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(s, y) \tilde{N}(ds, dy) \right] h(t) f_n(t) W(dt). \end{aligned}$$

If $i_n = 2$, then

$$\begin{aligned} F = g(T) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(t, z) \tilde{N}(dt, dz) \\ - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^{t-} \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(s, y) \tilde{N}(ds, dy) \right] h(t-) f_n(t, z) \tilde{N}(dt, dz) \\ - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} h(t-) f_n(t, z) f_{n+1}(t, z) N(dt, dz). \end{aligned}$$

Note that the last term is an iterated integral of order n (with respect to $N(dt, dz)$ for the outermost integral, not $\tilde{N}(dt, dz)$) since h is an iterated integral of order $n - 1$. So, by the hypothesis of induction, $D^{(1)}$ and D^W agree for this functional. This is also true for $g(T)$.

Consequently, we repeat the previous steps backward with $D^{(1)}$. If $i_n = 1$, then

$$\begin{aligned}
D_t^W F &= (D_t^W g(T)) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(s, y) \tilde{N}(ds, dy) \\
&\quad - h(t) f_n(t) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(s, y) \tilde{N}(ds, dy) \\
&\quad - \int_t^T \left[\int_0^s \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(r, y) \tilde{N}(dr, dy) \right] (D_t^W h(s)) f_n(s) W(ds) \\
&= (D_t^{(1)} g(T)) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(s, y) \tilde{N}(ds, dy) \\
&\quad - h(t) f_n(t) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(s, y) \tilde{N}(ds, dy) \\
&\quad - \int_t^T \left[\int_0^s \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(r, y) \tilde{N}(dr, dy) \right] (D_t^{(1)} h(s)) f_n(s) W(ds) \\
&= D_t^{(1)} \left(g(T) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(s, y) \tilde{N}(ds, dy) \right) \\
&\quad - D_t^{(1)} \int_0^T \left[\int_0^s \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(r, y) \tilde{N}(dr, dy) \right] h(s) f_n(s) W(ds) \\
&= D_t^{(1)} \left(g(T) \int_0^T \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(s, y) \tilde{N}(ds, dy) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T \left[\int_0^s \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(r, y) \tilde{N}(dr, dy) \right] dg(s) \right) \\
&= D_t^{(1)} F,
\end{aligned}$$

and if $i_n = 2$, then the same steps are valid since D^W and $D^{(1)}$ coincide on the extra term.

The equivalence between $D^{(1)}$ and D^W follows from the following fact : for a fixed $n \geq 1$ and a fixed multi-index $(i_1, \dots, i_n)$, the linear subspace of $L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))$ generated by functions of the form

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n, \tag{5.7.3}$$

is dense. Indeed, for $f \in L^2(\Sigma_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{X}))$, there exists a sequence $(f_n)_{n \geq 1}$, whose elements are finite sums of functions as in Equation (5.7.3), that converges to f . We know that $D^{(1)}$ and D^W are equal for each f_n . Since $D^{(1)}$ and D^W are continuous (see Lemma 5.5.5), they also coincide for f .

We can apply the same machinery to show that D^N and $D^{(2)}$ are the same.

Chapitre 6

DISTRIBUTION OF THE PRESENT VALUE OF DIVIDEND PAYMENTS IN A LÉVY RISK MODEL

Résumé

Dans cet article, nous utilisons le problème de sortie d'un intervalle par un processus de Lévy pour obtenir la loi de la valeur actualisée des dividendes versés par une compagnie d'assurances. Dans ce modèle de théorie du risque, l'avoir de la compagnie est modélisé par un processus de Lévy n'admettant que des sauts dont la valeur est négative.

Abstract

In this short paper, we show how fluctuation identities for Lévy processes with no positive jumps yield the distribution of the present value of dividend payments until ruin in a Lévy insurance risk model with a dividend barrier.

6.1. INTRODUCTION

Intuitively, an insurance risk model with a dividend barrier describes the situation in which the premiums are paid out as dividends to shareholders whenever the surplus process reaches a certain level. A quantity of interest in this model with a constant barrier is the so-called present value of all dividends paid until the time of ruin. The distribution of this quantity was derived by Dickson and Waters [22] and by Gerber and Shiu [31] for the classical compound Poisson risk process, and then by Li [50] when the underlying process is the classical risk process perturbed by a Brownian motion. For more on the distribution of the dividend payments, see Dickson and Waters [22], Gerber and Shiu [31], Li [50], and the references therein.

