JEAN-FRANÇOIS DUCRÉ-ROBITAILLE

Systèmes avec clients opposés

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de mathématiques et statistiques
FACULTÉ DES SCIENCES ET GÉNIES
UNIVERSITÉ LAVAL

Table des matières

Introduction

Chapitre 1

Définitions et notations

1.1 Serveurs, clients, politiques

Avant d'entreprendre notre étude, il est important de bien définir les termes qui seront utilisés et les notations qui seront employées dans ce mémoire.

Un *système* est formé par un ensemble de *nœuds* qui peuvent être interconnectés ou non. Ces nœuds sont composés d'un ou plusieurs *serveurs*, ainsi que d'une file d'attente. Les clients se promènent aléatoirement d'un nœud à l'autre tout en respectant certaines normes. À la fin du service, les clients quittent le nœud pour un autre nœud ou pour l'extérieur du système. Les clients peuvent provenir de l'extérieur du système et/ou y être présents au temps 0.

À l'intérieur des nœuds, les serveurs s'occupet des clients en attente selon un ordre qui dépend de la politique (discipline) de service pour ce nœud. Les temps de service sont indépendants, de même que les temps d'arrivée des clients dans les nœuds. Pour les systèmes n'ayant qu'un nœud, la notion de système et de nœud est confondue.

Dans Gelenbe [5], nous pouvons distinguer deux catégories de clients : *positifs* et *négatifs*. Un client positif arrive à un nœud, se joint à la file d'attente (c'est-à-dire que la longueur de la file augmente d'une unité) en attendant d'être servi selon une certaine politique de service. Puis, après avoir été servi, il quitte le système ou se déplace pour un autre nœud. Les clients positifs correspondent à la définition classique d'un client. Un client négatif arrive à un nœud, élimine un client positif de la file selon une certaine politique d'élimination (qui peut éventuellement varier d'un nœud à l'autre) et disparaît (c'est-à-dire que la longueur de la file diminue d'une unité). Si le nœud est vide, le client négatif entre dans le nœud et disparaît aussitôt.

Les trois politiques de service le plus fréquemment utilisées pour les clients positifs sont les suivantes :

- PAPS (premier arrivée, premier servi)[1] : les clients sont servis dans l'ordre de leur arrivée.
- DAPS (dernier arrivée, premier servi)[2] : le dernier client arrivé est celui qui se fait servir, ceux ayant reçu un service partiel conservent le travail qu'ils ont reçu, c'est-à-dire que le temps pendant lequel ils se faisaient servir est conservé.
- PS (partage du service)[3] : chacun des m clients reçoit $1/m$ unité de travail pour chaque unité de travail fournie par le serveur.

Pour les clients négatifs, les politiques d'élimination sont principalement de trois types, soit :

- ECS (élimination du client en service)[4] : le client élimine le client présentement en service ;

[1]traduction de FCFS (First Come, First Serve)
[2]traduction de LCFS (Last Come, First Serve)
[3]traduction de PS (Process Sharing)
[4]traduction de RCS (Removal of Customer in Service)

– ECF (élimination du client à la fin)[5] : le client élimine le dernier client de la file ;
– EAC (élimination aléatoire d'un client)[6] : le client élimine un client de la file choisi au hasard. Cette politique est principalement utilisée conjointement avec la discipline PS.

Pour identifier le comportement de chacun des nœuds d'un système, une notation abrégée basée sur le modèle suivant est souvent utilisée :

$$A/B/m/n/t \, \text{politique de service, politique d'élimination}$$

où A représente la loi de probabilité des arrivées, B la loi de probabilité des temps de services, m le nombre de serveurs, n la longueur maximale de la file d'attente ($n \in \mathcal{N}$ avec une valeur de ∞ par défaut) et t le type de clients négatifs. On utilise les abbréviations suivantes pour les lois : M une loi exponentielle (un processus de Poisson), G une loi générale quelconque concentrée sur $(0, \infty)$ et D une loi dégénérée. Les types de clients négatifs seront décrits dans les chapitres 2 et 3. Les politiques de service et d'élimination sont celles énumérées ci-dessus, soit par exemple PAPS et ECS. Si un système est décrit par un seul comportement, par exemple $M/M/1/\infty/\pm$, PAPS ECS, alors ce comportement sera suivi par tous les nœuds de ce système.

1.2 Symboles et résultats

Nous allons adopter dans ce mémoire les notations utilisées par Gelenbe [4].

Soit un système comportant n nœuds composés d'un seul serveur. Les temps de service et les arrivées des clients positifs et négatifs sont indépendants. Alors :

[5]traduction de RCT (Removal of Customer at the Tail)
[6]traduction de RCR (Removal of Customer at Random)

- Λ_i l'intensité des arrivées au nœud i de clients positifs en provenance de l'extérieur du système ;
- λ_i l'intensité des arrivées au nœud i de clients négatifs en provenance de l'extérieur du système ;
- r_i l'intensité des temps de service du nœud i ;
- p_{ij}^{+} la probabilité qu'un client quittant le nœud i aille au nœud j en tant que client positif ;
- p_{ij}^{-} la probabilité qu'un client quittant le nœud i aille au nœud j en tant que client négatif ;
- p_{ij} la probabilité qu'un client quitte le nœud i pour le nœud j ($p_{ij} = p_{ij}^{+} + p_{ij}^{-}$) ;
- $\mathbf{P}$ la matrice de probabilités de transition du système, composée des p_{ij} ;
- d_i la probabilité qu'un client quittant le nœud i quitte le système, avec $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} + d_i = 1, \forall i$;
- λ_i^{+} l'intensité totale des arrivées de client positifs au nœud i ;
- λ_i^{-} l'intensité totale des arrivées de clients négatifs au nœud i ;
- q_i le rapport de l'intensité des arrivées sur celui des départs au nœud i ;
- $\mathbf{k}(t)$ le vecteur des longueurs des files d'attente, incluant le client en service, au temps t ;
- $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ une valeur du vecteur $\mathbf{k}(t)$;
- $\mathbf{k_i^{+}}$ le vecteur $\mathbf{k}$ avec un client supplémentaire au nœud i,
  i.e. $\mathbf{k_i^{+}} = (k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \ldots, k_n)$;
- $\mathbf{k_{ij}^{++}}$ le vecteur $\mathbf{k}$ avec un client supplémentaire aux nœuds i et j,
  i.e. $\mathbf{k_{ij}^{++}} = (k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \ldots, k_{j-1}, k_j + 1, k_{j+1}, \ldots, k_n)$;
- $\pi(\mathbf{k})$ la distribution stationnaire de $\mathbf{k}$, soit $\lim_{t\to\infty} P(\mathbf{k}(t) = \mathbf{k})$;
- $q(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ l'intensité des transitions de l'état $\mathbf{k}$ à l'état $\mathbf{k}'$, avec
  $q(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = -\sum_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} q(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$;
- $\mathbf{Q}$ la matrice de transition composée des $q(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$;

- $\mathbf{A}$ l'ensemble des couples $(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ tel que l'on peut passer de l'état $\mathbf{k}$ à l'état $\mathbf{k}'$ à la suite d'une arrivée ;
- $\mathbf{Q_A}$ la matrice de transition composée des $q(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ tel que $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{A}$;
- $\mathbf{D}$ l'ensemble des couples $(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ tel que l'on peut passer de l'état $\mathbf{k}$ à l'état $\mathbf{k}'$ à la suite d'une fin de service ou de l'élimination d'un client positif par l'arrivée d'un client négatif ;
- $\mathbf{Q_D}$ la matrice de transition composée des $q(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ tel que $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{D}$.

Pour déterminer les valeurs de $\lambda_i^+, \lambda_i^-, q_i$, nous pouvons utiliser les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_i^+ &= \sum_{j \neq i} q_j r_j p_{ji}^+ + \Lambda_i, \\ \lambda_i^- &= \sum_{j \neq i} q_j r_j p_{ji}^- + \lambda_i, \\ q_i &= \lambda_i^+ / [r_i + \lambda_i^-]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Pour les sytèmes qui nous intéresserons, la solution à ces équations existera toujours.

