

HEC MONTRÉAL

**Évaluation d'options bivariées à l'aide
de copules dynamiques sous des
processus GARCH**

Par

Guillaume Bergeron

**Sciences de la gestion
(Ingénierie financière)**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de maîtrise ès sciences (M.Sc.)*

Décembre 2009

© Guillaume Bergeron, 2009

Sommaire

Dans ce mémoire, trois méthodes d'évaluations d'options bivariées à l'aide de copules sont étudiées. Nous cherchons à étudier l'effet sur les prix d'options bivariées lorsqu'on abandonne certaines hypothèses implicites qui sont souvent restrictives et irréalistes dans la plusieurs modèles à copules, notamment le fait de ne pas tenir compte de la dépendance sérielle.

Notre objectif est de proposer une technique d'évaluation alternative en modifiant la méthode de modélisation de l'aspect dynamique de la structure de dépendance entre différents actifs tout en tenant compte de la dépendance temporelle. La modélisation de la dépendance dynamique se fait avec une copule dynamique généralisée.

Notre modèle est appliqué aux options bivariées de type européennes portant sur les indices S&P 500 et NASDAQ. Les options dépendent de la performance maximale et minimale des deux indices. En particulier, on évalue quatre types de contrats, une option d'achat et une option de vente sur le minimum des deux indices (*call sur min*) et (*put sur min*) et une option d'achat et une option de vente sur le maximum des deux indices (*call sur max*) et (*put sur max*).

Remerciements

Je remercie d'abord mon directeur M. Bruno Rémillard pour son appui, ses commentaires et ses conseils durant la rédaction. Son support théorique fut indispensable à la réalisation de ce mémoire. J'aimerais également remercier les membres du jury : Nicolas A. Papageorgiou et Jean-François Plante.

Je tiens aussi à remercier l'Institut de Finance mathématique de Montréal pour leur soutien financier tout au long de ma maîtrise. Leur support financier m'a permis de me concentrer sur mes études et de bien entreprendre ma carrière en finance.

Finalement, je tiens à remercier Mala pour son support, non seulement durant ce mémoire, mais durant les deux dernières années. Je sais que ce n'était pas facile de patienter pendant les longues soirées et fins de semaines d'étude. Son encouragement durant les moments difficiles fut indispensable et je lui suis infiniment reconnaissant.

Table des matières

Sommaire	i
Remerciements	ii
1 Introduction	1
2 Revue de la littérature	5
2.1 Modèles statiques	6
2.2 Modèles dynamiques	10
3 Les copules	16
3.1 Introduction aux copules	16
3.2 Quelques familles de copules	18
3.2.1 Copule gaussienne	19
3.2.2 Simulation d'une copule normale	19
3.2.3 Copules archimédiennes	19
3.2.4 Simulation de copules archimédiennes	21
3.3 Estimation	22
3.3.1 Approche paramétrique	22
3.3.2 Approche semi-paramétrique	23

3.3.3	Approche non-paramétrique	23
4	Les copules dynamiques	25
4.1	Extension du théorème de Sklar	25
4.2	Copule dynamique généralisée	27
4.2.1	La copule conditionnelle	28
4.2.2	Copules dynamiques gaussiennes	29
4.2.3	Copules dynamiques archimédiennes	31
4.2.4	Copule dynamique de Clayton	34
4.2.5	Estimation	35
5	Évaluation d'options bivariées	39
5.1	Méthodologie	39
5.2	Évaluation d'options sur deux indices	45
5.3	Résultats	51
6	Conclusion	57
A	Graphiques des résultats des simulations	62
B	Tableaux des résultats des simulations	67

Table des figures

4.1	<i>Valeur de la log-vraisemblance de la copule de Clayton</i>	38
5.1	<i>Rendements standardisés des indices.</i>	46
5.2	<i>Innovations GARCH standardisées.</i>	47
5.3	<i>Estimation du tau de Kendall.</i>	49
5.4	<i>Régression des estimés du tau de Kendall.</i>	50
5.5	<i>Copule gaussienne avec volatilité initiale moyenne.</i>	52
5.6	<i>Copule de Clayton avec volatilité initiale moyenne.</i>	53
5.7	<i>Copule de Frank avec volatilité initiale moyenne.</i>	54
5.8	<i>Copule de Gumbel avec volatilité initiale moyenne.</i>	54
5.9	<i>Autocorrélation du S&P 500.</i>	56
5.10	<i>Autocorrélation du NASDAQ.</i>	56
A.1	<i>Copule gaussienne avec volatilité initiale faible.</i>	62
A.2	<i>Copule gaussienne avec volatilité initiale élevée.</i>	63
A.3	<i>Copule de Clayton avec volatilité initiale faible.</i>	63
A.4	<i>Copule de Clayton avec volatilité initiale élevée.</i>	64
A.5	<i>Copule de Frank avec volatilité initiale faible.</i>	64
A.6	<i>Copule de Frank avec volatilité initiale élevée.</i>	65

A.7 Copule de Gumbel avec volatilité initiale faible.	65
A.8 Copule de Gumbel avec volatilité initiale élevée.	66

Liste des tableaux

5.1	Estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres GARCH	45
B.1	<i>Primes (%) avec copule gaussienne et volatilité initiale faible.</i>	68
B.2	<i>Primes (%) avec copule gaussienne et volatilité initiale moyenne.</i>	69
B.3	<i>Primes (%) avec copule gaussienne et volatilité initiale élevée.</i>	70
B.4	<i>Primes (%) avec copule de Clayton et volatilité initiale faible.</i>	71
B.5	<i>Primes (%) avec copule de Clayton et volatilité initiale moyenne.</i>	72
B.6	<i>Primes (%) avec copule de Clayton et volatilité initiale élevée.</i>	73
B.7	<i>Primes (%) avec copule de Frank et volatilité initiale faible.</i>	74
B.8	<i>Primes (%) avec copule de Frank et volatilité initiale moyenne.</i>	75
B.9	<i>Primes (%) avec copule de Frank et volatilité initiale élevée.</i>	76
B.10	<i>Primes (%) avec copule de Gumbel et volatilité initiale faible.</i>	77
B.11	<i>Primes (%) avec copule de Gumbel et volatilité initiale moyenne.</i>	78
B.12	<i>Primes (%) avec copule de Gumbel et volatilité initiale élevée.</i>	79

Chapitre 1

Introduction

Lundi 28 octobre 1929, les marchés boursiers sont instables depuis déjà quelques jours, des volumes de transactions énormes accompagnés de nombreuses ventes d'actions sont modérés par de brèves périodes de gains. La bourse a déjà enregistré une perte importante le jeudi d'avant et l'on perçoit une sensation de panique sur le parquet des bourses. Pendant la journée, l'indice Dow Jones Industrial Average s'effondre de 13%, le lendemain elle perd un autre 12% et pousse l'économie américaine et mondiale dans une longue et pénible dépression.

Mercredi 17 octobre 1973, les pays de l'organisation des pays exportateurs de pétrole (OPEP) annoncent un embargo sur les livraisons de pétrole contre les États-Unis et tout autre pays appuyant l'Israël. La nouvelle lance le prix du pétrole dans une montée vertigineuse et enclenche le krach boursier de 1973-1974.

Lundi 19 octobre 1987, le marché boursier de Hong Kong s'effondre, entraînant

l'effondrement des marchés européens et finalement du marché américain, où l'indice Dow Jones Industrial Average enregistre une perte record de plus de 22%. Cette période est marquée par le développement technologique à Wall Street où la grande majorité des firmes sont maintenant équipées de vastes systèmes informatiques. En effet, l'investissement par algorithme tel que les stratégies d'arbitrage et d'assurance de portefeuille est largement répandu. Suite au crash, ce type de stratégie reçoit énormément de reproches et est souvent cité comme étant une des causes critiques ayant mené à une telle chute des marchés boursiers. C'est la première fois que le progrès technologique est accusé de causer une crise financière.

La crise des caisses d'épargne (savings and loan crisis) des années 1989-1990, la crise économique du Mexique de 1994-1995 et la crise économique asiatique de 1997 sont quelques-unes des autres crises économiques ayant marqué les cent dernières années de l'économie mondiale.

Ceci nous mène à la dernière crise financière qui a débuté par l'effondrement du marché immobilier américain causé par la crise des subprimes. Cette fois, ce n'est pas le progrès technologique, mais plutôt le progrès technique qui est dénoncé. Depuis les quinze dernières années, énormément d'innovations financières ont vu le jour, la plupart provenant des grandes institutions financières cherchant à se départir de diverses sources de risque et d'obtenir de meilleurs rendements. Par exemple, une banque possédant un large portefeuille de prêts risqués peut réorganiser le portefeuille en produits structurés, par exemple en CDO (collateralized debt obligation ou plutôt obligation adossée à des actifs, en français), et vendre ce dernier à des investisseurs, libérant ainsi du capital

qu'elle peut ensuite investir ou prêter. Quoiqu'il soit difficile de cibler une raison particulière, il est tout de même indéniable que la présence de produits de ce type a joué un rôle important dans le développement de la crise. En particulier, on sait maintenant que le risque associé aux produits structurés complexes est inadéquatement évalué. Il est donc d'une importance primordiale de développer des méthodologies permettant d'évaluer ces produits de façon plus réaliste.

Une des grandes difficultés liées à l'évaluation des produits structurés réside dans la modélisation de la structure de dépendance des actifs sous-jacents. Plusieurs méthodologies ont été proposées et les plus récentes ont recours à l'utilisation de copules (Rosenberg (1999), Cherubini & Luciano (2002), Bennett & Kennedy (2004)). Par contre, les hypothèses implicites sont souvent restrictives et irréalistes. En particulier la plupart des modèles supposent l'inexistence de dépendance sérielle. Considérons simplement une option bivariee pour laquelle la valeur à l'échéance dépend de la performance de deux actifs. Supposons que l'option accorde le droit à un investisseur d'acquérir, à l'échéance, l'actif ayant le plus de valeur à un prix d'exercice prédéterminé. Intuitivement, on s'attend à ce que le prix de cette option soit plus élevé lorsque la dépendance entre les deux actifs est faible que lorsque les actifs ont tendance à varier ensemble. Ainsi, une modélisation qui tient compte de la dépendance dynamique et temporelle des deux actifs devrait nous permettre d'évaluer l'option de façon plus réaliste. Nous avons donc établi un cadre relativement simple afin de nous permettre de prendre un premier pas dans l'étude de l'importance associée à la nature dynamique de la dépendance lors de l'évaluation de produits dérivés multivariés.

Pour ce mémoire, nous allons nous baser sur le travail de van den Goorbergh et al. (2005). Dans leur article, les auteurs étudient l'évaluation d'options bivariées à l'aide de copules dynamiques sous des processus marginaux de type GARCH. Notre objectif est de proposer une technique d'évaluation alternative en modifiant la méthode de modélisation de l'aspect dynamique de la structure de dépendance entre différents actifs tout en tenant compte de la dépendance temporelle.

Dans ce qui suit, nous allons débiter par une brève revue de la littérature où les principaux articles traitants des copules en finance seront présentés. Nous passerons alors à une révision de la théorie des copules pour ensuite présenter les copules dynamiques. Finalement, nous aborderons l'évaluation d'options bivariées dans un contexte GARCH.

Chapitre 2

Revue de la littérature

Depuis leur introduction par Sklar (1959), les copules ont été utilisées dans plusieurs domaines tels que la biologie et les assurances. Elles sont également devenues des outils employés couramment en finance et en économie. Parmi la littérature financière, les applications de copules ont généralement été liées à l'évaluation de produits dérivés portant sur plusieurs sous-jacents. Un exemple ayant reçu beaucoup d'attention des médias financiers est le modèle développé par Li (2000), qui proposa une simple méthode dévaluation des CDOs (collateralized debt obligations) à l'aide de la copule gaussienne. Son modèle fut rapidement adopté par l'ensemble de l'industrie qui ne pouvait s'empêcher de chanter les mérites du modèle allant même jusqu'à comparer l'ampleur du modèle de Li à celui de Black & Scholes (1973). Par contre, les prouesses seront de courtes durées puisque le modèle recevra de nombreuses critiques et sera tenu en partie responsable de la récente crise financière. Par contre, Li est loin d'être le seul à avoir appliqué les copules à des problèmes financiers. Par exemple,

Cherubini & Luciano (2002) utilisent des copules pour évaluer des options bivariées et Bennett & Kennedy (2004) de leur côté, les utilisent pour évaluer des options de type quanto. Quoique ces modèles offrent plusieurs avantages par rapport aux anciennes méthodes, nous allons voir qu'ils souffrent d'un problème majeur : la structure de dépendance des actifs sous-jacents est supposée fixe. Ainsi, un nombre croissant d'articles apportant de possibles solutions à ce problème ont récemment fait apparition parmi la littérature financière. De la sorte, les prochaines sections portent sur quelques-uns des articles importants du domaine. Nous allons premièrement nous concentrer sur les modèles pour lesquels la structure de dépendance sous-jacente est statique. Par la suite, nous allons abandonner cette hypothèse afin de s'attaquer aux modèles dynamiques.

2.1 Modèles statiques

La théorie des copules est un phénomène relativement moderne en mathématique. Leur introduction est attribuée à Sklar (1959) mais l'intérêt pour la recherche dans ce domaine c'est plutôt développé durant les années 80 et 90. Par exemple, les copules archimédiennes apparaissent dans Genest & MacKay (1986*b*) et Marshall & Olkin (1988) et ensuit dans Joe (1997). Par contre, la théorie des copules associée à des applications financières est encore plus récente.

Une des premières, si ce n'est pas la première, applications de copules à un problème purement financier peut être attribuée à Rosenberg (1999). Dans son article, Rosenberg développe et propose une méthodologie portant sur l'éva-

luation de droits contingents à plusieurs sous-jacents basés sur une estimation semi-paramétrique d'une fonction de densité risque-neutre multivarié. Plus précisément, en se basant sur l'ensemble des distributions de Plackett, qui sont un cas particulier de copules, il construit une fonction de densité risque-neutre bivariée qui est ensuite utilisée pour évaluer des options d'échéance un mois portant sur le rendement maximal de deux indices. Quoique cette méthode ne soit pas particulièrement compliquée, elle offre tout de même une grande amélioration par rapport aux modèles d'évaluation de droits contingents multivariés, qui pour la plupart ne sont que des généralisations du modèle proposé par Black & Scholes (1973). En effet, Rosenberg ne se gêne pas pour mettre en évidence le problème principal des approches antérieures, c'est-à-dire les hypothèses irréalistes et restrictives portant sur la dynamique des processus sous-jacents. C'est justement à cet effet que le modèle de Rosenberg se démarque des modèles antérieurs. Sa méthode nous permet d'utiliser presque n'importe quelle technique que l'on souhaite pour estimer les densités marginales, entraînant une densité risque-neutre très générale. De plus, les prix associés à cette méthodologie sont compatibles avec les prix de droits contingents univariés correspondants, ce qui n'est pas le cas avec les méthodes précédentes.

Ce que propose Rosenberg est effectivement une méthode permettant de séparer le problème en deux sous-problèmes. Le premier consiste à estimer de façon indépendante les distributions univariées à l'aide des méthodes usuelles qui peuvent être non paramétriques, semiparamétriques ou paramétriques. Ensuite, on "combine" les distributions univariées avec une certaine méthode de sorte à capturer la structure de dépendance sous-jacente, ce qui est réalisé à l'aide des copules de Plackett. À ce stade, il est tout à fait naturel de se poser

une question ; pourquoi devrions-nous nous restreindre uniquement à ce type de distributions, ne serait-il pas possible de généraliser cette méthode de sorte qu'elle englobe un ensemble de fonctions plus générales ? C'est essentiellement cette question que se sont posée Cherubini & Luciano (2002) dans leur article dans lequel ils proposent une généralisation à l'aide des copules. Pouvoir choisir parmi plusieurs copules différentes permet une modélisation beaucoup plus riche puisqu'il est possible de représenter une grande variété de structures de dépendance. De plus, les hypothèses de corrélations linéaires et de distributions gaussiennes peuvent facilement être abandonnées. Un des avantages de cette approche, tel qu'indiqué par les auteurs, est qu'il est également possible d'effectuer des analyses de sensibilité par rapport à la structure de dépendance sans tenir compte des processus marginaux. Leur méthodologie présentée, ils appliquent cette dernière aux options digitales bivariées. Un résultat intéressant qui est démontré dans l'article est qu'il est possible, en utilisant les distributions univariées comme arguments d'une copule, d'obtenir une fonction de prix de non-arbitrage pour les options digitales bivariées. De plus, les bornes de Fréchet-Hoeffding, c'est-à-dire la copule minimale et maximale, correspondent à des bornes de non-arbitrage. Malheureusement, les auteurs font remarquer qu'il n'est pas possible de déterminer la largeur entre les deux bornes, mais qu'en possédant de l'information sur la structure de dépendance il est tout de même possible de choisir une copule convenable. Cette remarque nous pousse à se questionner sur l'importance du choix de la copule.

