

HEC MONTRÉAL

**Méthodes Monte Carlo pour l'évaluation des
options américaines**

Par

Fatiath Oketokoun

Sciences de la gestion

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maîtrise ès sciences
(M.Sc.) en Ingénierie Financière

Mai 2007

©Fatiath Oketokoun, 2007

Sommaire

Ce mémoire porte sur l'évaluation des options américaines avec la simulation de Monte Carlo. Nous faisons une étude comparative des principales méthodes qui évaluent les options américaines avec la simulation de Monte Carlo.

Notre étude se base sur l'algorithme de Del Moral et al. (2006) qui utilise l'interpolation linéaire et la simulation de Monte Carlo pour évaluer le prix des options américaines. L'attrait de cette méthode, est qu'elle conserve les propriétés de convexité et de monotonie de la fonction de prix de l'option américaine.

Nous comparons les prix des options bermudiennes évalués avec la méthode de Del Moral et al. (2006) et ceux de l'algorithme de Longstaff et Schwartz (2001) qui utilise la régression des moindres carrés. Nous appliquons la méthode de Andersen et Broadie (2004) aux algorithmes précités pour calculer un intervalle de prix de l'option américaine. Enfin, nous illustrons nos résultats avec un modèle GARCH.

Remerciements

Je tiens à remercier le professeur Bruno Rémillard, mon directeur de mémoire, pour m'avoir encadrer tout au long de ce travail. Sa grande disponibilité, ses précieux conseils et son support financier m'ont permis de mener à bout mon projet de fin d'études. Je vous dédie ce mémoire en signe de ma grande reconnaissance et de mon respect.

Je tiens également à remercier, les professeurs Lars Stentoft et Chantal Labbé, membres du Jury pour avoir pris le temps de lire et d'évaluer ce mémoire. Un grand merci pour votre présence et votre attention.

Ce mémoire étant le fruit de plusieurs années d'études, j'aimerais aussi remercier les professeurs de HEC Montréal qui m'ont enseigné à la Maîtrise et au Baccalauréat. Je vous remercie de m'avoir transmis votre passion pour la Finance et les Mathématiques.

J'aimerais porter une attention toute particulière à mes chers parents Anatou et Moussiliou qui ne cessent de me soutenir et de m'encourager dans toutes mes entreprises. Que Dieu les bénisse. Mes chaleureuses salutations à mes frères Rafiou et Nadia, pour leur grande affection et leur soutien moral pendant ces années d'études universitaires.

Enfin, je ne saurai terminer sans remercier toutes les personnes formidables que j'ai rencontrées au Canada, qui ont bien voulu partager plusieurs moments de ma vie estudiantine.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Revue de la littérature	4
2.1	Approche avec l'arbre binomial	4
2.2	Approche avec les méthodes de différences finies	5
2.3	Approche avec la simulation Monte Carlo	7
2.3.1	Le principe de la simulation Monte Carlo	7
2.3.2	Évaluation des options bermudiennes avec la simulation Monte Carlo	9
2.4	Conclusion	15
3	Le problème de Snell	16
3.1	Méthodologie	16
3.2	Les chaînes de Markov	16
3.3	Les temps d'arrêt	17
3.4	L'enveloppe de Snell	18
3.4.1	La solution de l'enveloppe de Snell (cas général)	18
3.4.2	La solution de l'enveloppe de Snell dans le cas Markovien	20
3.5	Aperçu sur le modèle GARCH	22
4	Description des principaux algorithmes	24

4.1	Description des méthodes	25
4.2	L'approche de Longstaff et Schwartz (2001)	25
4.3	L'approche de Del Moral et al. (2006)	27
4.4	L'approche de Andersen et Broadie (2004)	30
4.4.1	Les martingales	30
4.4.2	L'approche de Andersen et Broadie	31
4.5	Conclusion	33
5	Comparaisons numériques	35
5.1	Présentation des résultats	35
5.2	Option d'achat sur un sous-jacent dans un contexte Black-Scholes	36
5.2.1	Résultats trouvés avec l'approche de Longstaff-Schwartz (2001)	36
5.2.2	Résultats trouvés selon l'algorithme de Del Moral et al. (2006).	38
5.3	Call-on-max pour deux sous-jacents dans un contexte Black-Scholes.	39
5.4	Étude des propriétés de la courbe de prix de l'option bermudienne.	42
5.4.1	Propriétés de la courbe avec la méthode de Del Moral et al. (2006)	42
5.4.2	Propriétés de la courbe avec la méthode de Del Moral et al. (2006), pour un call-on-max sur deux sous-jacents . . .	44
5.5	Option de vente sur un sous-jacent EGARCH	46
5.5.1	L'algorithme de Del Moral et al. (2006) appliqué à un modèle EGARCH.	47
5.5.2	Analyse du graphique des prix de l'option.	49
5.6	Conclusion	50
6	Conclusion	52

A	Théorèmes de convexité et monotonie	54
B	Les polynômes de Laguerre	56
C	Interpolation linéaire	58
	Bibliographie	60

Table des figures

5.1	Courbe des valeurs de détention de l'option d'achat, et la courbe de prix de l'option d'achat.	43
5.2	Pente de la courbe des prix d'achat $\frac{dU}{dS}$	43
5.3	Graphique du prix d'une option d'achat sur le maximum (call on max) en deux dimensions.	45
5.4	Frontière de l'option d'achat sur le maximum (200pts).	45
5.5	Frontière de l'option d'achat sur le maximum (200pts).	46
5.6	Frontière de l'option d'achat sur le maximum (250pts).	46
5.7	Frontière de l'option d'achat sur le maximum. (350pts)	47
5.8	Option d'achat bermudienne avec le modèle GARCH.	49
5.9	Région d'exercice d'une option de vente bermudienne obtenue avec la méthode de Del Moral et al. (2006) avec le modèle GARCH. . .	50

Liste des tableaux

5.1	Comparaison des méthodes de Longstaff-Schwartz (2001) et Andersen-Broadie (2004), pour évaluer un call bermudien.	37
5.2	Comparaison des méthodes de Del Moral et al. (2006) et Andersen-Broadie (2004), pour évaluer un call bermudien.	39
5.3	Comparaison des prix du Call-on-max bermudien, avec les méthodes de Del Moral et al. (2006), Longstaff-Schwartz (2001) et les bornes de Andersen-Broadie (2004).	41
5.4	Comparaison des prix de Longstaff-Schwartz (2001) et Del Moral et al. (2006), lorsque la volatilité suit un mouvement GARCH. . .	48

Chapitre 1

Introduction

Une option américaine est une option qui donne à son détenteur le privilège d'être exercée à tout instant t durant sa durée de vie ou à sa maturité T .

Afin de bénéficier du privilège d'exercice par anticipation, le détenteur de l'option américaine doit exercer son option au meilleur moment possible. Il fait donc face à un problème de temps d'arrêt optimal.

L'évaluation des produits dérivés offrant la possibilité d'exercice par anticipation, représente un défi en Ingénierie Financière. Le modèle de Black and Scholes (1973) fournit une formule analytique pour l'évaluation des options européennes, qui ne peuvent être exercées qu'une seule fois durant leur durée de vie. Il n'existe pas encore de formule analytique pour l'évaluation des options américaines, surtout pour l'option de vente américaine. Dans la littérature, plusieurs approximations ont été proposées pour évaluer les options américaines. Cependant, elles présentent certaines faiblesses qui les rendent moins robustes.

Dans ce mémoire, nous proposons une approche basée sur la simulation de Monte Carlo pour évaluer les options américaines. Notre étude se base sur l'article de Del Moral et al. (2006) qui évalue les options américaines en conservant les propriétés de convexité et de monotonie de la fonction de prix de l'option.

Le chapitre deux présente les diverses approches qui ont été proposées dans la littérature pour l'évaluation des options américaines. On portera un coup d'oeil sur la méthode de l'arbre binomial, les méthodes de différences finies, ainsi que les techniques de simulation de Monte Carlo.

La pierre angulaire dans la résolution du problème de temps d'arrêt optimal, étant de résoudre le problème de Snell, nous présentons au troisième chapitre les principes clés de l'enveloppe de Snell et des chaînes de Markov. Au quatrième chapitre, nous faisons une étude comparative des principaux modèles d'évaluation des options américaines basés sur la simulation de Monte Carlo.

Enfin, le cinquième chapitre présente les résultats obtenus avec les algorithmes considérés. Nous y proposons également une application de la méthode de Del Moral et al. (2006) avec un processus GARCH.

Chapitre 2

Revue de la littérature

2.1 Approche avec l'arbre binomial

On peut évaluer les produits dérivés en élaborant, en temps discret, un arbre représentant les trajectoires possibles de l'actif sous-jacent dans le futur. L'arbre binomial le plus répandu est celui développé par Cox et al. (1979). L'approche par arbre binomial est d'une grande flexibilité, et son usage est simple pour les options européennes et américaines. Pour tenir compte de l'exercice anticipé des options américaines, il suffit de comparer à chaque nœud de l'arbre, la valeur intrinsèque de l'option obtenue par exercice immédiat (payoff) et sa valeur de détention (obtenue par l'induction backward), et de prendre le maximum de ces deux valeurs. La méthode binomiale permet de contourner les difficultés rencontrées avec l'approche des équations aux dérivées partielles (edp) qui ne fournit pas de solution explicite, ainsi que celles rencontrées avec l'approche par mesure martingale.

Toutefois, cette méthode s'adapte bien pour des cas simples, mais présente quelques faiblesses. On observe un problème de convergence au niveau de la discrétisation du pas de temps. Il faut que le nombre de pas de l'arbre tende vers l'infini (des pas très petits) pour avoir une bonne convergence. Plusieurs

techniques d'amélioration de la convergence ont été proposées par Leisen et Reimer (1996), et Broadie and Detemple (1996). La convergence devient meilleure aux endroits de l'arbre qui tiennent compte de la convexité du prix des options, c'est-à-dire dans la zone entourant le prix d'exercice. Pour les options américaines, il est souhaitable de disposer d'un arbre plus précis près de l'échéance. Figlewski and Gao (1999) proposent un modèle binomial adaptatif dans lequel l'arbre voit son pas de temps changer selon que l'on se situe près du prix d'exercice ou près de l'échéance : le degré de discrétisation est augmenté à bon escient dans les zones où cela entraîne une amélioration significative de la précision de calcul.

Une autre faiblesse de l'approche binomiale est sa difficulté d'application pour les options possédant plusieurs sous-jacents, ou pour les options ayant des caractéristiques complexes. Un modèle binomial ne suffit plus, il faut considérer un arbre trinomial ou même multinomial pour évaluer l'option. Ce qui rend les calculs plus complexes à effectuer, et l'algorithme est moins efficient en terme de temps d'exécution. Également, lorsque la valeur d'exercice actualisée de l'actif sous-jacent dépend de la trajectoire parcourue, le nombre de trajectoires à considérer devient trop grand.

2.2 Approche avec les méthodes de différences finies

Les méthodes de différences finies sont héritées de la physique et des mathématiques, leur application en finance est due à Brennan and Schwartz (1977). Elles se prêtent particulièrement bien à l'évaluation des produits dérivés disposant des clauses d'exercice anticipé, telles que les options américaines et bermudiennes. Les méthodes de différences finies s'apparentent à l'approche bi-

nomiale. Au lieu de travailler avec un arbre et des nœuds, on construit une grille parsemée de mailles. L'espace de temps est représenté en abscisse, et l'espace du sous-jacent en ordonnée. Les méthodes numériques permettent la résolution des équations aux dérivées partielles (edp) satisfaites par les produits dérivés lorsque ceux-ci n'offrent pas de solution explicite, ce qui arrive dans la plupart du temps. Les méthodes de différences finies consistent à discrétiser l'edp de manière à la résoudre comme un algorithme, elles nécessitent des conditions aux bornes terminales pour initier l'algorithme, et plus généralement des conditions aux bornes pour spécifier le type de produit dérivé à évaluer et pour garantir la convergence de l'algorithme vers le prix recherché.

On distingue les méthodes de différences finies explicite, implicite, et la méthode de Crank Nicolson qui est une moyenne des deux approches précédentes. Avec la méthode de différences finies explicite, chaque valeur du produit dérivé en date précédente est une combinaison linéaire de trois valeurs en date actuelle, la valeur du produit dérivé en tout point est caractérisée par induction backward. La méthode de différences finies explicite est simple à programmer, facile à appliquer à l'évaluation des options américaines. Très identique à l'arbre de Cox et al. (1979), elle évalue le produit dérivé à chaque maille comme si sa nature était européenne. Ensuite elle compare chaque valeur avec la valeur intrinsèque, et prend cette dernière lorsqu'elle est supérieure à la valeur initialement trouvée.