Many risk processes are in fact special Lévy processes with no positive jumps. The classical compound Poisson risk process perturbed by a Brownian motion is one of them. More generally, some models have used the classical compound Poisson risk process perturbed by a Lévy process as their risk process. See for instance Furrer [29], Yang and Zhang [76], Huzak et al. [37], and Garrido and Morales [30]. Another risk process is considered by Klüppelberg et al. [44] : it is a Lévy process which drifts to infinity. For a nice interpretation of the Lévy-Itô decomposition of a Lévy process in the context of risk theory, see Klüppelberg and Kyprianou [43].

In this paper, we obtain explicit expressions for the moments of the present value of all dividends paid until ruin in an insurance Lévy risk model with a constant barrier. Our approach uses the solution of the two-sided exit problem for a spectrally negative Lévy process, i.e. a Lévy process with no positive jumps. For such risk processes, Kyprianou and Palmowski [48] have simultaneously derived the same results and even more general distributional quantities : see Theorem 1 and Corollary 1. Their methodology relies on Itô's excursion theory instead of fluctuation identities.

6.2. A LÉVY RISK MODEL AND THE EXIT PROBLEM

Let $U = (U(t))_{t \geq 0}$ be a Lévy process with no positive jumps. The law of U such that $U(0) = u$ will be denoted by $\mathbb{P}_u$ and the corresponding expectation by $\mathbb{E}_u$. The reader not familiar with Lévy processes is referred to Bertoin [9] for more details.

6.2.1. Exit from a finite interval and the scale functions

The following material is mostly taken from Bertoin [10]. Since the Lévy process U has no positive jumps its Laplace transform is given by

$$\mathbb{E}_0 \left[e^{\lambda U(t)} \right] = e^{t\psi(\lambda)}$$

for $\lambda \geq 0$ and $t \geq 0$. In this case, the Laplace exponent ψ is convex and

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \psi(\lambda) = \infty.$$

Thus, we can define its right-inverse function $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ by

$$\psi(\Phi(\lambda)) = \lambda, \quad \lambda \geq 0.$$

We now define the so-called scale functions $\{W_q; q \geq 0\}$ of the process U . For each q , $W_q: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ is the unique strictly increasing and continuous function with

Laplace transform

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W_q(x) dx = \frac{1}{\psi(\lambda) - q},$$

where $\lambda > \Phi(q)$. Sometimes the scale functions are denoted by $W^{(q)}$.

If one is interested in the two-sided exit problem, then the scale functions arise naturally. Indeed, let a be a positive real number and define

$$T_{(0,a)} = \inf \{t \geq 0 \mid U(t) \notin (0, a)\}.$$

When the process U starts from within the interval, i.e. when $U(0) = u$ for $u \in (0, a)$, the random time $T_{(0,a)}$ is the first exit time of U from this interval. Its Laplace transform on the event where the process U leaves the interval at the upper boundary is given by

$$\mathbb{E}_u [e^{-qT_{(0,a)}}; U(T_{(0,a)}) = a] = \frac{W_q(u)}{W_q(a)}, \quad q \geq 0. \quad (6.2.1)$$

Consequently, when $q = 0$,

$$\mathbb{P}_u \{U(T_{(0,a)}) = a\} = \frac{W_0(u)}{W_0(a)}. \quad (6.2.2)$$

Throughout the paper we will assume that either the sample paths of U have unbounded variation or the Lévy measure of U is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. The first condition is satisfied if U has a Gaussian component. Under one of these assumptions, the scale functions W_q are differentiable; see Doney [23] or Chan and Kyprianou [13]. The differentiability of the scale functions will be useful in the sequel. The scale functions are also differentiable if we impose different assumptions on the spectrally negative Lévy process U ; see Chan and Kyprianou [13] for more details.

6.2.2. A Lévy risk model with dividend barrier

Let b be a positive real number. If the process U starts from $u \in (0, b)$, then we define

$$D(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} (U(s) - b)^+$$

and

$$U_b(t) = U(t) - D(t)$$

for every $t \geq 0$. One can think of $U_b = (U_b(t))_{t \geq 0}$ as the surplus process of an insurance company that pays out as dividends any capital above the level b . Thus, $D(t)$ is the total amount of dividends paid up to time t .

We define the ruin time of this risk model with barrier by

$$T = \inf \{t \geq 0 \mid U_b(t) \leq 0\}.$$

Let δ be a nonnegative real number. Our main goal is to compute the distribution of

$$D = \int_0^T e^{-\delta t} dD(t).$$

This quantity is the present value of all dividends paid until the time of ruin T , where δ can be interpreted as the force of interest. If $\delta = 0$, then $D = D(T)$. The law of D will be expressed in terms of the scale functions $\{W_q; q \geq 0\}$.