L'importance du choix de la copule pour modéliser la structure de dépendance entre plusieurs actifs est démontrée par Berrada et al. (2006) et ensuite par Kole et al. (2007). Les premiers auteurs proposent une méthode pour modéli-

ser le comportement dynamique joint des cotes de crédits de plusieurs firmes. De façon plus spécifique, les cotes de crédits individuelles sont modélisées avec des chaînes de Markov continues univariées tandis que leur dynamique jointe est modélisée avec des copules. Ils trouvent que les copules normales et de Student ne produisent pas des estimations de risque de défaut largement différentes. Par contre, ils montrent que pour toute autre famille de copules, le choix de la copule est très important puisqu'il influence énormément les évaluations du risque de défaut. De leur côté, Kole et al. (2007) proposent une approche théorique pour évaluer les copules ainsi que pour analyser l'importance de la sélection de la copule appropriée. Les auteurs proposent d'appliquer des tests d'adéquation traditionnels tels que le test de Kolmogorov-Smirnov et le test d'Anderson-Darling. Les tests sont implantés en comparant la structure de dépendance implicite à une copule avec la dépendance observée dans l'ensemble des données. Étant donné la structure de dépendance observée entre les trois indices, ils effectuent des tests d'adéquation sur la copule gaussienne, la Student-t et la copule Gumbel. Leurs résultats montrent que seule la copule Student-t n'est pas rejetée. De façon plus précise, la copule gaussienne attribue une probabilité trop faible aux événements rares tandis que la copule de Gumbel surestime les probabilités associées à ces événements. Ainsi, ils en concluent que le choix de la copule est d'une très grande importance. Par contre, la qualité de leurs tests est douteuse, voir plutôt Genest et al. (2009) qui offrent une bonne critique de plusieurs tests disponibles et en proposent quelques nouveaux.

Les approches que nous avons présentées jusqu'à présent offrent plusieurs avantages par rapport aux modèles existants dans la littérature. Par contre, ils

souffrent tous d'une hypothèse qui pourrait s'avérer très restrictive. Dans la littérature financière, le fait que la corrélation ne soit pas fixe dans le temps est largement accepté. Par exemple, la corrélation a tendance à augmenter rapidement lors de crises financières tandis qu'elle a tendance à diminuer pendant des périodes de croissance stable. Ainsi, il est tout à fait normal de remettre en question la validité de l'hypothèse de structure de dépendance statique des modèles avec copules. Dans la prochaine section, nous allons attaquer cette question en présentant les principaux modèles cherchant à abandonner l'hypothèse de dépendance fixe.

2.2 Modèles dynamiques

Avec son article, Patton (2001) est un des premiers à tenter de modéliser la structure de dépendance de façon dynamique à l'aide des copules. Son travail repose essentiellement sur une extension clé du théorème de Sklar. Patton montre que le théorème peut être généralisé et appliqué aux distributions conditionnelles, nous permettant ainsi de modéliser la dépendance conditionnelle de façon dynamique dans le temps. Une fois la théorie développée, elle est exploitée afin de modéliser de façon dynamique la distribution jointe conditionnelle journalière des taux de changes Mark allemands - dollar U.S. et Yen - dollar U.S.. Pour les distributions marginales, Patton choisi une spécification AR,t-GARCH tandis que pour le choix de la copule, il estime et compare la copule gaussienne avec la copule Joe-Clayton. Cette dernière permet de capturer des effets d'asymétrie dans la structure de dépendance de la distribution jointe. La dépendance est modélisée de façon dynamique en spécifiant une évolution dy-

namique des paramètres de la copule pendant la période d'observation. Pour la copule gaussienne, il s'agit du paramètre de corrélation tandis que deux paramètres de dépendance dans les queues ("tail dependence") sont utilisés pour la copule Joe-Clayton. L'évolution des paramètres est alors caractérisée à l'aide d'un modèle de type ARMA. Les résultats de Patton indiquent qu'il semble avoir présence d'asymétrie dans les données : la dépendance est plus forte lors d'une appréciation du dollar U.S. que lors d'une dépréciation. Un résultat particulièrement intéressant est que la variation de la copule dynamique semble être significative, c'est-à-dire que la valeur des paramètres dynamiques varie substantiellement de la valeur des paramètres statiques. Les résultats de Patton, quoique très intéressants, ne nous disent a priori rien sur l'effet qu'aura une telle modélisation sur l'évaluation de droits contingents portants sur plusieurs sous-jacents. Une première réponse à cette question est proposée par van den Goorbergh et al. (2005)

Dans leur article, van den Goorbergh et al. (2005) étudient le comportement du prix d'options bivariées de type "better-of-two-markets" et "worse-of-two-markets" portant sur les indices Standard and Poor's 500 et Nasdaq. Pour cela, ils choisissent de modéliser la dépendance entre les indices à l'aide de copules de familles paramétriques, offrant ainsi différentes alternatives pour modéliser la structure de dépendance que celles proposées par les copules de type gaussiennes. De façon similaire à Patton (2001), ils proposent une modélisation dynamique de la structure de dépendance entre les deux actifs sous-jacents en faisant varier celle-ci au cours du temps. Par contre, l'évolution du paramètre de dépendance est modélisée en fonction de la volatilité des deux indices. Leurs résultats montrent que les prix générés par des copules dynamiques peuvent

être largement différents de ceux évalués avec des modèles à dépendance fixe, en particulier lorsqu'on se retrouve en période de volatilité élevée. L'étude montre également que la copule gaussienne génère des prix significativement différents de ceux générés avec des copules non gaussiennes, et cela, peu importe le niveau initial de volatilité. Ce dernier résultat suggère que si la dépendance entre les rendements des indices n'est pas bien représentée par une copule gaussienne, des copules alternatives devraient être considérées.

Nous avons déjà vu dans la première section quelques modèles servant à évaluer des options multivariées à l'aide de copules. Mais contrairement aux recherches antérieures, van den Goorbergh et al. (2005) ne fixent pas la structure de dépendance entre les actifs sous-jacents, ils permettent plutôt une variation au cours du temps. Cette approche est motivée par le fait que la dépendance entre les sous jacents est un facteur déterminant lors de l'évaluation d'options multivariées. Nous savons que si les rendements des actifs ne sont pas bien caractérisés par une distribution gaussienne multivariée, modéliser la dépendance avec la corrélation ne sera pas satisfaisant. Ainsi, admettre une structure de dépendance qui varie dans le temps à l'aide d'une copule devrait permettre une évaluation plus réaliste.

Les auteurs se concentrent sur l'évaluation de quatre types d'options européennes, soit "call on max", "put on min", "call on min" et "put on max". La première étape de l'évaluation consiste à spécifier et ensuite à estimer les distributions marginales objectives de chaque indice. Ils choisissent une distribution proposée par Duan (1995) où les rendements marginaux des indices sont modélisés par un processus GARCH(1,1). La description de la distribution jointe

des rendements des indices est spécifiée en fixant une copule conditionnelle. Les auteurs utilisent ensuite le fait qu'il existe une bijection entre le paramètre d'une copule et le Tau de Kendall. Leurs résultats montrent que les prix générés par des copules dynamiques peuvent largement différer de ceux évalués avec des modèles à dépendance fixe. De plus, les prix générés avec une copule gaussienne sont significativement différents de ceux générés à partir de copules non gaussiennes. Finalement, les prix d'options sont robustes par rapport au choix de la copule.

Zhang & Guégan (2008) proposent également une méthode pour évaluer des droits contingents bivariés utilisant une copule à paramètre non constant à l'aide d'un processus GARCH. Leur méthode est semblable à celle proposée par van den Goorbergh et al. (2005) et fait également appel au concept de copule conditionnelle introduite par Patton (2001). Par contre, les auteurs s'intéressent avant tout au choix de la copule. Plus précisément, ils utilisent les innovations d'un processus GARCH pour estimer la "meilleure" copule sur différents sous-intervalles des observations à l'aide du critère AIC. Ceci leur permet de bien définir les changements de la copule afin de déterminer la meilleure structure de dépendance possible. Contrairement à la méthode proposée par van den Goorbergh et al. (2005), l'évolution du paramètre n'est pas décrite selon une équation de régression, elle évolue plutôt selon une fonction prédéterminée. L'avantage est que la méthode ne nous restreint pas seulement à des familles de copules à un paramètre, ce qui était le cas avec van den Goorbergh et al. (2005). Leurs résultats montrent qu'il est raisonnable de supposer que la famille de copules reste statique et qu'elle fait partie de la famille t de Student, qui correspond justement à une famille de deux paramètres. Ils concluent, de

la même façon que van den Goorbergh et al. (2005), que les prix provenant de modèles à structure de dépendance dynamique diffèrent significativement de ceux provenant de modèles à dépendance statique.

Une des faiblesses que l'on retrouve dans la plupart des applications de copules à des problèmes financiers est l'hypothèse implicite d'absence de dépendance temporelle, c'est-à-dire la dépendance sérielle. Le concept de copule dynamique généralisé proposé par Soustra (2006) et ensuite repris par Rémillard & Papatheorgiou (2010) représente un important premier pas pour remédier à ce problème. Quoique Soustra (2006) s'intéresse principalement à l'évaluation de tranches de CDO synthétiques, il présente toutefois une introduction aux copules dynamiques et démontre plusieurs résultats forts intéressants. En supposant un processus Markovien adapté à un espace de probabilité et une copule dynamique associée à un vecteur de 2d-dimension (X_{t-1}, X_t) il obtient un algorithme d'estimation et de simulation pour les copules de type gaussiennes et de Clayton. Il réussit également à généraliser les résultats pour inclure les copules archimédiennes. La méthode développée par Soustra (2006) nous sera d'une grande utilité et sera présentée en détail dans la section théorique du mémoire.

Cette revue de la littérature nous a permis de présenter les principaux articles portant sur les modèles de copules et leurs applications à la finance. Nous avons tout d'abord étudié les premiers modèles pour lesquels la structure de dépendance était supposée fixe. Par contre, nous nous sommes rapidement aperçus que certaines hypothèses des premiers modèles, en particulier ceux basés sur la copule gaussienne, étaient peu réalistes et que pour arriver à modéliser adé-

quatement plusieurs séries financières il nous faudrait développer des modèles avec des hypothèses beaucoup moins restrictives. Nous avons alors remarqué que certaines copules se prêtaient mieux à certains types de données et qu'il était important de choisir la copule appropriée. Ensuite, nous nous sommes attaqués à une des principales faiblesses de ces modèles et nous avons présenté les premiers articles cherchant à abandonner l'hypothèse de structure de dépendance statique. La première approche proposée consistait essentiellement à faire varier le paramètre des copules en fonction d'une fonction de régression. Cette approche fut alors généralisée pour inclure les familles de copules à multiples paramètres. Encore une fois, les résultats nous ont montré que le choix de la copule est très important et que l'introduction d'une dynamique à la structure de dépendance génère des résultats significativement différents. Finalement, nous avons présenté l'article qui nous sera d'un grand intérêt pour ce mémoire, celui de Soustra (2006). Ses résultats, s'attaquant à la question de dépendance sérielle, furent brièvement présentés et seront clairement énoncés dans la section théorique qui suit.

Chapitre 3

Les copules

Le terme copule fut utilisé pour la première fois en mathématique par Abe Sklar (1959). Par contre, l'étude approfondie des copules dans le domaine de la statistique est un phénomène relativement récent qui date approximativement du début des années 80s. Les applications en finances, encore plus récentes, remontent à environ une dizaine d'années. Avant d'attaquer les copules dynamiques, il est essentiel de se familiariser avec les principaux résultats de la théorie des copules, nous allons donc brièvement présenter ces résultats dans cette section.

3.1 Introduction aux copules

Intuitivement, une copule relie une fonction de répartition multivariée à ses densités marginales. Elle nous permet de séparer la dépendance entre les densités marginales de leur comportement individuel. C'est une des raisons pour

laquelle les copules sont parfois appelées fonctions de dépendance, par exemple dans Deheuvels (1978).

Définition 1 *Une copule est une fonction de répartition jointe à n dimensions définie sur l'hypercube $[0, 1]^n$ de sorte que les marges univariées soient uniformes sur l'intervalle unitaire $[0, 1]$.*

En d'autres termes, supposons que $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$. Alors, une fonction $C : [0, 1]^n \mapsto [0, 1]$ est une copule à n dimensions si :

1. $C(\mathbf{u}) = 0$ dès qu'au moins un élément de \mathbf{u} est nul ;
2. $C(\mathbf{u}) = u_i$ dès que tous sauf l'élément i de \mathbf{u} sont égaux à un, pour tout $i \in (1, 2, \dots, n)$, i.e. les marges sont uniformes ;
3. $C(\mathbf{u})$ est n -croissante.

Nous pouvons maintenant passer au fameux théorème de Sklar. La grande majorité de la théorie des copules repose sur ce théorème qui garantit non seulement que toute copule est une fonction de répartition, mais que l'inverse est également vrai. C'est-à-dire que toute fonction de répartition peut être représentée à l'aide d'une copule.

Théorème 1 *Soit H une fonction de répartition jointe à n dimensions avec des marges $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$. Alors, pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:*

1. *Si C est une copule, alors $C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ est une fonction de répartition jointe à n dimensions avec marges $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$.*
2. *Inversement, il existe une copule tel que $H(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$.*

On remarque que si les marges sont continues, alors la copule (unique) est telle que

$$C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (3.1)$$

sera, pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$

$$C(\mathbf{u}) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)), \quad (3.2)$$

avec F_j^{-1} la fonction inverse de F_j .

Définition 2 *En premier lieu, notons que la densité de la copule $C(u_1, \dots, u_n)$ est donnée par*

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}, \quad (3.3)$$

lorsqu'elle existe, et supposons que les marges F_1, \dots, F_n possèdent des densités f_1, \dots, f_n . Alors la densité h de H peut être représentée de la façon suivante :

$$h(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i). \quad (3.4)$$

De plus, on a que pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$

$$c(\mathbf{u}) = \frac{h(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))}{\prod_{i=1}^n f_i(F_i^{-1}(u_i))}. \quad (3.5)$$

3.2 Quelques familles de copules

Nous allons maintenant présenter quelques familles de copules. Nous allons premièrement définir la copule normale, qui appartient à la famille des copules

meta-elliptiques pour ensuite s'attaquer aux copules archimédiennes.

3.2.1 Copule gaussienne

Soit Φ_n la fonction de répartition normale multivariée à n dimensions avec matrice de corrélation ρ . La copule normale C_ρ associée au paramètre ρ est, pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$,

$$C_\rho(\mathbf{u}) = \Phi_n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n), \rho). \quad (3.6)$$

On remarque que lorsque les marges sont normales, la copule gaussienne génère des distributions jointes normales multivariées.

3.2.2 Simulation d'une copule normale

La simulation d'une copule normale est relativement simple. Pour simuler $U \sim C_\rho$ il suffit de suivre les étapes suivantes :

1. Simuler $Z \sim N(0, \rho)$;
2. Poser $U = (U_1, \dots, U_d)$ avec $U_i = \Phi(Z_i)$, $i = 1, \dots, d$.

3.2.3 Copules archimédiennes

La famille des copules archimédiennes est définie pour la première fois dans Genest & Mackay (1986a) et a l'avantage d'être relativement simple tout en admettant une bonne variété de structures de dépendance. Une copule archimédienne est construite à l'aide d'une fonction génératrice. En particulier, on

dit que ϕ est la fonction génératrice d'une copule à d dimensions si

1. $\phi : [0, 1] \mapsto [0, \phi(0)]$ est décroissante avec $\phi(1) = 0$ et si $\phi(0) = \infty$, ϕ sera une fonction génératrice stricte.
2. Pour tout $0 < s < \phi(0)$ et pour tout $1 \leq j \leq d$,

$$(-1)^j \frac{\partial^j}{\partial s^j} \phi^{-1}(s) > 0. \quad (3.7)$$

Étant donné la définition ci-dessus, une copule archimédienne est construite de la façon suivante :

$$C_\rho(\mathbf{u}) = \begin{cases} \phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \phi(u_i) \right), & \text{si } \sum_{i=1}^d \phi(u_i) < \phi(0), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Nous allons maintenant présenter quelques-unes des copules archimédiennes les plus courantes.