Les inconvénients de cette méthode sont le temps nécessaire pour converger vers un résultat précis, le risque d'instabilité, et la non-convergence de l'algorithme vers la bonne solution. Des techniques utilisant des variables de contrôle existent pour pallier au problème de temps de calcul. Aussi, l'extrapolation de Richardson permet d'améliorer de manière significative la précision de la méthode de différences finies explicite. En ce qui concerne le problème de convergence, l'usage de cette méthode révèle que lorsqu'il y a une erreur de convergence, celle-

ci est en général importante et donc détectable. On peut toutefois imposer des conditions nécessaires pour assurer la stabilité de la procédure de la méthode de différences finies explicite.

La méthode de différences finies implicite a pour objectif d'améliorer les performances de celle explicite en termes de précision (ou plutôt du rapport précision/temps de calcul) et de stabilité (convergence). La méthode de différences finies totalement implicite relie la valeur du produit dérivé à une maille donnée avec trois valeurs des mailles précédentes. L'avantage de cette méthode est qu'elle réduit considérablement les problèmes de stabilité. Par contre, la résolution de l'algorithme n'est plus explicite et l'induction backward n'est plus possible. L'algorithme consiste donc en la résolution d'un système d'équations linéaires. La méthode de Crank Nicolson consiste à développer un algorithme faisant la moyenne de ces deux schémas. Elle présente une meilleure stabilité et une convergence plus rapide par rapport aux méthodes de différences finies explicite et totalement implicite.

Comme l'approche binomiale, les méthodes de différences finies sont difficiles à utiliser pour l'évaluation des produits dérivés à plusieurs dimensions. On peut adapter la méthode de différences finies explicite à un cadre à deux dimensions, mais à partir de trois dimensions, il devient ardu d'utiliser les méthodes de différences finies.

2.3 Approche avec la simulation Monte Carlo

2.3.1 Le principe de la simulation Monte Carlo

La simulation Monte Carlo a la particularité d'être simple à utiliser dans l'évaluation des produits dérivés. Cette méthode consiste à générer de nombreuses

trajectoires possibles de l'actif sous-jacent, calculer les valeurs terminales du produit dérivé pour chaque trajectoire, prendre leur moyenne et l'actualiser. Ainsi, la simulation Monte Carlo, consiste à générer une trajectoire de l'actif sous-jacent dans le monde risque neutre, ensuite calculer à partir de cette trajectoire la valeur du produit dérivé, répéter ces étapes un certain nombre de fois, et enfin calculer la moyenne du produit dérivé et l'actualiser.

La technique de simulation Monte Carlo s'applique aisément aux dérivés de taux d'intérêt, et reste performante lorsque le modèle fait appel à plusieurs variables d'état, son taux de convergence est indépendant du nombre de variables d'état utilisées. Un autre avantage est qu'elle peut être utilisée avec plusieurs modèles ayant des structures différentes pour la fonction de paiement (payoff). Cependant, une faiblesse de cette méthode est que la simulation génère des trajectoires de l'actif sous-jacent de façon forward dans le temps, tandis que la détermination de la stratégie d'exercice optimal nécessite des techniques de style backward, comme celles utilisées en programmation dynamique. Pour contourner cet inconvénient, plusieurs méthodes hybrides combinant la simulation et la programmation dynamique ont été suggérées dans la littérature.

2.3.2 Évaluation des options bermudiennes avec la simulation Monte Carlo

Boyle (1977) fut l'un des premiers à proposer la simulation Monte Carlo pour évaluer des options bermudiennes. Cependant, Bossaerts (1989) et surtout Tilley (1993) ont apporté une contribution significative en démontrant que les options américaines peuvent être évaluées avec des techniques de simulation. Tilley (1993) démontre que contrairement aux théories précédentes, les options américaines peuvent être facilement évaluées par un modèle de simulation. Cette méthode était moins utilisée par les mathématiciens qui avaient recours à la simulation lorsque les autres méthodes ne fonctionnaient pas. Les approches standard traditionnelles pour évaluer les options américaines étaient le modèle continu à un facteur qui étudie le comportement stochastique du sous-jacent, l'approche binomiale ou multinomiale (discrète) pour représenter le processus stochastique, et l'évaluation du prix de l'option par l'induction backward. Toutefois, on a besoin de modèles multifactoriels plus réalistes, pour un modèle plus complexe. Plus le modèle est complexe, plus il faut utiliser la simulation, sinon, construire des solutions approximatives par des équations non linéaires différentielles et des intégrales devient compliqué, voire très difficile. Les recherches de Tilley (1993) montrent que l'utilisation de la simulation de Monte Carlo est plus efficace que l'approche binomiale. Cependant, l'algorithme de Tilley (1993) présente quelques faiblesses. Il présente un problème de convergence, et il est difficile de le généraliser avec des variables d'état additionnelles.

Carriere (1996) montre comment évaluer le privilège de l'exercice anticipé des options américaines en temps discret. Il met en relief le temps d'arrêt optimal pour n'importe quel processus markovien discret en temps fini. Son algorithme repose principalement sur l'induction backward, et des approximations successives des

espérances conditionnelles par des méthodes statistiques non paramétriques. Il montre la nature biaisée des estimateurs proposés par Tilley (1993), et propose une façon de construire un estimateur non biaisé en utilisant la théorie du temps d'arrêt optimal pour justifier la forme de son algorithme qui utilise des régressions séquentielles.

Broadie and Glasserman (1997) ont développé un algorithme basé sur des arbres simulés pour estimer le prix des options américaines et autres produits dérivés présentant la possibilité d'exercice anticipé. L'algorithme génère deux estimateurs, un avec des biais considérables et l'autre avec de légers biais, les deux sont asymptotiquement non biaisés et convergent vers le vrai prix. Leur méthode génère des bornes supérieure et inférieure, permettant de construire un intervalle de confiance pour le vrai prix des options bermudiennes. L'attrait de cet algorithme de simulation est qu'il enlève la dépendance exponentielle du temps de calcul sur la dimension du problème. Toutefois, le temps de calcul semble être exponentiel avec le nombre d'opportunités d'exercice anticipé.

Longstaff and Schwartz (2001) proposent une nouvelle approche simple pour l'approximation des options américaines par la simulation lorsque le modèle est markovien. Leur approche est basée sur la détermination de la région d'exercice. L'option américaine est exercée si la valeur intrinsèque obtenue par l'exercice immédiat (payoff), est supérieure ou égale à la valeur de détention de l'option. L'idée est d'estimer l'espérance conditionnelle du payoff futur à chaque date d'exercice possible. Ainsi, la stratégie d'exercice optimale est essentiellement déterminée par l'espérance conditionnelle du payoff si l'option est toujours en vie. En estimant la fonction d'espérance conditionnelle pour chaque date d'exercice, ils obtiennent une spécification complète des stratégies d'exercice optimales pour chaque trajectoire simulée. Avec cet ensemble de spécifications, l'option américaine peut être évaluée correctement par la simulation Monte Carlo. La

première étape utilisée par Longstaff and Schwartz (2001) est d'approximer les espérances conditionnelles du payoff avec une projection orthogonale de l'espace générée par un nombre fini de fonctions de base. Avec la projection orthogonale, ils introduisent les temps d'arrêt à partir desquels ils obtiennent une approximation de la valeur de la fonction de l'option. La seconde étape consiste à évaluer numériquement l'espérance conditionnelle du payoff avec une simulation Monte Carlo. C'est l'approche LSM (Least Square Monte-Carlo).

Un atout de cette approche est qu'elle s'applique pour un payoff qui dépend de la trajectoire parcourue, et pour des situations à facteurs multiples. Les auteurs ont testé leur algorithme pour évaluer une option de vente américaine à un facteur, pour des options exotiques de type américain, bermudien et asiatique, et aussi pour un cancelable index amortizing swap. Cet article fut d'une grande contribution pour l'évaluation des options complexes par la simulation Monte Carlo.

Clément et al. (2002) démontrent la convergence presque sûre de l'algorithme de Longstaff and Schwartz (2001). Ils déterminent le taux de convergence et prouvent que l'erreur normalisée est asymptotiquement gaussienne. Pour mener à bien leur analyse, ils remplacent l'intervalle d'exercice anticipé par un ensemble fini de dates d'exercice, le travail a été fait en utilisant des options bermudiennes au lieu d'options américaines. Il s'agissait alors de résoudre un problème discret de temps d'arrêt optimal en implémentant le principe de la programmation dynamique. Ces auteurs ont présenté l'algorithme de Longstaff and Schwartz (2001) dans un contexte de temps d'arrêt discret, et non continu. On cherche le temps d'arrêt optimal qui maximise la valeur d'exercice actualisée espéré pour le détenteur de l'option. La méthode proposée dans Clément et al. (2002) impose que le modèle sous-jacent suive une chaîne de Markov.

Dans cette même optique, Haugh and Kogan (2004) construisent un algo-

rithme général pour évaluer les bornes inférieure et supérieure du prix des options en utilisant une approximation de la programmation dynamique et des régressions non linéaires pour approximer le prix des options. Leur étude similaire à celle de Andersen et Broadie (2004), représente le prix de l'option américaine comme une solution d'un problème dual de minimisation.

Stentoft (2003) analyse les propriétés de la méthode du LSM (Least Square Monte Carlo) proposée par Longstaff and Schwartz (2001). Il démontre que le prix estimé par l'algorithme LSM converge vers le vrai prix. Il prouve la convergence de la moyenne carrée des espérances conditionnelles approximatives vers les vraies espérances conditionnelles.

Ibanez and Zapatero (2004) utilisent la simulation Monte Carlo pour évaluer les options américaines multidimensionnelles. Ils construisent la frontière d'exercice optimale, en partant de l'idée qu'elle représente l'ensemble des points où la valeur intrinsèque est égale à la valeur de continuation. Si cette égalité n'est pas respectée, on exerce l'option lorsque la valeur intrinsèque est supérieure à la valeur de continuation, sinon on attend jusqu'à la prochaine date d'exercice. Cette propriété des options américaines est indépendante de la dimension du problème, ou de ses paramètres stochastiques. Elle implique que chaque point de la frontière d'exercice optimale d'un problème multi-dimensionnel est un point fixe d'un simple algorithme. Ainsi, on peut calculer un certain nombre de ces points d'exercice optimaux et prendre une décision d'exercice basée sur eux. Dans leur algorithme, Ibanez and Zapatero (2004) considèrent des options bermudiennes, ayant un nombre fini de dates d'exercice anticipé et évaluent la frontière d'exercice de façon récursive. Pour chaque date d'exercice anticipé, ils construisent quelques points de la frontière d'exercice en utilisant une interpolation ou une simple régression pour avoir une approximation de la frontière d'exercice optimale. Après avoir construit la frontière d'exercice pour chaque date d'exercice

anticipé, ils simulent des trajectoires pour évaluer le prix de l'option bermudienne et pour ainsi obtenir un bon estimateur du vrai prix de l'option.

Garcia (2003) propose un algorithme pour l'estimation des options américaines en utilisant la simulation de Monte Carlo. L'auteur fait une représentation paramétrique de la région d'exercice, qui utilisent les temps d'arrêt. Il propose deux différents estimateurs du prix de l'option américaine; un présentant un léger biais, et l'autre avec un biais plus important. Ces deux estimateurs peuvent être utilisés pour l'estimation du prix de l'option américaine, et sont asymptotiquement non-biaisés.

Broadie and Glasserman (2004) proposent une méthode de mailles stochastiques pour évaluer les options bermudiennes. Leur méthode présente un algorithme pour évaluer les bornes inférieure et supérieure et donne un intervalle de confiance pour le vrai prix de l'option. L'algorithme fournit également les conditions sous lesquelles le prix de l'option converge lorsque l'effort computationnel augmente. L'effort computationnel augmente de façon quadratique avec le nombre de mailles et de façon linéaire avec le nombre d'opportunités d'exercice. Cette méthode utilise un style de programmation dynamique avec des récursions backward pour approximer le prix et la politique d'exercice optimale.

Andersen and Broadie (2004) développent un algorithme basé sur la simulation Monte Carlo pour évaluer des options américaines (avec exercice anticipé continu) et des options bermudiennes (avec des dates précises d'exercice anticipé). Leur méthode génère des bornes inférieure et supérieure pour le prix des options bermudiennes, et donne ainsi un intervalle de confiance encadrant la vraie valeur de l'option. La borne inférieure peut être générée en utilisant un algorithme qui donne la stratégie d'exercice optimale. La borne supérieure est générée en utilisant un nouvel algorithme Monte Carlo qui construit une martingale basée sur la représentation de Doob-Meyer. Cet algorithme se base sur la représentation

duale de la valeur de la fonction bermudienne. Leur algorithme ne requiert pas une approximation du processus de prix de l'option à chaque état de la nature. Au contraire, il utilise seulement l'information fournie à partir de l'approximation de la stratégie d'exercice optimale qui réduit le temps de calcul et l'erreur d'approximation.

