

École des Hautes Études Commerciales de Montréal
Affiliée à l'Université de Montréal

Tarification de Produits Dérivés de Variance :
Analyse dans le Contexte du Modèle NGARCH

David Turcotte

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Septembre 2003
©David Turcotte, 2003

Table des matières

Abstract	vi
Sommaire	vii
Remerciements	viii
1 Introduction	2
2 Revue de la littérature	4
2.1 Tarification de produits dérivés de volatilité et de variance	4
2.1.1 Approches basées sur la réplcation	5
2.1.2 Approches basées sur les modèles d'équilibre	6
2.1.3 Approche de Heston & Nandi (2000)	7
2.2 Modèles GARCH	8
2.2.1 Application à la tarification de produits dérivés	8
2.3 Développement en série de Edgeworth	9
2.3.1 Jarrow & Rudd (1982)	9
2.3.2 Duan, Gauthier & Simonato (1999)	10
2.4 Fonctions de densité de Johnson	11
2.4.1 Hill, Hill & Holder (1976)	11
2.4.2 Posner & Milevsky (1998)	11
2.5 Contribution de ce mémoire	12
3 Modèle de marché NGARCH	13
3.1 Spécification sous la mesure réelle (P)	13
3.2 Spécification sous la mesure localement neutre au risque (Q)	13
3.3 Variance conditionnelle future	14
3.4 Moments non-centrés de la variance conditionnelle future	15
3.5 Conditions assurant la convergence des moments	16
4 Approximations Analytiques	17
4.1 Fonctions de densité de Johnson	17
4.1.1 Approximation basée sur le système S_U	17

4.1.2	Approximation basée sur le système S_L	18
4.2	Développement en série de Edgeworth généralisé	19
4.2.1	Approximation basée sur la distribution lognormale	19
4.2.2	Approximation basée sur le système S_L	20
5	Étude numérique	21
5.1	Reproduction des caractéristiques de la distribution de h_{t+s}	21
5.2	Validation dans un contexte de faible et forte persistance	22
5.3	Validation dans un cadre stochastique	23
5.4	Validation pour les paramètres estimés de l'indice S&P500	25
6	Exemple d'application	26
6.1	Description des données	26
6.2	Estimation des paramètres du processus NGARCH	26
6.3	Contrat à terme sur la variance du rendement de l'indice S&P TSX	27
6.4	Option d'achat sur la variance du rendement de la devise CAD-USD	27
6.5	Analyse de sensibilité	28
7	Généralisation de la méthodologie à d'autres modèles GARCH	30
8	Conclusion	31
A	Expressions reliées à la variance conditionnelle future	32
A.1	Expression de h_{t+s}	32
A.2	Moments non-centrés d'ordre entier de h_{t+s}	32
A.2.1	Expression de $E_t^Q [h_{t+s}^n]$	33
A.2.2	Expression de $\nu_k = E_t^Q [Y_{t+s}^k]$	33
A.2.3	Expression de $\eta_j = E_t^Q [(\epsilon_{t+s} - (\theta + \lambda))^{2j}]$	34
A.2.4	Expression de $E_t^Q [\epsilon_{t+s}^{2l}]$	34
A.3	Conditions assurant la convergence des moments non-centrés de h_{t+s}	35
A.4	Expression des moments non-centrés de h_{t+s} sous forme matricielle	36
B	Expressions reliées aux fonctions de densité de Johnson	37
B.1	Système non-borné S_U	37

B.1.1	Fonction de densité du système S_U	37
B.1.2	Moments non-centrés du système S_U	38
B.2	Système lognormale S_L	38
B.2.1	Fonction de densité du système S_L	39
B.2.2	Moments non-centrés du système S_L	40
C	Approximations analytiques basées sur les fonctions de densité de Johnson	41
C.1	Valeur d'une option d'achat européenne pour le système S_U	41
C.1.1	Résolution de l'intégrale $\int_{-\infty}^K (y - K) f_{S_U}(y) dy$	42
C.1.2	Résolution de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\kappa} n(z)(e^{\frac{\kappa}{a}} - e^{\frac{z}{a}}) dz$	43
C.1.3	Résolution de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\kappa} n(z)(e^{-\frac{\kappa}{a}} - e^{-\frac{z}{a}}) dz$	43
C.2	Valeur d'une option d'achat européenne pour le système S_L	44
C.2.1	Résolution de l'intégrale $\int_0^K (y - K) f_{S_L}(y) dy$	45
D	Expressions reliées au développement en série de Edgeworth généralisé	47
D.1	Approximation d'une fonction de densité par un développement en série de Edgeworth généralisé	47
D.1.1	Expression des cumulants κ_i d'une variable aléatoire	48
D.2	Développement en série de Edgeworth généralisé basé sur la distribution lognormale	48
D.2.1	Paramètres de la distribution lognormale	48
D.2.2	Expression des cumulants κ_i associés à la distribution lognormale	49
D.3	Développement en série de Edgeworth généralisé basé sur le système f_{S_L}	50
E	Approximations analytiques basées sur le développement en série de Edgeworth généralisé	51
E.1	Approximation analytique basée sur la fonction f_{E_L}	51
E.1.1	Résolution de l'intégrale $\int_K^{\infty} (y - K) f_L(y) dy$	52
E.1.2	Résolution de l'intégrale $\int_K^{\infty} (y - K) \frac{d^i f_L(y)}{dy^i} dy$	53
E.2	Approximation analytique basée sur la fonction $f_{E_{S_L}}$	54
F	Fonction de vraisemblance associée au processus NGARCH	55
G	Programmes Matlab	56

Liste des tableaux

1	Validation de l'expression analytique pour $E_t[h_{t+s}]$ et $E_t[h_{t+s}^2]$	68
2	Validation de l'expression analytique pour $E_t[h_{t+s}^3]$ et $E_t[h_{t+s}^4]$	69
3	Reproduction de $E_t[h_{t+s}^3]$ et $E_t[h_{t+s}^4]$	70
4	Validation des approximations analytiques pour une option d'achat européenne dans un contexte de faible persistance	71
5	Validation des approximations analytiques pour une option d'achat européenne dans un contexte de forte persistance	72
6	Validation de l'approximation analytique S_L pour les paramètres de l'indice S&P500	73
7	Estimation des paramètres du processus NGARCH.	74
8	Évaluation des constantes critiques liées au processus NGARCH.	74

Table des figures

1	Reproduction de la fonction de densité de h_{t+s} dans un contexte de faible persistance	75
2	Reproduction de la fonction de répartition de h_{t+s} dans un contexte de faible persistance	76
3	Reproduction de la fonction de densité de h_{t+s} dans un contexte de forte persistance	77
4	Reproduction de la fonction de répartition de h_{t+s} dans un contexte de forte persistance	78
5	Histogramme des erreurs relatives d'évaluation par l'approximation S_L	79
6	Analyse de sensibilité de C_{S_L} par rapport à h_{t+1}	80
7	Analyse de sensibilité de C_{S_L} par rapport à s	81

Abstract

The pricing of a variance option, a derivative contract whose underlying is the variance of an asset's return over a given period, and the GARCH option pricing theory have both been developed recently in the literature. In the former case, the proposed approaches often lack flexibility and are difficult to implement. In the latter case, to circumvent the numerical difficulties associated with the GARCH option pricing models, Duan, Gauthier & Simonato (1999) have developed an analytical approximation based on the generalized Edgeworth expansion. Two classes of analytical approximations for computing the value of a European variance option in the GARCH framework are presented. The first, an extension of Duan, Gauthier & Simonato (1999), is based on the generalized Edgeworth expansion of the conditional variance's risk-neutral density function while the latter is similar to that of Posner & Milevsky (1998) to use Johnson's densities.

The analytical approximation based on the lognormal system of the Johnson densities family is found to be the most accurate approximation developed in this paper. However, the precision of the approximation is reduced for deep out of the money options when the conditional variance dynamic of the NGARCH process displays a high level of persistence or almost no variability. When the dynamic of the conditional variance's moments displays an explosive behavior, the precision of the approximation is generally good except for the case of long maturity options.

The numerical analysis performed also suggests that the error term associated with the generalized Edgeworth expansion has a critical impact when the skewness and kurtosis to be reproduced are far apart from those of the approximative distribution used in the expansion or even for small differences. Thus, the Edgeworth analytical approximation based on a lognormal distribution, generally used in practice, could be replaced by a more flexible approximation based on the Johnson density function family.

The proposed methodology can be easily adapted to other GARCH processes and generalized to the case of a volatility option with the EGARCH process for which analytical expressions are available for fractional moments.

Sommaire

L'évaluation d'une option dont le sous-jacent est la variance du rendement d'un actif financier ainsi que la tarification de titres dérivés à l'aide des modèles de la famille GARCH sont deux sujets récents dans la littérature financière. Dans le premier cas, les approches proposées sont limitées par un manque de flexibilité et les difficultés associées à leur mise en application. Dans le second cas, afin de contourner les difficultés liées à l'implantation des modèles de tarification d'options de la famille GARCH, Duan, Gauthier & Simonato (1999) ont développé une approximation analytique basée sur un développement en série de Edgeworth généralisé. Ce mémoire combine ces deux avenues en proposant deux classes d'approximations analytiques permettant d'évaluer une option européenne portant sur la variance dans le contexte d'un modèle de marché GARCH. La première, à l'instar de celle proposée par Duan, Gauthier & Simonato (1999), repose sur un développement en série de Edgeworth généralisé de la fonction de densité de la variance conditionnelle du rendement sous la mesure neutre au risque. La seconde approche est basée sur les fonctions de densité de Johnson telles qu'utilisées pour la tarification de produits dérivés par Posner & Milevsky (1998).

L'approximation analytique basée sur le système lognormal des fonctions de densité de Johnson offre la meilleure précision parmi les approximations analytiques développées. La qualité de l'approximation est cependant moindre lorsque l'option d'achat à évaluer est hors-jeu et que la dynamique de la variance conditionnelle du modèle NGARCH démontre un fort niveau de persistance. Lorsque la dynamique des moments de la variance n'est pas stationnaire, la précision de l'approximation est généralement bonne à l'exception du cas des options de longues échéances.

L'analyse numérique permet également de constater que le terme d'erreur lié au développement en série de Edgeworth généralisé est non négligeable lorsque le niveau des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement à reproduire est éloigné de ceux de la distribution approximative utilisée dans le développement en série. Par conséquent, l'approximation analytique basée sur le développement en série de Edgeworth généralisé autour d'une distribution lognormale, fréquemment utilisée en pratique, pourrait être remplacée par une des approches plus flexible présentées dans ce mémoire.

La méthodologie proposée peut facilement être adaptée à d'autres modèles GARCH et généralisée au cas d'options européennes portant sur la volatilité avec le processus EGARCH pour lequel des expressions analytiques pour les moments d'ordre fractionnaire existent.

Remerciements

Je tiens à remercier Geneviève Gauthier ainsi que Bruno Rémillard pour leur support tant sur le plan académique que financier ainsi que pour leur grande disponibilité. Vous m'avez permis de développer la confiance et d'acquérir les outils nécessaires pour rédiger ce mémoire et évoluer dans le milieu stimulant de l'ingénierie financière.

La réalisation de ce projet n'aurait pas été possible sans le soutien, les encouragements et la patience de ma conjointe, Julie. J'espère être autant disponible pour toi maintenant qu'à ton tour, tu amorces un projet aussi ambitieux.

Je voudrais également remercier mes parents sans qui je n'aurais jamais développé la curiosité, la rigueur et la persévérance indispensables à la réalisation de tout projet d'envergure. À ma soeur, merci de m'avoir fait réaliser que c'était possible, tu as toujours su ouvrir le chemin pour moi. À tous mes proches, le fait d'entreprendre un tel projet a considérablement limité ma présence auprès de vous et je tiens à vous remercier pour votre compréhension ainsi que pour votre patience.

Finalement, le support financier de l'Institut de Finance Mathématique de Montréal a grandement facilité mes travaux de recherche.

By being able to buy and sell volatility, investors would now be able to manage their risk in two dimensions - price risk and volatility risk - an opportunity previously out of reach for all but the large and sophisticated options user. - Grübichler & Longstaff (1996)

1 Introduction

Depuis 1998, l'intérêt envers une gamme de produits financiers offrant une exposition aux variations des niveaux de volatilité du rendement des actifs financiers s'est grandement accru. Les événements ayant mené à la débandade du fond d'allocation tactique Long Term Capital Management ont entraîné des mouvements importants des niveaux de volatilité ayant d'importantes conséquences pour tous les investisseurs, particulièrement ceux ayant des positions dans les produits dérivés. Malgré ces événements, les outils disponibles aux investisseurs pour la couverture des risques de volatilité demeurent encore aujourd'hui limités. Une des raisons pouvant expliquer cet état de fait est l'absence d'un cadre de tarification et de couverture simple, flexible et efficient facilitant l'introduction des produits dérivés de volatilité comme instrument de gestion des risques.

Afin de combler le vide entre les besoins des investisseurs et les outils théoriques permettant l'évaluation et la couverture d'instruments financiers permettant d'y répondre, plusieurs auteurs (Whaley (1997), Neuberger (1994), Grünbichler & Longstaff (1996), Carr & Madan (1997) et Heston & Nandi (2000)) ont abordé cette problématique.

Parmi les travaux publiés, ceux de Heston & Nandi (2000) semblent présenter le plus grand potentiel. Ces derniers ont développé une solution analytique pour la tarification d'une option d'achat portant sur la variance dans le contexte d'un modèle GARCH. L'approche proposée est riche dans le sens qu'elle est adaptée au cas de l'évaluation de titres non-linéaires, qu'elle propose une stratégie de couverture et repose sur une famille de modèles de marché bien acceptés tant dans la littérature financière que dans la pratique. Cependant, les solutions obtenues par Heston & Nandi (2000) ne peuvent être généralisées à l'évaluation d'une option portant sur la volatilité et sont limitées à un seul des modèles de la famille GARCH. Ainsi, bien qu'intéressant, le cadre de tarification proposé par Heston & Nandi (2000) est contraint par son manque de flexibilité.