Finally, for each $k \geq 1$, we introduce

$$V_k(u) = \mathbb{E}_u \left[D^k \right],$$

the k -th moment of D when the process U starts from u . The mean of D was previously computed by Zhou [77].

6.3. THE MOMENTS WHEN STARTING FROM b

First, we compute the moments of D when U starts from b , the barrier level.

Proposition 6.3.1

For $k \geq 1$,

$$V_k(b) = k! \prod_{i=1}^k \frac{W_{i\delta}(b)}{W'_{i\delta}(b)}. \quad (6.3.1)$$

6.3.1. Proof of Proposition 6.3.1

First, we obtain a lower bound for $V_k(b)$. For each $n \geq 1$, we introduce an exit time T_n defined by

$$T_n = \inf \{t \geq 0 \mid U(t) \notin (1/n, b + 1/n)\}.$$

Since U has no positive jumps, we have

$$V_k(b) = \mathbb{E}_b \left[D^k; U(T_n) \leq 1/n \right] + \mathbb{E}_b \left[D^k; U(T_n) = b + 1/n \right].$$

Since T_n is strictly less than T on the event $\{U(T_n) = b + 1/n\}$, using the Binomial Theorem and the strong Markov property at time T_n , we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_b \left[D^k; U(T_n) = b + 1/n \right] \\ = \sum_{j=0}^k C_j^k \mathbb{E}_b \left[e^{-(k-j)\delta T_n} \left(\int_0^{T_n} e^{-\delta t} dD(t) \right)^j; U(T_n) = b + 1/n \right] V_{k-j}(b), \end{aligned}$$

where $C_j^k = \binom{k}{j}$. Applying the integration by parts formula to $\int_0^{T_n} e^{-\delta t} dD(t)$, using the fact that $D(T_n) = 1/n$ on $\{U(T_n) = b + 1/n\}$ and using once again the Binomial Theorem, we get

$$\begin{aligned} V_k(b) = \mathbb{E}_b \left[D^k; U(T_n) \leq 1/n \right] \\ + \sum_{j=0}^k C_j^k V_{k-j}(b) \sum_{i=0}^j C_i^j \delta^{j-i} \left(\frac{1}{n} \right)^i e(i, j, k; n), \quad (6.3.2) \end{aligned}$$

where

$$e(i, j, k; n) = \mathbb{E}_b \left[e^{-(k-j+i)\delta T_n} \left(\int_0^{T_n} e^{-\delta t} D(t) dt \right)^{j-i}; U(T_n) = b + 1/n \right].$$

Keeping only the terms for $j = i = 0$ and $j = i = 1$ and using the fluctuation identity of Equation (6.2.1), we get

$$V_k(b) \geq V_k(b) \frac{W_{k\delta}(b)}{W_{k\delta}(b + 1/n)} + k V_{k-1}(b) \frac{1}{n} \frac{W_{k\delta}(b)}{W_{k\delta}(b + 1/n)}. \quad (6.3.3)$$

Secondly, we obtain an upper bound for $V_k(b)$. For each $n \geq 1$, we now define a new exit time T'_n by

$$T'_n = \inf \{t \geq 0 \mid U(t) \notin (0, b + 1/n)\}.$$

For each T'_n , we also define

$$S_n = \inf \{t \geq T'_n \mid U_b(t) \leq 0\}.$$

This is the time of ruin in the model with barrier when U starts at the random time T'_n . Then, using similar arguments as before, for instance the strong Markov property at time T'_n , we get

$$\begin{aligned} V_k(b) \leq \mathbb{E}_b \left[\left(\int_0^{T'_n} e^{-\delta t} dD(t) \right)^k; U(T'_n) \leq 0 \right] \\ + \sum_{j=0}^k C_j^k V_{k-j}(b) \sum_{i=0}^j C_i^j \delta^{j-i} \left(\frac{1}{n} \right)^i e'(i, j, k; n), \quad (6.3.4) \end{aligned}$$

where

$$e'(i, j, k; n) = \mathbb{E}_b \left[e^{-(k-j+i)\delta T'_n} \left(\int_0^{T'_n} e^{-\delta t} D(t) dt \right)^{j-i}; U(T'_n) = b + 1/n \right].$$

Before going any further, we give estimates on the terms involved in the upper bound of Equation (6.3.4) :