Puisque la distribution stationnaire $\pi(\mathbf{k})$ d'un système est compliquée à calculer, nous pouvons utiliser les équations de Chapman-Kolmogorov pour la trouver [12]. Ainsi, $\pi(\mathbf{k})$ est la solution du système suivant :

$$\pi(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} \pi(\mathbf{k}') q(\mathbf{k}', \mathbf{k}), \qquad \forall \mathbf{k}. \tag{1.2}$$

Pour les systèmes que nous aborderons dans ce mémoire, la solution à ces équations est unique [6]. Si la forme de la solution est la suivante :

$$\pi(k_1, \ldots, k_n) = a_0 a_1^{k_1} \times \ldots \times a_n^{k_n}, \qquad \forall k_i \in \mathbf{k},$$

où les a sont des constantes, alors nous dirons que la distribution stationnaire est de forme *produit*. De par sa simplicté, cette forme de distribution stationnaire sera recherchée.

Un système est *ouvert* si tous les nœuds sont reliés à au moins un nœud qui permet aux clients de quitter le système après une fin de service. Si un client ne peut entrer ni sortir du système par aucun nœud, alors le système est *fermé*, c'est-à-dire que $\Lambda_i = d_i = 0, \forall i$. Un système est *mixte* si certaines de ses sections sont ouvertes et d'autres fermées. Avec des clients négatifs dans un système, l'élimination d'un client ne constitue pas une fin de service pour déterminer la nature du système. Si le système permet à de nouveaux clients d'arriver, mais les empêche de partir, ou l'inverse, le système sera *semi-fermé* ou *semi-ouvert*. Ce genre de système n'est que très rarement abordé dans la littérature.

Si pour $\forall i$, on a $q_i < 1$, alors le système est dit *transitoire*, c'est-à-dire que tous les nœuds se videront avec une probabilité égale à 1, l'intensité des arrivées positives λ_i^+ étant inférieure à celle des départs λ_i^- (comprenant les intensités des services et des arrivées négatives).

Observons que dans un système fermé avec une matrice $\mathbf{P}$ irréductible, $\pi(\mathbf{k}) = 0$ pour $\forall \mathbf{k}$ sauf pour le vecteur nul si, pour au moins un couple de nœuds (i, j), on a que $p_{ij}^- > 0$. En effet, cela veut dire que le système va complètement se vider, car dans un temps infini, tous les clients vont passer par le nœud i, quitter pour le nœud j en devenant des clients négatifs ou se faire détruire par un de ces clients négatifs avec une probabilité égale à 1. C'est le seul cas où un système fermé peut être transitoire.

Un système est dit *en amont*[7] si la séquence $i_1, \ldots, i_s, \ldots, i_r, \ldots, i_m$ des nœuds parcourus par un client avec $i_r = i_s$, pour un certain $r > s$, implique que

$$\mathbf{P}_{ii}^{(m)} = 0, \qquad \forall i, \forall m \geq 1.$$

[7]traduction de feedforward

En d'autres mots, un système en amont est un système où les nœuds se suivent selon une certaine séquence et dès qu'un client quitte un nœud, il est impossible pour celui-ci d'y retourner et ce peut importe le chemin. Ainsi un client ne peut accéder qu'aux nœuds en avant de lui. Pour ce genre de système, la solution aux équations (1.1) pour déterminer les λ_i^+ et les λ_i^- existe et est unique [4].

Un système est dit *balancé* si $q_i = q_j$ pour $\forall(i,j)$. En d'autres mots, la proportion d'arrivés/départs est la même pour tous les noeuds. Pour ce genre de système, la solution aux équations (1.1) pour déterminer les λ_i^+ et les λ_i^- existe et est unique [4].

Un système est dit *stationnaire* si la distribution de $\mathbf{k}(t+s), s \geq 0$, ne dépend pas de $t \geq 0$. C'est-à-dire qu'au temps t, la probabilité que le système soit dans un certain état $\mathbf{k}$ est égale à $\pi(\mathbf{k})$. Nous appellerons *clients typiques* les clients de tels systèmes.

Un système est dit *quasi-réversible* si à tout instant, les temps des départs passés, l'état présent et les temps des arrivées futures sont indépendants [12]. Ainsi, un système est quasi-réversible si et seulement si pour au moins un couple positif (λ, μ) :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}'} q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[q(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{Q_A}] &= \lambda, \qquad \forall\mathbf{k}, \\ \sum_{\mathbf{k}} \pi(\mathbf{k})q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[q(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{Q_D}] &= \mu\pi(\mathbf{k}'), \qquad \forall\mathbf{k}', \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dans le cas de systèmes avec clients négatifs, Gelenbe [4] introduit une nouvelle définition de la quasi-réversibilité, la première ne tenant plus à cause de la présence des clients négatifs. Ainsi, on dit que le systéme est quasi-réversible au sens général (correspondant au deuxiéme sens de Gelenbe dans [4]) si et seulement si pour au moins un couple positif (λ, μ) :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}'} q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[q(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{Q_A}] &= \lambda, \qquad \forall \mathbf{k}, \\ \sum_{\mathbf{k}} \pi(\mathbf{k})q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{D}] &= \mu\pi(\mathbf{k}'), \qquad \forall \mathbf{k}'. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Un autre résultat intéressant est celui de Little [12]. Supposons que les clients paient pour utiliser un système. Soit λ l'intensité des arrivées, C le coût moyen payé par un client et S le montant moyen reçu par le système par unité de temps. Alors nous obtenons :

$$S = \lambda C.$$

Si on considère que chaque client paie une unité d'argent par unité de temps, alors nous avons :

$$L = \lambda W, \tag{1.5}$$

où L représente le nombre moyen de client dans le système et W le temps moyen de séjour.

Ce résultat est utile faire le lien entre une moyenne temporelle (le temps de séjour moyen des clients) et une moyenne physique (le nombre moyen de clients). Pour les systèmes avec des clients négatifs, nous devons utiliser λ_i^+ comme valeur de λ et nous pouvons alors appliquer ce résultat pour tous les nœuds. Par contre, si les clients négatifs peuvent s'accumuler dans le système, comme les clients négatifs d'Henderson au chapitre 2 ou ceux du chapitre 3, le résultat de Little ne pourra s'appliquer sous cette forme, la nature des clients dans les files d'attente pouvant varier, ce qui influence les taux d'arrivées.

Chapitre 2

Systèmes ouverts $M/G/1/\infty/\pm$ à un nœud

Soit un système à un nœud et à un serveur où des clients positifs arrivent selon un processus de Poisson d'intensité Λ. Les clients positifs à l'intérieur du système sont servis dans un ordre qui dépend de la politique de service du nœud et peuvent s'accumuler indéfiniment. Les temps de service pour ces clients sont indépendants et suivent une loi générale sur $(0, \infty)$ et de moyenne $1/r$. Le serveur fournit toujours le même travail, qui peut éventuellement être réparti parmi l'ensemble des clients (ce qui est le cas pour la politique de service PS). Simultanément, des clients négatifs arrivent dans le même système, indépendamment des clients positifs, selon un processus de Poisson d'intensité λ. À leur arrivée, les clients négatifs forcent un des clients positifs à quitter immédiatement le système selon une certaine politique d'élimination. S'il n'y a pas de client positif dans le système, les clients négatifs n'ont aucun effet et disparaissent automatiquement. Nous nommerons ces clients des clients négatifs de Gelenbe et l'abbréviation utilisée sera $\pm$.

2.1 Résultats généraux

Rappellons d'abord quelques résultats qui ne dépendent ni de la loi de service, ni de la politique de service, ni de celle d'élimination. Pour les systèmes ouverts à un nœud et à un seul serveur, on a selon les équations (1.1) :

$$\begin{aligned}
\lambda^+ &= \Lambda, \\
\lambda^- &= \lambda, \\
q &= \frac{\lambda^+}{r+\lambda^-}.
\end{aligned}$$

La matrice de transition $\mathbf{Q}$ est définie par $q(\mathbf{k},\mathbf{k}'), \forall(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathcal{N}^2$ tel que :

$$q(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \begin{cases} \lambda^+ & \text{pour } \mathbf{k}' = \mathbf{k}+1, \\ r+\lambda^- & \text{pour } \mathbf{k}' = \mathbf{k}-1, \\ -\lambda^+ - \lambda^- - r & \text{pour } \mathbf{k}' = \mathbf{k} \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

De plus, si certaines conditions sont satisfaites, ce système est récurrent positif et possède une distribution stationnaire.