L'objectif de ce mémoire est en premier lieu de proposer un cadre de tarification flexible et efficient permettant d'évaluer tant des options européennes que des contrats à terme dont la variable sous-jacente est la variance du rendement d'un actif¹. Un deuxième objectif associé à ce mémoire est la comparaison de deux méthodes proposées dans la littérature permettant la tarification de

¹Le cadre de tarification peut être adapté au cas des produits dérivés de volatilité tel que précisé à la section 7.

titres contingents européens dans un contexte où les moments d'ordre supérieur de la distribution de l'actif sous-jacent sont considérés. Pour ce faire, nous proposons deux classes d'approximations analytiques permettant de résoudre le problème d'évaluation de produits dérivés de variance et ce, dans le contexte du modèle GARCH proposé par Engle & Ng (1993).

La première approximation analytique est basée sur un développement en série de Edgeworth généralisé similaire à celui présenté par Jarrow et Rudd (1982) et utilisé par Duan Gauthier & Simonato (1999) pour la tarification d'une option d'achat européenne dans le contexte d'un modèle GARCH. La deuxième approximation analytique fait appel aux fonctions de densité de Johnson telles qu'utilisées par Posner & Milevsky (1998) pour la tarification d'options paniers et asiatiques.

La revue de la littérature est présentée à la section 2. Les caractéristiques du modèle de marché sont étudiées à la section 3. Les approximations analytiques développées sont présentées dans la section 4. Une étude numérique permettant de comparer les diverses approximations analytiques proposées est effectuée à la section 5. Un exemple d'application à une option d'achat et à un contrat à terme portant sur la variance est présenté à la section 6. La section 7 propose les ajustements à apporter aux approximations analytiques pour les adapter à d'autres modèles de la famille GARCH et pour généraliser l'approche à la tarification de titres contingents portant sur la volatilité du rendement d'un actif. Finalement, la conclusion de ce mémoire se retrouve à la section 8.

2 Revue de la littérature

La première section de cette revue de la littérature présente les différents travaux traitant de la tarification de produits dérivés portant sur la variance ou sur la volatilité du rendement d'un actif. Le modèle de marché employé dans ce mémoire étant le modèle NGARCH de Engle & Ng (1993), la famille des modèles GARCH sera présentée en deuxième section. Finalement, les troisièmes et quatrièmes sections aborderont les deux outils sur lesquels sont construites les approximations analytiques développées dans ce mémoire ; soit le développement en série de Edgeworth généralisé et les fonctions de densité de Johnson.

2.1 Tarification de produits dérivés de volatilité et de variance

Selon notre connaissance, Brenner & Galai (1989) furent les premiers à aborder la thématique des produits dérivés de volatilité. Ils présentent, de manière qualitative, différents exemples où un investisseur bénéficierait de l'utilisation de produits dérivés portant sur la volatilité et ce, tant pour des fins de spéculation que de couverture. Dans un même ordre d'idées, Whaley (1993) démontre que les stratégies de couverture du risque de volatilité basées sur l'ajustement dynamique d'un portefeuille d'options pourraient avantageusement être remplacées par l'achat de produits dérivés de volatilité. À l'aide d'un exemple numérique illustrant la position d'un mainteneur de marché d'options, il souligne la complexité, le risque et les coûts associés à l'implantation des stratégies de couverture des variations du niveau de la volatilité à l'aide d'un portefeuille d'options réajusté de façon dynamique pour contrôler conjointement la sensibilité de la position aux variations du niveau de l'actif sous-jacent et aux variations du niveau de volatilité. Finalement, Neuberger (1994) démontre que la principale source de risque résiduelle d'une option couverte contre les risques de variation du prix de l'actif sous-jacent est le risque de volatilité. Par une simulation historique, il conclut qu'il est possible d'améliorer les stratégies de couverture d'options en y incluant des titres dérivés de volatilité.

The existence of an inadequate substitute should not prevent the development of a better instrument. Most instruments used for risk management have developed precisely because they provide a better, cheaper, or more direct way of doing something that could already be done less well using the cash market. - Neuberger (1994)

Ces divers constats empiriques ont motivé le développement d'un cadre théorique permettant la tarification et la couverture des produits dérivés de variance et de volatilité. À ce jour, les approches proposées peuvent être regroupées en deux catégories. La première est basée sur un argument de réplcation statique à partir d'instruments transigés tandis que la seconde repose sur les modèles d'équilibre de marché.

2.1.1 Approches basées sur la réplcation

Les travaux de Carr & Madan (1997) ainsi que de Demeterfi, Derman, Kamal & Zou (1999) proposent l'implantation d'une stratégie dont la valeur à échéance permet de reproduire linéairement la variance réalisée du rendement d'un actif sur un intervalle de temps donné. Le résultat présenté repose sur un principe selon lequel, sous l'existence d'options pour une infinité de prix d'exercices, il est possible de reproduire toute fonction deux fois continûment différentiable de la valeur d'un contrat à terme par un portefeuille statique composé des options et du contrat à terme.

La variance réalisée étant une fonction de la trajectoire du prix, Carr & Madan (1997) établissent la stratégie permettant de créer une exposition à la variance réalisée du rendement d'un actif. Cette stratégie implique une position dans toutes les options et ce pour un continuum de prix d'exercices. Une explication intuitive et un exemple de cette stratégie sont présentés dans Demeterfi, Derman, Kamal & Zou (1999). Un argument similaire est adopté par Carr & Madan (1999) pour l'évaluation d'un contrat à terme portant sur la covariance réalisée entre les rendements de deux devises. Les concepts développés dans ces deux articles approfondissent les travaux de Neuberger (1994).

L'approche basée sur la réplcation a l'avantage de ne pas nécessiter de spécification du comportement dynamique de la volatilité et repose sur des arguments d'absence d'arbitrage. Cette méthode est cependant limitée à la classe des produits dérivés linéaires portant sur la variance du rendement d'un actif; elle n'offre aucune indication sur la façon d'évaluer et de couvrir des produits dérivés non-linéaires ou des produits dérivés portant sur la volatilité du rendement d'un actif financier.

De plus, l'hypothèse de l'existence d'options pour une infinité de prix d'exercice étant très restrictive, elle rend fastidieuse l'application de la méthode aux instruments financiers pour lesquels le volume d'options transigé est faible ou inexistant et est sujette à une erreur d'approximation non-négligeable même dans le cas des actifs dont le volume d'options transigées est important.

2.1.2 Approches basées sur les modèles d'équilibre

Grünbichler & Longstaff (1996) proposent des solutions analytiques pour l'évaluation d'options et de contrats à terme portant sur la volatilité en posant l'hypothèse que la volatilité du rendement d'un actif est déterminée par un processus racine carré. Selon la spécification d'un tel modèle, le niveau de la volatilité évolue autour d'une valeur cible, la volatilité moyenne et l'ampleur des variations dépend du niveau de la volatilité.

Le comportement de la valeur des instruments dérivés de volatilité et leurs qualités en tant qu'instrument de couverture du risque de volatilité sont également étudiés. Dans le cadre d'un modèle captant les effets de retour vers la moyenne, une des propriétés importante constatée est que la sensibilité des instruments dérivés de volatilité diminue avec l'augmentation l'échéance. Étant donné la dynamique de retour vers la moyenne captée par le processus racine carré, tout écart par rapport à la volatilité moyenne se voit attribuer une probabilité croissante de se résorber avec l'échéance du titre. Ainsi, la valeur des produits de dérivés de volatilité ayant une longue échéance est peu sensible aux variations du niveau de la volatilité ce qui rend ces derniers peu intéressants pour des fins de couverture contre les variations à court terme de la volatilité.

Detemple & Osakwe (2000) généralisent les travaux de Grünbichler & Longstaff (1996) en étendant le cadre d'analyse à d'autres processus stochastiques et en adaptant les résultats au cas des options américaines. Leurs résultats soulèvent d'importantes différences entre les options américaines et européennes expliquées par les effets de retour vers la moyenne. Lorsque la volatilité s'écarte de son niveau moyen, le détenteur d'une option américaine peut exercer son droit avant que l'écart ne se résorbe. Detemple & Osakwe (2000) sont les premiers à aborder la tarification de produits dérivés de volatilité dont le type d'exercice est américain.

Le cadre d'un modèle d'équilibre général offre une flexibilité additionnelle permettant la tarification de titres dérivés non-linéaires ou portant sur la volatilité. Cependant, ni Detemple & Osakwe (2000) ou Grünbichler & Longstaff (1996) n'abordent la problématique de la réplcation des produits dérivés de volatilité.

2.1.3 Approche de Heston & Nandi (2000)

Heston & Nandi (2000) proposent une solution analytique au problème d'évaluation d'une option portant sur la variance du rendement d'un actif dans le contexte d'un modèle de marché de la famille GARCH similaire aux modèles NGARCH et VGARCH présentés par Engle & Ng (1993). L'utilisation d'un tel modèle permet d'exprimer la variance du rendement d'un actif financier comme une fonction du prix de l'actif. Le cadre d'analyse est généralisé au processus de diffusion correspondant à la limite en temps continu du modèle discret utilisé. Dans les deux cas, la solution repose sur l'inversion de la fonction caractéristique de la loi de densité de la variance conditionnelle future.

Dans le cas continu, une stratégie de réplication permettant de reproduire les variations de la valeur du titre dérivé est présentée. Contrairement à celle proposée par Carr & Madan (1997), cette stratégie de réplication ne nécessite aucune hypothèse sur la disponibilité d'options pour un continuum de prix d'exercices, mais repose plutôt sur l'ajustement dynamique d'un portefeuille composé d'instruments financiers transigés.

Le cadre de tarification proposé par Heston & Nandi (2000) permet de déterminer la valeur d'options et de contrats à terme portant sur la variance et fournit une indication de la stratégie de réplication associée dans le cas du modèle en temps continu. Comparativement aux précédentes approches, celle de Heston & Nandi (2000) a l'avantage de produire des solutions analytiques pour une classe générale de produits dérivés portant sur la variance en plus de fournir une stratégie de réplication qui ne repose pas sur les hypothèses restrictives d'un continuum de prix d'exercice pour les options.

Cependant, il est impossible d'adapter le cadre de tarification proposé par Heston & Nandi (2000) aux produits dérivés dont la variable sous-jacente est la volatilité du rendement d'un actif et non de la variance. Le modèle discret employé est un modèle hybride de la famille GARCH peu étudié dans la littérature et, selon notre connaissance, il est impossible de reprendre la méthodologie en utilisant d'autres modèles de la famille GARCH. De plus, aucune étude empirique ne permet de valider la stratégie de réplication proposée.

2.2 Modèles GARCH

Le modèle Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) introduit par Bollerslev (1986) est un modèle à temps discret permettant de capter le caractère stochastique de la variance du rendement d'un actif. Selon ce modèle, pour une période de temps donnée, le niveau de la variance du rendement d'un actif dépend à la fois du niveau de la variance pour les périodes précédentes et des chocs ayant affecté le rendement de l'actif. Cette spécification permet de reproduire la persistance expliquant les périodes de fortes et de faibles volatilité observées empiriquement. Parmi les nombreuses extensions constituant la famille des modèles GARCH, Nelson (1991), Engle & Ng (1993) et Glosten, Jagannathan & Runkle (1993), entre autres, ont proposé des versions permettant d'inclure les effets d'asymétrie des rendements observés et documentés dans la littérature financière.

Le modèle de marché utilisé dans de ce mémoire est le Non-Linear Asymmetric GARCH (NGARCH) proposé par Engle & Ng (1993). Une description détaillée de ce modèle et de certaines de ses caractéristiques rattachées au développement des approximations analytiques est présentée à la section 3.

2.2.1 Application à la tarification de produits dérivés

Duan (1995) a développé un modèle permettant d'évaluer une option européenne dans le cadre d'un modèle de marché GARCH. Une des contributions associée à ce modèle est le développement du théorème permettant le passage du processus GARCH sous la mesure réelle à une mesure dite localement neutre au risque, similaire à celle employée pour les fins de tarification de produits dérivés dans le contexte des modèles continus. Duan (1995) démontre que sous la mesure localement neutre au risque, la famille des processus GARCH peut être employée pour la tarification de titres contingents. Cependant, l'espérance caractérisant la valeur d'une option ne peut être résolue analytiquement ; il faut faire appel à des procédures numériques.

Afin de contourner l'aspect numérique associé au modèle d'évaluation d'options proposé par Duan (1995) et de généraliser les résultats à d'autres modèles de la famille GARCH, de nombreux articles ont proposé des solutions alternatives. Entre autres, Heston & Nandi (2000) ont développé une solution analytique similaire à celle utilisée pour la tarification d'options portant sur la va-

riance et Duan, Gauthier & Simonato (1999) ont proposé une approximation analytique basée sur un développement en série de Edgeworth généralisé de la fonction de densité du rendement de l'actif risqué sous la mesure localement neutre au risque.

La méthodologie proposée dans ce mémoire fait appel au développement en série de Edgeworth généralisé et aux fonctions de densité de Johnson. Les prochaines sections détailleront chacune de ces méthodes et leurs principales applications retrouvées dans la littérature financière. Entre autres, les travaux de Duan, Gauthier & Simonato (1999) y seront abordés avec plus de précision.

2.3 Développement en série de Edgeworth

Le développement en série de Edgeworth est utilisé lorsqu'il est impossible d'identifier la fonction de densité caractérisant la distribution d'une variable aléatoire, mais qu'une information partielle telle que certains moments de la variable, est disponible. Cette technique consiste à approximer la fonction de densité inconnue par une fonction de densité normale à laquelle des termes de correction sont ajoutés afin de réduire la distance entre les moments. Lorsque le développement en série est limité à un nombre fini de termes, généralement le nombre de moments considérés, le résultat est une approximation et ne correspond généralement pas à la définition d'une fonction de densité. De plus, selon le nombre de paramètres de la fonction de densité approximative, une erreur de reproduction persiste pour certains moments. Barton & Dennis (1952) établissent les conditions devant être respectées par les moments d'ordre trois et quatre de la variable aléatoire dont on cherche à approximer la fonction de densité afin d'assurer que l'approximation obtenue par le développement en série de Edgeworth soit positive et unimodale.