– Let l be any positive integer. Using Equation (6.2.2), we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_b \left[\left(\int_0^{T'_n} e^{-\delta t} dD(t) \right)^l; U(T'_n) \leq 0 \right] &\leq \left(\frac{1}{n} \right)^l \mathbb{P}_b \{U(T'_n) \leq 0\} \\ &= \left(\frac{1}{n} \right)^l \left(1 - \frac{W_0(b)}{W_0(b + 1/n)} \right). \end{aligned}$$

– Let l and m be any nonnegative integers. Then,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_b \left[e^{-m\delta T'_n} \left(\int_0^{T'_n} e^{-\delta t} D(t) dt \right)^l; U(T'_n) = b + 1/n \right] \\ &\leq \left(\frac{1}{n} \right)^l \mathbb{E}_b \left[\left(\int_0^{T'_n} e^{-\delta t} dt \right)^l; U(T'_n) = b + 1/n \right] \\ &\leq \begin{cases} \frac{W_0(b)}{W_0(b + 1/n)} & \text{if } l = 0; \\ \left(\frac{1}{n} \right)^l \left(\frac{W_0(b)}{W_0(b + 1/n)} - \frac{W_\delta(b)}{\delta W_\delta(b + 1/n)} \right) & \text{if } l \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Since the scale functions are continuous, if $l \geq 1$, then we have that

$$\mathbb{E}_b \left[\left(\int_0^{T'_n} e^{-\delta t} dD(t) \right)^l; U(T'_n) \leq 0 \right] = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

and

$$\mathbb{E}_b \left[e^{-m\delta T'_n} \left(\int_0^{T'_n} e^{-\delta t} D(t) dt \right)^l; U(T'_n) = b + 1/n \right] = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

when n goes to infinity. Consequently, if $j > i$,

$$e'(i, j, k; n) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

This means that we have to deal with the terms for $j = i = 0$ and $j = i = 1$ in Equation (6.3.4) carefully.

We now complete the proof. For $k \geq 1$, using the lower bound of Equation (6.3.3), the upper bound of Equation (6.3.4), the fluctuation identity of Equation (6.2.1), and the previous estimates, we have

$$V_k(b) = V_k(b) \frac{W_{k\delta}(b)}{W_{k\delta}(b + 1/n)} + kV_{k-1}(b) \frac{1}{n} \frac{W_{k\delta}(b)}{W_{k\delta}(b + 1/n)} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (6.3.5)$$

Solving Equation (6.3.5) for $V_k(b)$ and taking the limit, we get

$$\begin{aligned} V_k(b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_{k\delta}(b + 1/n)}{n(W_{k\delta}(b + 1/n) - W_{k\delta}(b))} k V_{k-1}(b) \frac{W_{k\delta}(b)}{W_{k\delta}(b + 1/n)} \\ &= \frac{W_{k\delta}(b)}{W'_{k\delta}(b)} k V_{k-1}(b). \end{aligned}$$

In the last line, we used the fact that under our assumptions the scale functions are differentiable. Since $V_0(b) = 1$, Equation (6.3.1) follows.

6.4. THE MOMENTS WHEN STARTING FROM u

Here is the main result of the paper, i.e. the moments of D when U starts from $u \in (0, b)$.

Proposition 6.4.1

For $k \geq 1$,

$$V_k(u) = k! \frac{W_{k\delta}(u)}{W_{k\delta}(b)} \prod_{i=1}^k \frac{W_{i\delta}(b)}{W'_{i\delta}(b)}.$$

PROOF. Recall that $T_{(0,b)} = \inf \{t \geq 0 \mid U(t) \notin (0, b)\}$. Since $T_{(0,b)}$ is strictly less than T on the event $\{U(T_{(0,b)}) = b\}$, by the strong Markov property at time $T_{(0,b)}$, we get that

$$\begin{aligned} V_k(u) &= \mathbb{E}_u \left[\left(\int_{T_{(0,b)}}^T e^{-\delta t} dD(t) \right)^k ; U(T_{(0,b)}) = b \right] \\ &= \mathbb{E}_u \left[e^{-k\delta T_{(0,b)}} ; U(T_{(0,b)}) = b \right] V_k(b) \\ &= \frac{W_{k\delta}(u)}{W_{k\delta}(b)} V_k(b). \end{aligned}$$

The result follows by Proposition 6.3.1. □

6.5. THE LAPLACE TRANSFORM

Since we have all the moments of $D = \int_0^T e^{-\delta t} dD(t)$, we can explicit the expression of its Laplace transform. We know, from Proposition 6.4.1 (or Proposition 6.3.1), that

$$V_1(b) = \mathbb{E}_b \left[\int_0^T e^{-\delta t} dD(t) \right] = \frac{W_\delta(b)}{W'_\delta(b)}.$$

Hence, when δ goes to infinity, $W_\delta(b)/W'_\delta(b)$ decreases to 0.