Théorème 2.1 *Si $q < 1$, alors les systèmes ouverts $M/G/1/\infty/\pm$ à un nœud sont récurrents positifs et possèdent une distribution stationnaire unique de forme produit qui est :*

$$\pi(n) = q^n(1-q) \qquad \forall n \geq 0$$

Preuve : Si nous trouvons une distribution stationnaire, elle sera unique d'après la forme du système d'équations de Chapman-Kolmogorov, car si la solution existe, elle est unique[6].

Pour avoir un système stationnaire selon l'équation (1.2), il faut que l'intensité des arrivées dans un état soit égale à l'intensité des départs de cet état. Ainsi, on doit trouver la ou les solutions en π au système suivant :

$$\begin{aligned}
\lambda^+\pi(0) &= (\lambda^- + r)\pi(1), \\
(\lambda^+ + \lambda^- + r)\pi(n) &= \lambda^+\pi(n-1) + (\lambda^- + r)\pi(n+1), \qquad \forall n > 0, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) &= 1.
\end{aligned}$$

En simplifiant ce système nous obtenons

$$\begin{aligned}
\pi(n) &= \left(\frac{\lambda^+}{\lambda^- + r}\right)^n \pi(0), \qquad \forall n, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) &= 1.
\end{aligned}$$

Donc il suffit de trouver $\pi(0)$ de :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^+}{\lambda^- + r}\right)^n \pi(0) = 1.$$

La somme ne converge vers 1 que si $\frac{\lambda^+}{\lambda^- + r} < 1$ et alors la solution est

$$\pi(n) = \left(\frac{\lambda^+}{\lambda^- + r}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda^+}{\lambda^- + r}\right) = q^n(1-q), \qquad \forall n \geq 0.$$

Si par contre, $q > 1$ alors le système est transitoire, c'est-à-dire qu'il explose et $\pi(n) = 0$, $\forall n$. Ce résultat est logique car si $q > 1$, l'intensité des arrivées est plus grande que celle des départs, ce qui veut dire qu'il y aura de plus en plus de clients qui s'accumuleront dans la file d'attente au fur et à mesure que le temps avancera, donc dans un temps infini, il y aura infiniment de clients. Si $q = 1$, alors le système est récurrent nul, c'est-à-dire qu'il peut exploser avec une probabilité inférieure à 1. $\diamondsuit$

L'espérance du nombre de clients dans le système stationnaire est de $\frac{q}{1-q} = \frac{\lambda^+}{\lambda^- + r - \lambda^+}$.

Théorème 2.2 *Les systèmes ouverts $M/G/1/\infty/\pm$ sont quasi-réversibles.*

Preuve : Pour que le système soit quasi-réversible au sens général, il suffit de voir si léquation (1.4) est vérifiée pour un couple (λ, μ) :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{k}'} q(\mathbf{k}, \mathbf{k}')1[q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{Q_A}] &= q(\mathbf{k}, \mathbf{k}+1), \qquad \forall \mathbf{k}, \\
&= \lambda^+, \\
\sum_{\mathbf{k}} \pi(\mathbf{k})q(\mathbf{k}, \mathbf{k}')1[(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{D}] &= \pi(\mathbf{k}'+\mathbf{1})q(k'+1, k') \qquad \forall \mathbf{k}' > 0, \\
&= \pi(\mathbf{k}')\lambda^+.
\end{aligned}$$

Donc ce système est quasi-réversible, en prennant $\lambda = \lambda +$ et $\mu = \lambda +$. $\diamondsuit$

2.2 $M/M/1/\infty/\pm$ PAPS, ECS

Le système étudié dans cette section est la version la plus simple des systèmes ouverts $M/G/1/\infty/\pm$. En effet, les lois régissant les arrivées et les services sont exponentielles, donc sans mémoire, les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée et les clients négatifs n'agissent que sur le client qui se fait servir (on n'a pas à tenir compte du moment d'arrivée des derniers clients, ni de la longueur de la file d'attente pour voir l'effet de l'arrivée d'un client négatif sur le client qui se fait servir). Les résultats faisant mention de client typique ont comme hypothèse de base que le système est récurrent positif.

La probabilité qu'un client positif quitte le système à la fin de son service et non avec l'arrivée d'un client négatif est de $P(T_{service} < T_{prochain\ client\ négatif}) = r/(r + \lambda^-)$.

Théorème 2.3 *Sachant qu'un client ait quitté à la fin de son service et non à* *cause de son élimination, la fonction de répartition du temps de service pour ce client est la suivante :*

$$1 - e^{-(\lambda^- + r)t}, \qquad \forall t > 0.$$

Preuve : Soient S le temps de service pour un client typique et A l'intervalle de temps entre le début du service de ce client typique et l'arrivée du prochain client négatif. On a alors

$$\begin{aligned} P(S \leq t | S < A) &= \frac{P(S \leq t, S < A)}{P(S < A)}, \\ &= \int_0^t re^{-ru} e^{-\lambda^-} u \, du / \frac{r}{\lambda^- + r} \\ &= \int_0^t \frac{1}{\lambda^- + r} e^{-(\lambda^- + r)u} \, du \\ &= 1 - e^{-(\lambda^- + r)t}. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Étant donné que nous avons une loi exponentielle pour les intervalles entre deux clients négatifs, on n'a pas à tenir compte du moment d'arrivée du dernier client négatif, ce qui simplifie le problème. Cette démarche est aussi valable si la loi des temps de service n'est pas exponentielle, car on ne regarde qu'à partir du moment où le client commence son service, car la propriété sans mémoire de la loie exponentielle n'est pas requise.

Théorème 2.4 *La fonction de distribution du temps de séjour pour un client typique est une loi exponetielle de paramètre* $\lambda^- + r - \lambda^+$.

Preuve : Soit W le temps de séjour du client typique, N le nombre de personnes, incluant le client typique, dans le système et W_n le temps de séjour dans le système étant donné qu'il y a $n - 1$ personnes à l'avant du client. Alors

$$
\begin{aligned}
P(W < w) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(W < w, N = n-1), \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(W_n < w) P(N = n-1), \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(W_n < w) \pi(n-1), \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[q^{n-1}(1-q) \int_0^w \frac{(\lambda^- + r) e^{-(\lambda^- + r)x} ((\lambda^- + r)x)^{(n-1)}}{(n-1)!} \, dx \right], \\
&= \int_0^w \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda^+}{\lambda^- + r} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{\lambda^+}{\lambda^- + r} \right) \\
&\quad \times \frac{(\lambda^- + r) e^{-(\lambda^- + r)x} ((\lambda^- + r)x)^{(n-1)}}{(n-1)!} \, dx, \\
&= \int_0^w \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda^+)^{n-1} (\lambda^- + r - \lambda^-) e^{-(\lambda^- + r)x} x^{n-1}}{(n-1)!}, \\
&= \int_0^w \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^- + r - \lambda^-) e^{-(\lambda^- + r)x} \frac{(\lambda^+ x)^{n-1}}{(n-1)!}, \\
&= \int_0^w (\lambda^- + r - \lambda^-) e^{-(\lambda^- + r)x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda^+ x)^{n-1}}{(n-1)!}, \\
&= \int_0^w (\lambda^- + r - \lambda^-) e^{-(\lambda^- + r)x} e^{\lambda^+ x}, \\
&= 1 - e^{-(\lambda^- + r - \lambda^+)w}, \qquad \forall w \geq 0.
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

Ainsi, le temps de séjour moyen pour un client typique sera de $(\lambda^- + r - \lambda^+)^{-1}$, résultat que nous aurions pu obtenir en utilisant le résultat de Little avec le nombre moyen de clients, soit L/λ^+.