Clayton

Considérons la fonction génératrice $\phi(u) = u^{-\alpha} - 1$ et son inverse $\phi^{-1}(s) = (s + 1)^{-\frac{1}{\alpha}}$, alors la copule associée sera, pour $\alpha > 0$

$$C_\rho(\mathbf{u}) = \left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\alpha} - d + 1 \right)^{-\frac{1}{\alpha}}. \quad (3.9)$$

Gumbel

Considérons la fonction génératrice $\phi(u) = (-\ln u)^\alpha$ et son inverse $\phi^{-1}(s) = \exp(-t^{\frac{1}{\alpha}})$, alors la copule associée sera, pour $\alpha > 1$

$$C_\rho(\mathbf{u}) = \exp \left(- \left\{ \sum_{i=1}^d (-\ln u_i)^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \right). \quad (3.10)$$

Frank

Considérons la fonction génératrice

$$\phi(u) = -\ln \left(\frac{\exp(-\alpha u) - 1}{\exp(-\alpha) - 1} \right) \quad (3.11)$$

et son inverse

$$\phi^{-1}(s) = -\frac{1}{\alpha} \ln (1 + \exp(-s)(\exp(-\alpha) - 1)). \quad (3.12)$$

Alors la copule associée sera, avec $\alpha > 0$

$$C_\rho(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^d (\exp(-\alpha u_i) - 1)}{(\exp(-\alpha) - 1)^{d-1}} \right). \quad (3.13)$$

3.2.4 Simulation de copules archimédiennes

Supposons que $\phi(0) = \infty$. Alors $\phi^{-1} \{ \phi(u_1) + \dots + \phi(u_d) \}$ définit une copule pour tout $d \geq 2$ si et seulement si il existe une variable S de sorte que $E(e^{-\lambda S}) = \phi^{-1}(\lambda)$ pour tout $\lambda \geq 0$. C'est à dire ϕ^{-1} est la transformée de

Laplace d'une variable aléatoire non-négative S (Marshall & Olkin (1988)). La méthode proposée par ces auteurs est la suivante :

1. Générer de façon indépendante $E_1, \dots, E_d \sim \text{Exp}(1)$;
2. Générer S de transformée de Laplace ϕ^{-1} ;
3. Poser $U_i = \phi^{-1}(E_i/S)$, $1 \leq i \leq d$

Ainsi, $U = (U_1, \dots, U_d) \sim C$.

3.3 Estimation

Dans cette section, nous abordons le problème d'estimation de paramètres des copules. Trois approches seront présentées, soit l'approche paramétrique, semi-paramétrique et non-paramétrique. Dans tous les cas, on suppose avoir un échantillon X_1, \dots, X_n où $X_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,d})$, $i = 1, \dots, n$, provenant d'une loi H avec des marges F_1, \dots, F_d continues. Étant donné cet échantillon, on cherche à estimer le paramètre θ d'une copule C_θ .

3.3.1 Approche paramétrique

Supposons premièrement que les d marges dépendent de paramètres α_i , c'est-à-dire $F_{1,\alpha_1}(x_1), \dots, F_{d,\alpha_d}(x_d)$ et que la famille de copules possède une densité. Ensuite, pour estimer le paramètre θ de C_θ on suit les étapes ci-dessous.

1. Estimer $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ par $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_d$;
2. Poser $\hat{U}_{i,j} = F_{j,\hat{\alpha}_j}(X_{i,j})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq d$;

3. Trouver $\hat{\theta}$ par maximum de vraisemblance, en maximisant

$$\theta \mapsto \sum_{i=1}^n \ln c_{\theta}(\hat{U}_i), \quad (3.14)$$

où la densité C_{θ} de la copule est définie par

$$c_{\theta}(u) = \frac{\partial^d}{\partial u_1 \cdots \partial u_d} C_{\theta}(u_1, \dots, u_d). \quad (3.15)$$

3.3.2 Approche semi-paramétrique

Pour cette approche, on ne s'intéresse pas aux marges : F_1, \dots, F_d . Nous allons donc utiliser les pseudo-observations $\hat{U}_{i,j} = F_{j,n}(X_{i,j}) = \frac{R_{i,j}}{n+1}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq d$, où $R_{i,j}$ est le rang de $X_{i,j}$ parmi $X_{i,j}, \dots, X_{n,j}$.

Pour estimer le paramètre θ de C_{θ} , on peut utiliser la méthode de maximum de pseudo vraisemblance (Genest et al. (1995)) en maximisant

$$\theta \mapsto \sum_{i=1}^n \ln c_{\theta}(\hat{U}_i), \quad (3.16)$$

3.3.3 Approche non-paramétrique

L'approche non-paramétrique consiste à poser

$$C_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(\hat{U}_i \leq u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^d \mathbb{I}(\hat{U}_{i,j} \leq u_j). \quad (3.17)$$

La qualité de cette approximation repose sur le fait que $\sqrt{n}(C_n - C)$ est approximativement gaussien.

Les approches présentées ont toutes leurs forces et faiblesses : la méthode semi-paramétrique basée sur les rangs est facile à implanter et ne requiert donc aucune autre estimation, par contre elle produit une erreur légèrement supérieure à une méthode paramétrique. Les approches non-paramétriques sont particulièrement utiles pour effectuer des tests d'indépendance ou des tests d'adéquation, e.g. Genest & Remillard (2008).

Chapitre 4

Les copules dynamiques

Dans cette section, nous allons en premier lieu brièvement présenter le travail de Patton (2001) portant sur les copules dynamiques, ou plutôt les copules conditionnelles ; l'essentiel de son travail reposant sur une extension du théorème de Sklar (1959). En deuxième lieu, nous aborderons le travail de Soustra (2006), qui permet de capturer directement la dépendance sérielle entre plusieurs séries temporelles à l'aide d'une copule dynamique. Nous allons présenter les résultats pour le cas bivarié bien que l'extension au cas multivarié est relativement simple.

4.1 Extension du théorème de Sklar

Soit un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, deux conditions sont nécessaires pour définir la copule conditionnelle bivariée. La première condition établit la borne inférieure de la copule et assure que les distributions marginales soient

uniformes. La deuxième condition est nécessaire pour garantir la non-négativité de la probabilité d'observer un événement dans la région $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$.

Définition 3 Une copule conditionnelle à deux dimensions est une fonction $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ avec les propriétés suivantes :

1. $C(u, 0|\mathcal{F}) = C(0, v|\mathcal{F}) = 0$ et $C(u, 1|\mathcal{F}) = u, C(1, v|\mathcal{F}) = v, \forall u, v \in [0, 1]$
2. $V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]|\mathcal{F}) \equiv C(u_2, v_2|\mathcal{F}) - C(u_1, v_2|\mathcal{F}) - C(u_2, v_1|\mathcal{F}) + C(u_1, v_1|\mathcal{F}) \geq 0, \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$ tel que $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$.

Nous pouvons maintenant passer à l'extension au cas conditionnel du résultat central de la théorie des copules, le théorème de Sklar (1959).

Théorème 2 Soit H une distribution conditionnelle bivariée avec des marges conditionnelles continues F et G . Il existe une copule unique conditionnelle $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tel que

$$H(x, y|\mathcal{F}) = C(F(x|\mathcal{F}), G(y|\mathcal{F})|\mathcal{F}), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Inversement, si C est une copule conditionnelle et F et G sont des distributions conditionnelles de variables aléatoires X et Y , alors la fonction H définie ci-dessus est une distribution conditionnelle bivariée avec marges F et G . Sous sa forme multivariée, cette fonction serait représentée de la façon suivante :

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n|\mathcal{F}) = C(F_1(x_1|\mathcal{F}), F_2(x_2|\mathcal{F}), \dots, F_n(x_n|\mathcal{F})|\mathcal{F}). \quad (4.2)$$

Corollaire 1 *Soit H une distribution bivariée avec des distributions marginales conditionnelles continues F et G dont les inverses respectifs sont F^{-1} et G^{-1} . Il existe une copule conditionnelle unique $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que*

$$C(u, v | \mathcal{F}) = H(F^{-1}(u | \mathcal{F}), G^{-1}(v | \mathcal{F}) | \mathcal{F}), \forall u, v \in [0, 1]. \quad (4.3)$$

L'utilité de ces résultats sera révélée lors de l'évaluation d'options bivariées dans le prochain chapitre où nous modéliserons, dans un premier temps, la variation temporelle de la structure de dépendance avec une copule conditionnelle. Ceci sera accompli en permettant au paramètre de dépendance d'évoluer dans le temps selon une fonction des volatilités conditionnelles des actifs sous-jacents.

4.2 Copule dynamique généralisée

Dans cette section, nous allons présenter une méthodologie générale permettant de modéliser la dépendance de séries temporelles multivariées $\{X_t\}_{t=0}^T$ à l'aide de copules. Nous allons nous baser sur le travail de Soustra (2006).

Supposons simplement que X_t est un processus markovien et stationnaire et que $C(u, v)$ est la copule associée au vecteur 2d-dimensions (X_{t-1}, X_t) . C doit alors satisfaire la condition suivante :

$$C(\mathbf{u}, \mathbf{1}) = C(\mathbf{1}, \mathbf{u}), \text{ pour tout } \mathbf{u} \in [0, 1]^d.$$

Afin d'estimer les paramètres ou de simuler des observations pour le processus

$\{X_t\}_{t=0}^T$, on doit être capable de calculer la distribution conditionnelle de X_t étant donné X_{t-1} . Ainsi, la copule associée à cette distribution conditionnelle sera appelée la copule conditionnelle.

Dans ce qui suit, nous allons présenter les propriétés et la construction de la copule conditionnelle dans un contexte général pour ensuite appliquer les résultats au problème des séries temporelles.

4.2.1 La copule conditionnelle

Soit $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d_1}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d_2}$, la fonction de distribution cumulative jointe des variables aléatoires X et Y avec distributions marginales continues F_1, \dots, F_{d_1} et G_1, \dots, G_{d_2} . Le théorème de Sklar (1959) nous permet d'affirmer qu'il existe une copule C telle que

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C\{F_1(x_1), \dots, F_{d_1}(x_{d_1}), G_1(y_1), \dots, G_{d_2}(y_{d_2})\} \quad (4.4)$$

En supposant que les densités des distributions marginales et de la copule existent, la densité de H sera

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= c\{F_1(x_1), \dots, F_{d_1}(x_{d_1}), G_1(y_1), \dots, G_{d_2}(y_{d_2})\} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{d_1} f_i(x_i) \times \prod_{j=1}^{d_2} g_j(y_j), \end{aligned} \quad (4.5)$$

où c est la densité de la copule C . La distribution de la fonction H_X de X sera

$$H_X(\mathbf{x}) = C\{F_1(x_1), \dots, F_{d_1}(x_{d_1}), 1, \dots, 1\} \quad (4.6)$$

avec densité

$$h_X(\mathbf{x}) = c_X\{F_1(x_1), \dots, F_{d_1}(x_{d_1})\} \times \prod_{i=1}^{d_1} f_i(x_i) \quad (4.7)$$

Ainsi, en posant $u = \{F_1(x_1), \dots, F_{d_1}(x_{d_1})\}$ et $v = \{G_1(y_1), \dots, G_{d_2}(y_{d_2})\}$ on peut écrire à l'aide du théorème de Bayes la densité conditionnelle $h_{Y|X}$ de Y étant donné $X = x$ de la façon suivante :

$$h_{Y|X}(y|x) = \frac{h(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{h_X(\mathbf{x})} = c_{V|U}(v|u) \prod_{j=1}^{d_2} g_j(y_j), \quad (4.8)$$

où

$$c_{V|U}(v|u) = \frac{c(u, v)}{c_U(u)} \quad (4.9)$$

est la densité conditionnelle de V étant donné $U = u$. On remarque qu'en général cette dernière ne sera pas une copule, mais on appelle la copule qui y est associée la copule conditionnelle.

Proposition 1 *Puisque la densité $c_{V|U}$ est la densité de*

$V = \{G_1(Y_1), \dots, G_{d_2}(Y_{d_2})\}$ *étant donné* $U = \{F_1(X_1), \dots, F_{d_1}(X_{d_1})\}$, *la copule de V étant donné U est la même que celle de Y étant donné X .*

4.2.2 Copules dynamiques gaussiennes

Supposons premièrement deux variables aléatoires gaussiennes multivariées $X_1 \sim N_{d_1}(\mu_1, \Sigma_{11})$ et $X_2 \sim N_{d_2}(\mu_2, \Sigma_{22})$. Définissons ensuite la fonction de

répartition jointe de X_1 et X_2 par

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_{d_1+d_2} \left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \right). \quad (4.10)$$

On peut ensuite vérifier qu'en posant $\Omega = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$ et $B = \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}$ que la distribution conditionnelle de X_2 sachant que $X_1 = x_1$ est gaussienne avec moyenne $\mu_2 + B(x_1 - \mu_1)$ et matrice de covariance Ω .

Soit $\gamma = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_{d_1}))$ et $\zeta = (\Phi^{-1}(v_1), \dots, \Phi^{-1}(v_{d_2}))$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Donc, en posant μ_1 et μ_2 , on obtient

$$c_{V|U}(v|u) = \frac{c(u, v)}{c_U(u)} \quad (4.11)$$

$$= \frac{\frac{1}{(2\pi)^{d_2}} \times \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\zeta - B\gamma)^\top \Omega^{-1} (\zeta - B\gamma) \right\}}{\prod_{i=1}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2} \zeta_i^2)} \quad (4.12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left((\zeta - B\gamma)^\top \Omega^{-1} (\zeta - B\gamma) + \zeta^\top \zeta \right) \right\}. \quad (4.13)$$

Puisque la distribution conditionnelle gaussienne est gaussienne, la copule conditionnelle sera également gaussienne.

Lemme 1 *Supposons que $(U, V) \sim C_{d_1+d_2, R}$ et que $R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$ est une matrice de corrélation. Alors, la copule associée à la distribution conditionnelle de V sachant que $U = u \in (0, 1)^{d_1}$ est la copule gaussienne avec matrice de corrélation $\tilde{\Omega}$ où $\Omega = R_{11} - R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}$ et $(\tilde{\Omega})_{ij} = \frac{\Omega_{ij}}{\sqrt{\Omega_{ii}\Omega_{jj}}}$, $i, j \in \{1, \dots, d_2\}$.*

Algorithme 1 (Copule gaussienne dynamique) Pour générer une chaîne de

Markov $\{U_t\}_{t=0}^T$ avec une distribution stationnaire $C_{d,R_{11}}$ avec distribution jointe $(U_{t-1}, U_t) \sim C_{2d,R}$ où $R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$, où $R_{22} = R_{11}$, il suffit de suivre les étapes suivantes :

1. Générer $X_0 = (X_{01}, \dots, X_{0d}) \sim N_d(0, R_{11})$ et poser $U_0 = \{\Phi(X_{01}), \dots, \Phi(X_{0d})\}$;
2. Pour $t = 1$ à T ,
 - (a) Générer $V_t \sim N_d(0, \Omega)$;
 - (b) Poser $X_t = V_t + B \times X_{t-1}$ et $U_t = \{\Phi(X_{t1}), \dots, \Phi(X_{td})\}$

4.2.3 Copules dynamiques archimédiennes

Appliquons maintenant les résultats aux copules archimédiennes. Supposons que C est une copule à $(d_1 + d_2)$ dimensions avec une fonction génératrice ϕ . Posons

$$h_{d_1}(s) = (-1)^{d_1} \frac{d^{d_1}}{ds^{d_1}} \phi^{-1}(s). \quad (4.14)$$

Ainsi, par construction, pour tout $j = 0, \dots, d_2$, $(-1)^j \frac{d^j}{dt^j} h_{d_1} \geq 0$.