Corollary 6.5.1

If $\delta > 0$, then for every real number λ , the Laplace transform of D exists and is given by

$$\mathbb{E}_u \left[e^{\lambda D} \right] = 1 + \sum_{k \geq 1} \lambda^k \frac{W_{k\delta}(u)}{W_{k\delta}(b)} \prod_{i=1}^k \frac{W_{i\delta}(b)}{W'_{i\delta}(b)}.$$

PROOF. We first prove that

$$\sum_{k \geq 0} \frac{|\lambda|^k}{k!} V_k(u) \tag{6.5.1}$$

is finite. Since $\delta > 0$, from the remark preceding the corollary, we can choose j large enough such that

$$0 \leq |\lambda| \frac{W_{j\delta}(b)}{W'_{j\delta}(b)} < 1.$$

We also know from Equation (6.2.1) that, for every $q \geq 0$,

$$\frac{W_q(u)}{W_q(b)} \leq 1.$$

Then, for any $k \geq j$, we have that

$$\begin{aligned} \frac{|\lambda|^k}{k!} V_k(u) &\leq \prod_{i=1}^k \left(|\lambda| \frac{W_{i\delta}(b)}{W'_{i\delta}(b)} \right) \\ &\leq \left(|\lambda|^{j-1} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{W_{i\delta}(b)}{W'_{i\delta}(b)} \right) \left(|\lambda| \frac{W_{j\delta}(b)}{W'_{j\delta}(b)} \right)^{k-j+1}. \end{aligned}$$

Therefore, the series in Equation (6.5.1) is finite. The statement of the corollary follows from the monotone convergence theorem when $\lambda > 0$ and from Lebesgue's dominated convergence theorem when $\lambda \leq 0$. $\square$

As mentioned before, if we assume that there is no force of interest, then the present value of all dividends paid until the time of ruin is equal to the total amount of dividends paid up to the time of ruin, i.e. if $\delta = 0$, then $D = D(T)$.

Corollary 6.5.2

For $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}_u \left[D(T)^k \right] = k! \frac{W_0(u)}{W_0(b)} \left(\frac{W_0(b)}{W'_0(b)} \right)^k$$

and then

$$\mathbb{E}_u \left[e^{-\lambda D(T)} \right] = 1 - \frac{\lambda W_0(u)}{W'_0(b) + \lambda W_0(b)}$$

for every $\lambda > -W'_0(b)/W_0(b)$.

Observe that under $\mathbb{P}_b$, the moments and the Laplace transform of $D(T)$ are those of a random variable following an exponential distribution with mean $W_0(b)/W'_0(b)$. Indeed, when U starts from b , the Laplace transform of $D(T)$ is given by

$$\mathbb{E}_b \left[e^{-\lambda D(T)} \right] = \frac{W'_0(b)}{W'_0(b) + \lambda W_0(b)}$$

for every $\lambda > -W'_0(b)/W_0(b)$.

6.6. ACKNOWLEDGEMENTS

We wish to thank an anonymous referee for a careful reading of the paper that helped us improve Corollary 1 and for bringing to our attention the interesting paper by Kyprianou and Palmowski [48]. We would like to thank Hansjörg Albrecher who also brought that paper to our attention during the review process.

Partial funding in support of this work was provided by a doctoral scholarship of the Institut de Finance Mathématique de Montréal (IFM2), as well as by a Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) grant.

CONCLUSION

Que le lecteur soit sans crainte, nous ne ferons pas un *autre* résumé de cette thèse... Voici plutôt quelques idées de recherche en lien avec les résultats de la thèse. Il s'agit plus d'un *brainstorming* que d'une présentation de travaux déjà en cours.

La suite que nous aimerions donner à *Malliavin calculus and Clark-Ocone formula for functionals of a square-integrable Lévy process* [69] est l'application des résultats en finance. La représentation martingale explicite obtenue pour le maximum suscite des questionnements quant à la possibilité de solutionner certains problèmes de couverture dans des marchés incomplets basés sur des processus de Lévy. Les outils du calcul de Malliavin développés devraient également pouvoir être appliqués dans des contextes financiers assez généraux : calcul de sensibilité à la *Fournié et al.* dans divers modèles actuariels par exemple et dans des modèles de risque comme l'ont fait Privault et Wei [66]. Dans ce dernier cas, on pourrait remplacer le processus de Poisson composé par un processus de Lévy plus général.