Exemple : Soit un réseau d'ordinateurs relié à une imprimante ayant une mémoire tampon de taille très grande (considérée comme infinie). Les utilisateurs envoient à l'imprimante des fichiers de taille variable selon un processus de Poisson d'intensité 10 à l'heure. Le temps d'impression est directement relié à la taille du fichier à imprimer et suit approximativement une loi exponentielle de paramètre 60. Lors de l'impression de documents, des erreurs surviennent selon un processus de Poisson au rythme de 2 à l'heure, ce qui force la sortie du document en cours d'impression. L'administrateur du réseau veut savoir quelle fraction du temps son imprimante va être inactive, qu'elle est la probabilité qu'un document s'imprime complètement et qu'elle est le délai moyen entre l'envoi d'un document et son impression, complète ou non. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
\lambda^{+} &= 10, \\
\lambda^{-} &= 2, \\
r &= 60, \\
\pi(n) &= \left(\frac{10}{62}\right)^{n}\left(\frac{52}{62}\right), \qquad \forall n \geq 0, \\
\Rightarrow \pi(0) &= \left(\frac{52}{62}\right), \\
P(\text{complètement imprimé}) &= \frac{60}{62}, \\
\text{Délai moyen d'attente} &= \frac{1}{52}.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'imprimante sera inactive 84% du temps, environ 97% des documents s'imprimeront sans erreur et le délai moyen d'attente pour une impression sera d'environ 1 minute et 9 secondes.

2.3 Autres politiques de service et d'élimination

Harrison et Pitel [8] ont étudié les temps de séjour W de clients qui survivent, i.e. qui quittent le système à la fin de leur service et ne sont pas éliminés. Ils ont traités les systèmes $M/M/1/\infty/\pm$ avec diverses politiques de service et d'élimination. Ces résultats ne seront pas utilisés par la suite, mais pourront être utiles pour adapter les résultats du chapitre 3 à d'autres combinaisons de politiques.

Le tableau qui suit résume les temps moyens de séjour selon la combinaison de politique du système :

Combinaison	$E(W)$
PAPS, ECS	$\dfrac{1}{\lambda^- + r - \lambda^+}$
PAPS, ECF	$\dfrac{(\lambda^- + r)^2}{[\lambda^- + r - \lambda^+][(\lambda^- + r)^2 - \lambda^+\lambda^-]}$
DAPS, ECS	$\dfrac{1}{\lambda^- + r - \lambda^+}$
DAPS, ECF	$\dfrac{\lambda^- + r}{(\lambda^- + r)^2 - \lambda^+ r}$
PS, EAC	$\dfrac{1}{\lambda^- + r - \lambda^+}$

Nous pouvons constater que les temps moyens de séjour pour les politiques ECS et EAC sont égaux. La combinaison qui donne le temps moyen le plus petit est DAPS, ECF. Cette stratégie force les clients qui survivent au système à être plus rapides que si une autre combinaison était utilisée. En effet, le client en service est poussé vers la fin de la file par l'arrivée de nouveaux clients, soit vers l'endroit où les clients négatifs ont un effet et diminue ses chances d'être servi. Par contre, pour la combinaison PAPS, ECF, les clients qui survivent sont protégés lors de leur séjour par les clients qui sont présent en arrière d'eux, ce qui explique le temps moyen de séjour plus élevé. Les transformés de Laplace des fonctions des temps de séjour pour les clients qui survivent, conjointement avec leur pobabilité de survie sont aussi développ'ees. Le nombre moyen de clients N dans le système peut être obtenu à l'aide du résultat de Little (1.5), soit $E(N) = \lambda^+ E(W)$.

2.4 Clients négatifs d'Henderson

À la suite de l'introduction des clients négatifs par Gelenbe, Henderson [7] a lui aussi traité des systèmes avec clients négatifs, mais en changeant une partie de la définition de ces clients. Ses clients négatifs peuvent s'accumuler dans les files d'attente lorsqu'aucun client positif n'y est présent. Les clients négatifs restent dans la file tant et aussi longtemps qu'un client positif ne se présente pas. Lorsqu'un client positif arrive, un des clients négatifs élimine le nouvel arrivant et disparaît aussitôt du système. Ainsi, contrairement à Gelenbe, les clients négatifs d'Henderson ont une patience infinie.

Cette différence entre les deux définitions du clients négatifs entrainent différents changements. Le domaine des états possibles pour un système à n nœuds passe donc de $\mathcal{N}^n$ à $\mathcal{Z}^n$. La distribution stationnaire (des valeurs négatives pour la file d'attente sont maintenant possibles) ainsi que la majorité des lois d'attente et de service pour les clients positifs typiques doivent être adaptées. En effet, il est possible pour un client positif d'avoir un temps de service nul, s'il arrive dans un nœud qui contient un ou plusieurs clients négatifs.

Comme pour les systèmes précédents, nous traiterons les systèmes à un nœud. Les clients positif arrivent dans le système avec une intensité de Λ et les clients négatifs avec une intensité de λ. Les temps de service des clients positifs suivent une loi définie sur $(0, \infty)$ et dont la moyenne est $1/r$.

$$
\begin{aligned}
\lambda^{+} &= \Lambda, \\
\lambda^{-} &= \lambda.
\end{aligned}
$$

La matrice de transition $\mathbf{Q}$ est définie par $q(i,j), \forall (i,j) \in \mathcal{Z}^2$ tel que :

$$q(i,j) = \begin{cases} \lambda^+ & \text{pour } j = i+1, \\ r + \lambda^- & \text{pour } j = i-1,\ i > 0, \\ \lambda^- & \text{pour } j = i-1,\ i \leq 0, \\ 0 & \text{pour ailleurs.} \end{cases}$$

Étant donné que l'intensité des transitions dans le système varie selon la composition de la file d'attente, q peut prendre deux valeurs, soit $q_+ = \frac{\lambda+}{\lambda^- + r}$ lorsque des clients positifs sont dans le nœud ou soit $q_- = \frac{\lambda^-}{\lambda^+}$ lorsque ce sont les clients négatifs qui y sont.

Théorème 2.5 *La distribution stationnaire d'un système à un nœud avec des clients négatifs de type Henderson est :*

$$\pi(k) = \begin{cases} \left[\frac{\lambda-}{\lambda^+ - \lambda^-} + \frac{\lambda^+}{\lambda_- + r - \lambda^+} + 1\right]^{-1} \left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)^{-k} & \textit{pour } k < 0, \\ \left[\frac{\lambda-}{\lambda^+ - \lambda^-} + \frac{\lambda^+}{\lambda_- + r - \lambda^+} + 1\right]^{-1} & \textit{pour } k = 0, \\ \left[\frac{\lambda-}{\lambda^+ - \lambda^-} + \frac{\lambda^+}{\lambda_- + r - \lambda^+} + 1\right]^{-1} \left(\frac{\lambda^+}{\lambda^- + r}\right)^{k} & \textit{pour } k > 0. \end{cases}$$

Preuve : Tout comme pour le système avec clients négatifs de Gelenbe, nous pouvons utiliser les équations de Chapman-Kolmogorov pour trouver la distribution stationnaire. La remarque sur l'unicité de la solution faite auparavant tient toujours pour ce système.

Les équations de Chapman-Kolmogorov pour ce système sont les suivantes :

$$\begin{aligned} (\lambda^- + \lambda^+)\pi(k) &= \lambda^+\pi(k-1) + \lambda^-\pi(k+1), \qquad k > 0, \\ (\lambda^- + \lambda^+)\pi(0) &= \lambda^+\pi(-1) + (\lambda^- + r)\pi(1), \\ (\lambda^+ + \lambda^- + r)\pi(k) &= \lambda^+\pi(k-1) + (\lambda^- + r)\pi(k+1), \qquad k > 0, \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi(k) &= 1. \end{aligned}$$

Les solutions au premier et troisième ensembles d'équations sont :

$$
\begin{aligned}
\pi(k) &= a\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)^{-k}, \qquad k < -1,\\
\pi(k) &= b\left(\frac{\lambda^+}{\lambda^- + r}\right)^{k}, \qquad k > 1.
\end{aligned}
$$

Pour trouver les valeurs de a et b, on peut utiliser les deux équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
(\lambda^+ + \lambda^-)\pi(-1) &= \lambda^-\pi(0) + \lambda^+\pi(-2),\\
(\lambda^+ + \lambda^- + r)\pi(1) &= \lambda^+\pi(0) + (\lambda^- + r)\pi(2),
\end{aligned}
$$

ce qui donne $a = b = \pi(0)$.