Bally et al. (2005) présentent une méthode de quantization qui est bien adaptée pour évaluer le prix des options américaines sur plusieurs sous-jacents, lorsque le processus est markovien. Le but de cet algorithme est de remplacer le processus original par une chaîne de Markov avec un nombre fini d'états choisis de façon optimale. La différence entre l'algorithme d'arbre de quantization et la méthode de régression de Longstaff and Schwartz (2001) est que ce dernier fait le choix d'une approximation très précise mais globale, tandis que celui de Bally et al. (2005) privilégie une approximation irrégulière (moins précise) mais locale. L'approximation locale de la méthode de quantization présente certains avantages. Elle peut conduire à des approximations très précises du prix de l'option utilisant les dérivées partielles, nécessaires pour les besoins de couverture par exemple. Un second avantage est qu'une fois le processus de prix du sous-jacent a été construit de façon appropriée, il peut presque instantanément évaluer toute fonction de paiement américaine, sans avoir recours à la simulations Monte Carlo. Enfin, le processus de diffusion suit un mouvement brownien comme dans le modèle de Black and Scholes (1973), ainsi l'algorithme de quantization ne nécessite aucun paramètre, il suffit de considérer la quantization d'un mouvement brownien lui-même.

2.4 Conclusion

Trouver une bonne règle d'exercice anticipé pour évaluer une option américaine est un art, comme le met en évidence les articles précités, qui proposent tous des approches différentes pour résoudre ce problème. Plusieurs méthodes numériques ont été étudiées pour l'évaluation du prix des options américaines. Bien que de remarquables progrès ont été faits dans ce domaine, l'évaluation de ces options dans un modèle multifactoriel combiné à une fonction de paiement qui dépend de la trajectoire parcourue reste encore un défi à relever.

Le prochain chapitre présente les notions clés pour l'évaluation des options bermudiennes. Nous aborderons entre autres le problème de Snell, les chaînes de Markov, et les temps d'arrêt.

Chapitre 3

Le problème de Snell

3.1 Méthodologie

Tout au long de notre travail, nous travaillerons uniquement avec les options bermudiennes. L'évaluation des options américaines peut être difficile à faire, car l'option peut être exercée à tout instant avant l'échéance. Soulignons qu'une option américaine peut être considérée comme une option bermudienne ayant un nombre fini, possiblement grand, de dates d'exercice anticipé. En ne considérant que les options bermudiennes, on remplace le problème de temps d'arrêt continu en un problème de temps d'arrêt discret.

Le but de ce chapitre est d'introduire les principales notions transversales aux chapitres suivants.

3.2 Les chaînes de Markov

Les chaînes de Markov nous permettent de résoudre plus aisément le problème de temps d'arrêt optimal.

Un processus stochastique $X = \{x_t : t \in T\}$, où T est un ensemble d'indices,

est dit markovien si, pour tout $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$, la distribution conditionnelle de X_{t_n} étant donné $X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}}$ est égale à la distribution conditionnelle de X_{t_n} étant donné $X_{t_{n-1}}$, c'est-à-dire que pour tout $x_1, \dots, x_n \in R$, on a :

$$P[X_{t_n} \leq x_n | X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}] = P[X_{t_n} \leq x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}].$$

Si T est dénombrable, alors la loi conditionnelle de X_{t_n} sachant que $X_{t_{n-1}} = x_{n-1}$ est dénotée par :

$$P[X_{t_n} \in A | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}] = \pi_n(x_{n-1}, A), \quad A \in \mathcal{F}_{t_n}.$$

Les propriétés des chaînes de Markov peuvent s'interpréter en terme d'indépendance conditionnelle du passé et du futur, sachant l'état présent.

3.3 Les temps d'arrêt

Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable muni d'une filtration

$$\mathbb{F} = \left\{ \mathcal{F}_t : t \in \{0, 1, \dots\} \right\}.$$

Un temps d'arrêt τ est une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{F}) , à valeurs dans $\{0, 1, \dots\}$, et telle que :

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{pour tout } t \in \{0, 1, \dots\}.$$

Le concept de temps d'arrêt est très utile dans la tarification des produits dérivés comportant des possibilités d'exercice anticipé, comme dans le cas des options bermudiennes. Intuitivement, le moment τ où l'on prend la décision d'exercer l'option est un temps d'arrêt si la décision est prise sur la base de l'information disponible à cet instant. Un temps d'arrêt est dit optimal, lorsqu'il représente le temps d'arrêt réalisant le maximum de gain possible.

3.4 L'enveloppe de Snell

Le détenteur d'une option bermudienne doit se demander, à chaque date d'exercice durant la vie de son option, s'il doit exercer son droit ou s'il est préférable d'attendre une date ultérieure.

Une option bermudienne se représente par un processus stochastique \mathcal{F} -adapté

$$Z = \{Z_t : t = 0, 1, \dots, T\}$$

où Z_t représente la valeur d'exercice actualisée de l'option au temps t .

La décision d'exercer l'option au temps t ne peut être prise que sur la base de l'information disponible à ce moment. Le temps d'exercice $\tau : \Omega \rightarrow \{0, \dots, T\}$ représentant le moment où le détenteur de l'option exerce son droit, doit être tel que

$$\forall t \in \{0, \dots, T\}, \quad \{\omega \in \Omega | \tau(\omega) = t\} \in \mathcal{F}_t. \quad (3.1)$$

Autrement dit, τ est un temps d'arrêt.

3.4.1 La solution de l'enveloppe de Snell (cas général)

On considère un espace probabilisé filtré (Ω, \mathcal{F}, P) équipé de la filtration $\mathcal{F}_t, t = 0, \dots, T$, et un horizon de temps discret T . Soit Λ_0 l'ensemble des temps aléatoires représentant les moments d'exercice anticipé de l'option bermudienne. Λ_0 est représenté par

$$\Lambda_0 = \left\{ \tau : \Omega \rightarrow \{0, \dots, T\} | \tau \text{ est un temps d'arrêt} \right\}.$$

Soit Z_t la valeur d'exercice actualisée de l'option au temps $t = 0, \dots, T$, où Z_0, Z_1, \dots, Z_T , sont des variables aléatoires données. On désigne par Q la probabilité risque-neutre. La solution du problème de Snell nous donne un temps

d'arrêt optimal τ^* satisfaisant l'équation

$$E_Q[Z_{\tau^*}] = \sup_{\tau \in \Lambda_0} E_Q[Z_\tau].$$

Soit $\Lambda_{j,T}$ l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $\{j, \dots, T\}$.

L'enveloppe de Snell Y_t du processus Z_t est définie par

$$Y_t = \sup_{\tau \in \Lambda_{j,T}} E(Z_\tau | \mathcal{F}_t), \quad t = 0, \dots, T.$$

Elle peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} Y_T = Z_T \\ Y_t = \max\left(Z_t, E(Y_{t+1} | \mathcal{F}_t)\right), \quad t = T-1, T-2, \dots, 0. \end{cases}$$

On a aussi $Y_t = E(Z_{\tau_t} | \mathcal{F}_t)$ avec $\tau_t = \min\{j \geq t | Y_j = Z_j\}$, pour $t = 0, \dots, T$.

En particulier,

$$Y_0 = E(Y_0) = \sup_{\tau \in \Lambda_0} E(Z_\tau) = E(Z_{\tau_0}).$$

Ceci nous permet de déterminer Y_0 sans avoir à connaître tous les temps d'arrêt de l'ensemble Λ_0 .

On peut aussi représenter les temps d'arrêt optimaux τ_t sous forme récursive.

En effet,

$$\begin{cases} \tau_T = T \\ \tau_t = t \mathbf{1}\left\{Z_t \geq E(Z_{\tau_{t+1}} | \mathcal{F}_t)\right\} + \tau_{t+1} \mathbf{1}\left\{Z_t < E(Z_{\tau_{t+1}} | \mathcal{F}_t)\right\}, \quad t = T-1, \dots, 0. \end{cases}$$

Cette formulation joue un rôle essentiel dans la régression des moindres carrés utilisée dans le modèle de Longstaff et Schwartz (2001). Comme on peut le constater, la solution de l'enveloppe de Snell est difficile à évaluer dans le cas non markovien. Les propriétés des chaînes de Markov permettent de résoudre le problème de Snell dans un cadre théorique.

3.4.2 La solution de l'enveloppe de Snell dans le cas Markovien

Dans la section précédente, on a donné la solution générale du problème de Snell, solution qu'il pourrait être difficile de résoudre sauf dans des cas simples. Par contre, dans le cas de chaînes de Markov, la solution est un peu plus facile à représenter.

Plus précisément, supposons que pour une certaine chaîne de Markov X_t dont la filtration est la même que \mathcal{F}_t , i.e., $\sigma\{X_s; 0 \leq s \leq t\} = \mathcal{F}_t$, on a $Z_t = f(t, X_t)$, où la fonction $f(j, \cdot)$ est une fonction borélienne. Alors on a

$$Y_t = U(t, X_t)$$

avec $U(T, x) = f(T, x)$ et

$$U(t, x) = \max \left\{ f(t, x), \int U(t+1, y) \pi_{t+1}(x, dy) \right\},$$

pour $t = T-1, \dots, 0$, π_{t+1} étant la loi conditionnelle de X_{t+1} étant donné X_t .

Le problème revient donc à calculer la fonction déterministe U de façon récursive.

Il existe plusieurs algorithmes pour déterminer U . Dans les chapitres suivants, nous allons en examiner quelques uns.

Pour terminer cette section, en plus des fonctions $U(t, X_t)$, $f(t, X_t)$, notons par $V(t, X_t)$, la valeur (actualisée) de détention au temps t , i.e.,

$$V(t, x) = E\left(U(t+1, X_{t+1}) | X_t = x\right).$$

On a donc

$$U(t, x) = \max \left(f(t, x), V(t, x) \right).$$

La région d'exercice \mathcal{E} est l'ensemble des points où la valeur intrinsèque de l'option est supérieure ou égale à sa valeur de continuation. Elle s'exprime donc

par

$$\mathcal{E} = \left\{ (t, x); f(t, x) = U(t, x) \right\} = \left\{ (t, x); f(t, x) \geq V(t, x) \right\}.$$

En connaissant la région d'exercice \mathcal{E} , on peut évaluer l'option bermudienne, en obtenant les temps d'arrêt optimaux τ_t^* .

Un temps d'arrêt optimal s'écrit :

$$\tau_t^* = \min \left(j \geq t; \quad (t, X_t) \in \mathcal{E} \right), \quad t = 0, 1, \dots, n.$$

où X_t désigne le processus du sous-jacent.

3.5 Aperçu sur le modèle GARCH

Une des hypothèses du modèle de Black and Scholes (1973) suppose que la volatilité de l'actif sous-jacent est constante. En réalité, les volatilités implicites observées sur le marché, montrent des volatilités instables, une courbe de volatilité se dessine, c'est le *smile de la volatilité*. Plusieurs processus financiers sont sujets à des variations stochastiques de leur volatilité dans le temps. La variation de la volatilité d'un processus stochastique au cours du temps, est un fait empirique important dont il faut tenir compte dans l'évaluation des options bermudiennes.

Plusieurs études récentes suggèrent l'utilisation des modèles GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) qui n'imposent pas la constance de la volatilité, et qui peuvent expliquer certains biais associés au modèle de Black and Scholes (1973). La famille des modèles ARCH, proposée par Engle (1982) a offert une grande ouverture dans la connaissance des modèles à volatilité stochastique. Sa popularité fut évidente, et devint une référence dans la compréhension des modèles GARCH, préalablement présentés par Bollerslev (1986).

Duan (1995) a développé un modèle d'évaluation des options, dans lequel l'évolution du rendement de l'actif sous-jacent suit un processus GARCH. L'objectif de cet article était de développer une nouvelle méthode numérique pour évaluer les options européennes et américaines, particulièrement avec le processus GARCH. Les chaînes de Markov ont été utilisées pour approximer le processus de prix.

Pour pallier au problème de la volatilité constante, on peut supposer que les rendements sont modélisés par l'équation

$$X_t = \mu_t + \sqrt{h_t}\epsilon_t$$

où μ_t et h_t dépendent de la filtration \mathcal{F}_{t-1} , et les variables aléatoires ϵ_t sont

indépendantes de loi normale $N(0,1)$. De plus elles sont indépendantes de \mathcal{F}_{t-1} .

De plus, la loi conditionnelle de X_t étant donné \mathcal{F}_{t-1} est une loi normale de moyenne μ_t et de variance h_t . En particulier, nous avons :

$$E((X_t - \mu_t)^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}) = h_t.$$

La forme généralisée d'un modèle GARCH(p,q) s'écrit :

$$\epsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$\text{et } h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{t-i} \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i h_{t-i},$$

où $p \geq 0, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, q, \beta_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, p$.