Soit $A_u = C(u, \mathbf{1})$, alors

$$H_u(v) = P(V \leq v | U = u) = \frac{(-1)^{d_1} \frac{d^{d_1}}{ds^{d_1}} \phi^{-1}(s) \Big|_{s=\phi(A) + \sum_{j=1}^{d_2} \phi(v_j)}}{(-1)^{d_1} \frac{d^{d_1}}{ds^{d_1}} \phi^{-1}(s) \Big|_{s=\phi(A_u)}} \quad (4.15)$$

$$= \frac{h_{d_1} \left\{ \phi(A_u) + \sum_{j=1}^{d_2} \phi(v_j) \right\}}{h_{d_1} \left\{ \phi(A_u) \right\}}. \quad (4.16)$$

Il s'ensuit que les marges seront, pour tout $t \in (0, 1]$,

$$F_j(t) = P(V_j \leq t | U = u) = \frac{h_{d_1} \{\phi(A_u) + \phi(t)\}}{h_{d_1} \{\phi(A_u)\}} \quad (4.17)$$

et la fonction quantile sera

$$F_j^{-1}(s) = \phi^{-1} [h_{d_1}^{-1} [sh_{d_1} \{\phi(A_u)\}] - \phi(A_u)] = Q_{A_u}(s). \quad (4.18)$$

Ainsi, la copule associée à la distribution conditionnelle de V étant donné $U = u$ est

$$D_u(v) = H_u \{Q_{A_u}(v_1), \dots, Q_{A_u}(v_d)\} \quad (4.19)$$

$$= \frac{h_d \left[-(d-1)\phi(A_u) + \sum_{i=1}^d h_d^{-1} [v_i h_d \{\phi(A_u)\}] \right]}{h_d \{\phi(A_u)\}} \quad (4.20)$$

$$= \psi_u^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^d \psi_u(v_j) \right\}, \quad (4.21)$$

où

$$\psi_u^{-1}(s) = \frac{h_{d_1} \{s + \phi(A_u)\}}{h_{d_1} \{\phi(A_u)\}} \quad \text{et} \quad \psi_u(t) = h_{d_1}^{-1} [th_{d_1} \{\phi(A_u)\}] - \phi(A_u). \quad (4.22)$$

On peut ensuite vérifier que ψ_u est bien un générateur et donc que D_u est une copule archimédienne, ce qui prouve que la copule conditionnelle d'une copule archimédienne est également archimédienne.

Lemme 2 *Si $(U, V) \sim C_{d_1+d_2, \phi}$, alors la copule conditionnelle, c'est-à-dire la copule associée à la distribution conditionnelle de V étant donné $U = u \in$*

$(0, 1)^{d_1}$ est archimédienne avec générateur

$$\psi_{A_u}(t) = h_{d_1}^{-1} [th_{d_1} \{\phi(A_u)\}] - \phi(A_u), \quad t \in (0, 1], \quad (4.23)$$

où $A_u = C_{d_1+d_2, \phi}(u, \mathbf{1}) = C_{d_1, \phi}(u)$ et $h_{d_1}(s) = (-1)^{d_1} \frac{d^{d_1}}{ds^{d_1}} \phi^{-1}(s)$.

Algorithme 2 (Copule archimédienne dynamique). Pour générer une chaîne de Markov $\{U_t\}_{t=0}^T$ avec une distribution stationnaire $C_{d, \phi}$ avec distribution jointe $(U_{t-1}, U_t) \sim C_{2d, \phi}$, il suffit de suivre les étapes suivantes :

1. Générer $U_0 \sim C_{d, \phi}$;
2. Pour $t = 1$ à T ,
 - (a) Poser $A_{t-1} = C_{2d, \phi}(U_{t-1}, \mathbf{1}) = C_{d, \phi}(U_{t-1})$;
 - (b) Générer $V_t \sim C_{d, \psi_{A_{t-1}}}$;
 - (c) Poser $U_t = (U_{t,1}, \dots, U_{t,d})$, où $U_{t,j} = Q_{A_{t-1}}(V_{t,j})$, $j = 1, \dots, d$.

Notons aussi que si ϕ^{-1} est une transformée de Laplace d'une variable positive S , alors

$$h_d(s) = E(S^d e^{-sS}), \quad s \geq 0.$$

On a alors, en posant $s_{t-1} = \phi(A_{t-1})$,

$$\psi_{A_{t-1}}^{-1}(s) = \frac{h_d(s + s_{t-1})}{h_d(s_{t-1})} = \frac{E(S^d e^{-sS} e^{-s_{t-1}S})}{E(S^d e^{-s_{t-1}S})},$$

qui est la transformée de Laplace d'une variable positive S' ayant $g(x) = x^d e^{-s_{t-1}x} / h_d(s_{t-1})$ comme densité par rapport à la loi de S . Pour générer S' , on peut donc générer S et utiliser la méthode de rejet. Pour ce faire, soit λ une

borne pour g , i.e., $g(x) \leq \lambda$ pour tout $x \geq 0$. On peut prendre par exemple $\lambda = g(d/s)$. Ensuite on génère une paire (S, U) jusqu'à ce que $U \leq g(S)/\lambda$. On pose alors $S' = S$.

4.2.4 Copule dynamique de Clayton

Soit $C(u, v)$ une copule de Clayton à $(d_1 + d_2)$ dimensions de paramètre θ , c'est à dire, pour tout $u, v \in (0, 1]^d$,

$$C_\theta(u, v) = \left(\sum_{i=1}^{d_1} u_i^{-\theta} + \sum_{i=1}^{d_2} v_i^{-\theta} - d_1 - d_2 + 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Alors, en s'inspirant de la théorie présentée précédemment, on peut montrer que la copule D_u associée à la distribution conditionnelle H_u de V étant donné $U = u$ est une copule de Clayton avec paramètre $a = \theta/(1 + d_1\theta)$, c'est à dire,

$$D_u(v) = H_u \{Q_{A_u}(v_1), \dots, Q_{A_u}(v_{d_2})\} = \left(\sum_{j=1}^{d_2} v_j^{-a} - d_2 + 1 \right)^{-\frac{1}{a}} \quad (4.24)$$

où $a = \theta/(1 + d_1\theta)$.

Algorithme 3 (Copule dynamique de Clayton). Pour générer une chaîne de Markov $\{U_t\}_{t=0}^T$ avec une distribution stationnaire $C_{d,\theta}$ avec distribution jointe $(U_{t-1}, U_t) \sim C_{2d,\theta}$, il suffit de suivre les étapes suivantes :

1. Générer $U_0 \sim C_{d,\theta}$;
2. Pour $t = 1$ à T ,
 - (a) Poser $A_{t-1} = C_{d,\theta}(U_{t-1})$;

(b) Générer $V_t \sim C_{d,a}$, où $a = \theta/(1 + d\theta)$;

(c) Poser $U_t = (U_{t,1}, \dots, U_{t,d})$, où $U_{t,j} = Q_{A_{t-1}}(V_{t,j})$, $j = 1, \dots, d$.

4.2.5 Estimation

Supposons que nous avons une série temporelle de vecteurs de d -dimensions $X_t = (X_{t,1}, \dots, X_{t,d})$, $t = 1, \dots, T$ et C_θ la copule associée à (X_{t-1}, X_t) . Notre but est d'estimer θ sans avoir d'information sur les marges.

Puisque nous n'avons aucune information sur les marges, remplaçons premièrement chaque $X_{t,j}$ par son rang $R_{t,j}$ parmi $X_{1,j}, \dots, X_{T,j}$. On définit ensuite les pseudo-observations, c'est-à-dire la suite de rangs normalisés $U_t = \frac{R_t}{T+1}$.

Alors, une extension de la méthode de pseudo-maximum de vraisemblance (exemple voir Genest et al. (1995)) consiste à maximiser

$$\sum_{t=2}^T \log \left\{ \frac{c_\theta(U_{t-1}, U_t)}{d_\theta(U_{t-1})} \right\} \quad (4.25)$$

par rapport à θ , où $c_\theta(u, v) = \frac{\partial^{2d}}{\partial u_1 \dots \partial u_d \partial v_1 \dots \partial v_d} C_\theta(u, v)$ et $d_\theta(u) = \frac{\partial^d}{\partial u_1 \dots \partial u_d} C_\theta(u, \mathbf{1})$.

La preuve de ce résultat repose sur la convergence du processus empirique basé sur les rangs. Or les données étant dépendantes, ce résultat est en général assez difficile à prouver. Il faut démontrer que la chaîne de Markov est ergodique, ce qui dépasse les limites de ce mémoire. Ce résultat devrait apparaître dans Rémillard & Papageorgiou (2010). En fait, la condition essentielle est que la série

$$\sum_{t=1}^{\infty} \{P(U_0 \leq \mathbf{u}, U_t \leq \mathbf{v} - C(\mathbf{u}, \mathbf{1})C(\mathbf{v}, \mathbf{1}))\}$$

soit convergente.

Copule gaussienne Pour le cas de la copule gaussienne, nous cherchons l'estimateur $\hat{\theta} = (\hat{B}, \hat{\Omega})$ qui maximise la fonction pseudo-maximum de vraisemblance associée à la densité conditionnelle

$$c_{V|U}(v|u) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} ((\zeta - B\gamma)^\top \Omega^{-1} (\zeta - B\gamma) + \zeta^\top \zeta) \right\}. \quad (4.26)$$

En posant $\zeta_t = \Phi^{-1}(U_t)$, on obtient

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} ((\zeta_t - B\zeta_{t-1})^\top \Omega^{-1} (\zeta_t - B\zeta_{t-1}) + \zeta_t^\top \zeta_t) \right\}, \quad (4.27)$$

ce qui revient à minimiser

$$-l(\theta) = n \ln |\Omega| + \sum_{t=1}^n ((\zeta_t - B\zeta_{t-1})^\top \Omega^{-1} (\zeta_t - B\zeta_{t-1})). \quad (4.28)$$

La solution analytique du problème de minimisation, obtenue à l'aide de la théorie de régression multivariée, est

$$\hat{B} = \frac{\sum_{t=1}^n \zeta_t \zeta_{t-1}^\top}{\sum_{t=1}^n \zeta_{t-1} \zeta_{t-1}^\top}, \quad (4.29)$$

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\zeta_t - \hat{B}\zeta_{t-1}) (\zeta_t - \hat{B}\zeta_{t-1})^\top. \quad (4.30)$$

Copule de Clayton Pour la copule de Clayton, la fonction à maximiser est la suivante :

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln \left(\prod_{j=d}^{2d-1} (1 + j\theta) \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^d u_{k,t}^{-(\theta+1)} \right) \cdot \frac{\left(\sum_{k=1}^d (u_{k,t-1}^{-\theta} + u_{k,t}^{-\theta}) - 2d + 1 \right)^{-\left(\frac{1}{\theta}+2d\right)}}{\left(\sum_{k=1}^d u_{k,t-1}^{-\theta} - d + 1 \right)^{-\left(\frac{1}{\theta}+d\right)}}.$$

On remarque que la fonction ci-dessus n'offre pas de solution analytique, il faut donc avoir recours à une méthode d'optimisation numérique. Par contre, la fonction se comporte bien et le maximum global n'est en général pas difficile à déterminer. Par exemple, pour le cas à deux dimensions, la figure 4.1 illustre la forme de la fonction log-vraisemblance appliqué aux rendements du NASDAQ et du S&P 500.

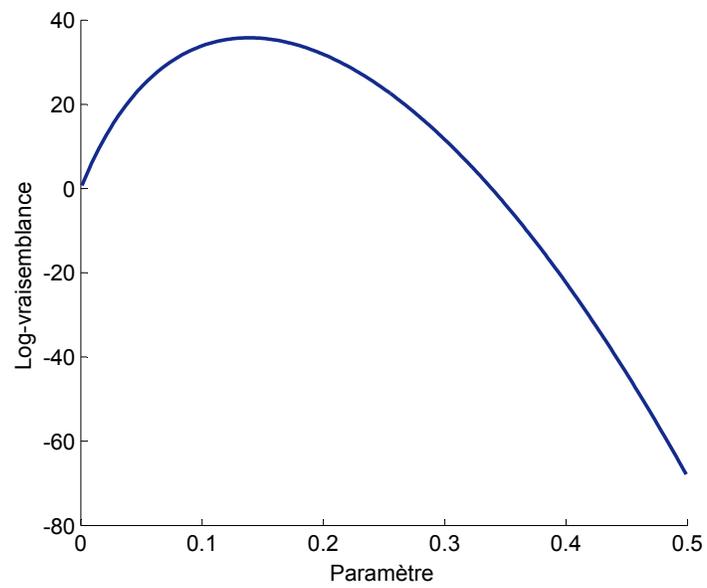


FIG. 4.1 – Valeur de la log-vraisemblance en fonction de différentes valeurs du paramètre de la copule de Clayton appliqué aux rendements du NASDAQ et du S&P 500.

Chapitre 5

Évaluation d'options bivariées

Nous allons maintenant aborder le problème d'évaluation d'options bivariées. La méthodologie sera premièrement abordée de façon théorique, les étapes à suivre seront ensuite présentées d'un point de vue pratique et nous allons terminer en présentant les résultats de notre recherche.

5.1 Méthodologie

On cherche à estimer la valeur d'options bivariées de type européenne pour lesquelles les actifs sous-jacents sont les indices S&P 500 et Nasdaq Composite. Les options dépendent de la performance maximale et minimale de ces deux indices. De façon plus précise, on évalue quatre types de contrats ; une option d'achat et une option de vente sur le minimum des deux indices (*call sur min*) et (*put sur min*) et une option d'achat et une option de vente sur le maximum des deux indices (*call sur max*) et (*put sur max*). En pratique, ce type d'option

est généralement utilisée par des investisseurs cherchant à se protéger du risque de plusieurs sous-jacent à un coût moindre que celui qui serait engendré par une stratégie comportant uniquement des options univariées.

Le choix des deux indices et du type d'options à évaluer est basé sur le travail de van den Goorbergh et al. (2005), ce qui nous permet de comparer nos résultats à ceux du travail des auteurs. On remarque que le choix d'options bivariées pour étudier l'impact d'une dépendance dynamique sur le prix des droits contingents n'est peut-être pas optimal étant donné le fait que la volatilité des indices a un impact considérable sur le prix de ces options. Il aurait peut-être été préférable de se concentrer sur un type de produit pour lequel la valeur dépend davantage sur la dépendance entre les deux indices et moins sur la volatilité de ceux-ci, on peut par exemple penser à une option sur la performance relative entre les indices. Ceci étant dit, la dépendance reste un élément clé lors de l'évaluation d'options bivariées et nous permet d'étudier l'impact d'une dépendance temporelle dynamique dans un cadre relativement simple.

À l'échéance les contrats possèdent une structure de paiements définis de la façon suivante :

$$\text{call sur min : } \max\{\min(R_1, R_2) - E, 0\},$$

$$\text{put sur min : } \max\{E - \min(R_1, R_2), 0\},$$

$$\text{call sur max : } \max\{\max(R_1, R_2) - E, 0\},$$

$$\text{put sur max : } \max\{E - \max(R_1, R_2), 0\},$$

où R_i représente le rendement de l'actif sous-jacent à l'échéance avec $i \in \{1, 2\}$ et E représente le prix d'exercice normalisé de l'option.

Puisque l'intérêt de ce mémoire est de comparer les prix d'options évaluées à l'aide de copules dynamiques aux résultats obtenus par van den Goorbergh et al. (2005), nous allons donc décrire leur méthodologie en parallèle avec la notre.

Définissons premièrement $r_{i,t+1} = \log R_{i,t+1}$ comme étant le log-rendement de l'indice $i \in \{1, 2\}$ de la période de temps t à $t+1$ et posons \mathcal{F}_t l'ensemble d'information disponible au temps t . Plus précisément, $\mathcal{F}_t = \sigma\{(r_{1,s}, r_{2,s}) : s \leq t\}$ est la tribu engendrée par les deux indices. Le modèle utilisé admet une volatilité et une dépendance dynamique. La volatilité est modélisée en fonction du carré des innovations des rendements antérieurs. Quant à la dépendance, van den Goorbergh et al. (2005) supposent que cette dernière dépend des volatilités antérieures via le tau de Kendall, tandis que nous choisissons plutôt de modéliser directement la dépendance à l'aide de copules dynamiques. Il est crucial de bien comprendre les différentes hypothèses de ces deux choix. D'une part, van den Goorbergh et al. (2005) supposent uniquement une dépendance ponctuelle entre les deux indices, c'est-à-dire qu'ils supposent que les innovations sont indépendantes d'une période à l'autre. De notre côté, la copule dynamique permet de capter à la fois la dépendance entre les actifs et l'effet de dépendance sérielle présente dans les données.