Ainsi, il reste un inconnu, $\pi(0)$, et deux équations. L'équation qui exprime $\pi(0)$ en fonction de $\pi(-1)$ et de $\pi(1)$ est respectée pour tout $\pi(0)$. Il reste donc l'équation de normalisation à solutionnner pour trouver $\pi(0)$. Cette équation devient en remplaçant tous les $\pi(k)$ par leur valeur en terme de $\pi(0)$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)^{-k}\pi(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^+}{\lambda^- + r}\right)^{k}\pi(0) + \pi(0) &= 1,\\
\left[\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^+}{\lambda^- + r}\right)^{k} + 1\right]^{-1} &= \pi(0),\\
\left[\frac{\lambda-}{\lambda^+ - \lambda^-} + \frac{\lambda^+}{\lambda^- + r - \lambda^+} + 1\right]^{-1} &= \pi(0),
\end{aligned}
$$

si et seulement si $\lambda^- + r > \lambda^+ > \lambda^-$ pour que les deux sommations puissent converger. La distribution stationnaire que nous obtenons est :

$$\pi(k) = \begin{cases} \left[\frac{\lambda^-}{\lambda^+-\lambda^-} + \frac{\lambda^+}{\lambda^-+r-\lambda^+} + 1\right]^{-1} \left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)^{-k} & \text{pour } k < 0, \\ \left[\frac{\lambda^-}{\lambda^+-\lambda^-} + \frac{\lambda^+}{\lambda^-+r-\lambda^+} + 1\right]^{-1} & \text{pour } k = 0, \\ \left[\frac{\lambda^-}{\lambda^+-\lambda^-} + \frac{\lambda^+}{\lambda^-+r-\lambda^+} + 1\right]^{-1} \left(\frac{\lambda^+}{\lambda^-+r}\right)^{k} & \text{pour } k > 0. \end{cases}$$

$\diamondsuit$

Nous pouvons aussi réécrire la distribution stationnaire en terme de q_+ et de q_- :

$$\pi(k) = \begin{cases} \left[1 + \frac{q_+}{1-q_+} + \frac{q_-}{1-q_-}\right]^{-1} q_-^{-k} & \text{pour } k < 0, \\ \left[1 + \frac{q_+}{1-q_+} + \frac{q_-}{1-q_-}\right]^{-1} & \text{pour } k = 0, \\ \left[1 + \frac{q_+}{1-q_+} + \frac{q_-}{1-q_-}\right]^{-1} q_+^{k} & \text{pour } k > 0. \end{cases}$$

Le temps de service S d'un client positif typique est nul si des clients négatifs se trouvent dans le nœud, ce qui est le cas avec probabilité $\frac{\lambda^-}{\lambda^+-\lambda^-}\pi(0)$. Par contre, si aucun client négatif n'est présent, la loi du temps de service des clients positifs est la même que pour un système avec des clients négatifs de Gelenbe. Ainsi, si nous avons un système $M/M/1$ PAPS ECS, alors la fonction de densité des temps de service pour un client positif typique est :

$$f_S(s) = \begin{cases} \pi(0)\dfrac{\lambda^-}{\lambda^+ - \lambda^-} & \text{pour } t = 0, \\ \pi(0)\left[\dfrac{\lambda^+}{\lambda^- + r - \lambda^+} + 1\right](\lambda^- + r)e^{-(\lambda^-+r)s} & \text{pour } t > 0. \end{cases}$$

De même, la fonction de densité du temps d'attente d'un client typique positif devient :

$$f_W(w) = \begin{cases} \pi(0)\dfrac{\lambda^-}{\lambda^+ - \lambda^-} & \text{pour } w = 0, \\ \pi(0)\dfrac{\lambda^- + r}{\lambda^- + r - \lambda^+}\left(1 - e^{-(\lambda^-+r-\lambda^+)w}\right) & \text{pour } w > 0. \end{cases}$$

Ainsi, les résultats obtenus lors des sections précedentes sont tous applicables, tant qu'on ne regarde que les clients positifs qui arrivent dans un système vide ou ne contenant déjà que d'autres clients positifs.

Théorème 2.6 *Les systèmes avec clients négatifs d'Henderson sont quasi-réversibles.*

Preuve : Pour montrer que ces systèmes sont quasi-réversibles, il suffit de montrer que les deux équations de 1.4 ont une solution positive (λ, μ) pour tous les états. Le système d'équations nous donne :

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{k}'} q(\mathbf{k}, \mathbf{k}')1[q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{Q_A}] &= q(\mathbf{k}, \mathbf{k}+1) \qquad \text{pour } \forall \mathbf{k} \\
&= \lambda^+, \\
\sum_{\mathbf{k}} \pi(\mathbf{k}) q(\mathbf{k}, \mathbf{k}')1[(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{D}'] &= q(\mathbf{k}'+1, \mathbf{k}')\pi(\mathbf{k}'+1) \qquad \text{pour } \mathbf{k}' \geq 0, \\
&= (\lambda^- + r)\pi(\mathbf{k}'+1), \\
&= (\lambda^- + r) q_+ \pi(\mathbf{k}'), \\
&= \lambda^+ \pi(\mathbf{k}'), \\
&= q(\mathbf{k}'+1, \mathbf{k}')\pi(\mathbf{k}'+1) \qquad \text{pour } \mathbf{k}' < 0, \\
&= (\lambda^-)\pi(\mathbf{k}'+1), \\
&= (\lambda^-) q_-^{-1} \pi(\mathbf{k}'), \\
&= \lambda^+ \pi(\mathbf{k}').
\end{aligned}
$$

Donc ce système est quasi-réversible, en prenant $\lambda = \lambda^+$ et $\mu = \lambda^+$. $\diamondsuit$

Chapitre 3

Systèmes avec clients opposés

Les systèmes traités dans la littérature ont tous quelque chose en commun : les clients négatifs ne peuvent être servis. Ils sont *passifs*, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent entrer dans un système vide de clients positifs, ou s'ils le peuvent (comme dans les systèmes introduits par Henderson), ils doivent attendre un client positif pour quitter le système. Or, des situations réels de systèmes nous poussent à nous intéresser aux clients négatifs *actifs*, c'est-à-dire des clients négatifs qui peuvent s'accumuler et être servis. Par exemple, considérons un système de neurones qui subi l'arrivée de doses de stimulant et de tranquilisant. Ces deux substances lorsque seules dans un neurone voient leurs effets diminués dans le temps. Si une d'elle veut entrer dans le système alors que l'autre est présente, elle diminuera son effet.

Ainsi, on peut généraliser le système de Henderson [7] en utilisant des temps de service aléatoires ou déterministes pour les clients négatifs. Nous sommes alors en présence de deux sources d'arrivées pour chaque serveur avec des clients qui *compétionnent* pour son utilisation. La notion de client négatif devient alors relative par rapport à la source observée. Nous appelleront ces clients des clients *opposés*. En effet, chaque source fournit des clients négatifs pour l'autre source.

Pour spécifier que nous sommes face à un système de ce type, on ajoutera un *opp* dans l'abbréviation du système.

Dans un premier temps, nous allons examiner un système avec un seul serveur. Les clients proviennent d'une source positive et d'une source négative, chacune suivant un processus de Poisson respectivement de paramètre Λ et λ. À son arrivée, le client joint la fin de la file d'attente. Si la file est vide, il commence son service. Si le client qui se fait servir provient de la même source, le nouveau client reste dans la file. Sinon, le nouveau client quitte le système avec le client en service. Ainsi, la file d'attente ne peut contenir que des clients de même source. Les temps de service des clients positifs suivent une loi exponentielle de paramètre R alors que les temps de service des clients négatifs sont aussi exponentielles mais de paramètre r. La longueur de la file d'attente, comprenant le client en service, sera noté par k, avec $k \in \mathcal{Z}$. Le signe de k indique la provenance des clients présents dans le système, c'est-à-dire que si $k < 0$, il n'y a que des clients négatifs et si $k > 0$, il n'y a que des positifs. De plus, d'une manière similaire aux systèmes du chapître 2, on définit $q_- = \lambda/(\Lambda + r)$ et $q_+ = \Lambda/(\lambda + R)$, soit les ratios de l'intensité des arrivées sur l'intensité des départs pour les deux types de clients.