Au cinquième chapitre, nous ferons une illustration du modèle de Del Moral et al. (2006) avec un processus exponentiel GARCH (EGARCH).

Sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} , on remplace le rendement des prix μ par le taux sans-risque r . Désignons par δ le taux de dividende de l'option. S_t et h_{t+1} représentent respectivement les processus du prix de l'actif sous-jacent et de sa volatilité. Nous avons :

$$\begin{aligned} \epsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1} &\sim N(0, 1) \\ S_t &= S_{t-1} \exp\left(r - \delta + \sqrt{h_t} \epsilon_t - \frac{h_t}{2}\right) \end{aligned}$$

$$h_{t+1} = \alpha_0 + \beta h_t + \alpha_1 h_t (\epsilon_t - \theta)^2$$

Pour toute fonction continue g , nous avons :

$$\begin{aligned} E\left(g(S_t, h_{t+1}) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) &= \int \phi(z) g\left(S_{t-1} \exp\left(r - \delta + \sqrt{h_t} z - \frac{h_t}{2}\right), \alpha_0 + \beta h_t + \alpha_1 h_t (z - \theta)^2\right) dz \\ \text{avec } \phi(z) &= \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

ce qui prouve que le processus de l'actif sous-jacent $X_t = (S_t, h_{t+1})$ est une chaîne de Markov.

Chapitre 4

Description des principaux algorithmes

Dans ce chapitre, nous allons expliciter trois méthodes qui résolvent le problème de Snell, afin d'évaluer les options bermudiennes. Nous commencerons par l'approche de Longstaff et Schwartz (2001), suivi de la nouvelle approche de Del Moral et al. (2006), pour terminer par Andersen et Broadie (2004).

Soit un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , muni de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0, \dots, T}$, engendrée par le processus sous-jacent X_t que l'on suppose markovien. On suppose aussi que la valeur d'exercice actualisée (Z_t) est de carré intégrable et s'écrit sous la forme

$$Z_t = f(t, X_t),$$

où f est une fonction borélienne $f(t, \cdot)$.

Rappelons que dans ce cas, la valeur actualisée de l'option au temps $t \in \{0, \dots, T-1\}$ est donnée par $U(t, X_t)$, où

$$U(t, x) = \max(f(t, x), E((U(t+1, X_{t+1})|X_t = x)) = E(Z_{\tau_t}|X_t = x),$$

avec $U(T, x) = f(T, x)$.

4.1 Description des méthodes

L'idée de Longstaff and Schwartz (2001) est de proposer une approche pour estimer les temps d'arrêt, et ensuite calculer le prix des options. Celui de Del Moral et al. (2006) estime d'abord les prix et ensuite définit les temps d'arrêt. On peut appliquer l'algorithme de Andersen and Broadie (2004) à ces deux méthodes pour obtenir des bornes inférieure et supérieure pour les options bermudiennes.

4.2 L'approche de Longstaff et Schwartz (2001)

L'algorithme de Longstaff and Schwartz (2001) repose sur la méthode des moindres carrés et utilise la régression linéaire pour évaluer les options bermudiennes. Principalement, cet algorithme nous fournit des approximations des temps d'arrêt qui nous permettent de calculer le prix des options. Selon l'article de Clément et al. (2002), Longstaff et Schwartz remplacent les espérances conditionnelles, par des combinaisons linéaires de fonctions de base. Ensuite, ils utilisent la simulation Monte Carlo et la régression linéaire pour avoir une valeur approximative des coefficients des fonctions de base.

D'après Clément et al. (2002), qui explique l'algorithme de Longstaff et Schwartz (2001), on estime l'espérance conditionnelle de X_t par une projection orthogonale sur l'espace généré par un nombre fini de fonctions e_1, \dots, e_m de X_t . Les propriétés spécifiques de ces fonctions sont données dans l'annexe D.

Pour t allant de 1 à $T - 1$, on dénote par $P_t^m(Y)$, la projection orthogonale d'une variable Y sur l'espace vectoriel généré par $e_1(X_t), \dots, e_m(X_t)$. On définit alors les temps d'arrêt $\tau_t^{[m]}$ par

$$\begin{cases} \tau_T^{[m]} &= T \\ \tau_t^{[m]} &= t1 \left\{ Z_t \geq P_t^m(Z_{\tau_{t+1}^{[m]}}) \right\} + \tau_{t+1}^{[m]} 1 \left\{ Z_t < P_t^m(Z_{\tau_{t+1}^{[m]}}) \right\}, \quad 1 \leq t \leq T - 1. \end{cases}$$

À partir de ces temps d'arrêt, nous obtenons une première approximation U_t^m de la valeur de la fonction $U_0 = \max(Z_0, E(Z_{\tau_1}^{[m]}))$. Rappelons que $Z_0 = f(0, X_0)$ est déterministe. La seconde approximation $U_0^{m,N}$ consiste à estimer $E(Z_{\tau_1^{[m]}})$ par simulation Monte Carlo à l'aide de N trajectoires indépendantes $(X_t^{(1)}), \dots, (X_t^{(n)}), \dots, (X_t^{(N)})$ de la chaîne de Markov (X_t) .

Pour ce faire, dénotons par $Z_t^{(n)} = f(t, X_t^{(n)})$ la valeur d'exercice actualisée pour $t = 0, \dots, T$, et $n = 1, \dots, N$.

Pour chacune des trajectoires simulées n , nous estimons de façon récursive les temps d'arrêt $(\tau_t^{[m]})$ par :

$$\begin{cases} \tau_T^{n,m,N} &= T \\ \tau_t^{n,m,N} &= t \mathbf{1} \left\{ Z_t^{(n)} \geq \alpha_t^{(m,N)\top} e^m(X_t^{(n)}) \right\} + \tau_{t+1}^{n,m,N} \mathbf{1} \left\{ Z_t^{(n)} < \alpha_t^{(m,N)\top} e^m(X_t^{(n)}) \right\}, \end{cases}$$

pour $1 \leq t \leq T - 1$, où $a^\top b$ représente le produit scalaire dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^m entre les vecteurs a et b , e^m est le vecteur $(e_1, \dots, e_m)^\top$, et $\alpha_t^{(m,N)}$ est l'estimateur des moindres carrés défini par

$$\alpha_t^{(m,N)} = \arg \min_{a \in \mathbb{R}^m} \sum_{n=1}^N \left(Z_{\tau_{t+1}^{n,m,N}}^{(n)} - a^\top e^m(X_t^{(n)}) \right)^2.$$

Remarquons que pour $t = 1, \dots, T - 1$, $\alpha_t^{(m,N)} \in \mathbb{R}^m$.

Finalement, nous dérivons des variables $\tau_t^{n,m,N}$ l'approximation de U_0^m :

$$U_0^{m,N} = \max \left(Z_0, \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_{\tau_1^{n,m,N}}^{(n)} \right)$$

Dans Clément et al. (2002), il est démontré que pour tout m fixé, $U_0^{m,N}$ converge presque sûrement vers U_0^m lorsque N tend vers l'infini. De plus, sous des conditions appropriées sur la base de fonctions, U_0^m converge vers U_0 lorsque m tend vers l'infini. Voir Clément et al. (2002) pour plus de détails.

Le choix des fonctions de base est crucial pour la précision des résultats dans l'approche de Longstaff et Schwartz (2001). En effet, on peut utiliser les po-

lynômes de Laguerre, les polynômes d'Hermite, ou des fonctions trigonométriques comme fonctions de base pour la matrice de régression.

4.3 L'approche de Del Moral et al. (2006)

La méthode de Del Moral et al. (2006) permet d'estimer des prix d'options bermudiennes en utilisant une interpolation linéaire en conjonction avec des simulations Monte Carlo. Dans leur article, les auteurs prouvent que lorsque la valeur d'exercice actualisée est convexe et croissante (ou décroissante) par rapport à X_t , ces propriétés peuvent être conservées pour la courbe des prix de l'option (U) et la courbe des valeurs de détention de l'option (V), en autant que la relation markovienne satisfasse certaines conditions de monotonie et de convexité.

L'objectif de cette méthode est de préserver les propriétés de convexité et de monotonie de la courbe du payoff de l'option bermudienne, et ce même en utilisant des méthodes Monte Carlo.

Elle peut être utilisée en conjonction avec la méthode primal-dual de Andersen et Broadie (2004) pour obtenir des bornes inférieure et supérieure de l'option, en utilisant ces prix pour calculer les temps d'arrêt optimaux.

Une hypothèse essentielle de leur approche est de supposer que

$$X_t = \pi_t(X_{t-1}, Y_t), \quad Y_t \in \mathcal{Y}$$

où Y_t suit une certaine loi μ_t indépendante de \mathcal{F}_{t-1} et donc de X_{t-1} , et que $x \mapsto \pi_t(x, y)$ est une fonction continue dans \mathcal{X} pour tout $y \in \mathcal{Y}$

Par exemple, dans le modèle classique de Black and Scholes (1973), $S_t = X_t$, et sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} , le processus du prix de l'actif sous-jacent

s'écrit

$$S_t = S_{t-1} \exp \left(\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \sqrt{dt} Y_t \right), \quad Y_t \sim N(0, 1),$$

pour un pas de temps dt . Donc

$$\pi_t(x, y) = x \exp \left(\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \sqrt{dt} y \right).$$

La fonction $\pi_t(x, y)$ est continue et linéaire en fonction x .

Dans ce contexte, et d'après la proposition 3.3 de Del Moral et al. (2006) énoncés dans l'annexe A, si la fonction $f(t, x)$ est convexe et croissante (respectivement décroissante), alors la fonction du prix de l'option $U(t, x)$ est convexe et croissante (respectivement décroissante). En particulier, le prix d'une option d'achat bermudienne est convexe et croissant, tandis que la valeur d'une option de vente bermudienne est convexe et décroissante.

Afin de s'assurer que l'enveloppe de Snell est bien définie, la méthode de Del Moral et al. (2006) pose l'hypothèse suivante :

$$\forall t \in \{1, \dots, T\}, \text{ la fonction } f(t, X_t) \text{ est intégrable.}$$

De plus, pour s'assurer de la continuité de la fonction du payoff de l'option, les auteurs posent l'hypothèse suivante sur la continuité :

$$\forall 0 \leq j \leq t \leq T, \text{ les fonctions } x \mapsto E \left\{ f(t, X_t) | X_j = x \right\}$$

et $x \mapsto f(t, x)$ sont continues.

L'algorithme de Del Moral et al. (2006) propose l'utilisation d'une partition \mathcal{P}_t pour approximer les valeurs du sous-jacent S_t .

Une partition \mathcal{P} d'un ensemble compact convexe K , est tout ensemble fini $\mathcal{P} = \{S_1, \dots, S_m\}$ de sous-ensembles disjoints et non vides, tels que $K = \cup_{j=1}^m S_j$. L'ensemble des sommets de la partition \mathcal{P} est dénoté par $\mathcal{V}(\mathcal{P})$.

Par exemple, lorsque l'option possède un seul sous-jacent, une partition pourrait consister d'intervalles fermés de la forme $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 0, \dots, m$, où $K = [a_0, a_{m+1}]$. Lorsqu'elle porte sur deux sous-jacents, la partition pourrait être une famille de rectangles fermés de la forme $[a_k, a_{k+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$, $k, j = 0, \dots, m$, si $K = [a_0, a_{m+1}] \times [b_0, b_{m+1}]$.

L'algorithme de Del Moral et al. (2006) est basé sur la simulation Monte Carlo combinée avec une série d'interpolations linéaires sur les ensembles compacts K_0, \dots, K_{T-1} , déterminés par les partitions $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_{T-1}$.

Soit \mathcal{X} un espace convexe sur l'intervalle $[0, \infty)^d$. Désignons par $\tilde{V}_t, \dots, \tilde{V}_T$ les valeurs approximées de V_t, \dots, V_T . Nous trouvons \hat{V}_{t-1} en estimant V_{t-1} à chaque sommet $x \in \mathcal{V}(\mathcal{P}_{t-1})$ en utilisant la simulation Monte Carlo. Ensuite, nous utilisons l'interpolation linéaire¹ de \hat{V}_{t-1} pour définir \tilde{V}_{t-1} en chaque point $x \in K_{t-1}$. \tilde{V}_{t-1} peut ainsi s'étendre à tout point de l'espace convexe \mathcal{X} .

Énumérons les étapes suivies pour évaluer l'option bermudienne avec l'algorithme de Del Moral et al. (2006) :

Étape 1 : On pose $\tilde{V}(T, x) = \tilde{U}(T, x) = f(T, x)$.

Ceci nous permet d'initialiser ces trois valeurs, au payoff de l'option, qui est connu à la maturité T .