Comme discuté antérieurement, un des avantages d'utiliser les copules est qu'il est possible de décomposer le problème de modélisation des lois jointes en deux sous-problèmes : la modélisation des lois marginales univariées et la modélisa-

tion de la structure de dépendance via une copule appropriée. La modélisation des lois marginales se fait à partir des processus GARCH et la structure de dépendance est modélisée avec une copule gaussienne et avec une copule de Clayton.

Finalement, la valeur de l'option est estimée en prenant l'espérance actualisée des flux monétaires à l'échéance sous la mesure risque-neutre. Par exemple, pour une option d'achat sur maximum, la valeur de l'option au temps t sera

$$V_t = e^{-r(T-t)} E^Q [\max\{\max\{R_1, R_2\} - E, 0\}] \quad (5.1)$$

Tel que signalé ci-dessus, les distributions marginales sont modélisées de façon indépendantes à partir d'un processus GARCH(1,1). Comme indiqué par van den Goorbergh et al. (2005), cette spécification est suffisamment générale pour capturer les effets de regroupement de volatilité observé dans les rendements d'actions, tout en permettant une transformation relativement simple en monde neutre au risque. Ainsi, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$r_{i,t+1} = \mu_i + \eta_{i,t+1},$$

$$h_{i,t+1} = \omega_i + \beta_i h_{i,t} + \alpha_i \eta_{i,t+1}^2,$$

$$L_P(\eta_{i,t+1} | \mathcal{F}_t) = N(0, h_{i,t}),$$

où $\omega_i > 0$, $\beta_i > 0$, $\alpha_i > 0$ et $L_P(\cdot | \mathcal{F}_t)$ représente la loi objective étant donné l'information \mathcal{F}_t .

Le changement à la mesure de probabilité risque-neutre Q , tel que proposé par

Duan (1995), est donné par

$$\begin{aligned} r_{i,t+1} &= r_f - \frac{1}{2}h_{i,t} + \tilde{\eta}_{i,t+1}, \\ h_{i,t+1} &= \omega_i + \beta_i h_{i,t} + \alpha_i (r_{i,t+1} - \mu_i)^2, \\ L_Q(\tilde{\eta}_{i,t+1} | \mathcal{F}_t) &= N(0, h_{i,t}), \end{aligned}$$

où r_f est le taux d'intérêt sans risque, supposé constant.

Les auteurs font remarquer que pour appliquer le changement de mesure de Duan, on doit supposer que les distributions marginales dépendent du même ensemble d'information \mathcal{F}_t , mais que chaque marge conditionnelle doit seulement dépendre de son propre passé. C'est-à-dire,

$$L_P(r_{i,t+1} | \mathcal{F}_t) = L_P(r_{i,t+1} | \mathcal{F}_{i,t}), \quad (5.2)$$

où $\mathcal{F}_{i,t} = \sigma(r_{i,s} : s \leq t)$ représente l'information de l'indice i disponible au temps t .

Les marges univariées spécifiées, on complète la distribution jointe en fixant une copule conditionnelle. C'est à cette étape que la méthode proposée dans ce mémoire diverge de l'approche de van den Goorbergh et al. (2005). Nous allons donc brièvement décrire la méthode proposée par van den Goorbergh et al. (2005) pour ensuite s'attaquer à la notre. L'idée maîtresse de la méthode proposée repose sur le fait que pour certaines copules, il existe une bijection entre le paramètre de dépendance, θ , et le tau de Kendall, τ . En particulier,

on peut montrer que pour une copule C_θ , on a la relation suivante :

$$\tau(\theta) = 4E [C_\theta(U_1, U_2)] - 1 \quad (5.3)$$

On voit donc qu'en estimant le tau de Kendall de l'échantillon, $\hat{\tau}$, il est possible d'arriver à une estimation du paramètre θ de la copule en résolvant l'équation $\tau(\theta) = \hat{\tau}$. De façon plus précise, supposons que τ_t représente le tau de Kendall au temps t et que $h_{i,t}$ représente la variance conditionnelle estimée au temps t induit des processus GARCH $i \in \{1, 2\}$. On suppose que la mesure de dépendance entre les séries est gouvernée par une certaine fonction $\gamma(., .)$ des variances conditionnelles ;

$$\tau_t = \gamma(h_{1,t}, h_{2,t}) \quad (5.4)$$

La forme fonctionnelle retenue par les auteurs est choisie de sorte à pouvoir capturer les effets de variation de la corrélation lors de période de volatilité élevée et les paramètres sont estimés par simple régression, c'est-à-dire,

$$\gamma(h_1, h_2) = \gamma_0 + \gamma_1 \log \max(h_1, h_2). \quad (5.5)$$

Finalement, l'évaluation des options se fait par simulation Monte Carlo en effectuant des tirages aléatoires provenant de la copule avec son paramètre déterminé à partir de la fonction du tau de Kendall ci-dessus.

De notre côté, la modélisation de la dépendance dynamique se fait directement avec une copule dynamique. C'est-à-dire qu'au lieu de faire varier la copule en spécifiant une forme fonctionnelle du tau de Kendall, les innovations sont directement simulées avec une copule dynamique. La première étape consiste à cal-

culer les rangs normalisés des paires d'innovations standardisées des processus GARCH et ensuite d'estimer le paramètre de la copule par pseudo-maximum de vraisemblance. Finalement, on simule des trajectoires par Monte Carlo en générant des chaînes de Markov $\{U_t\}_{t=0}^T$ avec une distribution stationnaire $C_{d,\phi}$ avec distribution jointe $(U_{t-1}, U_t) \sim C_{2d,\phi}$, $d = 2$. Ces observations sont ensuite transformées en innovations pour les processus GARCH.

5.2 Évaluation d'options sur deux indices

La méthodologie décrite ci-dessus est appliquée aux indices S&P 500 et Nasdaq. L'échantillon possède un total de 1166 rendements journalier allant du 3 janvier 2005 au 19 août 2009. La figure 5.1 illustre les rendements standardisés des deux indices sur la période d'échantillon.

La première étape consiste à estimer les paramètres GARCH des rendements marginaux de chaque indice. Les résultats de l'estimation par maximum de vraisemblance sont présentés dans le tableau 5.1. On remarque que la somme des paramètres est légèrement inférieure à 1 pour les deux indices, ce qui est en accord avec la recherche antérieure portant sur les processus GARCH(1,1) appliquée à des rendements boursiers.

TAB. 5.1 – Estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres GARCH

Paramètre	S&P 500	Nasdaq
$\mu \times 10^2$	0.0350 (0.0254)	0.0346 (0.0306)
$\omega \times 10^5$	0.1207 (0.0262)	0.1569 (0.0532)
β	0.9099 (0.0124)	0.9199 (0.0137)
α	0.0824 (0.0120)	0.0717 (0.0119)

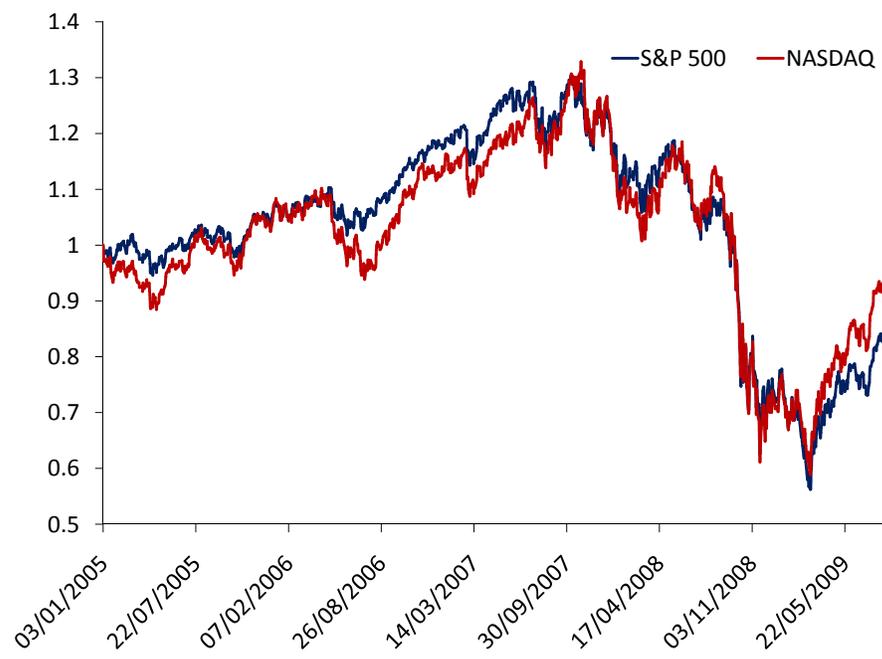


FIG. 5.1 – Rendements standardisés des indices NASDAQ et S&P 500 sur la période d'échantillon.

Avec ces estimés GARCH, il est maintenant possible de retrouver les innovations de chaque indice. La figure 5.2 trace les paires de rangs observés des innovations standardisées. La dépendance positive est très bien illustrée ; une petite variation d'un indice a tendance à être accompagnée d'une petite variation de l'autre indice et vice versa. En revanche, des données indépendantes auraient plutôt tendance à remplir le carré unitaire de façon uniforme.

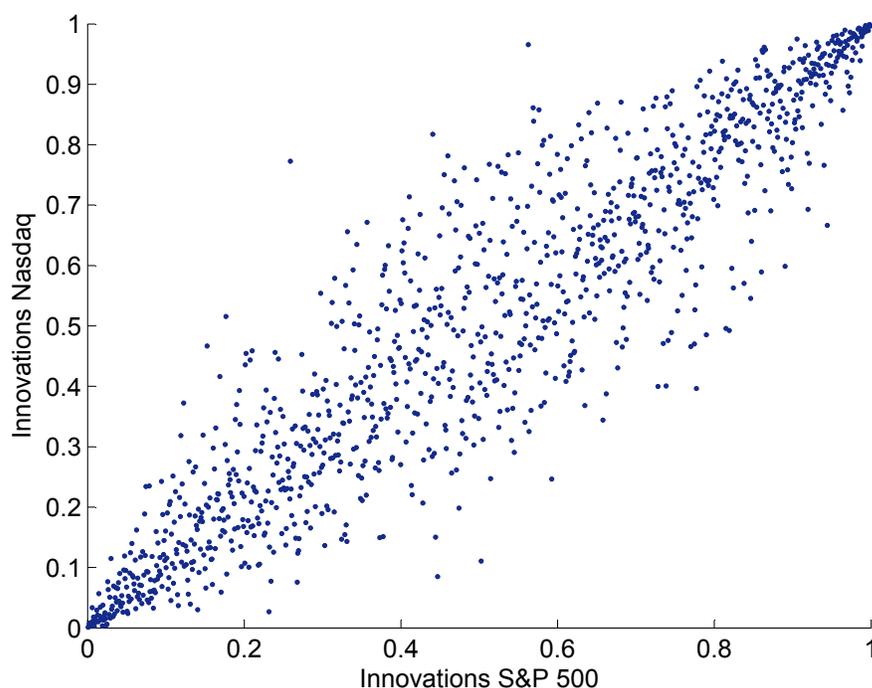


FIG. 5.2 – Paires de rangs observés des innovations standardisées GARCH des indices NASDAQ et S&P 500 sur la période d'échantillon.

La figure 5.3 illustre la variation du tau de Kendall durant la période d'observation. Les valeurs sont estimées sur une fenêtre mobile de 41 jours, c'est-à-dire que le tau de Kendall au jour t est calculé à partir des 20 observations précédentes, de l'observation au jour t , et des 20 prochaines. Quoique les estimations

varient énormément durant la période d'observation, on remarque quelques faits intéressants. Premièrement, les valeurs du tau de Kendall atteignent un plateau maximal entre la fin de l'année 2008 et le début de l'année 2009, ce qui correspond à l'effondrement des indices boursiers durant la crise financière. Ce résultat est en accord avec les observations historiques qui montrent que la dépendance entre différents actifs a tendance à augmenter en période de crise. Deuxièmement, la valeur du tau de Kendall sur la période entière est de 0.775, largement supérieure au résultat de van den Goorbergh et al. (2005) qui obtiennent une valeur de 0.60. En notant le fait que, d'une part, l'échantillon d'observations de ces auteurs, soit du premier janvier 1993 au 31 août 2002, est majoritairement représenté par une période de croissance relativement stable, et d'une autre part, que la crise financière qui a débuté par l'effondrement de la firme Bear Sterns constitue une large proportion de notre échantillon, la théorie nous indique qu'il est tout à fait normal d'obtenir une mesure de dépendance supérieure pour l'échantillon prélevé durant une période de crise. L'estimation des paramètres de la forme fonctionnelle retenue par les auteurs, afin de capturer les effets de variation de la corrélation, est estimée par simple régression. La droite de régression associée à la fonction ci-dessous est illustrée à la figure 5.4.

$$\gamma(h_{1,t}, h_{2,t}) = \gamma_0 + \gamma_1 \log \max(h_{1,t}, h_{2,t}) \quad (5.6)$$

Confirmant nos attentes, la droite est croissante de sorte à capturer l'effet de corrélation plus élevé en période de crise.

L'estimation des paramètres des copules dynamique se fait à partir des innovations standardisées présentées à la figure 5.2. Les estimations se font ensuite par

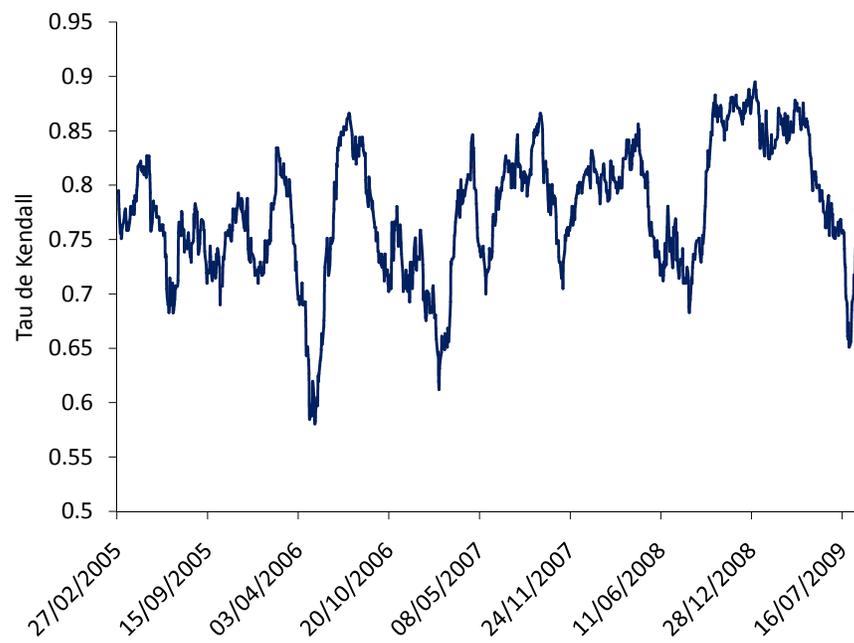


FIG. 5.3 – Variation du tau de Kendall durant la période d'observation sur une fenêtre mobile de 41 jours.

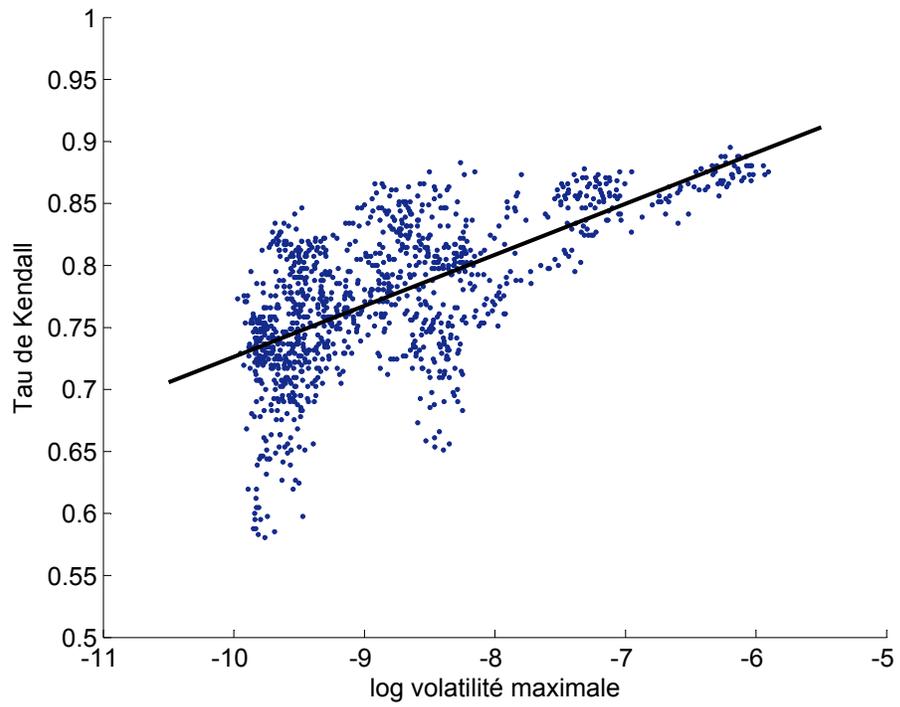


FIG. 5.4 – Régression des estimés du tau de Kendall sur une fenêtre mobile de 41 jours.

la méthode de pseudo-maximum de vraisemblance développée dans la section théorique portant sur les copules dynamiques.