Théorème 3.1 *Un système avec clients opposés et à un serveur avec $q_+ < 1$ et $q_- < 1$, possède une distribution stationnaire unique de forme produit qui est la suivante :*

$$\begin{aligned}
\pi(0) &= \left(1 + \frac{q_-}{1-q_-} + \frac{q_+}{1-q_+}\right)^{-1}, \\
\pi(k) &= q_+^k \pi(0), \qquad \forall k \in \mathcal{Z}^+, \\
\pi(k) &= q_-^{-k} \pi(0), \qquad \forall k \in \mathcal{Z}^-.
\end{aligned}$$

Preuve : La distribution est unique pour la même raison que pour le théorème 2.1. Pour trouver une distribution stationnaire $\pi(k)$, si elle existe, nous pouvons utiliser la même méthode que pour les systèmes précédents, soit de balancer l'intensité des arrivées et des départs pour chaque état puis de normaliser afin que nous ayons une distribution. Nous obtenons ainsi le système suivant d'équations :

$$\begin{aligned}
(\Lambda+\lambda)\pi(0) &= (R+\lambda)\pi(1)+(r+\Lambda)\pi(-1), \\
(\Lambda+\lambda+R)\pi(k) &= (R+\lambda)\pi(k+1)+(\Lambda)\pi(k-1), \qquad \forall k \geq 1, \\
(\Lambda+\lambda+r)\pi(k) &= (r+\Lambda)\pi(k-1)+(\lambda)\pi(k+1), \qquad \forall k \leq -1, \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi(k) &= 1.
\end{aligned}$$

Ce système ressemble à celui où il n'y a que des clients positifs qui peuvent s'accumuler. En se basant sur cette constatation et sur la distribution stationnaire de ce genre de système, nous obtenons pour $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
\pi(k) &= aq_-^{-k}, \qquad \forall k \leq -1, \\
\pi(k) &= bq_+^{k}, \qquad \forall k \geq 1,
\end{aligned}$$

où a et b sont deux constantes qui dépendent de $\pi(0)$.

Ensuite nous constatons que pour $\forall a, b$ nous avons une solution pour toutes les équations reliant $\pi(k)$ à $\pi(k-1)$ et $\pi(k+1)$ et ce pour $\forall k \notin \{-1, 0, 1\}$. En utilisant les deux équations reliant $\pi(-1)$ à $\pi(0)$ et $\pi(-2)$ et $\pi(1)$ à $\pi(0)$ et $\pi(2)$, nous trouvons la relation reliant a et b avec $\pi(0)$, soit :

$$a = \pi(0), \qquad b = \pi(0).$$

Il ne reste plus que des termes en $\pi(0)$ et deux équations à vérifier, soit :

$$(\lambda + r)\pi(1) + (\Lambda + R)\pi(-1) \;=\; (\Lambda+\lambda)\pi(0),$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \pi(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \pi(k) + \pi(0) \;=\; 1.$$

En substituant les valeurs de $\pi(1)$ et de $\pi(-1)$ dans la première équation, nous obtenons $\pi(0) = \pi(0)$, donc les $\pi(k)$ sont les solutions au système d'équations reliant trois états voisins entre eux.

Pour trouver la valeur de $\pi(0)$, nous utilisons l'équation de normalisation. Ainsi, en substituant chaque $\pi(k)$ par sa valeur en terme de $\pi(0)$, la somme devient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{-1} \pi(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \pi(k) + \pi(0) &= 1, \\
\sum_{k=-\infty}^{-1} \pi(0) \left(\frac{\lambda}{\Lambda + r}\right)^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \pi(0) \left(\frac{\Lambda}{\lambda + R}\right)^{k} + \pi(0) &= 1, \\
\pi(0) \left(1 + \frac{q_-}{1 - q_-} + \frac{q_+}{1 - q_+}\right) &= 1, \\
\Rightarrow \left(1 + \frac{q_-}{1 - q_-} + \frac{q_+}{1 - q_+}\right)^{-1} &= \pi(0)
\end{aligned}$$

si et seulement si $q_- < 1$ et $q_+ < 1$ pour qu'il y ait convergence des deux sommes partielles. Sinon, le système explose dans la direction de celui qui ne respecte pas la condition (par exemple, si $q_+ > 1$, alors $\pi(k) = 0, \forall k$, sauf si $k \to \infty$ dans quel cas $\lim_{k\to\infty} \pi(k) = 1$). Il ne peut y avoir qu'un q plus grand que 1. Si un des q est égale à 1, alors le système peut exploser avec une probabilité non nulle dans la direction de ce q. Par exemple, si $q_+ = 1$ alors $\lim_{k\to\infty} \pi(k) > 0$. Si $q_+ = q_- = 1$ (ce qui n'est possible que si les intensités moyennes des temps de service sont 0), alors le système est récurrent nul et peut exploser dans un sens comme d'en l'autre avec une probabilité non nulle, mais égale pour les deux cas ($\lim_{k\to-\infty} \pi(k) = \lim_{k\to\infty} \pi(k) > 0$).

Tous les $\pi(k)$ sont positifs car, q_- et $q_+ \in (0, 1)$ par la condition imposée pour la convergence des deux sommations partielles et par les définitions des paramètres Λ, λ, R et r qui sont strictement positifs. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\pi(0) &= \left(1 + \frac{q_-}{1-q_-} + \frac{q_+}{1-q_+}\right)^{-1}, \\
\pi(k) &= q_+^k \pi(0), \qquad \forall k \in \mathcal{Z}^+, \\
\pi(k) &= q_-^{-k} \pi(0), \qquad \forall k \in \mathcal{Z}^-.
\end{aligned}
$$

sous la condition que $q_+ < 1$ et que $q_- < 1$. $\diamondsuit$

Si nous additionnons les probabilités pour tous les $k < 0$ ou pour tous les $k > 0$, nous obtenons la probabilité que lorsqu'un client typique arrive dans le système, le système ne renferme que des clients respectivement négatifs ou positifs. Nous utiliserons le symbole $\pi(-)$ pour spécifier que le système ne contient que des clients négatifs et $\pi(+)$ pour un système n'ayant que des positifs. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\pi(-) &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \pi(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q_-}{1-q_-}\right)^k \pi(0), \\
&= \left(\frac{q_-}{1-q_-}\right)\left(1 + \frac{q_-}{1-q_-} + \frac{q_+}{1-q_+}\right)^{-1}, \\
\pi(+) &= \sum_{k=1}^{\infty} \pi(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q_+}{1-q_+}\right)^k \pi(0), \\
&= \left(\frac{q_+}{1-q_+}\right)\left(1 + \frac{q_-}{1-q_-} + \frac{q_+}{1-q_+}\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Exemple : Soit un système où les clients positifs arrivent et sont servis deux fois plus rapidement que les clients négatifs. La distribution stationnaire, la probabilité que le système ne contienne que des clients négatifs et celle que le système ne contienne que des clients positifs sont :

$$
\begin{aligned}
\pi(0) &= \frac{2}{7}, \\
\pi(k) &= \frac{2}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^k, \qquad \forall k \in \mathcal{Z}^+,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\pi(k) &= \frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{-k}, \qquad \forall k \in \mathcal{Z}^-,\\ \pi(-) &= \frac{1}{7},\\ \pi(+) &= \frac{4}{7}.\end{aligned}$$

Si un des deux temps de services est nul (R ou $r = \infty$), nous obtenons alors la même distribution stationnaire que pour le système $M/M/1/\pm$, ce qui est normal car alors les deux systèmes sont équivalents.

Pour voir le comportement des clients typiques, il est nécessaire de savoir si le prochain client est négatif ou s'il sera positif. La probabilité qu'un nouveau client qui arrive soit positif est de $\Lambda/(\Lambda+\lambda)$ et de $\lambda/(\Lambda+\lambda)$ qu'il soit négatif.