2.3.1 Jarrow & Rudd (1982)

Jarrow & Rudd (1982) utilisent un développement en série de Edgeworth généralisé pour évaluer une option européenne dans le contexte où la loi de distribution de la valeur de l'actif sous-jacent est inconnue, mais dont les moments sont identifiables. La généralisation du développement en série de Edgeworth consiste à utiliser une fonction de densité générale comme approximation. La fonction de densité approximative utilisée est celle d'une loi lognormale dont les deux premiers moments sont ajustés pour correspondre à ceux de la fonction de densité du prix de l'actif sous-jacent, de telle sorte que l'approximation analytique correspond à la valeur d'une option selon le modèle

de Black & Scholes (1977) à laquelle sont ajoutés deux facteurs de correction pour les différences entre les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement des deux distributions. Dans cette optique, les travaux de Jarrow & Rudd (1982) peuvent être considérés comme une généralisation de ceux de Black & Scholes (1977) tenant compte de l'effet des moments d'ordre supérieurs de la distribution des rendements de l'actif sous-jacent à l'option européenne. Étant basé sur un développement en série de Edgeworth généralisé tronqué après le quatrième terme, le résultat obtenu est une approximation et il s'avère impossible de borner analytiquement l'erreur d'approximation. Il est à noter que l'approche proposée par Jarrow & Rudd (1982) est fréquemment utilisée dans la pratique.

2.3.2 Duan, Gauthier & Simonato (1999)

Une approche similaire est adoptée par Duan, Gauthier & Simonato (1999) pour l'évaluation d'une option d'achat européenne dans le cadre d'un modèle de marché NGARCH. La loi de distribution du rendement de l'actif sous-jacent, sous la mesure localement neutre au risque, ne peut être identifiée. Par contre, il est possible d'évaluer analytiquement les moments du rendement de l'actif risqué sur lequel porte l'option d'achat. Un développement en série de Edgeworth généralisé appliqué à une loi lognormale permet d'améliorer la correspondance des quatre premiers moments de la distribution du rendement de l'actif risqué dans le cadre du modèle de marché NGARCH. L'expression caractérisant l'approximation analytique est similaire à celle obtenue par Jarrow & Rudd (1982); soit un terme correspondant à la valeur de l'option pour la loi lognormale auquel deux facteurs de corrections sont ajoutés afin de compenser pour les différences entre les moments d'ordre trois et quatre.

Lorsqu'il est impossible d'identifier la fonction de densité de la variable sous-jacente d'un titre dérivé ou d'effectuer analytiquement les calculs d'espérance caractérisant la valeur de ce titre, le développement en série de Edgeworth généralisé offre une solution plus efficace que la plupart des méthodes numériques alternatives. Bien que l'erreur d'approximation soit impossible à borner analytiquement, dans le contexte des études numériques effectuées par Jarrow & Rudd (1982) ainsi que Duan, Gauthier & Simonato (1999), cette dernière est généralement faible et d'un ordre de grandeur acceptable. Cependant, aucune de ces études ne permet de vérifier s'il existe un lien entre l'ordre de grandeur de l'erreur d'approximation et les conditions posées par Barton & Dennis (1952).

2.4 Fonctions de densité de Johnson

Johnson (1949) présente une famille de fonctions de densité obtenues via la transformation d'une variable aléatoire dont la distribution est une loi normale centrée et réduite. Quatre paramètres caractérisent les fonctions de densité de cette famille et dans certains cas, il est possible d'ajuster les quatre premiers moments pour qu'ils soient équivalents à des valeurs cibles.

Le système lognormal (S_L), le système non borné (S_U) et le système borné (S_B) composent la famille des fonctions de densité de Johnson et leurs différences résident dans la transformation de la variable aléatoire gaussienne. Les fonctions de densité de Johnson sont utilisées pour approximer diverses distributions non-gaussiennes ne pouvant être reproduites par les lois de distributions usuelles. Cette approche règle deux problèmes associés au développement en série de Edgeworth généralisé en ce sens que l'approximation obtenue par la méthode proposée par Johnson (1949) est une fonction de densité et, à l'exemption du système S_L^2 , elle permet de reproduire exactement les quatre premiers moments de la distribution à approximer.

2.4.1 Hill, Hill & Holder (1976)

Hill, Hill & Holder (1976) proposent un algorithme permettant de déterminer laquelle des trois fonctions de densité de Johnson utiliser selon les moments d'ordre trois et quatre d'une variable aléatoire dont on cherche à approximer la distribution. De plus, ils présentent un algorithme permettant de fixer les paramètres de la fonction de densité retenue de telle sorte que les moments de celles-ci correspondent aux valeurs cibles; les moments de la variable aléatoire dont la loi de distribution n'est pas identifiable.

2.4.2 Posner & Milevsky (1998)

Posner & Milevsky (1998) utilisent les fonctions de densité de Johnson dans un contexte appliqué à la finance, soit la tarification des produits dérivés dits exotiques. Constatant que pour la plupart de ces titres dérivés, la fonction de densité caractérisant leur valeur à échéance est inconnue, ils proposent d'approximer cette dernière par une fonction de densité de Johnson. L'approche de Posner & Milevsky (1998) peut être appliquée à divers produits dérivés exotiques dont le type

²Le système S_L des fonctions de densité de Johnson permet généralement la reproduction des trois premiers moments de la distribution à approximer.

d'exercice est européen tels que les options asiatiques, barrières, les options portant sur la différence entre la valeur de deux actifs et, de façon générale, tout produit dérivé portant sur un actif dont la distribution ne permet pas l'obtention d'une solution analytique au problème de tarification.

Une étude numérique basée sur l'évaluation de la valeur d'une option asiatique et d'une option panier permet de conclure que l'approximation analytique basée sur les fonctions de densité de Johnson se compare avantageusement aux autres approximations proposées dans la littérature financière permettant d'évaluer ce type d'options ainsi qu'à la simulation Monte Carlo. Une étude similaire est reprise dans Posner & Milevsky (1999).

Le contexte d'utilisation des fonctions de densité de Johnson est similaire à celui du développement en série de Edgeworth généralisé. Cependant, contrairement aux fonctions obtenues par le développement en série de Edgeworth généralisé, celles obtenues via la méthode proposée par Johnson (1949) correspondent à la définition d'une fonction de densité.

2.5 Contribution de ce mémoire

Tel qu'expliqué par Brockhaus & Long (2000), les institutions financières proposent des produits dérivés linéaires portant sur la variance du rendement d'un actif alors que les investisseurs sont davantage intéressés par une classe générale de produits dérivés de volatilité. Cette situation s'explique en partie par l'absence d'un cadre de tarification simple, flexible et efficient permettant aux institutions financières d'évaluer et de répliquer ce type de produits et, par conséquent, de les offrir à leur clientèle.

Dans l'espoir de contribuer au développement d'un tel cadre de tarification, ce mémoire propose une approche permettant la tarification d'une vaste gamme de produits dérivés de variance et éventuellement de volatilité tel que proposé à la section 7. L'élaboration de la stratégie de couverture permettant de répliquer, à partir d'instruments financiers transigés, les produits dérivés de variance et de volatilité n'est cependant pas considérée dans le cadre de ce mémoire.

3 Modèle de marché NGARCH

Le modèle Non-Linear Asymmetric GARCH (NGARCH) proposé par Engle & Ng (1993) est présenté dans cette section. Les raisons évoquées dans Duan, Gauthier & Simonato (1999) ont motivé ce choix. Entres autres, le modèle NGARCH permet une reproduction fidèle de la dynamique des séries financières et, sous la mesure neutre au risque, il s'avère le plus parcimonieux parmi les modèles de la famille GARCH captant les effets d'asymétrie. Cette caractéristique rend le modèle NGARCH intéressant pour les fins de tarification de produits dérivés.

3.1 Spécification sous la mesure réelle (P)

Selon le modèle NGARCH, sous la mesure de probabilité réelle (P), la dynamique du rendement d'un actif risqué est donnée par :

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r_t + \lambda\sqrt{h_{t+1}} - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\varepsilon_{t+1}, t = 0, 1, \dots \quad (1)$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t (\varepsilon_t - \theta)^2, t = 1, 2, \dots \quad (2)$$

où r_t est le rendement composé périodique d'un actif non-risqué, λ est une prime de risque constante, h_{t+1} est la variance conditionnelle du rendement de l'actif risqué et $\{\varepsilon_t : t = 0, 1, 2, \dots\}$, sous la mesure P , est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi gaussienne centrée et réduite. L'équation (2), sujette aux restrictions $\beta_0 > 0$, $\beta_1 \geq 0$ et $\beta_2 \geq 0$ caractérise la dynamique de la variance conditionnelle d'un processus NGARCH. Le paramètre θ permet de capter la relation entre le niveau de la variance conditionnelle et le rendement de l'actif risqué; une valeur positive (négative) de θ implique une corrélation négative (positive) entre le rendement et la variance conditionnelle. Le modèle NGARCH permet ainsi de modéliser les effets d'asymétrie dans la distribution du rendement de l'actif risqué. La structure d'information est modélisée par la filtration $\{\mathcal{F}_t : t \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$ où \mathcal{F}_0 est la tribu engendrée par (S_0, h_1) et \mathcal{F}_t , la tribu engendrée par $\{S_0, h_1, \varepsilon_s : s \in \{1, 2, \dots, t\}\}$; ce qui implique que h_t est \mathcal{F}_{t-1} -mesurable.

3.2 Spécification sous la mesure localement neutre au risque (Q)

Duan (1995) développe un théorème permettant le passage d'un modèle de la famille GARCH sous la mesure P à une mesure dite localement neutre au risque³ (Q) rendant ainsi possible la tarification de produits dérivés dans le contexte des modèles GARCH. Le développement de la

³Duan (1995) utilise le terme *locally risk-neutral valuation relationship* (LRNVR) pour désigner la mesure Q .

mesure localement neutre au risque, appuyé sur un argument d'équilibre de marché, repose sur des hypothèses générales concernant les préférences des agents économiques.

Ce changement de mesure permettra d'utiliser le modèle de marché NGARCH pour la tarification des produits dérivés de variance. Ainsi, selon Duan (1995), suite au passage sous la mesure Q , la dynamique du rendement de l'actif risqué devient :

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r_t - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\epsilon_{t+1}, t = 0, 1, \dots \quad (3)$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t (\epsilon_t - (\theta + \lambda))^2, t = 1, 2, \dots \quad (4)$$

La transition du processus NGARCH sous la mesure Q préserve la structure de la variance conditionnelle décrite par l'équation (2). Seul le paramètre caractérisant les effets d'asymétrie est modifié, car on y ajoute la prime de risque λ . Notons également que sous la mesure Q nous retrouvons $\varepsilon_t = \epsilon_t - \lambda$ où $\{\epsilon_t : t = 0, 1, 2, \dots\}$ est définie comme étant une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi gaussienne centrée et réduite.

3.3 Variance conditionnelle future

Afin d'établir la valeur d'un titre contingent au niveau de la variance dans le cadre du modèle NGARCH, il est nécessaire de caractériser la distribution, sous la mesure localement neutre au risque Q , de la variance conditionnelle future h_{t+s} où $t \geq 0$ dénote l'instant présent et $s > 0$ représente le nombre de périodes caractérisant l'échéance du titre contingent.

Sous la mesure Q , l'expression caractérisant h_{t+s} est donnée par :

$$h_{t+s} = \beta_0 + h_t \prod_{i=0}^{s-1} Y_{t+i} + \beta_0 \sum_{i=1}^{s-1} \prod_{j=1}^i Y_{t+s-j} \quad (5)$$

$$Y_{t+i} = \beta_1 + \beta_2 (\epsilon_{t+i} - (\theta + \lambda))^2, i \geq 0. \quad (6)$$

Les détails du développement récursif permettant de retrouver la forme de la variance conditionnelle future (5) sont présentés dans la section A.1.

L'équation de la variance conditionnelle future fait appel à un produit et à une somme de produits de variables aléatoires indépendantes décrites à l'équation (6). Ces variables aléatoires sont obtenues via une transformation affine d'une variable distribuée selon une loi chi-carré décentrée.

Selon notre connaissance, il est impossible d'identifier la loi de distribution caractérisant la variance conditionnelle future (5), ce qui exclut toute solution analytique au problème de tarification de produits dérivés de variance dans le cadre d'un modèle de marché NGARCH.

Cependant, si les moments de la variance conditionnelle future peuvent être identifiés, il sera possible de résoudre le problème de tarification par une approximation analytique en se basant sur un développement en série de Edgeworth généralisé ou sur les fonctions de densité de Johnson.

3.4 Moments non-centrés de la variance conditionnelle future

Le système d'équations suivant permet d'établir, sous la mesure Q , le lien entre les moments non-centrés d'ordre entier de la variance conditionnelle pour deux périodes successives.

$$E_t^Q [h_{t+s}^n] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_0^{n-k} E_t^Q [h_{t+s-1}^k] \nu_k \quad (7)$$

où

$$\nu_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \beta_1^{k-j} \beta_2^j \eta_j, \quad (8)$$

$$\eta_j = \sum_{l=0}^j \binom{2j}{2l} (\theta + \lambda)^{2(j-l)} \frac{(2l)!}{2^l l!} \quad (9)$$

et pour des fins de notation, l'opérateur $E_t^Q [\bullet]$ désigne l'espérance conditionnelle à \mathcal{F}_t sous la mesure Q .

Une application récursive des équations (7) à (9) jusqu'à la période t permet d'évaluer les moments de la variance conditionnelle future. Le développement de ces expressions analytiques est présenté à la section A.2. De plus, la section A.4. présente une forme matricielle facilitant le traitement récursif des équations reliant les moments non-centrés de la variance conditionnelle pour deux périodes consécutives.

3.5 Conditions assurant la convergence des moments

Les constantes ν_k , $k \geq 1$ définies par l'équation (8) ont une influence sur le comportement de la variance conditionnelle du rendement de l'actif risqué. En effet, afin d'assurer que les k premiers moments de la variance conditionnelle n'explodent pas et qu'ils convergent vers une valeur stationnaire finie lorsque $s \rightarrow \infty$, les paramètres du modèle NGARCH spécifié sous la mesure localement neutre au risque Q doivent permettre le respect des conditions suivantes :

$$\nu_j < 1, j = 1, \dots, k. \quad (10)$$

Le non respect de ces conditions pour un ou plusieurs moments risque de réduire la qualité des approximations analytiques basées sur le développement en série de Edgeworth généralisé ou sur les fonctions de densité de Johnson.

Les détails permettant d'établir le lien entre ces conditions et la convergence vers la valeur stationnaire pour les k premiers moments entiers de la variance conditionnelle future sont présentés à la section A.3.

4 Approximations Analytiques

Cette section présente quatre approximations analytiques permettant d'évaluer une option d'achat européenne et un contrat à terme portant sur la variance conditionnelle future h_{t+s} et, de façon générale, portant sur toute autre variable aléatoire dont les quatre premiers moments non-centrés peuvent être identifiés. Les deux premières approximations reposent respectivement sur les systèmes S_U et S_L des fonctions de densité de Johnson alors que la troisième repose sur un développement en série de Edgeworth généralisé basé sur une distribution lognormale. La dernière approximation, combinant les deux approches, est obtenue à partir d'un développement en série de Edgeworth généralisé basé sur le système S_L des fonctions de densité de Johnson.