Les estimations des paramètres de la copule dynamique gaussienne sont : $\hat{R} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9258 \\ 0.9258 & 1.0000 \end{bmatrix}$, $\hat{B} = \begin{bmatrix} -0.1147 & 0.0100 \\ -.1366 & 0.0713 \end{bmatrix}$ et $\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} 0.9777 & 0.9182 \\ 0.9182 & 0.9822 \end{bmatrix}$.

Pour la copule de Clayton, de Frank et de Gumbel, nous obtenons respectivement $\hat{\theta} = 0.1388$, $\hat{\theta} = 0.5602$ et $\hat{\theta} = 0.7551$.

Pour chacune des trois méthodes proposées, à savoir, copule statique, tau dynamique et copule dynamique, nous effectuons des simulations Monte Carlo de 100 000 trajectoires, ce qui entraîne des erreurs de simulation de l'ordre d'un point de base. . Pour chaque choix de copule, nous utilisons trois niveaux de volatilité initiale; faible, moyen et élevée, où le niveau moyen est représenté par la valeur estimée de la variance inconditionnelle $\omega/(1 - \beta - \alpha)$. Le niveau de volatilité faible est fixé en prenant la moitié de la volatilité moyenne et le niveau élevé est déterminé en doublant la valeur de la volatilité moyenne. Les prix d'exercices sont répartis de façon uniforme entre 0.90 et 1.10 et le taux sans risque est supposé constant à 4% par année.

5.3 Résultats

Les résultats des simulations indiquent que la façon par laquelle la dépendance est modélisée a un effet non négligeable sur le prix des options. De plus, l'ampleur de l'impact varie selon le niveau de volatilité et selon la copule utilisée. Examinons premièrement les résultats obtenus avec la copule gaussienne. Les

figures A.1 à A.2 dans l'annexe et la figure 5.5 présentent les résultats de la simulation.

Pour les options à la monnaie, notre méthode génère presque toujours des prix d'options légèrement inférieurs à ceux produits avec les deux autres méthodes. Par contre, et en particulier lorsque la volatilité initiale est élevée, les prix des options qui sont dans de la monnaie de type call sur max et put sur min sont inférieurs avec une structure de dépendance statique. Ce résultat peut être observé à la figure A.2. On remarque également que la différence entre les prix d'options augmente pendant des périodes de volatilité élevée. Finalement, les prix d'options convergent vers zéro lorsque le prix d'exercice augmente pour les options d'achat et lorsque le prix d'exercice diminue pour les options de vente, cela peu importe les hypothèses posées sur la structure de dépendance.

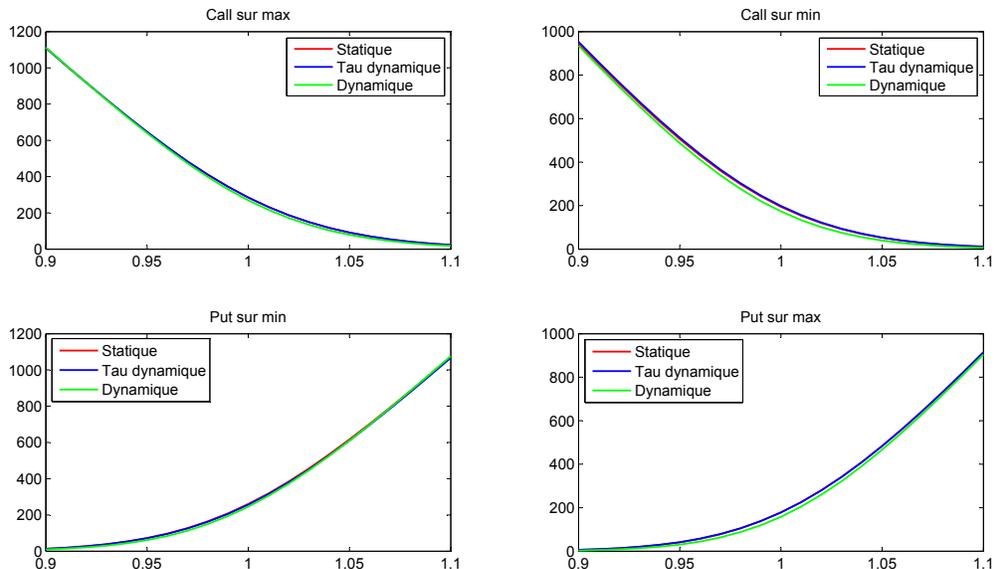


FIG. 5.5 – Prix des options en points de base en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est gaussienne avec une volatilité initiale moyenne.

Pour les copules de types archimédiennes, les résultats pour un niveau de volatilité initial moyen sont présentés dans les figures 5.6, 5.7 et 5.8 tandis que les graphiques avec une volatilité initiale faible et élevée sont présentés en annexe. On remarque immédiatement que les prix générés avec une copule dynamique divergent largement des prix générés avec une dépendance statique et avec un tau dynamique. Contrairement aux résultats obtenus avec la copule gaussienne, notre méthode surestime le prix des options de type call sur max et put sur min et sous-estime le prix des options de type call sur min et put sur max avec les copules de Clayton et de Frank. Par contre, la copule de Gumbel sous-estime le prix des quatres types d'options par rapport aux deux autres méthodes. Encore une fois, la différence entre les méthodes à tendance à s'accroître en période de volatilité élevée.

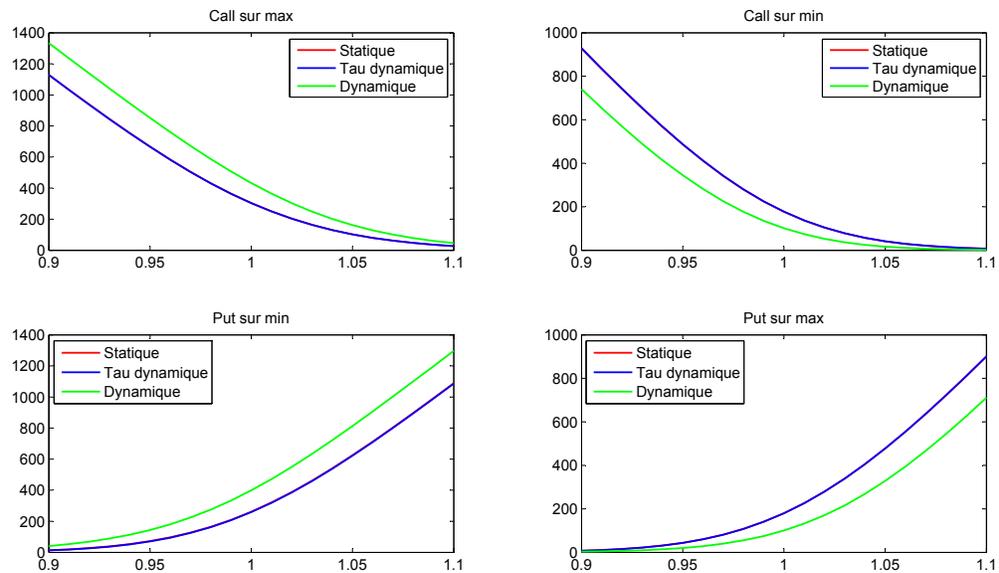


FIG. 5.6 – Prix des options en points de base en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Clayton avec une volatilité initiale moyenne.

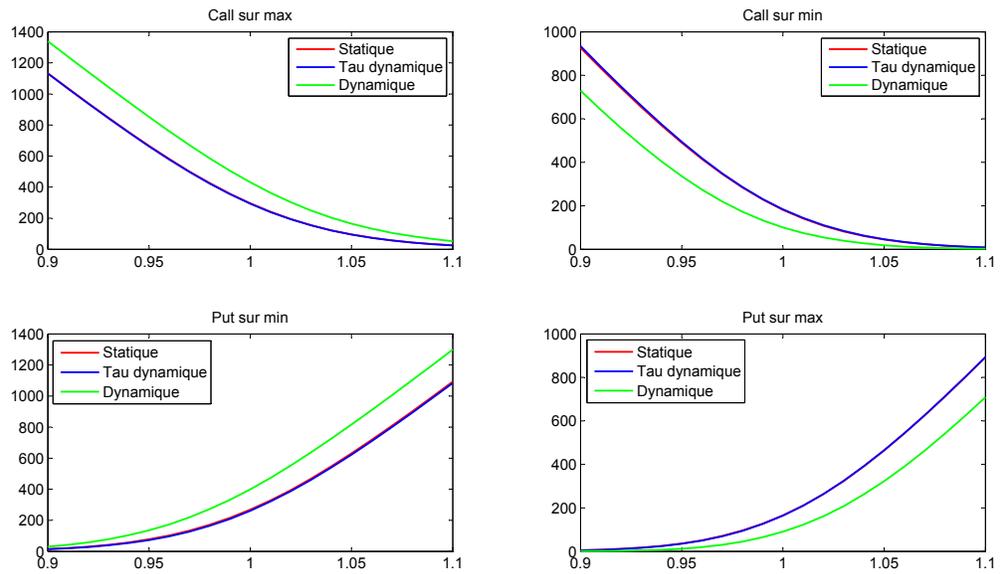


FIG. 5.7 – Prix des options en points de base en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Frank avec une volatilité initiale moyenne.

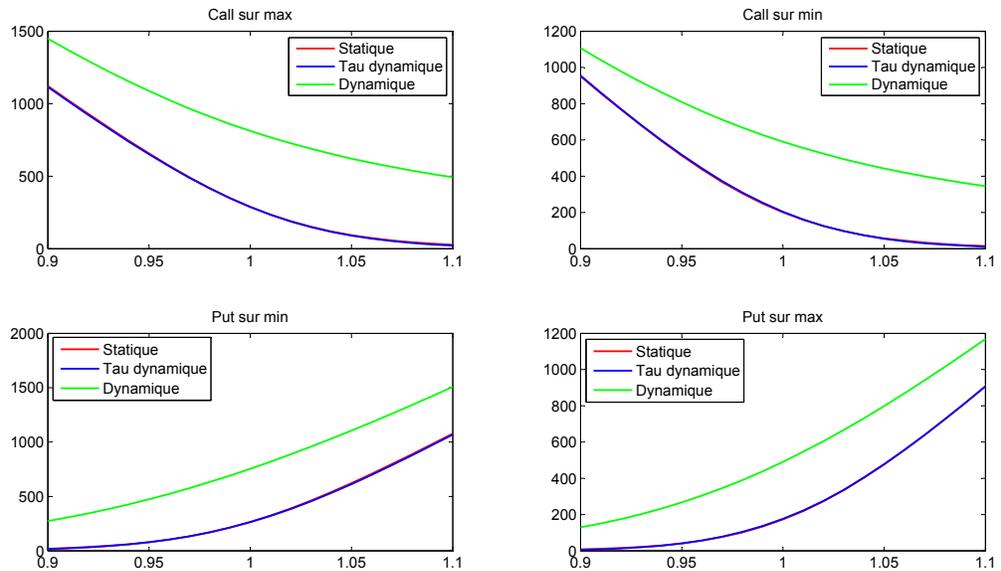


FIG. 5.8 – Prix des options en points de base en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Gumbel avec une volatilité initiale moyenne.

En comparant les résultats obtenus avec les quatre copules, on conclut que les prix des options diffèrent selon le choix de la copule et que l'écart entre les prix est plus marqué lorsque la structure de dépendance est modélisée avec une copule dynamique. Puisque la copule de Gumbel est généralement utilisée dans des applications de simulations d'évènements rares tels que le calcul de valeur à risque (VaR), elle n'est probablement pas le meilleur choix pour l'évaluation d'options bivariées. Il n'est donc pas surprenant d'observer un comportement quelque peu anormal des prix des options.

Lorsqu'on suppose que la structure de dépendance varie via le tau de Kendall en fonction des volatilités, nous obtenons des résultats similaires à ceux de van den Goorbergh et al. (2005) confirmant ainsi les calculs.

Les figures 5.9 et 5.10 ci-dessous présentent une des sources potentielles pouvant expliquer les différences observées entre les prix des différentes méthodes. On remarque que l'autocorrélation des innovations, illustrées dans la partie supérieure des deux figures, est significativement différente de zéro à un niveau de confiance de 95% pour les trois premiers retards. La partie inférieure des deux figures présente l'autocorrélation du carré des innovations. On voit que l'autocorrélation dépasse largement les bornes de 95% et ne semble pas diminuer même après dix retards. Ces résultats semblent indiquer que les innovations ne sont pas indépendantes et qu'il y a présence de dépendance sérielle. Cette dernière observation peut bien expliquer les différences obtenues des prix d'options puisque la méthode présentée dans ce mémoire tient compte à la fois de la dépendance entre les deux séries temporelles et de la dépendance sérielle.

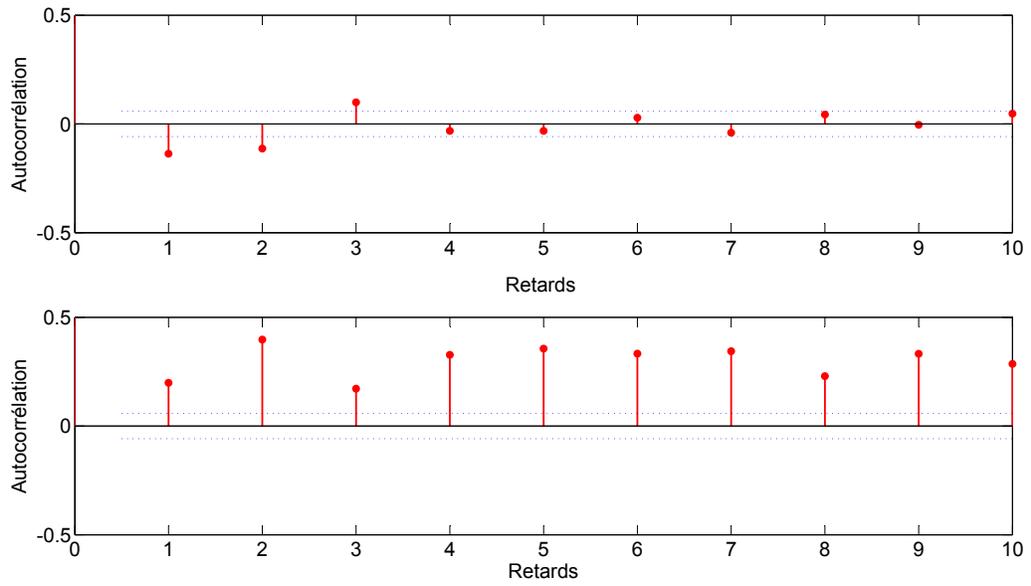


FIG. 5.9 – Autocorrélation des innovations et autocorrélation du carré des innovations du S&P 500.