Dans *Distribution of the present value of dividend payments in a Lévy risk model* [70], nous avons considéré la situation où il y avait une seule barrière à partir de laquelle les primes récoltées étaient versées sous forme de dividendes. Qu'en est-il de la situation où il y a n barrières ? Dans ce nouveau modèle, entre deux barrières, on verse sous forme de dividendes une partie des primes récoltées : voir l'article de Albrecher et Hartinger [2] pour une explication de ce modèle basé sur un processus de Poisson composé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. Aase, B. Øksendal, N. Privault, and J. Ubøe. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. *Finance Stoch.*, 4(4) :465–496, 2000.
- [2] H. Albrecher and J. Hartinger. A risk model with multi-layer dividend strategy. *N. Am. Actuar. J.*, 11(1), 2007.
- [3] V. Bally, M.-P. Bavouzet, and M. Messaoud. Integration by parts formula for locally smooth laws and applications to sensitivity computations. *Ann. Appl. Probab.*, 17(1) :33–66, 2007.
- [4] M.-P. Bavouzet-Morel and M. Messaoud. Computation of Greeks using Malliavin’s calculus in jump type market models. *Electron. J. Probab.*, 11, 2006.
- [5] E. Benhamou. Optimal Malliavin weighting function for the computation of the Greeks. *Math. Finance*, 13(1) :37–53, 2003.
- [6] F. E. Benth, G. Di Nunno, A. Løkka, B. Øksendal, and F. Proske. Explicit representation of the minimal variance portfolio in markets driven by Lévy processes. *Math. Finance*, 13(1) :55–72, 2003.
- [7] H.-P. Bermin. Hedging lookback and partial lookback options using Malliavin calculus. *Applied Mathematical Finance*, 7 :75–100, 2000.
- [8] G. Bernis, E. Gobet, and A. Kohatsu-Higa. Monte Carlo evaluation of Greeks for multidimensional barrier and lookback options. *Math. Finance*, 13(1) :99–113, 2003.
- [9] J. Bertoin. *Lévy processes*. Cambridge University Press, 1996.
- [10] J. Bertoin. Exponential decay and ergodicity of completely asymmetric Lévy processes in a finite interval. *Ann. Appl. Probab.*, 7(1) :156–169, 1997.
- [11] K. Bichteler, J.-B. Gravereaux, and J. Jacod. *Malliavin calculus for processes with jumps*. Gordon and Breach Science Publishers, 1987.
- [12] E. A. Carlen and É. Pardoux. Differential calculus and integration by parts on Poisson space. In *Stochastics, algebra and analysis in classical and quantum dynamics*, volume 59, pages 63–73. Kluwer, 1990.

- [13] T. Chan and A. E. Kyprianou. Smoothness of scale functions for spectrally negative Lévy processes. *preprint*, 2006.
- [14] J. M. C. Clark. The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. *Ann. Math. Statist.*, 41 :1282–1295, 1970.
- [15] A. Conze and R. Viswanathan. Path dependent options : the case of lookback options. *The Journal of Finance*, 46(5) :1893–1907, 1991.
- [16] M. H. A. Davis. Martingale representation and all that. In *Advances in control, communication networks, and transportation systems*, Systems Control Found. Appl., pages 57–68. Birkhäuser Boston, 2005.
- [17] M. H. A. Davis and M. P. Johansson. Malliavin Monte Carlo Greeks for jump diffusions. *Stochastic Process. Appl.*, 116(1) :101–129, 2006.
- [18] C. Dellacherie. Intégrales stochastiques par rapport aux processus de Wiener ou de Poisson. In *Séminaire de Probabilités, VIII*, pages 25–26. Lecture Notes in Math., Vol. 381. Springer, 1974.
- [19] C. Dellacherie, B. Maisonneuve, and P.-A. Meyer. *Probabilités et potentiel*. Chapitres XVII à XXIV : Compléments aux calculs stochastiques. Hermann, 1992.
- [20] A. Dermoune. Distributions sur l’espace de P. Lévy et calcul stochastique. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 26(1) :101–119, 1990.
- [21] G. Di Nunno. Stochastic integral representations, stochastic derivatives and minimal variance hedging. *Stoch. Stoch. Rep.*, 73(1-2) :181–198, 2002.
- [22] D. C. M. Dickson and H. R. Waters. Some optimal dividends problems. *Astin Bull.*, 34(1) :49–74, 2004.
- [23] R. A. Doney. Some excursion calculations for spectrally one-sided Lévy processes. In *Séminaire de Probabilités XXXVIII*, volume 1857 of *Lecture Notes in Math.*, pages 5–15. Springer, 2005.
- [24] Y. El-Khatib and N. Privault. Computations of Greeks in a market with jumps via the Malliavin calculus. *Finance Stoch.*, 8(2) :161–179, 2004.
- [25] M. Émery. On the Azéma martingales. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 66–87. Springer, 1989.
- [26] M. Émery. On the chaotic representation property for martingales. In *Probability theory and mathematical statistics (St. Petersburg, 1993)*, pages 155–166. Gordon and Breach, 1996.
- [27] W. Feller. The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. *Ann. Math. Statistics*, 22 :427–432, 1951.