4.1 Fonctions de densité de Johnson

4.1.1 Approximation basée sur le système S_U

Le système non-borné (S_U) est caractérisé par la transformation non-linéaire suivante :

$$Y = \psi_{S_U}(Z) \quad (11)$$

où $\psi_{S_U}(Z) = a + b \sinh\left(\frac{Z-c}{d}\right)$ et Z est une variable aléatoire distribuée selon une loi normale centrée et réduite.

Si les paramètres du vecteur $\theta_{S_U} = [a \ b \ c \ d]^T$ sont fixés de telle sorte que les moments de la variable aléatoire Y sont équivalents à ceux de la variance conditionnelle future h_{t+s} , la valeur d'une option d'achat européenne dont le prix d'exercice est K et l'échéance est de s périodes peut être approximée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} C_{S_U}(K, s; \theta_{S_U}) &= e^{-rs} \left(a - b e^{\frac{1}{2d^2}} \sinh\left(\frac{c}{d}\right) - K \right) \\ &\quad + \frac{b e^{-rs} e^{\frac{1}{2d^2}}}{2} \left(e^{\frac{c}{d}} N\left(\kappa + \frac{1}{d}\right) - e^{-\frac{c}{d}} N\left(\kappa - \frac{1}{d}\right) \right) \\ &\quad + e^{-rs} (K - a) N(\kappa) \end{aligned} \quad (12)$$

où $\kappa = \psi_{S_U}^{-1}(K)$ et $N(\bullet)$ est la fonction de répartition d'une distribution normale centrée et réduite. Notons que le niveau initial de la variance conditionnelle future h_{t+1} n'apparaît pas directement dans la formule d'évaluation de l'option d'achat, mais influence la valeur des moments de la variance conditionnelle future et, par conséquent, l'effet de h_{t+1} est reflété par le vecteur θ_{S_U} . Le niveau d'un

contrat à terme portant sur la variance conditionnelle future h_{t+s} est donné par :

$$F_{S_U}(s; \theta_{S_U}) = a - be^{\frac{1}{2d^2}} \sinh\left(\frac{c}{d}\right). \quad (13)$$

Les développements permettant d'obtenir l'approximation analytique (12) sont présentés à la section C.1 et, puisque le niveau d'un contrat à terme correspond à l'espérance sous la mesure neutre au risque de la variable aléatoire sous-jacente, l'équation permettant de fixer la valeur du contrat à terme (13) découle directement des résultats dérivés dans la section B.1 présentant les moments non-centrés du système S_U .

4.1.2 Approximation basée sur le système S_L

Le système lognormale (S_L) est caractérisé par la transformation non-linéaire suivante :

$$Y = \psi_{S_L}(Z) \quad (14)$$

où $\psi_{S_L}(Z) = a + b \exp\left(\frac{Z-c}{d}\right)$ et Z est une variable aléatoire distribuée selon une loi normale centrée et réduite. Contrairement au système S_U , le système S_L ne permet que la reproduction des trois premiers moments non-centrés de la variance conditionnelle future en plus d'être borné à un minimum défini par le paramètre a .

Si les paramètres du vecteur $\theta_{S_L} = [a \ b \ c \ d]^T$ sont fixés de telle sorte que les trois premiers moments de la variable aléatoire Y sont équivalents à ceux de la variance conditionnelle future h_{t+s} , la valeur d'une option d'achat européenne dont le prix d'exercice est K et l'échéance est de s périodes peut être approximée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} C_{S_L}(K, s; \theta_{S_L}) &= e^{-rs} \left(a + be^{\frac{1}{2d^2} - \frac{c}{d}} - K \right) \\ &+ e^{-rs} \left((K - a)N(\vartheta) - be^{\frac{1}{2d^2} - \frac{c}{d}} N\left(\vartheta - \frac{1}{d}\right) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

où $\vartheta = \psi_{S_L}^{-1}(K)$. De plus, le niveau d'un contrat à terme portant sur la variance conditionnelle future h_{t+s} est donné par :

$$F_{S_L}(s; \theta_{S_L}) = a + be^{\frac{1}{2d^2} - \frac{c}{d}}. \quad (16)$$

De façon similaire à l'approximation analytique basée sur le système S_U , l'effet du niveau initial de la variance conditionnelle future est reflété par le vecteur θ_{S_L} . La section C.2 comprend

les développements permettant d'obtenir l'approximation analytique (15) alors que l'équation permettant de fixer la valeur d'un contrat à terme (16) découle des résultats dérivés dans la section B.2.

4.2 Développement en série de Edgeworth généralisé

4.2.1 Approximation basée sur la distribution lognormale

La première approximation analytique basée sur un développement en série de Edgeworth généralisé remplace, dans l'expression caractérisant la valeur d'une option d'achat européenne, la fonction de densité de la variable aléatoire sous-jacente par une approximation obtenue via un développement en série de Edgeworth généralisé autour d'une fonction de densité lognormale caractérisée par le vecteur de paramètres $\theta_L = [\alpha \ \beta]^T$.

En notant la fonction de densité lognormale utilisée dans le développement en série par f_L et en posant $\mu_i = E_t^Q [h_{t+s}^i]$, on retrouve

$$f_L(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\beta} e^{-\frac{1}{2\beta^2}(\log(y)-\alpha)^2}, \quad (17)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\log(\mu_1) - \frac{1}{2}\log(\mu_2), \\ \beta &= \sqrt{\log(\mu_2) - 2\log(\mu_1)}. \end{aligned}$$

En utilisant un développement en série de Edgeworth généralisé basé sur f_L , la valeur d'une option d'achat européenne dont le prix d'exercice est K et l'échéance est de s périodes est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} C_{E_L}(K, s; \theta_L) &= e^{-rs} \left(e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} N(d_1) - KN(d_2) \right) - \frac{e^{-rs}(\kappa_3 - \tilde{\kappa}_3)}{3!} \frac{df_L(K)}{dy} \\ &\quad + \frac{e^{-rs}(\kappa_4 - \tilde{\kappa}_4)}{4!} \frac{d^2 f_L(K)}{dy^2} \end{aligned} \quad (18)$$

où

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\log(1/K) + \alpha}{\beta}, \\ d_1 &= d_2 + \beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\kappa}_3 &= e^{(3\alpha + \frac{3\beta^2}{2})}(e^{\beta^2} - 1)^2(e^{\beta^2} + 2), \\
\tilde{\kappa}_4 &= e^{(4\alpha + 2\beta^2)}(e^{\beta^2} - 1)^2(e^{4\beta^2} + 2e^{3\beta^2} + 3e^{2\beta^2} - 6), \\
\kappa_3 &= 2\mu_1^3 - 3\mu_1\mu_2 + \mu_3, \\
\kappa_4 &= -6\mu_1^4 + 12\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 + \mu_4.
\end{aligned}$$

De plus, le niveau d'un contrat à terme portant sur la variance conditionnelle future h_{t+s} est donné par $F_{E_L}(s; \theta_L) = e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}}$. Le développement de l'approximation analytique reposant sur le développement en série de Edgeworth généralisé basée sur une distribution lognormale (18) est présenté à la section E.1 et l'équation permettant de fixer la valeur d'un contrat à terme découle des résultats dérivés dans la section D.2.

4.2.2 Approximation basée sur le système S_L

Cette seconde approximation analytique basée sur un développement en série de Edgeworth généralisé utilise la fonction de densité associée au système S_L des fonctions de densité de Johnson caractérisée par le vecteur de paramètres $\theta_{S_L} = [a \ b \ c \ d]^T$. La fonction de densité découlant du système S_L est donnée par :

$$f_{S_L}(y) = \frac{d}{y-a} n\left(\psi_{S_L}^{-1}(y)\right) \quad (19)$$

où $n(\bullet)$ correspond à la fonction de densité d'une distribution normale centrée et réduite et la fonction ψ_{S_L} est définie par l'équation (14).

En utilisant un développement en série de Edgeworth généralisé basé sur f_{S_L} , la valeur d'une option d'achat européenne dont le prix d'exercice est K et l'échéance est de s périodes est donnée par l'expression suivante :

$$C_{E_{S_L}}(K, s; \theta_{S_L}) = C_{S_L}(K, s; \theta_{S_L}) + \frac{e^{-rs}(\kappa_4 - \tilde{\kappa}_4)}{4!} \frac{d^2 f_{S_L}(K)}{dy^2}. \quad (20)$$

Cette approximation analytique permet d'ajuster la valeur de l'option d'achat en fonction de la différence entre le quatrième moment de la variable aléatoire sous-jacente à l'option et celui reproduit par le système S_L . Puisque seul l'effet du quatrième moment distingue les approximations présentées aux équations (15) et (20) et que le niveau d'un contrat à terme ne dépend que du premier moment, l'équation (16) permet de déterminer le niveau d'un contrat à terme portant sur h_{t+s} . Les détails de l'approximation (20) sont présentés à l'appendice D.3 alors que la dérivation de la fonction de densité (19) est faite à la section B.2.

5 Étude numérique

Cette section présente une analyse numérique comparative de la performance des quatre approximations analytiques développées. En premier lieu, la capacité de reproduction de certaines caractéristiques de la distribution de la variance conditionnelle future sera étudiée pour le développement en série de Edgeworth basé sur la distribution lognormale et le système S_L ainsi que pour les deux fonctions de densité de Johnson. La seconde partie de cette analyse numérique, centrée sur l'approximation analytique retenue, permettra d'en évaluer la validité sous diverses conditions et dans le contexte particulier de la tarification d'une option d'achat européenne portant sur la variance du rendement de l'indice boursier S&P500.

Les tableaux 1 à 5 présentés en appendice contiennent des résultats pour deux ensembles de paramètres du modèle NGARCH : $\{\beta_0 = 0.00001, \beta_1 = 0.70, \beta_2 = 0.10, \theta + \lambda = 0.50\}$ et $\{\beta_0 = 0.00001, \beta_1 = 0.70, \beta_2 = 0.15, \theta + \lambda = 0.35\}$. Ces paramètres correspondent respectivement à une dynamique de faible persistance où $\{\nu_1 = 0.825, \nu_2 = 0.711, \nu_3 = 0.650, \nu_4 = 0.644\}$ et à une dynamique de forte persistance où $\{\nu_1 = 0.868, \nu_2 = 0.810, \nu_3 = 0.838, \nu_4 = 0.996\}$. Les coefficients ν_k , définis par l'équation (8), sont liés à la convergence des moments non-centrés vers une valeur stationnaire finie et le respect des conditions $\nu_k < 1, k = 1, \dots, 4$ assure une dynamique non-explosive des quatre premiers moments de h_{t+s} . Les tableaux 1 et 2 permettent de valider les expressions analytiques développées pour les quatre premiers moments non-centrés de la variance conditionnelle future pour divers horizons (10, 30, 90 et 270 jours) ainsi que pour trois niveaux de départ de la variance conditionnelle h_{t+1} correspondant à $0.80 E^Q[h], 1.00 E^Q[h]$ et $1.20 E^Q[h]$ où $E^Q[h]$ représente le niveau stationnaire de la variance conditionnelle.

5.1 Reproduction des caractéristiques de la distribution de h_{t+s}

La qualité des approximations analytiques proposées repose sur la capacité de reproduire la distribution de la variance conditionnelle future à partir des moments non-centrés d'ordre entier. Par construction, le système S_U des fonctions de densité de Johnson ainsi que le développement en série de Edgeworth généralisé basé sur le système S_L permettent la reproduction des quatre premiers moments de h_{t+s} . De façon générale, un développement en série de Edgeworth généralisé permet de reproduire exactement un moment de plus que le nombre de moments reproduits par la fonction

de densité utilisée dans le développement. Le système S_L et, conséquemment, le développement en série de Edgeworth basé sur une distribution lognormale ne permettent que la reproduction des trois premiers moments. Le tableau 3 permet de comparer la valeur des troisièmes et quatrièmes moments non-centrés de la variance conditionnelle future aux valeurs obtenues par les quatre approximations pour divers horizons (10, 30, 90 et 270 jours) ainsi que pour trois niveaux de départ de la variance conditionnelle h_{t+1} correspondant à $0.80 E^Q[h]$, $1.00 E^Q[h]$ et $1.20 E^Q[h]$ où $E^Q[h]$ représente le niveau stationnaire de la variance conditionnelle. Outre pour la combinaison d'une dynamique de forte persistance et de longues échéances, l'erreur de reproduction du quatrième moment pour le système S_L et le développement en série de Edgeworth basé sur une distribution lognormale est généralement faible et, tel qu'attendu, les quatre approximations permettent la reproduction du troisième moment.

Les figures 1 à 4 permettent de comparer la forme des fonctions de densité et de répartition obtenues par les quatre approximations à une estimation obtenue par une simulation Monte-Carlo. Les figures 1 et 2 sont associés au premier ensemble de paramètres décrits précédemment, alors que les figures 3 et 4 sont associés au deuxième ensemble de paramètres. Ces figures permettent de constater que les systèmes S_L et S_U reproduisent mieux la forme des fonctions de densité et de répartition de h_{t+s} dans un contexte de faible persistance. Malgré l'inaptitude du système S_L à reproduire le quatrième moment de h_{t+s} , ce dernier permet une meilleure reproduction de la borne inférieure de la distribution et, contrairement au système S_U , n'admet pas de valeurs négatives.

De plus, l'analyse a également permis de constater que les fonctions obtenues par un développement en série de Edgeworth généralisé ne sont pas strictement positives et sont très instables. Ce constat est expliqué par l'ampleur des termes de corrections à apporter qui sont d'un ordre de grandeur supérieur aux valeurs de la fonction de densité approximative. Pour ces raisons, les fonctions de densité et de répartition associées aux approximations obtenues par un développement en série de Edgeworth généralisé ne sont pas présentées.