Théorème 3.2 *La fonction de distribution du temps de service d'un client typique est :*

$$1 - [\pi(-)+\pi(0)]\frac{\lambda}{\Lambda+\lambda}e^{-(r+\Lambda)t} -]\pi(+)+\pi(0)]\frac{\Lambda}{\Lambda+\lambda}e^{-(R+\lambda)t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Preuve : Soit T le temps de service réel, S le temps de service potentiel du client typique et A l'intervalle de temps entre le début du service de ce client typique et l'arrivée du prochain client opposé. Alors nous obtenons

$$\begin{aligned}P(T<t) &= P(\min(A,S)<t)\\ &= P(\min(A,S)<t,\ \text{le client est négatif, } k\leq 0)\\ &\quad +P(\min(A,S)<t,\ \text{le client est négatif, } k>0)\\ &\quad +P(\min(A,S)<t,\ \text{le client est positif, } k<0)\\ &\quad +P(\min(A,S)<t,\ \text{le client est positif, } k\geq 0),\\ &= \left[\frac{\lambda}{\Lambda+\lambda}[\pi(-)+\pi(0)]\right] P(\min(A,S)<t|\ \text{client négatif, } k\leq 0)\\ &\quad + \left[\frac{\lambda}{\Lambda+\lambda}\pi(+)\right] P(\min(A,S)<t|\ \text{client positif, } k>0)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \left[\frac{\Lambda}{\Lambda+\lambda}\pi(-)\right] P(\min(A,S) < t|\text{ client positif, } k < 0) \\
& + \left[\frac{\Lambda}{\Lambda+\lambda}[\pi(+)+\pi(0)]\right] P(\min(A,S) < t|\text{ client positif, } k \geq 0), \\
= \; & \left[\frac{\lambda}{\Lambda+\lambda}[\pi(-)+\pi(0)]\right]\left(1-e^{-(\Lambda+r)t}\right) \\
& + \left[\frac{\lambda}{\Lambda+\lambda}\pi(+)\right] + \left[\frac{\Lambda}{\Lambda+\lambda}\pi(-)\right] \\
& + \left[\frac{\Lambda}{\Lambda+\lambda}[\pi(+)+\pi(0)]\right]\left(1-e^{-(\lambda+R)t}\right), \\
= \; & \pi(+)+\pi(-)+\pi(0) - [\pi(-)+\pi(0)]\frac{\lambda}{\Lambda+\lambda}e^{-(r+\Lambda)t} \\
& -[\pi(+)+\pi(0)]\frac{\Lambda}{\Lambda+\lambda}e^{-(R+\lambda)t}, \\
= \; & 1-[\pi(-)+\pi(0)]\frac{\lambda}{\Lambda+\lambda}e^{-(r+\Lambda)t} - [\pi(+)+\pi(0)]\frac{\Lambda}{\Lambda+\lambda}e^{-(R+\lambda)t},
\end{aligned}
$$

d'où la fonction de densité

$$
f_T(t) = \begin{cases}
[\pi(-)+\pi(0)]\dfrac{\lambda(r+\Lambda)}{\Lambda+\lambda}e^{-(r+\Lambda)t} & \\
\qquad +[\pi(+)+\pi(0)]\dfrac{\Lambda(R+\lambda)}{\Lambda+\lambda}e^{-(R+\lambda)t} & \text{pour } \; t > 0, \\
\dfrac{\lambda}{\Lambda+\lambda}\pi(+) + \dfrac{\Lambda}{\Lambda+\lambda}\pi(-) & \text{pour } \; t = 0.
\end{cases}
$$

$\diamondsuit$

Comme nous pouvons le constater, la probabilité que le temps de service soit nul est supérieur à 0, ce qui correspond au cas où le client arrive et rencontre une file d'attente comportant un ou plusieurs clients opposés. La fonction de densité consiste en fait de la somme de deux fonctions de densié exponentielle, pondérées pour les temps strictement positifs et d'une constante pour $t = 0$.

Pour voir le lien avec les systèmes $\pm$, il suffit de faire tendre R ou r vers l'infini. Par exemple, si $r \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} F_T(t) \; &= \; 1-[\pi(-)+\pi(0)]\frac{\lambda}{\Lambda+\lambda}e^{-(r+\Lambda)t} - [\pi(+)+\pi(0)]\frac{\Lambda}{\Lambda+\lambda}e^{-(R+\lambda)t}, \\
&= \; 1-[0+\pi(0)]\times 0 - [\pi(+)+\pi(0)]\frac{\Lambda}{\Lambda+\lambda}e^{-(R+\lambda)t}, \\
&= \; 1-[\pi(+)+\pi(0)]\frac{\Lambda}{\Lambda+\lambda}e^{-(R+\lambda)t},
\end{aligned}
$$

$$= \quad 1 - \frac{\Lambda}{\Lambda + \lambda} e^{-(R+\lambda)t}.$$

Cette fonction n'est différente de celle obtenu pour un système avec clients positifs-négatifs que par le terme $\frac{\Lambda}{\Lambda+\lambda}$, terme qui représente la probabilité que le client que nous consiérons soit un client “positif” alors que pour l'autre système, les clients qui peuvent recevoir du service ne sont strictement que des clients positifs.

Théorème 3.3 *Les systèmes avec clients opposés sont quasi-réversibles si l'intensité des temps de services des clients que nous considérons comme positifs est nulle.*

Preuve : Pour les systèmes avec des clients négatifs de Gelenbe ou d'Henderson, la notion de clients positifs et négatifs est bien définie. Dans le système d'équations (1.4), les arrivées sont celles des clients positifs et les départs sont causés par les fins de service et les arrivées des clients négatifs. Par contre, avec les clients opposés, nous ne pouvons plus distigués les clients positifs des négatifs. Ainsi, pour montrer que les systèmes avec clients opposés sont quasi-réversibles, il suffit de vérifier les deux équations (1.4) pour un couple positif (λ, μ) en prenant tour à tour un des deux types de clients opposés comme client positif et l'autre comme client négatif. Le système d'équations nous donne avec le type positif comme client positif :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{k}'} q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[q(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{Q_A}] &= q(\mathbf{k},\mathbf{k}+1) \qquad \text{pour } \mathbf{k} \geq 0,\\
&= \lambda^+,\\
&= q(\mathbf{k},\mathbf{k}+1) \qquad \text{pour } \mathbf{k} < 0,\\
&= \lambda^+ + R,\\
\sum_{\mathbf{k}} \pi(\mathbf{k}) q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{D}'] &= q(\mathbf{k}'+1,\mathbf{k}')\pi(\mathbf{k}'+1) \qquad \text{pour } \mathbf{k}' > 0,\\
&= (\lambda^- + r) q_+ \pi(\mathbf{k}'),\\
&= \lambda^+ \pi(\mathbf{k}'),\\
&= q(\mathbf{k}'+1,\mathbf{k}')\pi(\mathbf{k}'+1) \qquad \text{pour } \mathbf{k}' \leq 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda^- q_-^{-1}\pi(\mathbf{k}'), \\
&= (\lambda^+ + R)\pi(\mathbf{k}').
\end{aligned}
$$

Ce système a une solution unique (λ, μ) pour tous les états que si $R = 0$, $\lambda = \lambda^+$ et $\mu = \lambda^+$. En prennant les clients négatifs comme positifs, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{k}'} q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[q(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{Q_A}] &= q(\mathbf{k},\mathbf{k}-1) \qquad \text{pour } \mathbf{k} \leq 0, \\
&= \lambda^-, \\
&= q(\mathbf{k},\mathbf{k}-1) \qquad \text{pour } \mathbf{k} > 0, \\
&= \lambda^- + r, \\
\sum_{\mathbf{k}} \pi(\mathbf{k})q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{D}'] &= q(\mathbf{k}'-1,\mathbf{k}')\pi(\mathbf{k}'-1) \qquad \text{pour } \mathbf{k}' < 0, \\
&= (\lambda^+ + R)q_-\pi(\mathbf{k}'), \\
&= \lambda^-\pi(\mathbf{k}'), \\
&= q(\mathbf{k}'-1,\mathbf{k}')\pi(\mathbf{k}'-1) \qquad \text{pour } \mathbf{k}' \geq 0, \\
&= \lambda^+ q_+^{-1}\pi(\mathbf{k}'), \\
&= (\lambda^- + r)\pi(\mathbf{k}').
\end{aligned}
$$