Étape 2 : Pour chaque date d'exercice anticipé t allant de T à 1, on génère N_t variables aléatoires Y_{1t}, \dots, Y_{N_t} , suivant la loi μ_t .

Étape 3 : Pour chaque $x \in \mathcal{V}(\mathcal{P}_{t-1})$, on définit :

$$\hat{V}(t-1, x) = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \tilde{U}_t \left\{ \pi_t(x, Y_{i,t}) \right\},$$

avec $\tilde{U}(t, x) = \max \left(\tilde{f}(t, x), \tilde{V}(t, x) \right)$.

¹L'annexe C fournit la définition d'une interpolation linéaire.

Étape 4 : On fait l'interpolation linéaire de $\hat{V}(t-1, x)$ sur K_{t-1} par les valeurs récoltées dans l'étape 3,. On dénote l'interpolation par $\tilde{V}(t-1, x)$. Nous répétons les étapes 2 à 4 tant que $t \geq 1$.

Les auteurs ont démontré qu'en choissant K_0, \dots, K_{T-1} assez grands, et pour N_1, \dots, N_t tendant vers l'infini, \tilde{U}_t converge vers U_t .

4.4 L'approche de Andersen et Broadie (2004)

L'algorithme de Andersen and Broadie (2004) se base sur la simulation Monte Carlo pour tarifier les options bermudiennes. Andersen et Broadie présentent le problème primal d'évaluation et son dual. Ils proposent une méthode pour calculer les bornes inférieure et supérieure du prix de l'option bermudienne, à l'aide d'approximations des temps d'arrêt trouvés par une approche telle Longstaff and Schwartz (2001) ou Del Moral et al. (2006).

Nous commençons d'abord par définir les martingales, car l'approche de Andersen et Broadie utilise celles-ci pour évaluer le prix des options bermudiennes.

4.4.1 Les martingales

La théorie des martingales fut développée par Doob (1953) comme un outil intéressant pour la solution d'une grande diversité de problèmes en probabilité.

Une martingale M_t est un processus stochastique dont l'espérance est finie et constante dans le temps. La variance d'une martingale $Var_P[M_t]$, peut varier en fonction du temps t , et peut être infinie à tout instant t . La propriété fondamentale d'une martingale est :

$$\forall t \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad E_P[M_{t+1} | \mathcal{F}_t] = M_t.$$

La propriété de martingale exprime le fait que les accroissements conditionnels

prévisibles sont en moyenne nuls, lorsqu'on se base sur l'information précédente :

$$E(M_{t+1} - M_t | \mathcal{F}_t) = 0.$$

De plus :

$$E(M_t) = E(M_0), \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Pour une sous-martingale, on observe une croissance en moyenne du processus :

$$E(M_{t+1} - M_t | \mathcal{F}_t) \geq 0, \quad \text{pour } t \geq 0.$$

$$E(M_0) \leq \dots \leq E(M_t) \leq E(M_{t+1})$$

Dans le cas d'une sur-martingale, le processus est décroissant.

Rappelons ici un théorème très important reliant les temps d'arrêts aux martingales. Voir par exemple Neveu (1971) pour la preuve du théorème suivant.

Théorème 1 *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une martingale (respectivement une sur-martingale, une sous-martingale) intégrable ou positive ; et τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt bornés avec $\tau_1 \leq \tau_2$. Alors*

$$E(X_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) = X_{\tau_1}, \text{ (respectivement } \leq, \geq \text{)}.$$

4.4.2 L'approche de Andersen et Broadie

On considère une option bermudienne possédant d possibilités d'exercice anticipé aux temps $t_1 < \dots < t_d = T$, avec $t_1 \geq 0$.

Rappelons que, e.g., Lamberton and Lapeyre (1996),

$$U(t, X_t) = \max(Z_t, E[U(t+1, X_{t+1}) | \mathcal{F}_t])$$

est la plus petite supermartingale qui domine Z_t . On a $U(T, X_T) = Z(T, X_T)$ et l'on cherche $U(0, X_0)$.

L'équation $U(0, X_0) = \sup_{\tau \in \Lambda_0} E(Z_\tau | \mathcal{F}_0)$ définit le problème primal d'évaluation. La valeur trouvée en suivant une stratégie d'exercice spécifique est dominée par une stratégie optimale. On obtient donc que pour tout $\tau \in \Lambda_0$,

$$E(Z_\tau | \mathcal{F}_0) \leq U(0, X_0).$$

Donc pour estimer une borne inférieure de la valeur de l'option bermudienne, il suffit de générer N_0 trajectoires $X^{(j)} = (X_1^{(j)}, \dots, X_T^{(j)})$, $j = 1, \dots, N_0$, de calculer $\tau_j = \tau(X^{(j)})$, et ensuite d'évaluer

$$L_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} f(\tau_j, X_{\tau_j}^{(j)}).$$

Tout algorithme qui donne une règle de temps d'arrêt τ peut être utilisé pour construire une borne inférieure L_0 pour le prix de l'option bermudienne $U(0, X_0)$.

Pour définir le problème dual, nous devons trouver une borne supérieure. Nous décrivons ici, les étapes suivies pour calculer la borne supérieure avec la méthode de Andersen et Broadie (2004). L'évaluation de cette borne nécessite la construction d'une martingale π selon la décomposition de Doob-Meyer. Les étapes suivantes montrent la marche à suivre pour évaluer la borne supérieure de l'option bermudienne.

On définit successivement

$$\pi_0 = L_0$$

$$L_1 = \pi_1 = L_1$$

$$\pi_{t+1} = \pi_t + L_{t+1} - L_t - l_t \left\{ E[L_{t+1} | \mathcal{F}_t] - L_t \right\}, \text{ pour } 2 \leq t < d,$$

où $L_t = E(Z_{\tau_t} | \mathcal{F}_t)$, et $l_t = 1_{\{\tau_t=t\}}$.

Pour estimer L_{t+1} on procède comme suit :

Étape 1 :

Simuler N_1 trajectoires de X . Pour X_t donné, estimer $L_t = E[Z_{\tau_t} | \mathcal{F}_t]$, en

simulant N_2 autres trajectoires \tilde{X} de X à partir du temps t et de X_t . Prendre ensuite la moyenne des N_2 valeurs $f(\tau_t(\tilde{X}), \tilde{X}_{\tilde{\tau}_t(\tilde{X})})$. Répéter pour $t = 1, \dots, d$.

Étape 2 :

a) Si $l_t = 0$

Posez $\pi_{t+1} = \pi_t + (L_{t+1} - L_t)$.

b) Si $l_t = 1$

Calculer $E(L_{t+1}|\mathcal{F}_t) = E(Z_{\tau_{t+1}}|\mathcal{F}_t)$, en simulant N_3 trajectoires \tilde{X} de X à partir du temps t et de X_t . Prendre ensuite la moyenne des N_3 valeurs $f(\tau_{t+1}(\tilde{X}), \tilde{X}_{\tilde{\tau}_{t+1}(\tilde{X})})$.

Posez $\pi_{t+1} = \pi_t + L_{t+1} - E(L_{t+1}|\mathcal{F}_t)$.

Étape 3 :

Ayant construit l'estimation $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_d$ d'une martingale pour une trajectoire X parmi les N_1 trajectoire générées, on calcule

$$\Delta = \max_{t \in \{0, \dots, d\}} (Z_t - \pi_t)$$

La borne supérieure est la borne inférieure L_0 plus la moyenne des N_1 valeurs Δ .

4.5 Conclusion

Ce chapitre présente et explique les algorithmes des trois modèles d'évaluation des options bermudiennes que nous utilisons dans ce mémoire. Nous avons vu comment l'algorithme de Longstaff and Schwartz (2001) procède pour construire des temps d'arrêt et en ressortir le prix des options bermudiennes. L'algorithme de Del Moral et al. (2006) évalue d'abord les prix, et calcule ensuite les temps d'arrêt optimaux. Le modèle de Andersen and Broadie (2004) nous permet d'améliorer

les prix trouvés en construisant un intervalle de prix. Dans le prochain chapitre, nous présentons les résultats obtenus avec ces différents modèles.

Chapitre 5

Comparaisons numériques

5.1 Présentation des résultats

Cette section sera consacrée à l'analyse des résultats obtenus avec les trois modèles d'évaluation décrits précédemment et ce pour trois types d'options. Dans un premier temps, nous présenterons le prix de l'option d'achat bermudienne obtenu avec l'arbre binomial de Cox et al. (1979) dans un contexte Black-Scholes, et avec les méthodes de Longstaff and Schwartz (2001) et de Del Moral et al. (2006). Les prix trouvés dans l'article de Andersen and Broadie (2004) (au tableau 1 de la page 1227 de l'article) nous serviront de base de comparaison. Ensuite, nous calculerons les bornes inférieure et supérieure du prix de l'option d'achat bermudienne en appliquant la méthode de Andersen and Broadie (2004) à celle de Longstaff and Schwartz (2001), et à celle de Del Moral et al. (2006). Nous analysons les graphiques des prix obtenus avec la méthode de Del Moral et al. (2006). Une étude similaire est faite pour une option d'achat sur le maximum de deux sous-jacents, encore dans un contexte Black-Scholes.

Enfin, nous étudions le comportement de la courbe de prix d'une option de vente bermudienne lorsque le sous-jacent suit un processus GARCH. Les prix

sont comparés suivant les deux approches de Longstaff and Schwartz (2001) et Del Moral et al. (2006).

5.2 Option d'achat sur un sous-jacent dans un contexte Black-Scholes

Ic on suppose que sous la mesure risque neutre, le sous-jacent S_t satisfait

$$dS_t = S_t(r - \delta)dt + \sigma S_t dW_t,$$

où W est un mouvement brownien, r est le taux d'intérêt, δ est le taux de dividende, et σ est la volatilité.

Les valeurs des paramètres sont :

- Prix spot $S = 100$.
- Maturité $T = 3$ ans.
- Prix d'exercice $K = 100$.
- Taux d'intérêt $r = 5\%$.
- Écart-type $\sigma = 20\%$.
- Taux de dividende $\delta = 10\%$.
- Nombre de simulations $N = 100000$

5.2.1 Résultats trouvés avec l'approche de Longstaff-Schwartz (2001)

Le tableau 5.1 présente les prix de l'option d'achat bermudienne trouvés avec la méthode de Longstaff and Schwartz (2001). Nous avons calculé les bornes inférieure et supérieure de l'option avec la méthode de Andersen and Broadie

(2004).

Nous avons utilisé les *polynômes de Laguerre* d'ordre 3 pour obtenir les coefficients des fonctions de base :

$$L_0(x) = 1.$$

$$L_1(x) = 1 - x.$$

$$L_2(x) = 1 - 2x + 0.5x^2.$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6} \left(6 - 18x + 9x^2 - x^3 \right).$$

Nous présentons les propriétés des polynômes de Laguerre à l'annexe B. Ces polynômes nous permettront de résoudre le système d'équations linéaires. Pour la simulation, nous utilisons $N = 100000$ trajectoires. Toutes les trajectoires suivent un mouvement brownien géométrique S qui s'écrit : $S_t = S_{t-1} \exp \left((r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma\sqrt{dt}Y_t \right)$. On utilise comme pas de temps $dt = \frac{T}{M}$, où M représente le nombre de dates d'exercice anticipé de l'option bermudienne, et δ le taux de dividende.

Nous utilisons aussi des variables antithétiques comme variables de contrôle dans nos simulations.

TAB. 5.1 – Comparaison des méthodes de Longstaff-Schwartz (2001) et Andersen-Broadie (2004), pour évaluer un call bermudien.

	Prix Arbre Binomial	Prix Longstaff-Schwartz	Les Bornes ^a
M = 10^b	7.98	7.9798	[7.9713 ; 7.9932]
M = 2	7.18	7.1760	[7.1681 ; 7.1836]

^aNous avons appliqué la méthode de Andersen et Broadie (2004) à l'algorithme de Longstaff et Schwartz (2001) pour calculer ces bornes.

^b M représente le nombre de dates d'exercice anticipé de l'option d'achat bermudienne.

Le tableau 5.1 montre que l'algorithme de Longstaff and Schwartz (2001) nous donne des prix similaires aux prix obtenus avec l'arbre binomial de Cox et al. (1979), fournis dans l'article de Andersen and Broadie (2004). Les bornes de l'option ont été obtenues en appliquant la méthode de Andersen et Broadie (2004) à l'algorithme de Longstaff et Schwartz (2001). Nous pouvons remarquer que les bornes trouvées offrent un bon intervalle du prix de l'option d'achat bermudienne.