5.2 Validation dans un contexte de faible et forte persistance

Cette section met l'emphase sur les résultats de tarification obtenus pour les deux ensembles de paramètres définis précédemment. Les tableaux 4 et 5 présentent la valeur d'une option d'achat européenne portant sur la variance conditionnelle future pour les approximations analytiques basées

sur le développement en série de Edgeworth, sur le système S_U des fonctions de densité de Johnson, sur le système S_L ainsi que la valeur obtenue via une simulation Monte-Carlo de 500 000 trajectoires. Pour chacun des deux ensembles de paramètres, on considère des options d'achat dont l'échéance est de 10, 30, 90 et 270 jours, le niveau initial de la variance conditionnelle fixé à $0.80 E^Q[h]$, $1.00 E^Q[h]$ et $1.20 E^Q[h]$ et le prix d'exercice correspondant à $0.75 h_{t+1}$, $1.00 h_{t+1}$ et $1.25 h_{t+1}$. Dans les exemples présentés, le taux d'intérêt sans risque annuel est fixé à 5%. On observe que l'approximation analytique S_L reproduit plus fidèlement la valeur d'une option d'achat européenne portant sur la variance conditionnelle future que les approximations basées sur le développement en série de Edgeworth et sur le système S_U des fonctions de densité de Johnson. De plus, pour les deux approximations basées sur un développement en série de Edgeworth généralisé, l'instabilité observée dans la reproduction de la distribution est transmise dans la valeur des options, menant même à des valeurs négatives.

Puisque sous la mesure neutre au risque, le niveau d'un contrat à terme est défini par la valeur espérée de la variable aléatoire sous-jacente et que chacune des approximations proposées permet la reproduction du premier moment de la variance conditionnelle future, les quatre approximations analytiques permettent une reproduction exacte de la valeur du contrat à terme.

L'analyse des résultats permet d'exclure les approximations analytiques construites à partir d'un développement en série de Edgeworth généralisé. La comparaison entre les approximations basées sur les systèmes S_U et S_L indique également que l'approximation analytique basée sur le système S_L offre un plus haut degré de précision et demeure plus fiable lorsque la dynamique de la variance conditionnelle dénote un fort niveau de persistance. Cependant, fréquemment la valeur obtenue par l'approximation analytique S_L , tout comme pour les autres approximations, est significativement différente de l'estimé Monte-Carlo. Afin de préciser la nature de cette erreur de reproduction, la section suivante présente une analyse effectuée dans un cadre stochastique.

5.3 Validation dans un cadre stochastique

Les résultats proposés dans les sections précédentes sont limités à deux ensembles de paramètres et quelques spécifications d'option. Bien que ces résultats permettent de déterminer que l'approximation S_L offre la plus grande précision parmi les approximations analytiques développées, un cadre de validation plus général est nécessaire afin d'obtenir un portrait global de la performance

de l'approximation S_L . Pour ce faire, un cadre de validation stochastique similaire à celui proposé par Broadie & Detemple (1996) et repris par Duan Gauthier & Simonato (1999) sera développé en simulant, à partir de distributions spécifiées à priori, des paramètres du processus NGARCH et caractéristiques de l'option d'achat à évaluer.

L'échéance de l'option d'achat, exprimée en années, est obtenue par $T \sim U(0.1, 1)$ avec une probabilité de 0.75 et $T \sim U(1, 3)$ avec une probabilité de 0.25. Le ratio du prix d'exercice de l'option par rapport au niveau stationnaire de la variance conditionnelle $K/E^Q[h] \sim U(0.75, 1.25)$ et le taux d'intérêt sans risque $r \sim U(0, 0.10)$. Le ratio du niveau initial de la variance conditionnelle par rapport à son niveau stationnaire, $h_{t+1}/E^Q[h] \sim U(0.50, 0.90)$ avec une probabilité de 0.10, $h_{t+1}/E^Q[h] \sim U(0.90, 1.10)$ avec une probabilité de 0.80 et $h_{t+1}/E^Q[h] \sim U(1.10, 2)$ avec une probabilité de 0.10.

Les paramètres du processus NGARCH sont également générés à partir de distributions uniformes : $\beta_0 \sim U(0, 0.0001)$, $\beta_1 \sim U(0, 1)$, $\beta_2 \sim U(0, 1)$ et $\theta + \lambda \sim U(0, 1)$. La contrainte $\mu_k < 1$, $k = 1, \dots, 4$ est imposée afin de respecter les conditions de stationnarité des moments. Lors de la génération d'un ensemble de paramètres, si la contrainte n'est pas respectée, la procédure de simulation est reprise jusqu'à ce que l'ensemble de paramètres vérifie les conditions.

Le critère permettant d'évaluer la performance de l'approximation analytique S_L est le *Root Mean Square Error* (RMSE) et l'erreur d'évaluation (ϵ_i) du scénario i est donnée par :

$$\epsilon_i = \frac{C_{SL}(i) - C_{MC}(i)}{C_{MC}(i)}. \quad (21)$$

Le nombre de scénarios considérés est $n = 1000$ pour lesquels la valeur obtenue par l'approximation S_L (C_{SL}) et comparée à la valeur obtenue par une simulation Monte-Carlo (C_{MC}) basée sur 1 000 000 de trajectoires. Les options pour lesquelles $C_{MC} < 0.005E^Q[h]$ ont été retirées de l'échantillon afin d'éviter la présence d'erreurs relatives élevées expliquées par une valeur d'option très faible se retrouvant au dénominateur dans l'équation (21).

La figure 5 présente un histogramme des erreurs relatives d'évaluation. Ces dernières excèdent rarement 0.06 et la valeur globale du RMSE est de 0.03. L'erreur relative d'évaluation est peu sensible au niveau du taux d'intérêt sans risque et à l'échéance de l'option. Cependant, le RMSE des options d'achat dont le prix d'exercice est supérieur à $1.10h_{t+1}$ et dont au moins un des coefficients $\mu_k < 0.10$, $k = 1, \dots, 4$ est 0.081. Dans ce cas, la valeur élevée du RMSE s'explique par la faible valeur de l'option provenant d'une part par le niveau de hors-jeu et d'autre part, par une très faible variabilité de la variance conditionnelle future. En excluant ces observations, le RMSE est de 0.02.

5.4 Validation pour les paramètres estimés de l'indice S&P500

Cette section analyse les résultats de tarification d'une option d'achat européenne pour un ensemble de paramètres associé à une dynamique explosive des moments de la variance conditionnelle. Ces paramètres sont obtenus par l'estimation du processus NGARCH, sous la mesure physique, à partir des rendements excédentaires quotidiens de l'indice boursier S&P500 du 1 janvier 1992 au 31 décembre 2001. Une description des données utilisées est présentée à la section 6.1. Le rendement excédentaire est défini comme étant le rendement logarithmique auquel on soustrait le taux sans risque périodique. Le tableau 7 présente les estimations ainsi que l'écart-type des estimés alors que le tableau 8 présente la valeur des constantes critiques associées aux paramètres estimés. Les coefficients ν_2 , ν_3 et ν_4 sont supérieurs à 1 ce qui implique que les moments d'ordre deux, trois et quatre de la variance conditionnelle ont une dynamique explosive avec l'échéance considérée.

Le tableau 6 présente, pour diverses échéances, prix d'exercices et niveaux de départ de la variance conditionnelle la valeur d'une option d'achat européenne obtenue par les approximations analytiques et par simulation Monte-Carlo. Les résultats indiquent que pour de courtes échéances l'approximation S_L offre un niveau de précision satisfaisant alors que plus l'échéance de l'option augmente, plus la qualité de l'approximation est réduite. Au delà de 90 jours, le résultat obtenu par l'approximation analytique n'est plus d'un même ordre de grandeur que la valeur estimée par simulation Monte-Carlo. Ainsi, lorsque la dynamique d'un des moments de la variance conditionnelle future est explosive, la qualité de l'approximation analytique S_L est satisfaisante pour des options de courtes échéances, mais grandement limitée lorsque l'échéance de l'option augmente.

6 Exemple d'application

Cette section présente deux applications de produits dérivés de variance ; soit un contrat à terme portant sur la variance du rendement de l'indice S&P TSX et une option d'achat européenne portant sur la variance du rendement de la devise CAD-USD. Une attention particulière est portée au cas de l'option d'achat européenne via une analyse de la sensibilité du prix à différents facteurs. L'approximation analytique utilisée dans ces exemples et celle basée sur le système S_L des fonctions de densité de Johnson.

6.1 Description des données

Afin d'évaluer les deux produits dérivés de variance proposés dans cette section et d'observer la dynamique des moments non-centrés de la variance conditionnelle pour différentes variables financières, des observations sont recueillies pour les indices boursiers S&P500 et S&P TSX, les devises CAD-USD et USD-EUR ainsi que le cours au comptant du baril de pétrole (WTI Crude). Le taux des titres du marché monétaire émis par le gouvernement et d'échéance de trois mois sont utilisés comme approximation du taux sans risque. Les données sont recueillies quotidiennement sur la période du 1 janvier 1992 au 31 décembre 2001 sauf dans le cas de la devise USD-EUR pour laquelle les données sont disponibles à partir du 31 décembre 1998.

6.2 Estimation des paramètres du processus NGARCH

Les paramètres du processus NGARCH sous la mesure réelle (P) sont estimés en maximisant le logarithme de la fonction de vraisemblance de la série de rendements. Le développement de la fonction de vraisemblance est présenté à l'appendice F.

Le tableau 7 présente les paramètres estimés ainsi que l'écart-type de l'estimation, alors que le tableau 8 contient les constantes critiques définies par l'équation (8) et permettant de vérifier si la dynamique des quatre premiers moments non-centrés de la variance conditionnelle est stationnaire. Les estimations impliquent une dynamique explosive des moments d'ordre deux trois et quatre de la variance des deux indices boursiers et d'ordre trois et quatre de la variance du cours au comptant du pétrole. Pour ces trois cas, les réserves posées à la section 5.4 doivent s'appliquer.

6.3 Contrat à terme sur la variance du rendement de l'indice S&P TSX

Le premier exemple étudié est un contrat à terme portant sur la variance du rendement de l'indice S&P TSX. En modélisant l'évolution de la variance par le processus NGARCH défini à l'équation (2), le niveau à terme de la variance sera établi selon l'approximation analytique (16). La fonction de gains et pertes à échéance du contrat à terme est

$$GP_F = 252 N [h_{t+s} - F_{t,t+s}] \quad (22)$$

où N représente le montant notionel, h_{t+s} le niveau de la variance conditionnelle à échéance du contrat, s l'échéance et $F_{t,t+s}$ le niveau à terme de la variance établi en t , lors de l'initiation du contrat à terme. Le processus NGARCH étant estimé à partir de données quotidiennes, on utilise un facteur d'annualisation fixé à 252 pour le passage à une mesure annuelle de la variance.

Les estimations obtenues pour l'indice S&P TSX $\{\beta_0 = 9.94e-7, \beta_1 = 0.8968, \beta_2 = 0.0782, \theta + \lambda = -0.4901\}$, l'échéance du contrat à terme et le niveau initial de la variance conditionnelle sont nécessaires afin de déterminer les quatre premiers moments analytiques de la variance conditionnelle. L'échéance est fixée à 90 jours, le montant notionel $N = 100\,000\$$ et, pour les fins de cet exemple, la valeur initiale de la variance conditionnelle (h_{t+1}) est fixée à son niveau stationnaire $E^Q[h]$. L'application de l'approximation analytique basée sur le système S_L adaptée au cas d'un contrat à terme (16) permet de poser $F_{t,t+90} = 1.5932e - 4$. Si à l'échéance du contrat à terme, $h_{t+90} > F_{t,t+90}$, le détenteur recevra la différence entre ces deux quantités ajustée par le facteur d'annualisation et le montant notionel. Si au contraire, $h_{t+90} < F_{t,t+90}$, le détenteur du contrat à terme devra déboursier le montant déterminé par l'équation (22).

6.4 Option d'achat sur la variance du rendement de la devise CAD-USD

Le deuxième cas de figure traité est une option d'achat européenne dont la variable aléatoire sous-jacente est la variance du rendement de la devise CAD-USD. En modélisant l'évolution de la variance par le processus NGARCH défini à l'équation (2), il sera possible de déterminer la valeur de l'option d'achat par l'approximation analytique (15). La fonction de gains et pertes à échéance de l'option, incluant la prime payée, est

$$GP_C = 252 N [h_{t+s} - K]^+ - C_{S_L} \quad (23)$$

où N représente le montant notional, h_{t+s} le niveau de la variance conditionnelle à échéance du contrat, s l'échéance, K le prix d'exercice de l'option et C_{S_L} la prime payée lors de l'achat de l'option en t .

Les estimations obtenues pour la devise CAD-USD $\{\beta_0 = 1.36e - 7, \beta_1 = 0.9431, \beta_2 = 0.0374, \theta + \lambda = 0.2992\}$, l'échéance de l'option et le niveau initial de la variance conditionnelle sont nécessaires afin de déterminer les quatre premiers moments analytiques de la variance conditionnelle. L'échéance est fixée à 252 jours, le montant notional $N = 1\,000\,000\text{\$}$ et, pour les fins de cet exemple, la valeur initiale de la variance conditionnelle (h_{t+1}) est fixée à son niveau stationnaire $E^Q[h]$. Le prix d'exercice de l'option (K), légèrement en-jeu, est fixé à $0.95 h_{t+1}$ ce qui correspond à $K = 7.9946e - 6$. L'application de l'approximation analytique basée sur le système S_L (15) permet d'évaluer la valeur de l'option d'achat européenne, $C_{S_L} = 291.47\text{\$}$; ce montant inclut l'effet du montant notional et du facteur d'annualisation. Ainsi, si à l'échéance de l'option, $h_{t+252} > K$, le détenteur recevra la différence entre ces deux quantités ajustée par le facteur d'annualisation et le montant notional. Si au contraire, $h_{t+252} < K$, le détenteur de l'option ne reçoit rien et subit donc une perte équivalente à la valeur payée pour l'option.

6.5 Analyse de sensibilité

Cette section utilise le cas d'une option d'achat portant sur la variance du rendement de la devise USD-EUR afin d'étudier la sensibilité de la valeur d'une option d'achat européenne à divers facteurs tels que l'échéance et le niveau initial de la variance conditionnelle. Le tableau 7 présente les paramètres estimés du processus NGARCH sous la mesure physique pour la devise USD-EUR.