Ce système a une solution unique pour tous les états que si $r = 0$, $\lambda = \lambda^-$ et $\mu = lambda^-$. Ainsi, les systèmes avec clients opposés sont quasi-réversibles si l'intensité des temps de services des clients considérés comme étant les clients positifs est nulle, ce qui nous ramène au système d'Henderson. $\diamondsuit$

Théorème 3.4 *Les systèmes avec clients négatifs ne sont pas quasi-réversibles si nous prennons comme définition de client positif un client qui arrive dans une file d'attente vide ou qui est constituée de clients similaires.*

Preuve : La notion de client positif est ici différente de celle utilisée ci-dessus, ce qui changera la solution au système (1.4). En effet, les équations deviennent :

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{k}'} q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[q(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{Q_A}] &= q(\mathbf{k},\mathbf{k}+1) \qquad \text{pour } \mathbf{k} > 0, \\
&= \lambda^+, \\
&= q(\mathbf{k},\mathbf{k}-1) \qquad \text{pour } \mathbf{k} < 0, \\
&= \lambda^-, \\
&= q(0,1) + q(0,-1) \qquad \text{pour } \mathbf{k} = 0, \\
&= \lambda^+ + \lambda^-, \\
\sum_{\mathbf{k}} \pi(\mathbf{k}) q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{D}'] &= q(\mathbf{k}'+1,\mathbf{k}')\pi(\mathbf{k}'+1) \qquad \text{pour } \mathbf{k}' > 0, \\
&= (\lambda^- + r)q_+\pi(\mathbf{k}'), \\
&= \lambda^+\pi(\mathbf{k}'), \\
&= q(\mathbf{k}'-1,\mathbf{k}')\pi(\mathbf{k}'-1) \qquad \text{pour } \mathbf{k}' < 0, \\
&= (\lambda^+ + R)q_-\pi(\mathbf{k}'), \\
&= \lambda^-\pi(\mathbf{k}'), \\
&= q(1,0)\pi(1) + q(-1,0)\pi(-1) \qquad \text{pour } \mathbf{k}' = 0, \\
&= (\lambda^+ + \lambda^-)\pi(0)
\end{aligned}
$$

Il n'existe pas de couple positif (λ, μ) qui satisfont ces équations pour tous les états simultanément. De par la forme de la solution á l'équation (1.4), nous pouvons constater que les systèmes avec clients opposés à un serveur sont quasi-réversibles tant que le serveur ne s'est pas vidé. $\diamondsuit$

À la lumiére du théorème 3.4, nous introduisons la quasi-réversibilité au sens strict :

Un système à un serveur est quasi-réversible au sens strict si pour $\forall \mathbf{k} > 0$ nous avons un couple positif (λ, μ) et pour $\forall \mathbf{k} < 0$ un couple positif $(\lambda^{'}, \mu^{'})$ qui satisfont :

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{k}'} q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[q(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{Q_A}] &= \lambda, \qquad \forall \mathbf{k} > 0, \\ \sum_{\mathbf{k}} \pi(\mathbf{k}) q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{D}] &= \mu\pi(\mathbf{k}'), \qquad \forall \mathbf{k}' > 0.\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{k}'} q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[q(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{Q_A}] &= \lambda^{'}, \qquad \forall \mathbf{k} < 0, \\ \sum_{\mathbf{k}} \pi(\mathbf{k}) q(\mathbf{k},\mathbf{k}')1[(\mathbf{k},\mathbf{k}') \in \mathbf{D}] &= \mu^{'}\pi(\mathbf{k}'), \qquad \forall \mathbf{k}' < 0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Un système quasi-réversible au sens général l'est aussi au sens strict en prennant $\lambda = \lambda'$ et $\mu = \mu'$.

Théorème 3.5 *Les systèmes avec clients opposés sont quasi-réversibles au sens strict.*

Preuve : Si nous nous intéressons qu'aux clients positifs pour vérifier la quasi-réversibilité au sens strict, nous devons voir si au moins les couples positifs(λ, μ) pour $\mathbf{k} > 0$ et (λ', μ') pour $\mathbf{k} < 0$ satisfont au premier ensemble d'équations du théorème 3.3. En prennant $\lambda = \mu = \lambda^+$ et $\lambda' = \mu' = (\lambda^+ + R)$, nous constatons que nous avons la quasi-réversibilité au sens strict.

Si nous ne prennons maintenant que les clients négatifs comme étant les véritables clients du système, nous devons voir si au moins les couples (λ, μ) pour $\mathbf{k} > 0$ et (λ', μ') pour $\mathbf{k} < 0$ satisfont au deuxième ensemble d'équations du théorème 3.3.

Il nous reste ainsi que les clients positifs définis au théorème 3.4. En regardant les équations obtenues à ce théorème, nous pouvons constater qu'en prennant $\lambda = \mu = \lambda^+$ pour $\mathbf{k} > 0$ et $\lambda' = \mu' = \lambda^-$ pour $\mathbf{k} < 0$, nous avons respectivement une solution aux équations (3.1) et (3.2). Ainsi, les systèmes avec clients opposés sont quasi-réversible au sens strict. $\diamondsuit$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons résumé l'état des connaissances sur les systèmes à un nœud et un serveur ayant des clients négatifs. Trois types de clients négatifs ont été traités, soit celui de Gelenbe, celui d'Henderson et un nouveau type, soit les clients opposés. Diverses politiques de service et d'élimination ont été aussi abordées. Nous avons démontré que la distribution stationnaire est toujours de la forme produit, peut importe les politiques ou la définition des clients utilisées. Nous avons aussi établi les fonctions de temps de service et de séjour de même qu'étudié la quasi-réversibilité de systèmes ayant pour politiques PAPS et ECS.

Les systèmes traités dans ce mémoire ne considère qu'une classe de client. Certains auteurs se sont penchés sur des systèmes où les clients peuvent appartenir à une certaine classe $c \in C$. Ces clients peuvent posséder leurs propres intensité d'arrivée, intensité de service et leurs propres probabilités de transition d'un nœud à un autre. Pour ces clients multiclasses, l'indice c est ajouté à leurs différentes caractéristiques pour spécifier à quelle classe ils appartiennent. Dans un récent article [3], la notion de classe a été adaptée aux clients négatifs. L'efficacité de ces clients négatifs dépend de leur classe, de la classe du client positif à éliminer et du nœud où les clients sont. Pour des systèmes $M/G/1/\infty/\pm$ avec une politique de service PAPS, DAPS et PS et une politique d'élimination EAC, la distribution stationnaire reste de forme produit.

Bibliographie

[1] Jacob Willem Cohen. *The Single Server Queue.* Édition révisée. North-Holland, Amsterdam, 1982.

[2] Richard G. Cooke. *Infinite Matrices and Sequence Spaces.* McMillan and co., London, 1950.

[3] Jean-Michel Fourneau, Erol Gelenbe et Rina Suros. G-networks with multiple classes of negative and positive customers *Theor. Comp. Sci.*, **155**, 141–156, 1996.

[4] Erol Gelenbe. Product-form queueing networks with negative and positive arrivals. *J. Appl. Probab.*, **28**, 656–663, 1991.

[5] Erol Gelenbe, Peter Glynn et Karl Sigman. Queues with negative arrivals. *J. Appl. Probab.*, **28**, 245–250, 1991.

[6] E. Gelenbe et R. Schassberger. Stability of G-networks. *Probab. Eng. Inform. Sci.*, **6**, 271–276, 1992.

[7] W. Henderson. Queueing networks with negative customers and negative queue lenths. *J. App. Probab.*, **30**, 931–942, 1993.

[8] Peter G. Harrison et Edwige Pitel. Sojourn times in single-server queues with negatives customers. *J. Appl. Probab.*, **30**, 943–963, 1993.

[9] Peter G. Harrison et Edwige Pitel. The $M/G/1$ queue with negative customers. *Adv. Appl. Probab.*, **28**, 540–566, 1996.

[10] Lester Lipsky. *Queueing Theory, A Linear Algebraic Approach.* Macmillan, New York, 1992.

[11] Sheldon M. Ross. *Introduction to Probability Models.* 6e édition. Academic Press, San Diego, 1998.

[12] Jean Walrand. *An Introduction to Queueing Networks.* Prentice-Hall, New Jersey, 1988.