5.2.2 Résultats trouvés selon l'algorithme de Del Moral et al. (2006).

Nous faisons ici une comparaison des prix de l'option d'achat bermudienne obtenus selon la méthode de Del Moral et al. (2006) et ceux obtenus avec la méthode binomiale de Cox et al. (1979). Les bornes inférieure et supérieure sont calculées en suivant la méthode de Andersen and Broadie (2004).

Rappelons que le mouvement de l'actif sous-jacent S_t s'écrit :

$$S_t = S_{t-1} \exp \left(\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \sqrt{dt} Y_t \right),$$

avec $Y_t \sim N(0, 1)$.

Les paramètres supplémentaires utilisés, pour évaluer l'option d'achat bermudienne se résument comme suit :

- Partition de l'actif sous-jacent $S \in [0, 150]$
- Pas de la partition pas équidistants de 1.5
- Nombre de trajectoires simulées $N = 100000$.

Le tableau 5.2 montre que le prix de l'option d'achat bermudienne calculé avec l'arbre binomial est similaire à celui obtenu avec l'algorithme de Del Moral

TAB. 5.2 – Comparaison des méthodes de Del Moral et al. (2006) et Andersen-Broadie (2004), pour évaluer un call bermudien.

	Prix Arbre Binomial	Prix Del Moral et al.	Les Bornes ^a
M = 10	7.98	7.9779	[7.9677 ; 7.9983]
M = 2	7.18	7.1790	[7.1790 ; 7.2063]

^aNous avons appliqué la méthode de Andersen et Broadie (2004) à l'algorithme de Del Moral et al. (2006) pour calculer ces bornes.

et al. (2006). Les bornes de l'option sont obtenues en appliquant la méthode de Andersen and Broadie (2004) à l'algorithme de Del Moral et al. (2006).

Comme présenté au tableau 5.1, nous obtenons une borne inférieure qui est très proche du prix de l'option d'achat bermudienne. Ces bornes inférieure et supérieure offrent un intervalle de prix représentatif du prix de l'option d'achat bermudienne.

Les résultats présentés aux tableau 5.1 et tableau 5.2 montrent que l'approche de Longstaff et Schwartz (2001) et celle de Del Moral et al. (2006) fournissent des prix comparables pour l'évaluation d'une option d'achat bermudienne. Ce résultat peut être généralisé pour une option de vente bermudienne. Notons que, lorsqu'on applique la méthode de Andersen et Broadie (2004) à ces deux algorithmes, nous trouvons des intervalles de prix semblables.

5.3 Call-on-max pour deux sous-jacents dans un contexte Black-Scholes.

Nous présentons dans cette section, les prix de l'option d'achat sur le maximum (call-on-max). Nous faisons une comparaison de ces prix avec ceux obtenus

avec l'approche de Longstaff et Schwartz (2001).

En contexte du modèle de Black and Scholes (1973), et sous la probabilité risque-neutre Q , les mouvements des actifs sous-jacent $S_{1,t} = X_{1,t}$ et $S_{2,t} = X_{2,t}$ s'écrivent :

$$S_{1,t} = S_{1,t-1} \exp \left(\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \sqrt{dt} Y_{1,t} \right)$$

et

$$S_{2,t} = S_{2,t-1} \exp \left(\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \sqrt{dt} Y_{2,t} \right)$$

et $Y_{1,t}$ et $Y_{2,t}$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi $N(0, 1)$.

Pour le call-on-max, nous obtenons donc une fonction de prix croissante et convexe.

Les actifs sous-jacents suivent des processus markoviens de la forme voulue, i.e.

$$X_{1,t} = \pi_{1,t}(X_{1,t-1}, Y_{1,t})$$

et

$$X_{2,t} = \pi_{2,t}(X_{2,t-1}, Y_{2,t}).$$

$Y_{1,t}$ et $Y_{2,t}$ suivent une loi $N(0, 1)$.

Pour évaluer l'option call-on-max avec le modèle de Del Moral et al. (2006), nous discrétisons une grille pour les différentes valeurs des deux actifs sous-jacent S_1 et S_2 . Nous utilisons des pas équidistants, pour la discrétisation de la grille.

Les paramètres utilisés pour évaluer l'option d'achat sur le maximum sont :

Le tableau 5.3 présente et compare les prix du call-on-max obtenus avec la méthode de Del Moral et al. (2006) et celle de Longstaff et Schwartz (2001) pour trois valeurs initiales des sous-jacents : $S_{1,0} = S_{2,0} \in \{90, 100, 110\}$.

- Grille utilisée pour S_1 $S_1 \in [0, 150]$
- Grille utilisée pour S_2 $S_2 \in [0, 150]$
- Pas de la partition pas équidistants de 1.5
- Prix d'exercice $K = 100$.
- Taux d'intérêt $r = 5\%$.
- Taux de dividende $\delta = 10\%$.
- Volatilité $\sigma = 20\%$.
- Échéance de l'option $T = 3$ ans.
- Nombre de dates d'exercice anticipé $M = 10$.

TAB. 5.3 – Comparaison des prix du Call-on-max bermudien, avec les méthodes de Del Moral et al. (2006), Longstaff-Schwartz (2001) et les bornes de Andersen-Broadie (2004).

	Arbre Binomial	Del Moral et al.	Bornes ^a	Longstaff-Schwartz	Bornes ^b
S = 90	8.065	8.095	[8.093 ; 8.097]	8.080	[8.077 ; 8.0832]
S = 100	13.907	13.900	[13.888 ; 13.905]	13.902	[13.899 ; 13.910]
S = 110	21.333	21.300	[21.257 ; 21.326]	21.338	[21.324 ; 21.337]

^aNous avons appliqué la méthode de Andersen et Broadie (2004) à l'algorithme de Del Moral et al. (2006) pour calculer ces bornes.

^bLes bornes trouvées sont calculées avec la méthode de Andersen et Broadie (2004) appliquée à l'algorithme de Longstaff-Schwartz (2001).

Pour l'algorithme de Longstaff et Schwartz (2001), les fonctions de base sur lesquelles on effectue les projections forment une base de 36 produits possibles de polynômes de Laguerre $e_{i,j}(x, y) = L_i(x)L_j(y)$, $i, j \in \{0, \dots, 5\}$.

Nous pouvons remarquer qu'on obtient des prix similaires. Les bornes inférieure et supérieure ont été évaluées en appliquant la méthode de Andersen et Broadie (2004) à ces deux algorithmes. Les résultats montrent un encadrement

de prix semblables avec les deux méthodes.

La section qui suit étudie les propriétés de convexité et de monotonie de la fonction de prix de l'option bermudienne évaluée avec la méthode de Del Moral et al. (2006).

5.4 Étude des propriétés de la courbe de prix de l'option bermudienne.

Nous commençons à étudier l'allure de la courbe de prix l'option d'achat bermudienne avec la méthode de Del Moral et al. (2006).

5.4.1 Propriétés de la courbe avec la méthode de Del Moral et al. (2006)

Rappelons que la méthode de Del Moral et al. (2006) a pour objectif de conserver les propriétés de convexité et de monotonie de la fonction de prix de l'option bermudienne. Nous analyserons l'allure de la courbe de la fonction de prix d'une option d'achat bermudienne obtenue avec l'algorithme de DelMoral et al. (2006). Nous présentons d'abord le graphique de la fonction des prix pour voir si la fonction obtenue est croissante. Ensuite, nous traçons la courbe de la première dérivée de la fonction de prix $V(t, x)$ par rapport au prix du sous-jacent S_t pour vérifier si la courbe des pentes est également croissante.

La figure 5.1 confirme que les courbes des valeurs de détention $V(t, x)$ et celle des prix $U(t, x)$ de l'option d'achat bermudienne sont croissantes. La figure 5.2 montre que la courbe des pentes de la fonction des prix de l'option d'achat est aussi croissante. D'après les théorèmes de l'article de Del Moral et al. (2006) présentés à l'annexe A, nous pouvons conclure que la courbe de prix de l'option

d'achat est une fonction monotone et convexe.

L'algorithme de Del Moral et al. (2006) conserve effectivement la convexité et la monotonie de la fonction de prix de l'option lorsque la valeur actualisée d'exercice de l'option possède ces propriétés car l'interpolation utilisée est convexe.

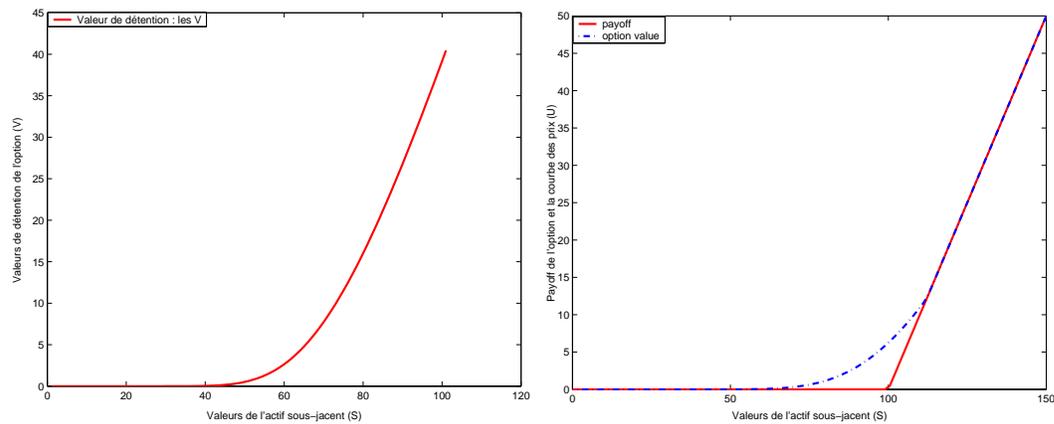


FIG. 5.1 – Courbe des valeurs de détention de l'option d'achat, et la courbe de prix de l'option d'achat.

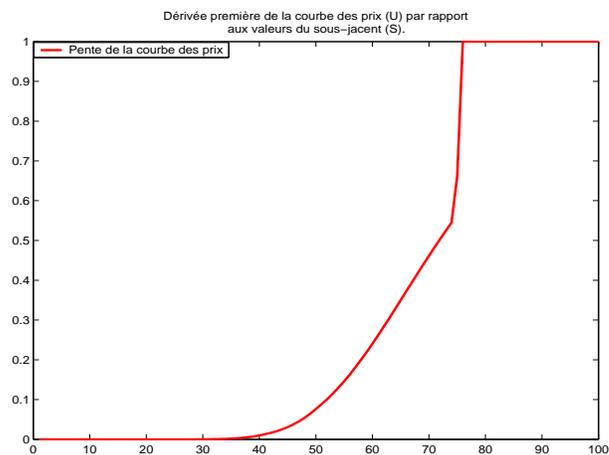


FIG. 5.2 – Pente de la courbe des prix d'achat $\frac{dU}{dS}$.

5.4.2 Propriétés de la courbe avec la méthode de Del Moral et al. (2006), pour un call-on-max sur deux sous-jacents

Nous analysons les graphiques des fonctions de prix $V(t, x)$ pour une option bermudienne d'achat sur le maximum (call-on-max) possédant deux actifs sous-jacents.

Nous présentons à la figure 5.3 la fonction de prix d'une option d'achat sur le maximum (call-on-max). Cette figure montre que la fonction de prix d'une option d'achat sur le maximum est croissante. De plus, d'après la proposition 3.3 de l'article de Del Moral et al. (2006), cette fonction est localement convexe à cause de la méthode d'interpolation utilisée. Par contre les valeurs U_t et V_t sont croissantes et convexes.

Cette figure illustre que la méthode de Del Moral et al. (2006) conserve les propriétés de monotonie et de convexité (locale) de la courbe du prix d'une option bermudienne, lorsque celle-ci possède deux actifs sous-jacents. Ce résultat peut être étendu pour un call-on-max sur plusieurs sous-jacents.

Approfondissons l'analyse en traçant la frontière d'exercice pour l'option d'achat sur le maximum. La figure 5.4 présente à gauche la frontière de l'option d'achat sur le maximum; à droite la courbe de prix de l'option $U(0, x)$ et la courbe de sa valeur d'exercice actualisée $f(0, x)$ au temps $t = 0$. À la partie sombre (en noir), l'option est exercée. À la partie grise, il n'est pas optimal d'exercer l'option.

La figure 5.5 présente à gauche la courbe des valeurs de détention V en deux dimensions; et à droite la courbe des prix de l'option d'achat sur le maximum.