La figure 6 présente la valeur d'une option d'achat européenne dont le prix d'exercice est fixé au niveau stationnaire de la variance pour différentes valeurs initiales de la variance conditionnelle (h_{t+1}) et pour des échéances de 10, 30 et 90 jours. De façon similaire à une option portant sur le niveau de l'actif risqué, la valeur de l'option augmente avec le niveau initial de la variable sous-jacente. Cependant, on constate qu'à partir d'un certain niveau, les options de courtes échéances ont une valeur supérieure aux options d'échéances plus longues. Cette caractéristique, contraire à ce qui est généralement observé, provient de la dynamique de retour vers la moyenne de la variance conditionnelle. Lorsque le niveau de la variance est faible, la probabilité que ce dernier revienne vers le niveau moyen augmente avec l'échéance et pour cette raison, les options de longues échéances

ont une valeur supérieure aux options de courtes échéances. À l'inverse, si le niveau initial de la variance conditionnelle est élevé, la probabilité d'un retour vers le niveau stationnaire augmente avec l'horizon considéré. Par conséquent, pour des niveaux de variance élevé, les options de courtes échéances ont une valeur supérieure aux options de plus longues échéances.

La figure 7 présente la valeur d'une option d'achat européenne dont le prix d'exercice est fixé à $E^Q[h]$ pour différentes échéances et pour des niveaux courants de la variance conditionnelle fixés à $0.80 E^Q[h]$, $1.00 E^Q[h]$ et $1.20 E^Q[h]$. Cette figure permet de confirmer la présence d'une valeur temps négative lorsque le niveau initial de la variance conditionnelle est élevé. Lorsque l'échéance augmente, la valeur des trois options converge vers la même quantité ce qui dénote que l'impact du niveau initial de la variance diminue avec l'échéance de l'option ; une autre conséquence de la dynamique de retour vers la moyenne de la variance conditionnelle. Éventuellement, le niveau de départ n'a plus d'effet et peu importe h_{t+1} , la valeur de l'option d'achat est la même.

7 Généralisation de la méthodologie à d'autres modèles GARCH

La méthodologie proposée dans le cadre de ce mémoire peut être appliquée à tout autre modèle de la famille GARCH permettant l'identification via des expressions analytiques des quatre premiers moments non-centrés de la variance conditionnelle future ou du rendement, dans le cas d'un titre contingent portant sur le niveau de l'actif risqué. Les approximations analytiques développées peuvent s'appliquer directement au cas du modèle GARCH symétrique de Bollerslev (1986) puisque, sous la mesure neutre au risque (Q), la dynamique de la variance conditionnelle devient celle du modèle NGARCH dont le paramètre θ est nul.

Outre le processus NGARCH utilisé dans ce mémoire, deux exemples de modèles GARCH asymétriques sont les modèles GJR-GARCH de Glosten, Jagannathan & Runkle (1993) ainsi que le modèle EGARCH de Nelson (1991). Afin d'utiliser ces deux modèles pour la tarification de produits dérivés portant sur la variance conditionnelle future, il est nécessaire d'identifier les expressions analytiques des quatre premiers moments non-centrés de h_{t+s} ; ces développements sont présentés dans Sasseville (2002).

L'extension de la méthodologie au cas du modèle EGARCH permet également la tarification de titres contingent européens portant sur la volatilité conditionnelle future étant donné que les expressions analytiques permettent d'évaluer les moments non-centrés d'ordre fractionnaires de la variance conditionnelle future et, par conséquent, ceux de la volatilité conditionnelle future.

8 Conclusion

Ce mémoire propose deux classes d'approximations analytiques permettant la tarification d'une option d'achat européenne portant sur la variance dans le contexte du modèle de marché NGARCH. Parmi les approximations analytiques proposées, celle basée sur le système lognormal des fonctions de densité de Johnson permet d'obtenir les meilleurs résultats. L'erreur d'approximation, outre pour certains cas particuliers, est généralement faible. Les produits dérivés de variance n'étant pas transigés sur les marchés organisés, il est impossible de valider les résultats obtenus à partir de prix observés.

Les travaux de Duan, Gauthier & Simonato (1999) ainsi que de Sasseville (2002) utilisent une approximation analytique basée sur un développement en série de Edgeworth généralisé pour évaluer une option d'achat européenne portant sur le niveau de l'actif risqué dans le contexte d'un modèle de marché GARCH. Une application directe de la méthodologie proposée dans ce mémoire consisterait à évaluer la performance numérique obtenue dans ce contexte par une approximation analytique basée sur les fonctions de densité de Johnson. Cette dernière s'est avérée une alternative plus performante que l'approximation analytique basée sur un développement en série de Edgeworth généralisé dans le cas d'une option d'achat européenne portant sur la variance.

La méthodologie proposée peut facilement être adaptée à d'autres modèles GARCH et généralisée au cas d'options européennes portant sur la volatilité avec le processus EGARCH. Trois avenues non explorées dans le cadre de ce mémoire, mais dignes d'intérêt sont le développement d'une stratégie de réplication à l'aide d'instruments transigés et l'ajustement des approximations analytiques pour une option dont le type d'exercice est américain et une option asiatique.

A Expressions reliées à la variance conditionnelle future

Cette section développe les diverses expressions reliées à la variance conditionnelle future, définie par h_{t+s} où $t \geq 0$ dénote l'instant présent et $s > 0$ le nombre de périodes futures considérées.

A.1 Expression de h_{t+s}

Lemme 1 *Sous Q , la variance conditionnelle du rendement d'un actif risqué à la période $t + s$ est caractérisée par la forme récursive suivante :*

$$h_{t+s} = \beta_0 + h_t \prod_{i=0}^{s-1} Y_{t+i} + \beta_0 \sum_{i=1}^{s-1} \prod_{j=1}^i Y_{t+s-j}, \quad (24)$$

où

$$Y_{t+i} = \beta_1 + \beta_2(\epsilon_{t+i} - (\theta + \lambda))^2, i \geq 0. \quad (25)$$

De plus, la variable Y_{t+i} est indépendante de h_{t+j} pour tout $i \geq j$.

Preuve 1

Sous la mesure Q , la dynamique du processus NGARCH est la suivante,

$$h_{t+s} = \beta_0 + \beta_1 h_{t+s-1} + \beta_2 h_{t+s-1} (\epsilon_{t+s-1} - (\theta + \lambda))^2. \quad (26)$$

En posant

$$Y_{t+i} = \beta_1 + \beta_2(\epsilon_{t+i} - (\theta + \lambda))^2, i \geq 0, \quad (27)$$

nous trouvons

$$h_{t+s} = \beta_0 + h_{t+s-1} Y_{t+s-1}. \quad (28)$$

L'équation (24) caractérisant la variance conditionnelle future est obtenue via l'application récursive de l'équation (28). L'indépendance entre Y_{t+i} et h_{t+j} , $i \geq j$ provient du fait que h_{t+i} est \mathcal{F}_{t+i-1} -mesurable et que ϵ_{t+i} est indépendante de \mathcal{F}_{t+i-1} . ■

A.2 Moments non-centrés d'ordre entier de h_{t+s}

Les expressions permettant d'établir le lien entre les moments non-centrés de la variance conditionnelle sont développées ci-dessous. L'application récursive de ces expressions permet d'évaluer analytiquement tout moment $E_t^Q [h_{t+s}^n]$ où n est un nombre entier et positif.

A.2.1 Expression de $E_t^Q [h_{t+s}^n]$

Lemme 2

$$E_t^Q [h_{t+s}^n] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_0^{n-k} E_t^Q [h_{t+s-1}^k] \nu_k \quad (29)$$

où

$$\nu_k = E_t^Q [Y_{t+s}^k]. \quad (30)$$

L'expression caractérisant ν_k est présentée à l'équation (31).

Preuve 2

Le développement suivant reprend la définition de h_{t+s} posée à l'équation (28) en l'élevant à la puissance n et en développant l'espérance conditionnelle sous la mesure Q . Pour ce faire, la propriété d'indépendance entre h_{t+s} et Y_{t+s} proposée au lemme 1 est utilisée. Également, puisque pour tout $s > 0$, la variable Y_{t+s} est indépendante de \mathcal{F}_t , nous posons $\nu_k = E_t^Q [Y_{t+s}^k]$, $s > 0$.

$$\begin{aligned} E_t^Q [h_{t+s}^n] &= E_t^Q [(\beta_0 + h_{t+s-1} Y_{t+s-1})^n] \\ &= E_t^Q \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_0^{n-k} (h_{t+s-1} Y_{t+s-1})^k \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_0^{n-k} E_t^Q [(h_{t+s-1} Y_{t+s-1})^k] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_0^{n-k} E_t^Q [h_{t+s-1}^k] E_t^Q [Y_{t+s-1}^k] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \beta_0^{n-k} E_t^Q [h_{t+s-1}^k] \nu_k. \blacksquare \end{aligned}$$

A.2.2 Expression de $\nu_k = E_t^Q [Y_{t+s}^k]$

Lemme 3

$$\nu_k = E_t^Q [Y_{t+s}^k] = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \beta_1^{k-j} \beta_2^j \eta_j \quad (31)$$

où

$$\eta_j = E_t^Q [(\epsilon_{t+s} - (\theta + \lambda))^{2j}]. \quad (32)$$

L'expression caractérisant η_j est présentée à l'équation (33).

Preuve 3

Ce développement présente l'expression caractérisant ν_k . Puisque pour tout $s > 0$, la variable ϵ_{t+s} est indépendante de \mathcal{F}_t , nous posons $\eta_j = E_t^Q[(\epsilon_{t+s} - (\theta + \lambda))^{2j}]$, $s > 0$.

$$\begin{aligned}
E_t^Q [Y_{t+s}^k] &= E_t^Q [(\beta_1 + \beta_2(\epsilon_{t+s} - (\theta + \lambda)))^{2k}] \\
&= E_t^Q \left[\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \beta_1^{k-j} \beta_2^j (\epsilon_{t+s} - (\theta + \lambda))^{2j} \right] \\
&= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \beta_1^{k-j} \beta_2^j E_t^Q [(\epsilon_{t+s} - (\theta + \lambda))^{2j}] \\
&= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \beta_1^{k-j} \beta_2^j \eta_j. \blacksquare
\end{aligned}$$

A.2.3 Expression de $\eta_j = E_t^Q[(\epsilon_{t+s} - (\theta + \lambda))^{2j}]$

Lemme 4

$$\eta_j = E_t^Q [(\epsilon_{t+s} - (\theta + \lambda))^{2j}] = \sum_{l=0}^j \binom{2j}{2l} (\theta + \lambda)^{2(j-l)} \frac{(2l)!}{2^l l!}. \quad (33)$$

Preuve 4

$$\begin{aligned}
E_t^Q [(\epsilon_{t+s} - (\theta + \lambda))^{2j}] &= E_t^Q \left[\sum_{l=0}^{2j} \binom{2j}{l} \epsilon_{t+s}^l (-\theta - \lambda)^{2j-l} \right] \\
&= \sum_{l=0}^j \binom{2j}{2l} (-\theta - \lambda)^{2(j-l)} E_t^Q [\epsilon_{t+s}^{2l}] \\
&= \sum_{l=0}^j \binom{2j}{2l} (\theta + \lambda)^{2(j-l)} \frac{(2l)!}{2^l l!}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Le prochain lemme permet d'établir $E_t^Q [\epsilon_{t+s}^{2l}] = \frac{(2l)!}{2^l l!}$.

A.2.4 Expression de $E_t^Q [\epsilon_{t+s}^{2l}]$

Lemme 5

$$E[Z^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \quad (34)$$

où Z est distribuée selon une loi normale centrée et réduite.

Preuve 5

$$\begin{aligned} E[Z^{2n}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} z^{2n} dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} z^{2n} dz. \end{aligned}$$

Le passage suivant repose sur le changement de variable $t = \frac{z^2}{2}$ qui implique $z = \sqrt{2t}$ et $dz = \frac{1}{\sqrt{2t}} dt$. Par définition de la fonction gamma, on observe $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

$$\begin{aligned} E[Z^{2n}] &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} (2t)^n \frac{1}{\sqrt{2t}} dt \\ &= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Le dernier passage utilise les deux propriétés suivantes de la fonction gamma : $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ pour n entier et positif et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

$$\begin{aligned} E[Z^{2n}] &= \frac{2^n \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \prod_{i=1}^n \left(i - \frac{1}{2}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n (2i - 1) \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!}. \blacksquare \end{aligned}$$

A.3 Conditions assurant la convergence des moments non-centrés de h_{t+s}

Lemme 6 *Afin d'assurer que les n premiers moments entiers de la variance conditionnelle sous la mesure Q n'explorent pas et qu'ils convergent vers une valeur stationnaire finie lorsque $s \rightarrow \infty$, les paramètres du modèle NGARCH doivent vérifier les conditions suivantes :*

$$\nu_k < 1, \quad k = 1, \dots, n. \quad (35)$$

Preuve 6

L'équation (29) peut être réexprimée comme suit :

$$E_t^Q [h_{t+s}^n] - \nu_n E_t^Q [h_{t+s-1}^n] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta_0^{n-k} E_t^Q [h_{t+s-1}^k] \nu_k. \quad (36)$$

Si les n premiers moments de h_{t+s} sont stationnaires, on doit retrouver la relation $\lim_{s \rightarrow \infty} E_t^Q [h_{t+s}^n] = E^Q [h^n]$ où $E^Q [h^n]$ est le moment stationnaire d'ordre n . Afin de respecter l'hypothèse de stationnarité des moments non-centrés de h_{t+s} , lorsque $s \rightarrow \infty$, l'égalité suivante doit être respectée :

$$E^Q[h^n] = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \beta_0^{n-k} E^Q[h^k] \nu_k}{1 - \nu_n}. \quad (37)$$

$E^Q[h^n]$ est un nombre positif réel fini si et seulement si $\nu_n < 1$ et $E^Q[h^k]$ est fini pour $k = 1, \dots, n-1$.