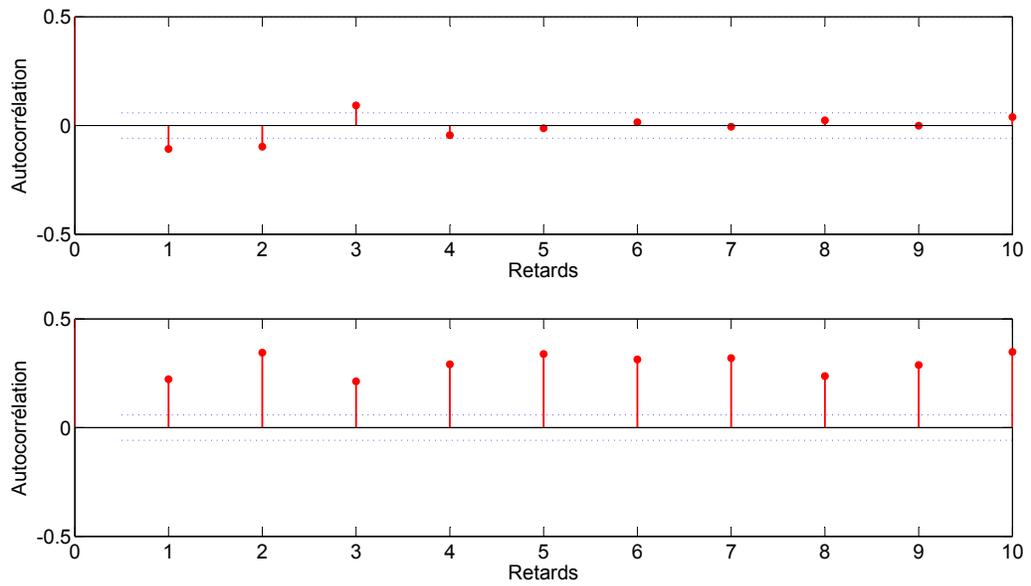


FIG. 5.10 – Autocorrélation des innovations et autocorrélation du carré des innovations du Nasdaq.

Chapitre 6

Conclusion

Dans ce mémoire trois méthodes d'évaluations d'options bivariées à l'aide de copules furent étudiées. Nous avons cherché à étudier l'effet sur les prix d'options bivariées lorsque qu'on abandonne certaines hypothèses implicites qui sont souvent restrictives et irréalistes dans la plusieurs modèles à copules, notamment le fait de ne pas tenir compte de la dépendance sérielle. Nous avons premièrement considéré une approche statique où la dépendance est supposée fixe tout au long de la période d'évaluation. Nous avons ensuite répliqué la méthode proposée par van den Goorbergh et al. (2005), où l'aspect dynamique de la dépendance est capturé à l'aide d'une bijection entre le tau de Kendall et le paramètre de la copule. Nous avons finalement proposé une nouvelle approche basée sur les copules dynamiques généralisées qui permet de capturer l'aspect dynamique de la structure de dépendance entre plusieurs actifs tout en tenant compte de la dépendance temporelle.

Tout en confirmant les résultats obtenus par van den Goorbergh et al. (2005),

nous avons trouvé que le fait de tenir compte de la dépendance temporelle avait un impact significatif sur le prix des options bivariées. Cet effet est d'autant plus prononcé avec les copules archimédiennes.

Ce cadre relativement simple nous a permis de prendre un premier pas dans l'étude de l'importance associée à la nature dynamique de la dépendance lors de l'évaluation de produits dérivés multivariés. Une prochaine étape consisterait à effectuer ce même type d'analyse avec des produits plus complexe. Les produits dérivés de crédits offrent plusieurs choix possibles, notamment les *CDO*, les *CDO*² ou les produits portant sur le premier défaut d'un panier d'obligations.

Bibliographie

- Bennett, M. N. & Kennedy, J. E. (2004), ‘Quanto pricing with copulas’, *Journal of Derivatives* **12**(1), 26 – 45.
- Berrada, T., Dupuis, D., Jacquier, E., Papageorgiou, N. & Remillard, B. (2006), ‘Credit migration and derivatives pricing using copulas’, *Journal of Computational Finance* **10**, 43–68.
- Black, F. & Scholes, M. (1973), ‘The pricing of options and corporate liabilities’, *Journal of Political Economy* **81**, 637 – 654.
- Cherubini, U. & Luciano, E. (2002), ‘Bivariate option pricing with copulas’, *Applied Mathematical Finance* **9**(2), 69 – 86.
- Deheuvels, P. (1978), ‘Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes’, *Publications de l’Institut de Statistiques de l’Université de Paris* **23**, 1–36.
- Duan, J.-C. (1995), ‘The garch option pricing model’, *Mathematical Finance* **5**(1), 13 – 32.
- Genest, C., Ghoudi, K. & Rivest, L.-P. (1995), ‘A semiparametric estima-

- tion procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions', *Biometrika* **82**, 543 – 552.
- Genest, C. & Mackay, J. (1986a), 'The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform marginals', *The American Statistician* **40**, 280–283.
- Genest, C. & MacKay, R. J. (1986b), 'Copules archimédiennes et familles de lois bi-dimensionnelles dont les marges sont données.', *The Canadian Journal of Statistics* **14**(2), 145 – 159.
- Genest, C. & Remillard, B. (2008), 'Validity of the parametric bootstrap for goodness-of-fit testing in semiparametric models', *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B)* **44**, 1096–1127.
- Genest, C., Remillard, B. & Beaudoin, D. (2009), 'Goodness-of-fit tests for copulas : A review and a power study', *Insurance Mathematics and Economics* **44**, 199–213.
- Joe, H. (1997), 'Multivariate models and dependence concepts', *Monographs in Statistics and Probability* **73**.
- Kole, E., Koedijk, K. & Verbeek, M. (2007), 'Selecting copulas for risk management', *Journal of Banking and Finance* **31**, 2405 – 2423.
- Li, D. X. (2000), 'On default correlation : A copula function approach', *Journal of Fixed Income* **9**, 43 – 54.
- Marshall, A. & Olkin, I. (1988), 'Families of multivariate distributions', *Journal of the American Statistical Association* **83**, 834 – 841.

-
- Patton, A. J. (2001), Modelling Time-Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula, PhD thesis, Department of Economics, UCSD.
- Rémillard, B. & Papageorgiou, N. (2010), ‘Dynamic copulas’, *Gerad* .
- Rosenberg, J. V. (1999), ‘Semiparametric pricing of multivariate contingent claims’, *NYU-Stern School of Business, Working Paper* .
- Sklar, M. (1959), ‘Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges’, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **8**, 229–231.
- Soustra, F. (2006), ‘Pricing of synthetic cdo tranches, analysis of base correlation and an introduction to dynamic copulas’, *Mémoire de maîtrise, HEC Montréal* .
- van den Goorbergh, R. W., Genest, C. & Werker, B. J. (2005), ‘Bivariate option pricing using dynamic copula models’, *Insurance : Mathematics and Economics* **37**(1), 101 – 114.
- Zhang, J. & Guégan, D. (2008), ‘Pricing bivariate option under garch processes with time-varying copula’, *Insurance : Mathematics and Economics* **42**(3), 1095 – 1103.

Annexe A

Graphiques des résultats des simulations

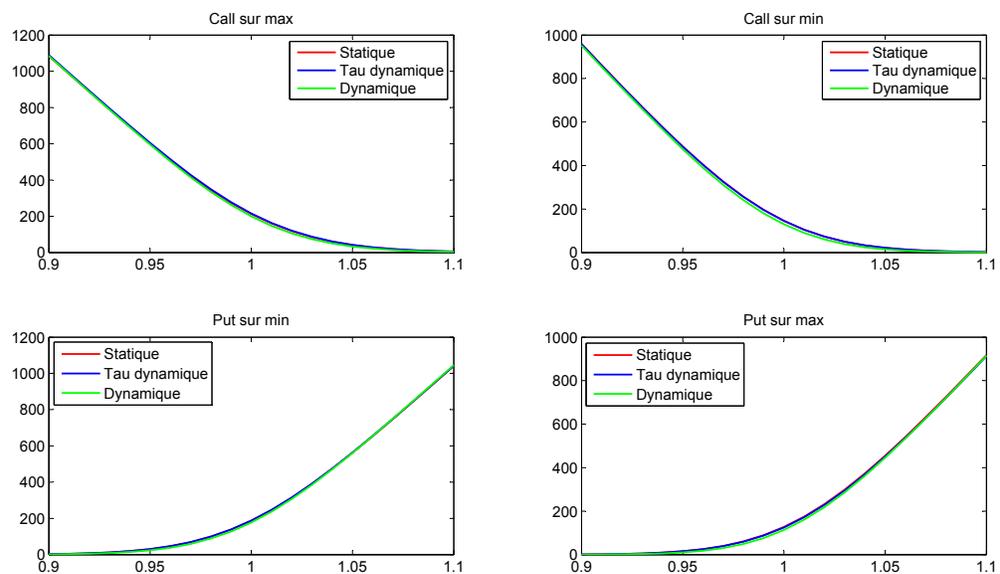


FIG. A.1 – Prix des options en points de base en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est gaussienne avec une volatilité initiale faible.

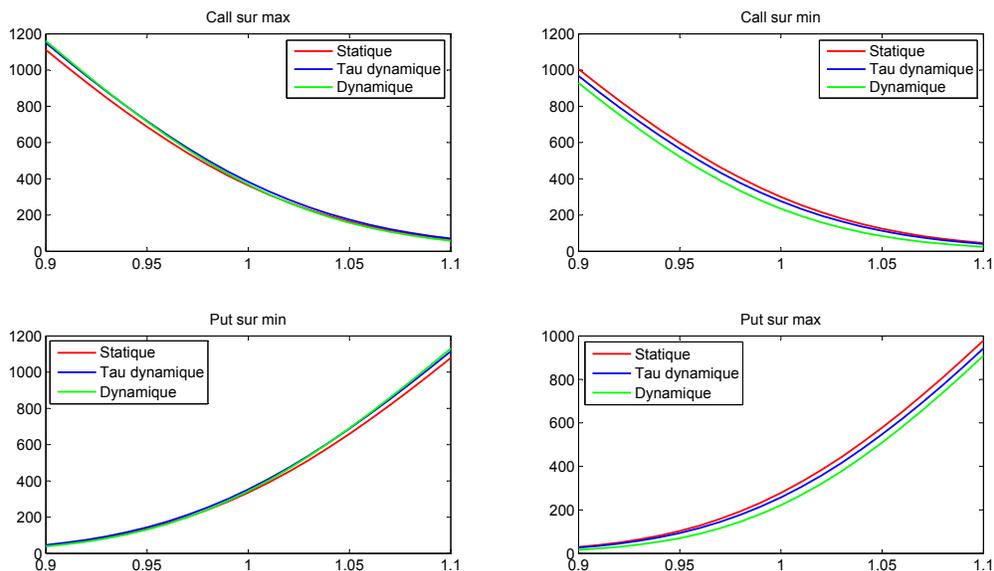


FIG. A.2 – Prix des options en points de base en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est gaussienne avec une volatilité initiale élevée.

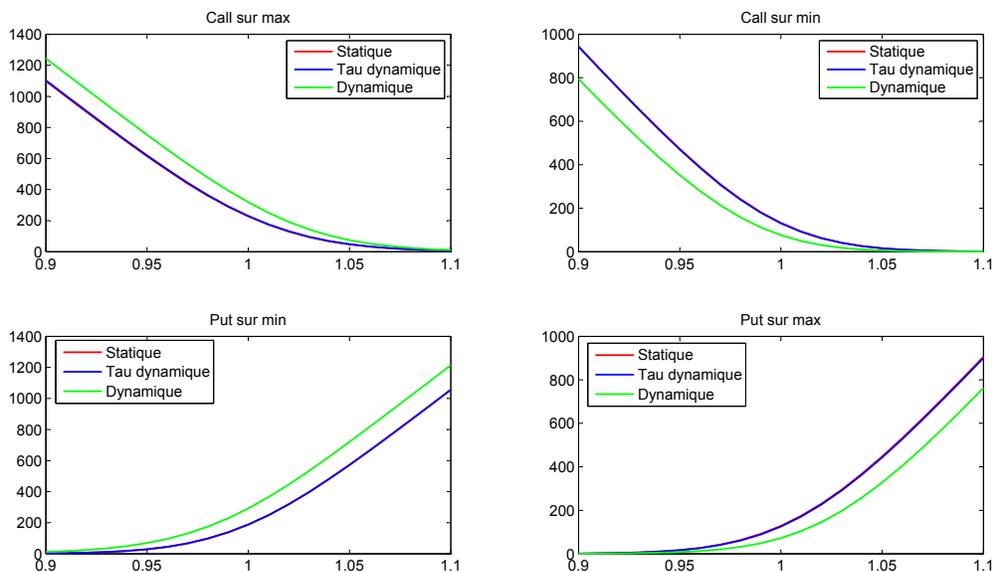


FIG. A.3 – Prix des options en points de base en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Clayton avec une volatilité initiale faible.

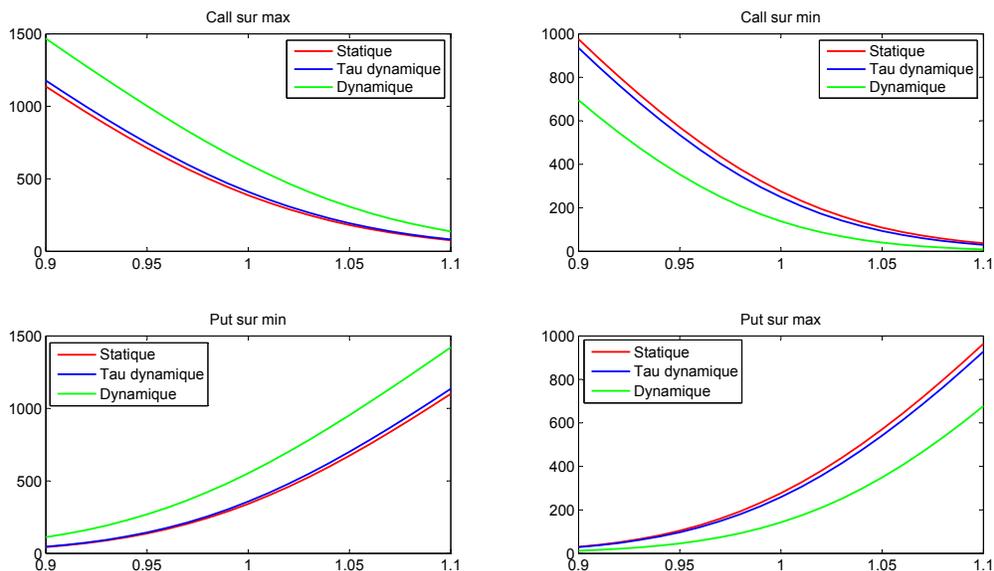


FIG. A.4 – Prix des options en points de base en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Clayton avec une volatilité initiale élevée.

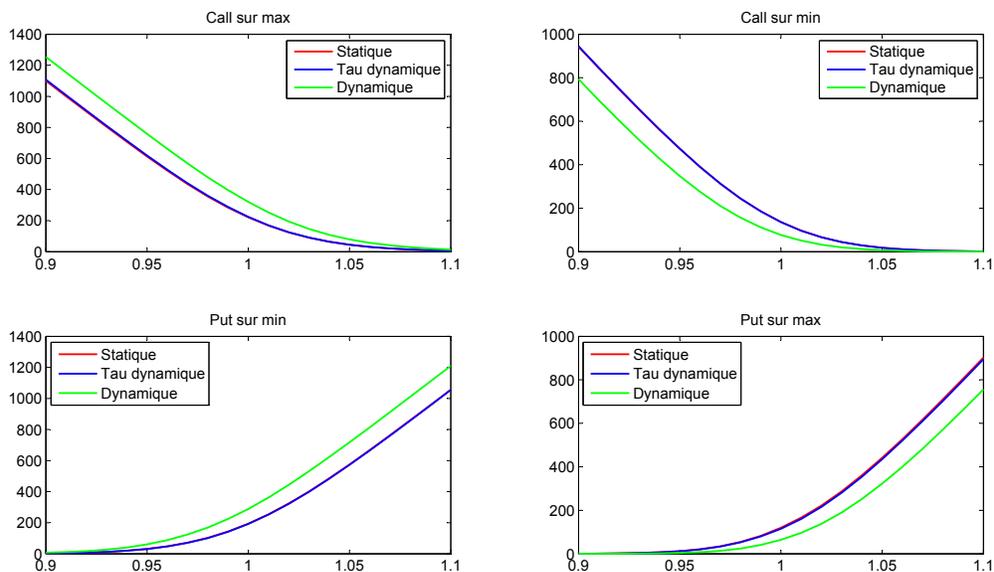


FIG. A.5 – Prix des options en points de base en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Frank avec une volatilité initiale faible.