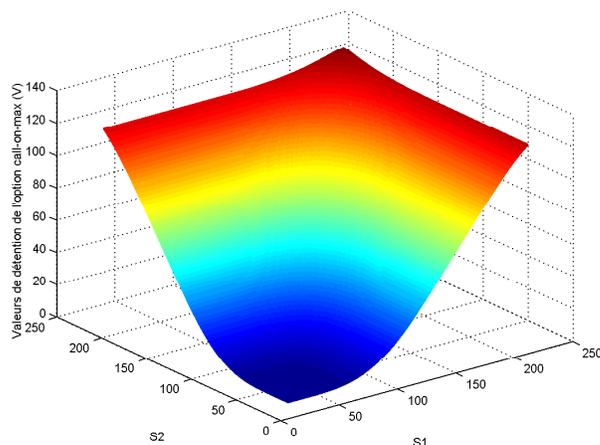


FIG. 5.3 – Graphique du prix d'une option d'achat sur le maximum (call on max) en deux dimensions.

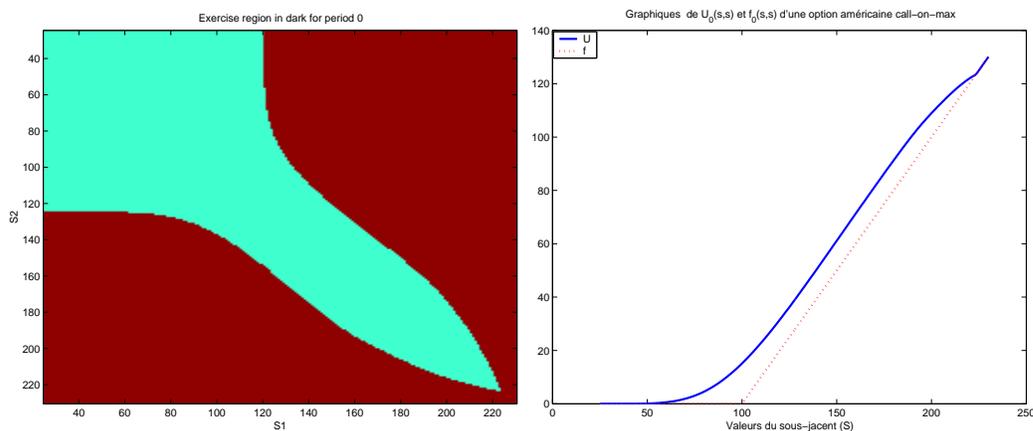


FIG. 5.4 – Frontière de l'option d'achat sur le maximum (200pts).

Pour mieux étudier le comportement de la frontière d'exercice, nous l'avons retracé en prenant un nombre plus élevé de points. Dans la figure 5.6 nous avons utilisé 250 points pour tracer la frontière d'exercice, ainsi l'actif sous-jacent va de 25 à 275. Plus de points ont été utilisés dans la figure 5.7, 350 points, et la grille va de 25 à 375.

Pour ces deux derniers graphes, figure 5.6 et figure 5.7, la frontière d'exercice conserve la même allure, lorsque le nombre de points est élevé. La projection

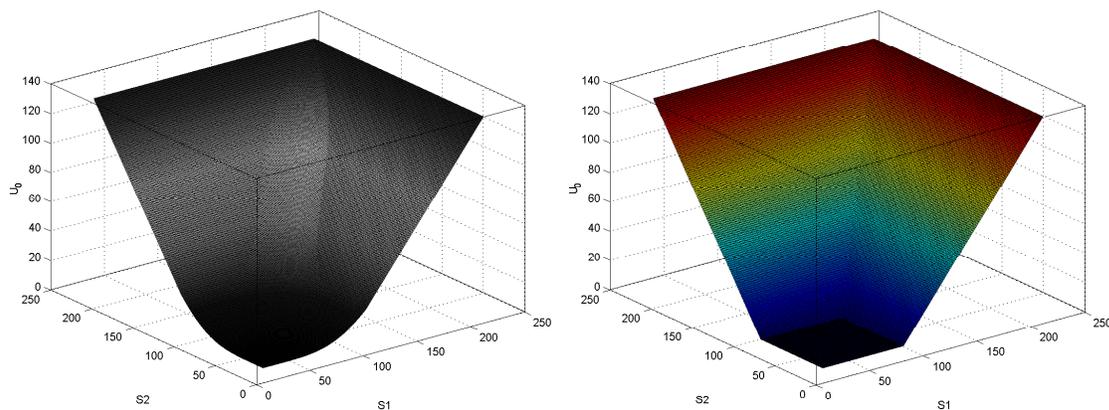


FIG. 5.5 – Frontière de l’option d’achat sur le maximum (200pts).

utilisée pour le traitement des valeurs extrêmes justifie le coin inférieur droit du graphe de la frontière d’exercice.

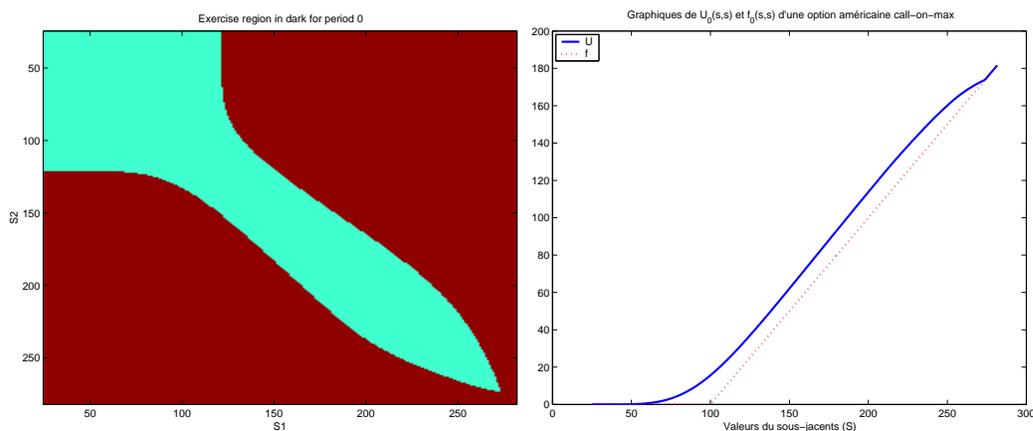


FIG. 5.6 – Frontière de l’option d’achat sur le maximum (250pts).

5.5 Option de vente sur un sous-jacent EGARCH

L’objectif de cette section est de voir comment calculer le prix d’une option bermudienne dans un contexte de volatilité stochastique. Dans ce cas, même s’il

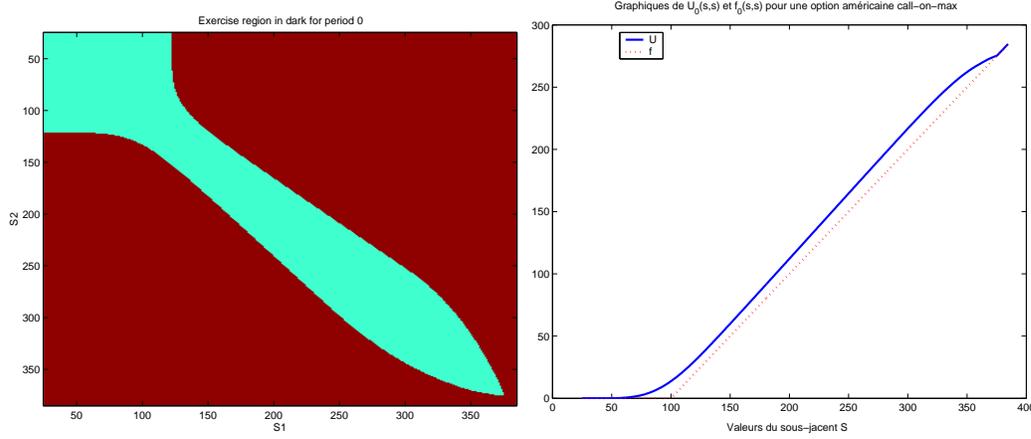


FIG. 5.7 – Frontière de l’option d’achat sur le maximum. (350pts)

y a un seul sous-jacent, le processus markovien associé est bivarié.

5.5.1 L’algorithme de Del Moral et al. (2006) appliqué à un modèle EGARCH.

Nous décrivons l’évaluation d’une option de vente bermudienne possédant un actif sous-jacent ayant une volatilité stochastique. Le processus du sous-jacent X_t est représenté comme un système bivarié $\{X_t = (S_t, h_{t+1})\}_{t \geq 0}$ qui suit une chaîne de Markov.

Dans le contexte du modèle EGARCH, et sous la mesure de probabilité risque-neutre Q , la fonction $\pi_t(S, h, y)$ se formule comme suit :

$$\pi_t = \left(S_{t-1} \exp((r - \delta)dt) - \frac{h_t}{2} + \sqrt{h_t} Y_t, \quad \alpha + \beta h_t + \gamma h_t (Y_t - \theta)^2 \right) \quad (5.1)$$

avec $Y_t \sim N(0, 1)$, ce qui est bien en accord avec la représentation exigée de Del Moral et al. (2006).

Il s’ensuit que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $\pi_t(s, h, y)$ est une fonction monotone en s , mais non monotone en h . De plus, la fonction $\pi_t(s, h, y)$ n’est ni

concave, ni convexe. On ne peut donc pas conclure que le prix est convexe. Par contre, il est croissant en s , d'après les résultats de Del Moral et al. (2006).

Pour évaluer l'option, nous avons utilisé les paramètres suivants :

- Maturité $T = 3$ ans.
- Prix d'exercice $K = 100$.
- Taux d'intérêt $r = 5\%$.
- Écart-type $\sigma = 20\%$.
- Taux de dividende $\delta = 10\%$.
- Nombre de dates d'exercice anticipé $M = 10$
- Nombre de simulations $N = 100000$.

Pour les paramètres du processus GARCH, nous avons utilisés ceux de l'article de Duan (1995) :

- $\alpha = 0.00001524$
- $\beta = 0.7162$
- $\gamma = 0.1883$
- $\theta = 0.5$

TAB. 5.4 – Comparaison des prix de Longstaff-Schwartz (2001) et Del Moral et al. (2006), lorsque la volatilité suit un mouvement GARCH.

	Longstaff et Schwartz (2001)	Del Moral et al. (2006)
$M = 10^a$	12.9451	12.9633
$M = 2$	12.7833	12.8511

^a M représente le nombre de dates d'exercice anticipé de l'option d'achat bermudienne.

Le tableau 5.4 fait une comparaison des prix d'une option de vente bermudienne, évalués avec le modèle de Longstaff et Schwartz (2001), et le modèle de

Del Moral et al. (2006) avec un processus GARCH.

Nos résultats montrent que les prix obtenus avec les deux méthodes d'évaluation sont assez similaires.

5.5.2 Analyse du graphique des prix de l'option.

La figure 5.8 présente le graphe des prix d'une option d'achat bermudienne, obtenu en appliquant l'algorithme de Del Moral et al. (2006) à un modèle GARCH. Comme nous l'avons observé dans la section précédente, la fonction $\pi_t(s, h, y)$ est une fonction croissante, monotone en s , mais non en h , elle n'est donc ni concave, ni convexe, lorsque la volatilité du sous-jacent est stochastique.

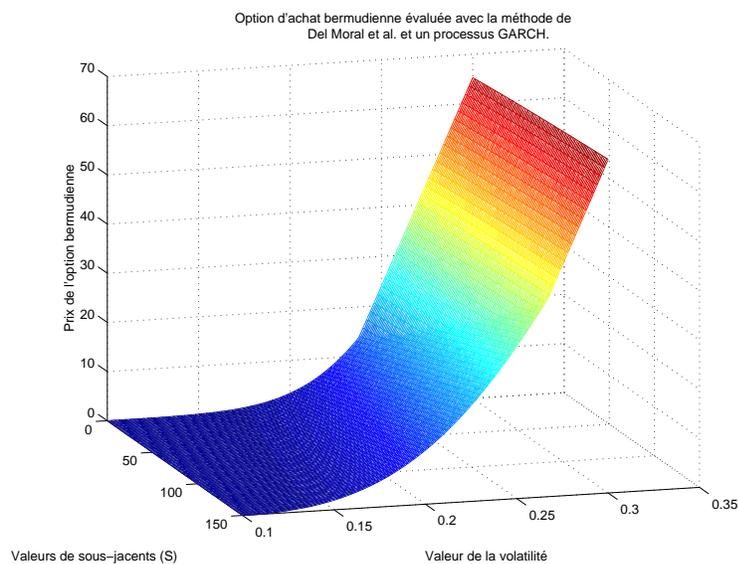


FIG. 5.8 – Option d'achat bermudienne avec le modèle GARCH.

La région d'exercice obtenue en appliquant l'approche de Del Moral et al.

(2006) à un processus EGARCH présente une allure bien différente de celle obtenue à la section précédente où la volatilité est restée constante. La figure 5.9 présente une région d'exercice d'une option de vente bermudienne évaluée avec le modèle de Del Moral et al. (2006), et un processus EGARCH. Nous pouvons attribuer cette différence entre cette région d'exercice et celles présentées précédemment à la présence de valeurs extrêmes lorsque la volatilité du sous-jacent est stochastique.