Cette condition récursive implique que pour assurer la convergence vers une valeur stationnaire finie des n premiers moments de h_{t+s} sous la mesure Q , les paramètres du modèle NGARCH doivent vérifier $\nu_k < 1$, $k = 1, \dots, n$ où ν_k est défini par l'équation (31). ■

A.4 Expression des moments non-centrés de h_{t+s} sous forme matricielle

Lemme 7 *Les moments de la variance conditionnelle future h_{t+s} obtenus par l'application récursive des équations (29) à (33) sont équivalents au vecteur V_{t+s} obtenu par le système matriciel suivant :*

$$V_{t+s} = \beta + \sum_{i=1}^{s-1} M^i \beta + M^s V_t, \quad (38)$$

où

$$V_{t+j} = \begin{bmatrix} E_t^Q [h_{t+j}] \\ E_t^Q [h_{t+j}^2] \\ E_t^Q [h_{t+j}^3] \\ \vdots \\ E_t^Q [h_{t+j}^n] \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_0^2 \\ \beta_0^3 \\ \vdots \\ \beta_0^n \end{bmatrix}, \quad j \geq 0 \quad (39)$$

et

$$M = [m_{ij}], \quad i, j = 1, \dots, n \quad (40)$$

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \beta_0^{i-j} \binom{i}{j} \mu_j & \text{sinon.} \end{cases} \quad (41)$$

Preuve 7

En utilisant les vecteurs β , V_{t+s} et la matrice M tels que définis par les équations (39) à (41), on peut reprendre les équations (29) à (33) par l'équation suivante

$$V_{t+1} = \beta + M V_t. \quad (42)$$

L'application récursive de l'équation (42) permet de retrouver le résultat suivant :

$$V_{t+s} = \beta + \sum_{i=1}^{s-1} M^i \beta + M^s V_t. \quad \blacksquare$$

B Expressions reliées aux fonctions de densité de Johnson

Les trois fonctions de densité proposées par Johnson (1949) sont caractérisées par quatre paramètres. Il est possible de fixer la valeur de ces paramètres de telle sorte que les moments de la variable obtenue par les fonctions de densité de Johnson égalent des valeurs cibles. Les sections suivantes développent les expressions de tout moment non-centré d'ordre n entier et positif d'une variable Y dont la distribution est de type S_U et S_L . Ces expressions serviront dans la procédure d'optimisation permettant de déterminer la valeur des paramètres a , b , c et d afin de reproduire les moments de la variance conditionnelle future (h_{t+s}).

B.1 Système non-borné S_U

Le système non-borné (S_U) est caractérisé par la transformation non-linéaire suivante :

$$Y = \psi_{S_U}(Z) \quad (43)$$

où $\psi_{S_U}(Z) = a + b \sinh\left(\frac{Z-c}{d}\right)$ et Z est une variable aléatoire distribuée selon une loi normale centrée et réduite.

B.1.1 Fonction de densité du système S_U

Lemme 8 *La fonction de densité associée au système S_U correspond à :*

$$f_{S_U}(y) = n(\psi_{S_U}^{-1}(y)) \frac{d}{b\sqrt{1 + \left(\frac{y-a}{b}\right)^2}} \quad (44)$$

où $n(\bullet)$ correspond à la fonction de densité d'une distribution normale centrée et réduite.

Preuve 8

Soit F_{S_U} , la fonction de répartition associée à la variable $Y = \psi_{S_U}(Z)$ où Z est distribuée selon une loi normale centrée et réduite. Puisque la transformation ψ_{S_U} est une fonction croissante, si $b > 0$ et $d > 0$, et inversible, on peut poser

$$\begin{aligned} F_{S_U}(y) &= P[Y \leq y] \\ &= P[\psi_{S_U}(Z) \leq y] \\ &= P[Z \leq \psi_{S_U}^{-1}(y)] \\ &= N(\psi_{S_U}^{-1}(y)) \end{aligned}$$

où $N(\bullet)$ correspond à la fonction de répartition d'une distribution normale centrée et réduite. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
f_{S_U}(y) &= \frac{d}{dy} F_{S_U}(y) \\
&= \frac{d}{dy} N\left(\psi_{S_U}^{-1}(y)\right) \\
&= n\left(\psi_{S_U}^{-1}(y)\right) \frac{d}{dy} \psi_{S_U}^{-1}(y) \\
&= n\left(\psi_{S_U}^{-1}(y)\right) \frac{d}{b\sqrt{1+\left(\frac{y-a}{b}\right)^2}}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Afin d'assurer la positivité de f_{S_U} , les paramètres b et d doivent être de même signe.

B.1.2 Moments non-centrés du système S_U

Lemme 9

$$E\left[\left(a + b \sinh\left(\frac{Z-c}{d}\right)\right)^n\right] = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} e^{\frac{c}{d}(n-k-2j)} e^{\frac{(2j+k-n)^2}{2d^2}}. \quad (45)$$

Preuve 9

$$\begin{aligned}
E\left[\left(a + b \sinh\left(\frac{Z-c}{d}\right)\right)^n\right] &= E\left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \left(b \sinh\left(\frac{Z-c}{d}\right)\right)^{n-k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} E\left[\sinh\left(\frac{Z-c}{d}\right)^{n-k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n-k}} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} E\left[\left(e^{\frac{Z-c}{d}} - e^{-\frac{Z-c}{d}}\right)^{n-k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} E\left[e^{\frac{j(Z-c)}{d} - \frac{(n-k-j)(Z-c)}{d}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} e^{\frac{c}{d}(n-k-2j)} e^{\frac{(2j+k-n)^2}{2d^2}}. \blacksquare
\end{aligned}$$

B.2 Système lognormale S_L

Le système lognormale (S_L) est caractérisé par la transformation non-linéaire suivante :

$$Y = \psi_{S_L}(Z) \quad (46)$$

où $\psi_{S_L}(Z) = a + b \exp\left(\frac{Z-c}{d}\right)$ et Z est une variable aléatoire distribuée selon une loi normale centrée et réduite.

B.2.1 Fonction de densité du système S_L

Lemme 10 *La fonction de densité associée au système S_L et correspond à :*

$$f_{S_L}(y) = \frac{d}{y-a} n(\psi_{S_L}^{-1}(y)) \quad (47)$$

où $n(\bullet)$ correspond à la fonction de densité d'une distribution normale centrée et réduite et ψ_{S_L} la transformation décrite à l'équation (46).

Preuve 10

Soit F_{S_L} , la fonction de répartition associée à une variable $Y = \psi_{S_L}(Z)$ où Z est distribuée selon une loi normale centrée et réduite. Puisque la transformation ψ_{S_L} est une fonction inversible, on peut poser

$$\begin{aligned} F_{S_L}(y) &= P[Y \leq y] \\ &= P[\psi_{S_L}(Z) \leq y] \\ &= P\left[Z \leq \psi_{S_L}^{-1}(y)\right] \\ &= N\left(\psi_{S_L}^{-1}(y)\right) \end{aligned}$$

où $N(\bullet)$ correspond à la fonction de répartition d'une distribution normale centrée et réduite. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f_{S_L}(y) &= \frac{d}{dy} F_{S_L}(y) \\ &= \frac{d}{dy} N\left(\psi_{S_L}^{-1}(y)\right) \\ &= n\left(\psi_{S_L}^{-1}(y)\right) \frac{d}{dy} \psi_{S_L}^{-1}(y) \\ &= n\left(\psi_{S_L}^{-1}(y)\right) \frac{d}{y-a}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Afin d'assurer la positivité de f_{S_L} , le paramètre d doit être positif.

B.2.2 Moments non-centrés du système S_L

Lemme 11

$$E \left[\left(a + b e^{\left(\frac{Z-c}{d} \right)} \right)^n \right] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} e^{\left(\frac{(n-k)^2 - 2d(n-k)c}{2d^2} \right)}. \quad (48)$$

Preuve 11

$$\begin{aligned} E \left[\left(a + b e^{\left(\frac{Z-c}{d} \right)} \right)^n \right] &= E \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \left(b e^{\left(\frac{Z-c}{d} \right)} \right)^{n-k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} E \left[e^{\left(\frac{(n-k)(Z-c)}{d} \right)} \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} e^{\left(\frac{(n-k)^2 - 2d(n-k)c}{2d^2} \right)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

C Approximations analytiques basées sur les fonctions de densité de Johnson

C.1 Valeur d'une option d'achat européenne pour le système S_U

Dans cette section, nous allons montrer que la valeur d'une option d'achat européenne, lorsque la distribution de la variable sous-jacente à échéance peut être approchée par le système S_U des fonctions de densité de Johnson, est donnée par :

$$\begin{aligned} C_{S_U}(K, s; \theta_Y) &= e^{-rs} \left(a - be^{\frac{1}{2d^2}} \sinh\left(\frac{c}{d}\right) - K \right) \\ &+ \frac{be^{-rs}e^{\frac{1}{2d^2}}}{2} \left(e^{\frac{c}{d}} N\left(\kappa + \frac{1}{d}\right) - e^{\frac{-c}{d}} N\left(\kappa - \frac{1}{d}\right) \right) + e^{-rs}(K - a)N(\kappa) \end{aligned} \quad (49)$$

où K est le prix d'exercice de l'option, s l'échéance de l'option en nombre de périodes, $N(\bullet)$ la fonction de répartition d'une distribution normale centrée et réduite, $\theta_Y = [a \ b \ c \ d]^T$ le vecteur de paramètres permettant de reproduire les quatre premiers moments non-centrés de la variable sous-jacente via la transformation décrite par l'équation (43) et $\kappa = \psi_{S_U}^{-1}(K)$.

Lemme 12 *En notant la fonction de densité associée au système S_U permettant de reproduire les quatre premiers moments non-centrés de la variable sous-jacente au titre contingent par f_{S_U} , on retrouve*

$$C_{S_U}(K, s; \theta_Y) = e^{-rs} \left(a - be^{\frac{1}{2d^2}} \sinh\left(\frac{c}{d}\right) - K \right) - e^{-rs} \int_{-\infty}^K (y - K) f_{S_U}(y) dy \quad (50)$$

où

$$\int_{-\infty}^K (y - K) f_{S_U}(y) dy = -\frac{be^{\frac{-c}{d}}}{2} \int_{-\infty}^{\kappa} n(z)(e^{\frac{\kappa}{d}} - e^{\frac{z}{d}}) dz + \frac{be^{\frac{c}{d}}}{2} \int_{-\infty}^{\kappa} n(z)(e^{\frac{-\kappa}{d}} - e^{\frac{-z}{d}}) dz, \quad (51)$$

$$\int_{-\infty}^{\kappa} n(z)(e^{\frac{\kappa}{d}} - e^{\frac{z}{d}}) dz = N(\kappa)e^{\frac{\kappa}{d}} - e^{\frac{1}{2d^2}} N\left(\kappa - \frac{1}{d}\right), \quad (52)$$

$$\int_{-\infty}^{\kappa} n(z)(e^{\frac{-\kappa}{d}} - e^{\frac{-z}{d}}) dz = N(\kappa)e^{\frac{-\kappa}{d}} - e^{\frac{1}{2d^2}} N\left(\kappa + \frac{1}{d}\right). \quad (53)$$

Le développement présenté ci-dessous permet de poser de poser l'équation (50). La résolution des trois intégrales impliquées dans cette équation est proposée dans les lemmes 13, 14 et 15. En combinant ces résultats, on obtient la valeur d'une option d'achat européenne pour le système S_U (49).

Preuve 12

$$\begin{aligned}
C_{S_U}(K, s; \theta_Y) &= e^{-rs} \int_{-\infty}^{\infty} (y - K)^+ f_{S_U}(y) dy \\
&= e^{-rs} \int_K^{\infty} (y - K) f_{S_U}(y) dy \\
&= e^{-rs} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{S_U}(y) dy - e^{-rs} K \int_{-\infty}^{\infty} f_{S_U}(y) dy - e^{-rs} \int_{-\infty}^K (y - K) f_{S_U}(y) dy \\
&= e^{-rs} (E[Y] - K) - e^{-rs} \int_{-\infty}^K (y - K) f_{S_U}(y) dy \\
&= e^{-rs} \left(a - be^{\frac{1}{2a^2}} \sinh\left(\frac{c}{d}\right) - K \right) - e^{-rs} \int_{-\infty}^K (y - K) f_{S_U}(y) dy. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

L'espérance de la variable aléatoire Y , dont la distribution est déterminée par le système S_U des fonctions de densité de Johnson est obtenue en utilisant l'équation (45) qui permet de calculer tout moment non-centré d'ordre n entier et positif d'une variable obtenue par le système S_U . La résolution de l'intégrale $\int_{-\infty}^K (y - K) f_{S_U}(y) dy$ est proposée ci-dessous.

C.1.1 Résolution de l'intégrale $\int_{-\infty}^K (y - K) f_{S_U}(y) dy$

Lemme 13

$$\int_{-\infty}^K (y - K) f_{S_U}(y) dy = -\frac{be^{-\frac{c}{d}}}{2} \int_{-\infty}^{\kappa} n(z) (e^{\frac{\kappa}{d}} - e^{\frac{z}{d}}) dz + \frac{be^{\frac{c}{d}}}{2} \int_{-\infty}^{\kappa} n(z) (e^{-\frac{\kappa}{d}} - e^{-\frac{z}{d}}) dz \quad (54)$$

où $n(\bullet)$ est la fonction de densité d'une distribution normale centrée et réduite.

Preuve 13

Le premier passage de ce développement fait appel à l'intégration par partie. On utilise ensuite la relation $Y = \psi_{S_U}(Z)$ pour substituer f_{S_U} par la fonction de densité d'une distribution normale centrée et réduite.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^K (y - K) f_{S_U}(y) dy &= (y - K) \left(\int_{-\infty}^y f_{S_U}(z) dz \right) \Big|_{-\infty}^K - \int_{-\infty}^K \left(\int_{-\infty}^y f_{S_U}(z) dz \right) dy \\
&= - \int_{-\infty}^K \left(\int_{-\infty}^y f_{S_U}(z) dz \right) dy \\
&= - \int_{-\infty}^K \left(\int_{-\infty}^{\psi_{S_U}^{-1}(y)} n(z) dz \right) dy.
\end{aligned}$$

Le changement de variable $v = \psi_{S_U}^{-1}(y)$, entraînant $\kappa = \psi_{S_U}^{-1}(K)$ et $dy = \frac{b}{d} \cosh\left(\frac{v-c}{d}\right) dv$, permet de poursuivre et compléter la démonstration.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^K (y - K) f_{S_U}(y) dy &= - \int_{-\infty}^{\kappa} \left(\int_{-\infty}^v n(z) dz \right) \cosh\left(\frac{v-c}{d}\right) \frac{b}{d} dv \\
&= - \frac{b}{2d} \int_{-\infty}^{\kappa} \int_{-\infty}^v n(z) e^{\frac{v-c}{d}} dz dv - \frac{b}{2d} \int_{-\infty}^{\kappa} \int_{-\infty}^v n(z) e^{-\frac{(v-c)}{d}} dz dv \\
&= - \frac{be^{-\frac{c}{d}}}{2d} \int_{-\infty}^{\kappa} n(z) \int_z^{\kappa} e^{\frac{v}{d}} dv dz - \frac{be^{\frac{c}{d}}}{2d} \int_{-\infty}^{\kappa} n(z) \int_z^{\kappa} e^{-\frac{v}{d}} dv dz \\
&= - \frac{be^{-\frac{c}{d}}}{2} \int_{-\infty}^{\kappa} n(z) (e^{\frac{\kappa}{d}} - e^{\frac{z}{d}}) dz + \frac{be^{\frac{c}{d}}}{2} \int_{-\infty}^{\kappa} n(z) (e^{-\frac{\kappa}{d}} - e^{-\frac{z}{d}}) dz. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

C.1.2 Résolution de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\kappa} n(z) (e^{\frac{\kappa}{d}} - e^{\frac{z}{d}}) dz$

Lemme 14

$$\int_{-\infty}^{\kappa} n(z) (e^{\frac{\kappa}{d}} - e^{\frac{z}{d}}) dz = N(\kappa) e^{\frac{\kappa}{d}} - e^{\frac{1}{2d^2}} N\left(\kappa - \frac{1}{d}\right) \quad (55)$$

où $N(\bullet)$ est la fonction de répartition d'une distribution normale centrée et réduite.