- [28] É. Fournié, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions, and N. Touzi. Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. *Finance Stoch.*, 3(4) :391–412, 1999.
- [29] H. Furrer. Risk processes perturbed by α -stable Lévy motion. *Scand. Actuar. J.*, (1) :59–74, 1998.
- [30] J. Garrido and M. Morales. On the expected discounted penalty function for Lévy risk processes. *N. Am. Actuar. J.*, 10(4) :196–218, 2006.
- [31] H. U. Gerber and E. S. W. Shiu. Optimal dividends : analysis with Brownian motion. *N. Am. Actuar. J.*, 8(1) :1–20, 2004.
- [32] R. Goyer. Analyse de l'identité collective des mouvements sociaux : le cas des Mères de la Place de Mai pendant la transition démocratique en Argentine (1982-1987). Master's thesis, Université de Montréal, 2006.
- [33] S. E. Graversen, G. Peskir, and A. N. Shiryaev. Stopping Brownian motion without anticipation as close as possible to its ultimate maximum. *Theory of Probability and its Applications*, 45(1) :125–136, 2001.
- [34] J. M. Harrison and S. R. Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading : complete markets. *Stochastic Process. Appl.*, 15(3) :313–316, 1983.
- [35] U. G. Haussmann. On the integral representation of functionals of Itô processes. *Stochastics*, 3(1) :17–27, 1979.
- [36] H. He, W. P. Keirstead, and J. Rebholz. Double lookbacks. *Math. Finance*, 8(3) :201–228, 1998.
- [37] M. Huzak, M. Perman, H. Šikić, and Z. Vondraček. Ruin probabilities and decompositions for general perturbed risk processes. *Ann. Appl. Probab.*, 14(3) :1378–1397, 2004.
- [38] K. Itô. Multiple Wiener integral. *J. Math. Soc. Japan*, 3 :157–169, 1951.
- [39] K. Itô. Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 81 :253–263, 1956.
- [40] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*. Springer-Verlag, 1987.
- [41] I. Karatzas, D. L. Ocone, and J. Li. An extension of Clark's formula. *Stochastics Stochastics Rep.*, 37(3) :127–131, 1991.
- [42] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer-Verlag, second edition, 1991.
- [43] C. Klüppelberg and A. E. Kyprianou. On extreme ruinous behaviour of Lévy insurance risk processes. *J. Appl. Probab.*, 43 :594–598, 2006.
- [44] C. Klüppelberg, A. E. Kyprianou, and R. A. Maller. Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes. *Ann. Appl. Probab.*, 14(4) :1766–1801, 2004.

- [45] A. M. Kulik. Malliavin calculus for Lévy processes with arbitrary Lévy measures. *Theory of Probability and its Applications*, (72) :75–92, 2006.
- [46] H. Kunita. Representation of martingales with jumps and applications to mathematical finance. In *Stochastic analysis and related topics in Kyoto*, pages 209–232. Math. Soc. Japan, 2004.
- [47] H. Kunita and S. Watanabe. On square integrable martingales. *Nagoya Math. J.*, 30 :209–245, 1967.
- [48] A. E. Kyprianou and Z. Palmowski. Distributional study of de Finetti’s dividend problem for a general Lévy insurance risk process. *J. Appl. Probab.*, 44(2), 2007.
- [49] J. A. León, J. L. Solé, F. Utzet, and J. Vives. On Lévy processes, Malliavin calculus and market models with jumps. *Finance Stoch.*, 6(2) :197–225, 2002.
- [50] S. Li. The distribution of the dividend payments in the compound Poisson risk model perturbed by a diffusion. *Scand. Actuar. J.*, (2) :73–85, 2006.
- [51] A. Løkka. Martingale representation of functionals of Lévy processes. *Stochastic Anal. Appl.*, 22(4) :867–892, 2004.
- [52] E. Lytvynov. Orthogonal decompositions for Lévy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 6(1) :73–102, 2003.
- [53] J. Ma, P. Protter, and J. San Martin. Anticipating integrals for a class of martingales. *Bernoulli*, 4(1) :81–114, 1998.
- [54] P. Malliavin. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. In *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976)*, pages 195–263. Wiley, 1978.
- [55] P.-A. Meyer. Un cours sur les intégrales stochastiques. In *Séminaire de Probabilités, X*, volume 511 of *Lecture Notes in Math.*, pages 245–400. Springer, 1976.
- [56] M. Musiela and M. Rutkowski. *Martingale methods in financial modelling*. Springer-Verlag, 1997.
- [57] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*. Springer-Verlag, 1995.
- [58] D. Nualart and W. Schoutens. Chaotic and predictable representations for Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.*, 90(1) :109–122, 2000.
- [59] D. Nualart and J. Vives. Continuité absolue de la loi du maximum d’un processus continu. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 307(7) :349–354, 1988.
- [60] D. Nualart and J. Vives. Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space. In *Séminaire de Probabilités, XXIV, 1988/89*, volume 1426 of *Lecture Notes in Math.*, pages 154–165. Springer, 1990.