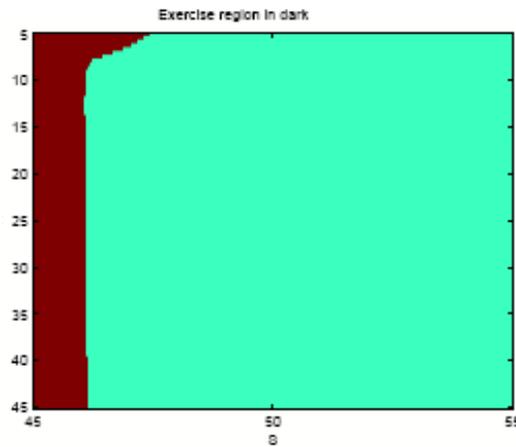


FIG. 5.9 – Région d'exercice d'une option de vente bermudienne obtenue avec la méthode de Del Moral et al. (2006) avec le modèle GARCH.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé les résultats obtenus avec les algorithmes de Longstaff et Schwartz (2001) et celui de Del Moral et al. (2006). Les bornes supérieure et inférieure calculées ont été obtenues en appliquant la méthode de Andersen et Broadie aux deux algorithmes précités.

Les graphiques présentés nous permettent de conclure que la méthode de Del Moral et al. (2006) conserve bien les propriétés de convexité et de monotonie

de la fonction de prix des options bermudiennes. Ces propriétés sont conservées aussi bien dans le cas où il y a un seul actif sous-jacent ou deux actifs sous-jacents. De plus, le prix de l'option d'achat bermudienne obtenu avec la méthode de Del Moral et al. (2006) est très similaire au prix obtenu avec l'algorithme de Longstaff et Schwartz (2001).

Nous pouvons conclure que la convexité de la courbe des prix n'est pas conservée lorsque le processus de l'actif sous-jacent présente une volatilité stochastique.

Chapitre 6

Conclusion

L'exercice par anticipation possible avec les options bermudiennes présente une tâche ardue dans l'évaluation de ces options, contrairement aux options européennes où l'option s'exerce seulement à sa date de maturité. Il faut résoudre un problème de temps d'arrêt optimal pour évaluer le prix des options américaines et bermudiennes. La revue de la littérature présentée au deuxième chapitre explore plusieurs méthodes couramment utilisées pour l'évaluation des options bermudiennes avec la simulation de Monte Carlo.

Le concept de l'enveloppe de Snell est fondamental dans la résolution des problèmes de temps d'arrêt optimal. Nous avons montré au troisième chapitre qu'en présence des chaînes de Markov, le problème de Snell se résout de façon théorique. Sa mise en œuvre est par contre délicate et nécessite des algorithmes pour l'approximer.

Ce mémoire fait une étude comparative des algorithmes de Longstaff et Schwartz (2001) et Del Moral et al. (2006) pour l'évaluation des options bermudiennes. Nous avons appliqué la méthode de Andersen et Broadie (2004) à ces deux algorithmes pour calculer des intervalles de prix de l'option bermudienne. Le quatrième chapitre présente ces trois méthodes d'évaluation.

Les résultats présentés au cinquième chapitre montrent que les deux algorithmes étudiés fournissent des prix très similaires des options bermudiennes, et des intervalles de prix comparables.

Nos analyses montrent que le modèle de Del Moral et al. (2006) préserve bien les propriétés de convexité et de monotonie de la fonction de prix de l'option bermudienne. Pour une option d'achat, la courbe de la fonction de prix est convexe et croissante. Pour une option de vente, elle est convexe et décroissante. Nous avons testé ces propriétés avec des options possédant un sous-jacent, et avec des options possédant deux sous-jacents. Nos résultats peuvent donc être généralisés pour une option multidimensionnelle.

Au cinquième chapitre, l'illustration de l'approche de Del Moral et al. (2006) avec un modèle EARCH montre que la fonction de prix est monotone dans le sous-jacent, et non monotone en la volatilité.

Annexe A

Théorèmes de convexité et monotonicité

Nous mettons dans cette annexe les théorèmes¹ de l'article de Del Moral et al. (2006), qui portent sur les propriétés de convexité et de monotonicité de la courbe de prix de l'option bermudienne.

Proposition 3.1 de l'article de Del Moral et al. (2006) :

Supposons que pour tout $t \in \{0, \dots, n\}$, f_t est une fonction non décroissante (respectivement non croissante) et $\pi(\cdot, y)$ est une fonction non décroissante pour tout $y \in \mathcal{Y}$. Alors, pour tout $t \in \{0, \dots, n\}$, les fonctions U_t et V_t sont non décroissantes (respectivement non croissantes).

De plus, si f_t est une fonction continue pour tout $t \in \{0, \dots, n\}$, alors les fonctions U_t et V_t sont également continues pour tout $t \in \{0, \dots, n\}$.

¹Traduction libre des théorèmes de l'article de Del Moral et al. (2006), page 10.

Proposition 3.3 de l'article de Del Moral et al. (2006) :

Supposons que pour tout $t \in \{0, \dots, n\}$, f_t est une fonction convexe et non décroissante, et $\pi_t(\cdot, y)$ est une fonction convexe et non décroissante pour tout $y \in \mathcal{Y}$. Alors, les fonctions U_t and V_t sont convexes et non décroissantes, pour tout $t \in \{0, \dots, n\}$.

Si f_t est une fonction convexe et non croissante, et si $\pi_t(\cdot, y)$ est une fonction concave et non décroissante pour tout $y \in \mathcal{Y}$ et tout $t \in \{0, \dots, n\}$, alors les fonctions U_t et V_t sont aussi convexes et non croissantes, pour tout $t \in \{0, \dots, n\}$.

Annexe B

Les polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre sont les solutions de l'équation de Laguerre :

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire du second ordre, et possède des solutions non singulières seulement si n est un entier positif. Ces polynômes L_0, L_1, \dots, L_n forment une séquence polynômiale qui peut être définie par la formule de Rodrigues :

$$L_n(x) = \frac{\exp(x)}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (\exp(-x)x^n)$$

Ils sont orthogonaux les uns par rapport aux autres, pour le produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x) \exp(-x) dx$$

Les polynômes de Laguerre forment une base par rapport à ces produits scalaires. Aussi, $(e^{-x} dx)_{x \geq 0}$ forme une base totale dans $L^2([0, +\infty))$.

Nous énumérons ici la liste des six premiers ordres des polynômes de Laguerre :

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = 1 - x,$$

$$L_2(x) = 1 - 2x + 0.5x^2,$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6}(6 - 18x + 9x^2 - x^3),$$

$$L_4(x) = \frac{1}{24}(24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4),$$

$$L_5(x) = \frac{1}{120}(120 - 600x + 600x^2 - 200x^3 + 25x^4 - x^5).$$

Annexe C

Interpolation linéaire

Cette section présente la méthode de l'interpolation linéaire¹ utilisée pour évaluer le prix de l'option avec le modèle de Del Moral et al. (2006).

Supposons que l'on veut interpoler linéairement une fonction convexe f sur l'intervalle $[0, 1]^2$, en connaissant seulement les valeurs extrêmes $f(0, 0)$, $f(1, 0)$, $f(0, 1)$ et $f(1, 1)$.

Nous pouvons considérer la partition $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$, où $\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in [0, 1]^2; y \leq x\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in [0, 1]^2; x \leq y\}$. Cette partition permet d'obtenir les valeurs interpolées $g(x, y)$ de f , tels que :

$$g(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & (x, y) \in \mathcal{C}_1 \\ f_2(x, y), & (x, y) \in \mathcal{C}_2 \end{cases}$$

où

$$f_1(x, y) = x(f(1, 0) - f(0, 0)) + y(f(1, 1) - f(1, 0)) + f(0, 0) \text{ et}$$
$$f_2(x, y) = x(f(1, 1) - f(0, 1)) + y(f(0, 1) - f(0, 0)) + f(0, 0).$$

¹Cette partie est une traduction libre de l'exemple 2, page 26 de l'article de Del Moral et al. (2006).

Une autre partition $\mathcal{P}' = \{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4\}$, où $\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in [0, 1]^2; x + y \leq 1\}$ et $\mathcal{C}_4 = \{(x, y) \in [0, 1]^2; x + y \geq 1\}$ pourrait être utilisée. Elle permettra d'obtenir les valeurs interpolées $g'(x, y)$ de f , tels que :

$$g'(x, y) = \begin{cases} f_3(x, y), & (x, y) \in \mathcal{C}_3 \\ f_4(x, y), & (x, y) \in \mathcal{C}_4 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} f_3(x, y) &= x(f(1, 0) - f(0, 0)) + y(f(0, 1) - f(0, 0)) + f(0, 0) \text{ et} \\ f_4(x, y) &= x(f(1, 1) - f(0, 1)) + y(f(1, 1) - f(1, 0)) - \Delta + f(0, 0). \\ \Delta &= f(1, 1) - f(0, 1) - f(1, 0) + f(0, 0). \end{aligned}$$

Selon l'article de Del Moral et al. (2006), le choix de la partition dépend du signe de Δ . Les auteurs montrent que la fonction g est convexe sur $[0, 1]^2$ si et seulement si $\Delta \leq 0$, et la fonction g' est convexe sur $[0, 1]^2$ si et seulement si $\Delta \geq 0$. Le théorème C.3 appliqué aux valeurs extrêmes $f(0, 0)$, $f(1, 0)$, $f(0, 1)$ et $f(1, 1)$ sur l'intervalle $[0, 1]^2$ donne g lorsque $\Delta \leq 0$, et g' lorsque $\Delta \geq 0$.

Bibliographie

- Andersen, L. and Broadie, M. (2004). Primal-dual simulation algorithm for pricing multidimensional American options. *Management Science*, 50 :1222–1234.
- Bally, V., Pagès, G., and Printems, J. (2005). A quantization tree method for pricing and hedging multidimensional American options. *Math. Finance*, 15(1) :119–168.
- Black, F. and Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 3 :637–654.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31 :307–327.
- Bossaerts, P. (1989). Simulation estimators of Optimal Early Exercise. Technical report, Carnegie Mellon University.
- Boyle, P. (1977). Options : A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4 :323–338.
- Brennan, M. and Schwartz, E. (1977). The valuation of American put options. *Journal of Finance*, XXXII :449–462.
- Broadie, M. and Detemple, J. (1996). American option valuation : New bounds,

- approximations, and a comparison of existing methods. *The Review of Financial Studies*, 9 :1211–1250.
- Broadie, M. and Glasserman, P. (1997). Pricing American-style securities using simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21 :1323–1352.
- Broadie, M. and Glasserman, P. (2004). A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options. *Journal of Computational Finance*, 7 :35–72.
- Carriere, J. (1996). Valuation of the early-exercise price for options using simulations and nonparametric regression. *Insurance : Mathematics and Economics*, 19 :19–30.
- Clément, E., Lamberton, D., and Protter, P. (2002). An analysis of a least squares regression method for American option pricing. *Finance and Stochastics*, 6 :449–471.
- Cox, J., Ross, S., and Rubinstein, M. (1979). Option pricing : A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7 :229–263.
- Del Moral, P., Rémillard, B., and Rubenthaler, S. (2006). Convex Monte Carlo approximations of American options. Technical report, GERAD.
- Doob, J. L. (1953). Stochastic processes.
- Duan, J.-C. (1995). The GARCH option pricing model. *Math. Finance*, 5(1) :13–32.
- Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with estimates of the variance of UK inflation. *Econometrica*, 50 :987–1108.

- Figlewski, S. and Gao, B. (1999). The Adaptive Mesh Model : A New Approach to Efficient Option Pricing. *Journal of Financial Economics*, 53 :313–351.
- Garcia, D. (2003). Convergence and Biases of Monte Carlo estimates of American option prices using a parametric exercise rule. *Journal of Economic Dynamics and Control.*, 27 :1855–1879.
- Haugh, M. and Kogan, L. (2004). Approximating pricing and exercising of high-dimensional American options : A duality approach. Technical report, MIT.
- Ibanez, A. and Zapatero, F. (2004). Monte Carlo valuation of American options through computation of the Optimal Exercise Frontier. Technical report, Marshall School of Business, USC.
- Lamberton, D. and Lapeyre, B. (1996). Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance.
- Longstaff, F. and Schwartz, E. (2001). Valuing American options by simulation : A simple least-square approach. *The Review of Financial Studies*, 14 :113–147.
- Neveu, J. (1971). *Martingales à temps discret*. Masson, Paris.
- Stentoft, L. (2003). Convergence of the Least Square Monte-Carlo Approach to American Option Valuation. *Management Science*, 50(9) :1193–1203.
- Tilley, J. (1993). Valuing American options in a path simulation model. *Transactions of the Society of Actuaries*, 45 :83–104.