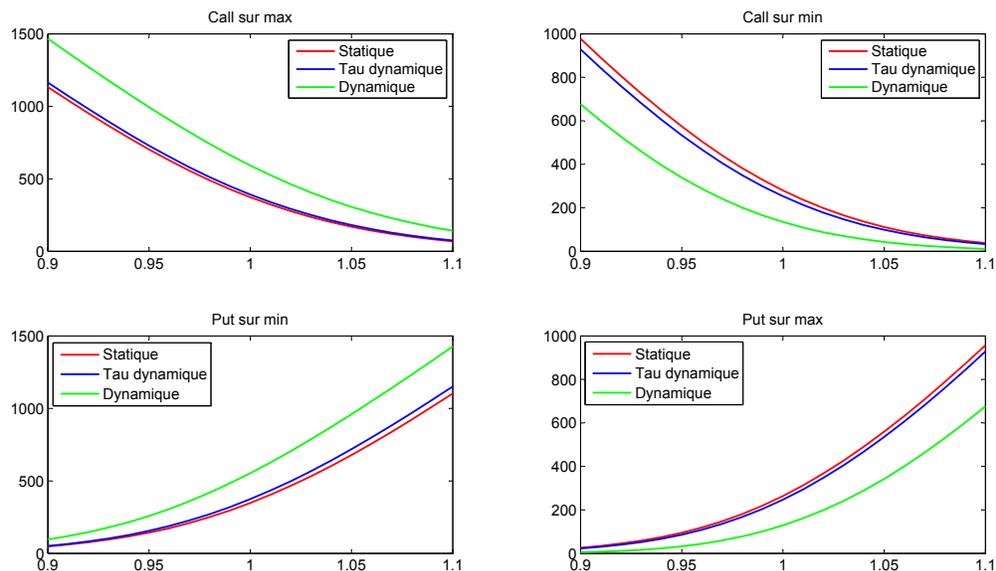


FIG. A.6 – Prix des options en points de base en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Frank avec une volatilité initiale élevée.

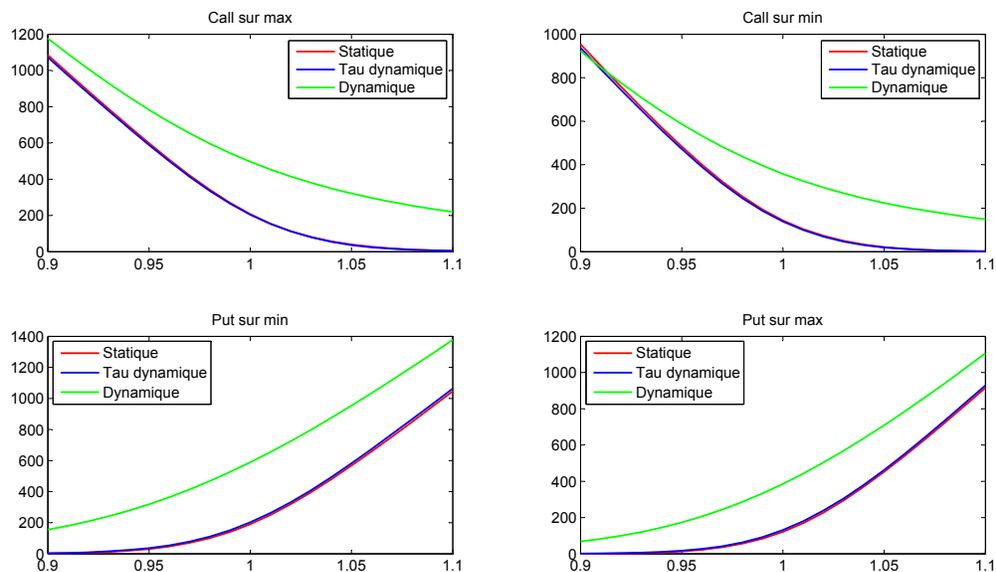


FIG. A.7 – Prix des options en points de base en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Gumbel avec une volatilité initiale faible.

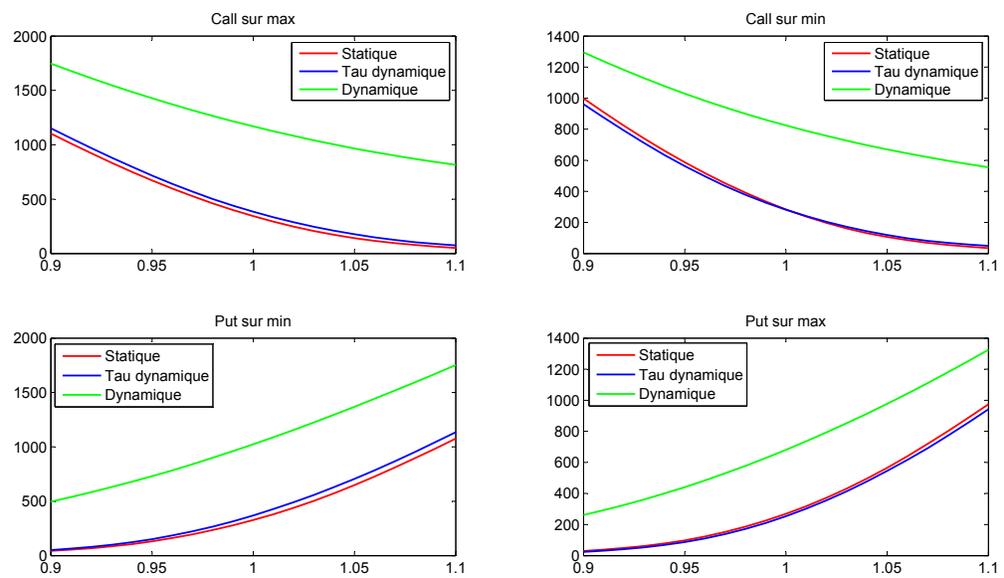


FIG. A.8 – Prix des options en points de base en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Gumbel avec une volatilité initiale élevée.

Annexe B

Tableaux des résultats des simulations

Statique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	10.840	9.591	0.027	0.011
95%	5.994	4.876	0.301	0.154
100%	2.124	1.456	1.870	1.273
105%	0.409	0.212	5.616	4.547
110%	0.052	0.020	10.413	9.180
Tau dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	10.898	9.577	0.028	0.010
95%	6.053	4.868	0.308	0.154
100%	2.159	1.454	1.883	1.250
105%	0.424	0.217	5.635	4.504
110%	0.056	0.022	10.429	9.125
Copule dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	10.848	9.519	0.016	0.004
95%	5.956	4.753	0.239	0.101
100%	2.000	1.296	1.771	1.134
105%	0.333	0.148	5.612	4.456
110%	0.034	0.009	10.463	9.146

TAB. B.1 – Prix des options en pourcentage en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est gaussienne avec une volatilité initiale faible. Les erreurs de simulation sont de l'ordre d'un point de base.

Statique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.099	9.456	0.136	0.060
95%	6.457	5.058	0.727	0.407
100%	2.842	1.945	2.603	1.782
105%	0.910	0.517	6.164	4.838
110%	0.232	0.107	10.743	9.149
Tau dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.104	9.529	0.133	0.063
95%	6.468	5.124	0.717	0.415
100%	2.848	1.981	2.563	1.784
105%	0.910	0.532	6.103	4.836
110%	0.231	0.111	10.672	9.146
Copule dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.119	9.352	0.098	0.034
95%	6.397	4.877	0.612	0.301
100%	2.691	1.731	2.455	1.584
105%	0.786	0.391	6.104	4.668
110%	0.176	0.064	10.766	9.048

TAB. B.2 – Prix des options en pourcentage en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est gaussienne avec une volatilité initiale moyenne. Les erreurs de simulation sont de l'ordre d'un point de base.

Statique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.116	10.053	0.433	0.293
95%	6.865	5.989	1.359	1.031
100%	3.630	2.997	3.356	2.785
105%	1.639	1.247	6.594	5.783
110%	0.657	0.453	10.790	9.790
Tau dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.499	9.674	0.465	0.265
95%	7.181	5.661	1.441	0.935
100%	3.831	2.763	3.531	2.574
105%	1.743	1.126	6.884	5.476
110%	0.705	0.406	11.153	9.427
Copule dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.604	9.283	0.387	0.163
95%	7.153	5.219	1.312	0.702
100%	3.679	2.351	3.432	2.217
105%	1.574	0.837	6.908	5.100
110%	0.581	0.250	11.310	9.096

TAB. B.3 – Prix des options en pourcentage en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est gaussienne avec une volatilité initiale élevée. Les erreurs de simulation sont de l'ordre d'un point de base.

Statique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	10.975	9.443	0.026	0.013
95%	6.144	4.725	0.297	0.170
100%	2.268	1.324	1.885	1.284
105%	0.469	0.160	5.710	4.474
110%	0.065	0.010	10.550	9.059
Tau dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.032	9.424	0.025	0.012
95%	6.195	4.699	0.289	0.164
100%	2.297	1.303	1.882	1.255
105%	0.486	0.158	5.726	4.433
110%	0.069	0.011	10.568	9.005
Copule dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	12.444	7.938	0.119	0.006
95%	7.526	3.523	0.693	0.077
100%	3.182	0.761	2.920	0.722
105%	0.749	0.055	7.204	3.278
110%	0.110	0.002	12.139	7.628

TAB. B.4 – Prix des options en pourcentage en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Clayton avec une volatilité initiale faible. Les erreurs de simulation sont de l'ordre d'un point de base.

Statique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.295	9.266	0.135	0.073
95%	6.671	4.862	0.720	0.438
100%	3.041	1.766	2.614	1.797
105%	1.025	0.410	6.247	4.769
110%	0.268	0.067	10.893	9.002
Tau dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.278	9.292	0.127	0.070
95%	6.655	4.877	0.701	0.436
100%	3.028	1.776	2.589	1.798
105%	1.019	0.415	6.217	4.778
110%	0.271	0.070	10.861	9.020
Copule dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	13.336	7.408	0.408	0.032
95%	8.514	3.447	1.437	0.200
100%	4.329	1.013	3.991	1.004
105%	1.617	0.165	8.133	3.281
110%	0.461	0.016	12.973	7.114

TAB. B.5 – Prix des options en pourcentage en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Clayton avec une volatilité initiale moyenne. Les erreurs de simulation sont de l'ordre d'un point de base.

Statique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.372	9.752	0.434	0.301
95%	7.126	5.704	1.375	1.044
100%	3.864	2.756	3.416	2.771
105%	1.812	1.089	6.738	5.708
110%	0.760	0.369	11.007	9.645
Tau dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.774	9.350	0.459	0.286
95%	7.470	5.345	1.442	0.971
100%	4.100	2.489	3.576	2.590
105%	1.937	0.934	7.010	5.416
110%	0.814	0.296	11.361	9.282
Copule dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	14.673	6.950	1.118	0.122
95%	10.020	3.534	2.691	0.458
100%	6.001	1.381	5.527	1.428
105%	3.077	0.403	9.538	3.493
110%	1.372	0.090	14.214	6.777

TAB. B.6 – Prix des options en pourcentage en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Clayton avec une volatilité initiale élevée. Les erreurs de simulation sont de l'ordre d'un point de base.

Statique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.001	9.423	0.023	0.007
95%	6.129	4.726	0.315	0.123
100%	2.212	1.365	1.943	1.196
105%	0.442	0.182	5.749	4.415
110%	0.060	0.013	10.570	9.021
Tau dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.072	9.446	0.026	0.005
95%	6.194	4.740	0.309	0.116
100%	2.239	1.360	1.918	1.149
105%	0.449	0.180	5.727	4.348
110%	0.059	0.011	10.547	8.947
Copule dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	12.537	7.929	0.069	0.000
95%	7.583	3.480	0.608	0.036
100%	3.202	0.769	2.887	0.643
105%	0.795	0.068	7.174	3.225
110%	0.137	0.003	12.099	7.557

TAB. B.7 – Prix des options en pourcentage en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Frank avec une volatilité initiale faible. Les erreurs de simulation sont de l'ordre d'un point de base.

Statique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.333	9.259	0.154	0.049
95%	6.660	4.895	0.779	0.364
100%	2.963	1.814	2.687	1.656
105%	0.958	0.446	6.308	4.641
110%	0.254	0.082	10.933	8.926
Tau dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.308	9.344	0.138	0.044
95%	6.625	4.946	0.729	0.350
100%	2.931	1.839	2.611	1.645
105%	0.951	0.461	6.222	4.655
110%	0.249	0.088	10.838	8.941
Copule dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	13.393	7.294	0.306	0.008
95%	8.520	3.359	1.360	0.124
100%	4.315	1.007	3.997	0.908
105%	1.648	0.187	8.166	3.229
110%	0.521	0.022	12.990	7.092

TAB. B.8 – *Prix des options en pourcentage en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Frank avec une volatilité initiale moyenne. Les erreurs de simulation sont de l'ordre d'un point de base.*

Statique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.329	9.776	0.477	0.264
95%	7.024	5.742	1.432	0.948
100%	3.724	2.798	3.478	2.637
105%	1.695	1.116	6.785	5.597
110%	0.682	0.377	11.035	9.574
Tau dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.642	9.285	7 0.517	0.224
95%	7.285	5.336	1.557	0.856
100%	3.912	2.533	3.743	2.471
105%	1.806	0.989	7.188	5.355
110%	0.748	0.329	11.517	9.286
Copule dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	14.660	6.763	0.968	0.053
95%	9.940	3.386	2.580	0.322
100%	5.919	1.349	5.531	1.291
105%	3.064	0.429	9.600	3.425
110%	1.413	0.111	14.272	6.763

TAB. B.9 – Prix des options en pourcentage en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Frank avec une volatilité initiale élevée. Les erreurs de simulation sont de l'ordre d'un point de base.

Statique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	10.846	9.538	0.028	0.007
95%	5.981	4.831	0.310	0.131
100%	2.073	1.438	1.906	1.212
105%	0.397	0.215	5.672	4.526
110%	0.045	0.018	10.465	9.163
Tau dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	10.718	9.372	0.032	0.010
95%	5.887	4.719	0.368	0.168
100%	2.040	1.387	2.025	1.310
105%	0.367	0.194	5.820	4.626
110%	0.049	0.020	10.636	9.297
Copule dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.764	9.222	1.553	0.678
95%	7.827	5.871	3.191	1.731
100%	4.965	3.578	5.887	3.857
105%	3.213	2.240	9.538	7.095
110%	2.196	1.490	13.777	11.067

TAB. B.10 – Prix des options en pourcentage en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Gumbel avec une volatilité initiale faible. Les erreurs de simulation sont de l'ordre d'un point de base.

Statique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.220	9.511	0.190	0.078
95%	6.567	5.130	0.799	0.415
100%	2.890	2.002	2.660	1.727
105%	0.936	0.575	6.222	4.761
110%	0.266	0.146	10.782	9.080
Tau dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.144	9.549	0.160	0.053
95%	6.507	5.186	0.786	0.405
100%	2.874	2.038	2.627	1.761
105%	0.906	0.547	6.125	4.782
110%	0.209	0.116	10.684	9.074
Copule dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	14.488	11.072	2.734	1.294
95%	10.876	8.090	4.741	2.671
100%	8.120	5.900	7.540	4.905
105%	6.211	4.424	11.054	7.985
110%	4.924	3.448	15.066	11.686

TAB. B.11 – Prix des options en pourcentage en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Gumbel avec une volatilité initiale moyenne. Les erreurs de simulation sont de l'ordre d'un point de base.

Statique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.024	9.977	0.433	0.297
95%	6.718	5.869	1.313	0.980
100%	3.437	2.838	3.271	2.687
105%	1.413	1.066	6.488	5.652
110%	0.512	0.350	10.762	9.740
Tau dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	11.520	9.608	0.507	0.236
95%	7.170	5.627	1.515	0.875
100%	3.836	2.816	3.692	2.530
105%	1.767	1.188	7.054	5.450
110%	0.747	0.489	11.344	9.420
Copule dynamique				
Strike	Call sur max	Call sur min	Put sur min	Put sur max
90%	17.465	12.940	4.960	2.608
95%	14.275	10.288	7.298	4.407
100%	11.689	8.242	10.240	6.810
105%	9.658	6.702	13.690	9.768
110%	8.157	5.552	17.528	13.256

TAB. B.12 – Prix des options en pourcentage en fonction du prix d'exercice pour une structure de dépendance statique, avec un tau dynamique et dynamique généralisée. La copule utilisée est la copule de Gumbel avec une volatilité initiale élevée. Les erreurs de simulation sont de l'ordre d'un point de base.