- [61] D. Ocone. Malliavin's calculus and stochastic integral representations of functionals of diffusion processes. *Stochastics*, 12(3-4) :161–185, 1984.
- [62] D. L. Ocone and I. Karatzas. A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios. *Stochastics Stochastics Rep.*, 34(3-4) :187–220, 1991.
- [63] B. Øksendal. An introduction to Malliavin calculus with applications to economics. Lecture notes from the Norwegian School of Economics and Business Administration, 1996.
- [64] J. Picard. Formules de dualité sur l'espace de Poisson. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 32(4) :509–548, 1996.
- [65] J. Picard. On the existence of smooth densities for jump processes. *Probab. Theory Related Fields*, 105(4) :481–511, 1996.
- [66] N. Privault and X. Wei. A Malliavin calculus approach to sensitivity analysis in insurance. *Insurance Math. Econom.*, 35(3) :679–690, 2004.
- [67] P. E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*. Springer-Verlag, second edition, 2004.
- [68] J.-F. Renaud and B. Rémillard. Explicit martingale representations for Brownian functionals and applications to option hedging. *Stochastic Anal. Appl.*, 25(4), 2007.
- [69] J.-F. Renaud and B. Rémillard. Malliavin calculus and Clark-Ocone formula for functionals of a square-integrable Lévy process. *submitted*, 2007.
- [70] J.-F. Renaud and X. Zhou. Distribution of the present value of dividend payments in a Lévy risk model. *J. Appl. Probab.*, 44(2), 2007.
- [71] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov processes and martingales*, volume 2 : Itô calculus. Wiley and Sons, 1987.
- [72] M. Sanz-Solé. *Malliavin calculus - With applications to stochastic partial differential equations*. EPFL Press, Lausanne, 2005.
- [73] W. Schoutens. *Lévy processes in finance : pricing financial derivatives*. Wiley, 2003.
- [74] A. N. Shiryaev and M. Yor. On stochastic integral representations of functionals of Brownian motion. *Theory of Probability and its Applications*, 48(2) :304–313, 2004.
- [75] J. L. Solé, F. Utzet, and J. Vives. Canonical Lévy process and Malliavin calculus. *Stochastic Process. Appl.*, 117(2) :165–187, 2007.
- [76] H. Yang and L. Zhang. Spectrally negative Lévy processes with applications in risk theory. *Adv. in Appl. Probab.*, 33(1) :281–291, 2001.
- [77] X. Zhou. Discussion on : On optimal dividend strategies in the compound Poisson model, by H. Gerber and E. Shiu [N. Am. Actuar. J. **10** (2006), no. 2, 76–93]. *N. Am. Actuar. J.*, 10(3) :79–84, 2006.

Annexe A

AUTORISATION, DÉCLARATIONS ET PERMISSIONS

Cette annexe contient, dans l'ordre, les documents suivants :

- (1) Autorisation de déposer la thèse de doctorat sous forme d'articles
- (2) Déclarations des coauteurs :
 - (a) Bruno Rémillard pour *Explicit martingale representations for Brownian functionals and applications to option hedging* [68]
 - (b) Bruno Rémillard pour *Malliavin calculus and Clark-Ocone formula for functionals of a square-integrable Lévy process* [69]
 - (c) Xiaowen Zhou pour *Distribution of the present value of dividend payments in a Lévy risk model* [70]
- (3) Permissions des éditeurs :
 - (a) G.S. Ladde de *Stochastic Analysis and Applications* pour [68]
 - (b) C.C. Heyde et S. Asmussen de *Journal of Applied Probability* pour [70]