Preuve 14

Afin de compléter ce développement, le changement de variable $x = z - \frac{1}{d}$ est employé.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\kappa} n(z) (e^{\frac{\kappa}{d}} - e^{\frac{z}{d}}) dz &= \int_{-\infty}^{\kappa} n(z) e^{\frac{\kappa}{d}} dz - \int_{-\infty}^{\kappa} n(z) e^{\frac{z}{d}} dz \\
&= N(\kappa) e^{\frac{\kappa}{d}} - \int_{-\infty}^{\kappa - \frac{1}{d}} n\left(x + \frac{1}{d}\right) e^{\frac{x+1}{d}} dx \\
&= N(\kappa) e^{\frac{\kappa}{d}} - \int_{-\infty}^{\kappa - \frac{1}{d}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{d^2}\right)} dx \\
&= N(\kappa) e^{\frac{\kappa}{d}} - e^{\frac{1}{2d^2}} N\left(\kappa - \frac{1}{d}\right). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

C.1.3 Résolution de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\kappa} n(z) (e^{-\frac{\kappa}{d}} - e^{-\frac{z}{d}}) dz$

Lemme 15

$$\int_{-\infty}^{\kappa} n(z) (e^{-\frac{\kappa}{d}} - e^{-\frac{z}{d}}) dz = N(\kappa) e^{-\frac{\kappa}{d}} - e^{\frac{1}{2d^2}} N\left(\kappa + \frac{1}{d}\right).$$

Preuve 15

Afin de compléter ce développement, le changement de variable $x = z + \frac{1}{d}$ est employé.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\kappa} n(z)(e^{\frac{-\kappa}{d}} - e^{\frac{-z}{d}})dz &= e^{\frac{-\kappa}{d}} \int_{-\infty}^{\kappa} n(z)dz - \int_{-\infty}^{\kappa} n(z)e^{\frac{-z}{d}} dz \\
&= N(\kappa)e^{\frac{-\kappa}{d}} - \int_{-\infty}^{\kappa+\frac{1}{d}} n\left(x - \frac{1}{d}\right) e^{\frac{-(x-\frac{1}{d})}{d}} dx \\
&= N(\kappa)e^{\frac{-\kappa}{d}} - \int_{-\infty}^{\kappa+\frac{1}{d}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{d^2})} dx \\
&= N(\kappa)e^{\frac{-\kappa}{d}} - e^{\frac{1}{2d^2}} N\left(\kappa + \frac{1}{d}\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

C.2 Valeur d'une option d'achat européenne pour le système S_L

Dans cette section nous allons montrer que la valeur d'une option d'achat européenne, lorsque la distribution de la variable sous-jacente à échéance peut être approchée par le système S_L des fonctions de densité de Johnson, est donnée par :

$$C_{S_L}(K, s; \theta_Y) = e^{-rs} \left(a + be^{\left(\frac{1}{2d^2} - \frac{c}{d}\right)} - K \right) + e^{-rs} \left((K - a)N(\vartheta) - be^{\left(\frac{1}{2d^2} - \frac{c}{d}\right)} N\left(\vartheta - \frac{1}{d}\right) \right) \quad (56)$$

où K est le prix d'exercice de l'option, s l'échéance de l'option en nombre de périodes, $N(\bullet)$ la fonction de répartition d'une distribution normale centrée et réduite, $\theta_Y = [a \ b \ c \ d]^T$ le vecteur de paramètres permettant de reproduire les trois premiers moments non-centrés de la variable sous-jacente via la transformation décrite par l'équation (46) et $\vartheta = \psi_{S_L}^{-1}(K)$.

Lemme 16 *En notant la fonction de densité associée au système S_L et permettant de reproduire les trois premiers moments non-centrés de la variable sous-jacente au titre contingent par f_{S_L} , on retrouve*

$$C_{S_L}(K, s; \theta_{Y_{t+s}}) = e^{-rs} \left(a + be^{\left(\frac{1}{2d^2} - \frac{c}{d}\right)} - K \right) - e^{-rs} \int_0^K (y - K) f_{S_L}(y) dy \quad (57)$$

où

$$\int_0^K (y - K) f_{S_L}(y) dy = -be^{\frac{-c}{d}} \left(N(\vartheta) e^{\frac{\vartheta}{d}} - e^{\frac{1}{2d^2}} N\left(\vartheta - \frac{1}{d}\right) \right). \quad (58)$$

Le développement présenté ci-dessous permet de poser de poser l'équation (57). La résolution de l'intégrale impliquée dans cette équation est proposée dans le lemme 17. En combinant ces résultats, on obtient la valeur d'une option d'achat européenne pour le système S_L (56).

Preuve 16

$$\begin{aligned}
C_{S_L}(K, s; \theta_Y) &= e^{-rs} \int_0^\infty (y - K)^+ f_{S_L}(y) dy \\
&= e^{-rs} \int_K^\infty (y - K) f_{S_L}(y) dy \\
&= e^{-rs} \int_0^\infty y f_{S_L}(y) dy - e^{-rs} \int_0^\infty K f_{S_L}(y) dy - e^{-rs} \int_0^K (y - K) f_{S_L}(y) dy \\
&= e^{-rs} (E[Y] - K) - e^{-rs} \int_0^K (y - K) f_{S_L}(y) dy \\
&= e^{-rs} \left(a + be^{\left(\frac{1}{2d^2} - \frac{c}{d}\right)} - K \right) - e^{-rs} \int_0^K (y - K) f_{S_L}(y) dy. \quad \blacksquare \tag{59}
\end{aligned}$$

L'espérance de la variable aléatoire Y , dont la distribution est déterminée par le système S_L des fonctions de densité de Johnson est obtenue en utilisant l'équation (48) qui permet de calculer tout moment non-centré d'ordre n entier et positif d'une variable obtenue par le système S_L . La résolution de l'intégrale $\int_{-\infty}^K (y - K) f_{S_L}(y) dy$ est proposée ci-dessous.

C.2.1 Résolution de l'intégrale $\int_0^K (y - K) f_{S_L}(y) dy$

Lemme 17

$$\int_0^K (y - K) f_{S_L}(y) dy = -be^{-\frac{c}{d}} \left(N(\vartheta) e^{\frac{\vartheta}{d}} - e^{\frac{1}{2d^2}} N\left(\vartheta - \frac{1}{d}\right) \right) \tag{60}$$

où $n(\bullet)$ est la fonction de densité d'une distribution normale centrée et réduite.

Preuve 17

Le premier passage de ce développement fait appel à l'intégration par partie. On utilise ensuite la relation $Y = \psi_{S_L}(Z)$ pour substituer f_{S_L} par la fonction de densité d'une distribution normale centrée et réduite.

$$\begin{aligned}
\int_0^K (y - K) f_{S_L}(y) dy &= (y - K) \left(\int_{-\infty}^y f_{S_L}(z) dz \right) \Big|_0^K - \int_0^K \left(\int_{-\infty}^y f_{S_L}(z) dz \right) dy \\
&= - \int_0^K \left(\int_{-\infty}^y f_{S_L}(z) dz \right) dy \\
&= - \int_0^K \left(\int_{-\infty}^{\psi_{S_L}^{-1}(y)} n(z) dz \right) dy.
\end{aligned}$$

Le changement de variable $v = \psi_{S_L}^{-1}(y)$, entraînant $\vartheta = \psi_{S_L}^{-1}(K)$ et $dy = \frac{b}{d}e^{(\frac{v-c}{d})}dv$ et l'utilisation de l'équation (55), permettent de poursuivre et compléter la démonstration.

$$\begin{aligned}
\int_0^K (y - K)f_{S_L}(y) &= -\int_{-\infty}^{\vartheta} \left(\int_{-\infty}^v n(z)dz \right) e^{(\frac{v-c}{d})} \frac{b}{d} dv \\
&= -\frac{b}{d} \int_{-\infty}^{\vartheta} \int_{-\infty}^v n(z) e^{\frac{v-c}{d}} dz dv \\
&= -\frac{be^{-\frac{c}{d}}}{d} \int_{-\infty}^{\vartheta} n(z) \int_z^{\vartheta} e^{\frac{v}{d}} dv dz \\
&= -be^{-\frac{c}{d}} \int_{-\infty}^{\vartheta} n(z) (e^{\frac{\vartheta}{d}} - e^{\frac{z}{d}}) dz \\
&= -be^{-\frac{c}{d}} \int_{-\infty}^{\vartheta} n(z) (e^{\frac{\vartheta}{d}} - e^{\frac{z}{d}}) dz \\
&= -be^{-\frac{c}{d}} \left(N(\vartheta) e^{\frac{\vartheta}{d}} - e^{\frac{1}{2d^2}} N\left(\vartheta - \frac{1}{d}\right) \right). \blacksquare
\end{aligned}$$

D Expressions reliées au développement en série de Edgeworth généralisé

Cette section présente tous les développements permettant d'approximer une fonction de densité par un développement en série de Edgeworth généralisé basé sur une distribution lognormale ou sur le système S_L des fonctions de densité de Johnson.

D.1 Approximation d'une fonction de densité par un développement en série de Edgeworth généralisé

Lemme 18 *La fonction de densité d'une variable aléatoire Y dont les moments non-centrés sont identifiés peut être exprimée par un développement en série de Edgeworth généralisé développé autour d'une fonction de densité approximative f_A .*

$$f_Y(y) = f_A(y) - \frac{E_1}{1!} \frac{df_A(y)}{dy} + \frac{E_2}{2!} \frac{d^2 f_A(y)}{dy^2} - \frac{E_3}{3!} \frac{d^3 f_A(y)}{dy^3} + \frac{E_4}{4!} \frac{d^4 f_A(y)}{dy^4} + \varepsilon(y) \quad (61)$$

où

$$E_1 = \kappa_1 - \tilde{\kappa}_1 \quad (62)$$

$$E_2 = \kappa_2 - \tilde{\kappa}_2 + E_1^2 \quad (63)$$

$$E_3 = \kappa_3 - \tilde{\kappa}_3 + 3E_1 E_2 - 2E_1^3 \quad (64)$$

$$E_4 = \kappa_4 - \tilde{\kappa}_4 + 4(\kappa_3 - \tilde{\kappa}_3)E_1 + 3(\kappa_2 - \tilde{\kappa}_2)^2 + 6E_1^2(\kappa_2 - \tilde{\kappa}_2) + E_1^4 \quad (65)$$

et où κ_i , désigne le cumulants d'ordre i de la variable aléatoire Y obtenu à partir des moments non-centrés μ_i . $\tilde{\kappa}_i$ désigne le cumulants d'ordre i associé à la fonction de densité approximative f_A . Les équations (67) à (70) permettent de relier κ_i et μ_i pour $i = 1, \dots, 4$.

Le terme d'erreur $\varepsilon(y)$ contient l'effet des termes d'ordre supérieurs à quatre du développement en série et ne peut généralement pas être borné analytiquement. L'approximation de la fonction de densité f_Y par un développement en série de Edgeworth généralisé d'ordre quatre consiste à reprendre l'équation (61) en omettant le terme d'erreur $\varepsilon(y)$.

$$f_E(y) = f_A(y) - \frac{E_1}{1!} \frac{df_A(y)}{dy} + \frac{E_2}{2!} \frac{d^2 f_A(y)}{dy^2} - \frac{E_3}{3!} \frac{d^3 f_A(y)}{dy^3} + \frac{E_4}{4!} \frac{d^4 f_A(y)}{dy^4} \quad (66)$$

Preuve 18

Se référer à Jarrow & Rudd (1982).

D.1.1 Expression des cumulants κ_i d'une variable aléatoire

Les cumulants apparaissent dans le développement en série de Taylor du logarithme de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire.

Lemme 19 *Les quatre premiers cumulants d'une variable aléatoire κ_i peuvent être exprimés en fonction des moments non-centrés μ_i selon les relations suivantes :*

$$\kappa_1 = \mu_1 \tag{67}$$

$$\kappa_2 = \mu_2 - \mu_1^2 \tag{68}$$

$$\kappa_3 = 2\mu_1^3 - 3\mu_1\mu_2 + \mu_3 \tag{69}$$

$$\kappa_4 = -6\mu_1^4 + 12\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 + \mu_4 \tag{70}$$

Preuve 19

Se référer à Abramowitz & Stegun (1972).

D.2 Développement en série de Edgeworth généralisé basé sur la distribution lognormale

D.2.1 Paramètres de la distribution lognormale

Lemme 20 *Lorsque la fonction de densité approximative employée dans le développement en série de Edgeworth généralisé correspond à une distribution lognormale,*

$$f_L(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y\beta}} e^{-\frac{1}{2\beta^2}(\log(y)-\alpha)^2} \tag{71}$$

il est possible de fixer les paramètres α et β de telle sorte que les deux premiers moments non-centrés associés à f_L soient équivalents à ceux de Y , la variable aléatoire dont on cherche à approximer la fonction de densité.

$$\alpha = 2\log(\mu_1) - \frac{1}{2}\log(\mu_2) \tag{72}$$

$$\beta = \sqrt{\log(\mu_2) - 2\log(\mu_1)} \tag{73}$$

où α et β sont les paramètres de location et dispersion de la distribution lognormale et μ_i le moment non-centré d'ordre i de la variable aléatoire Y .

Preuve 20

Soit une variable aléatoire X dont la fonction de densité est donnée par l'équation (71). Par construction, l'expression des deux premiers moments non-centrés de cette variable correspond aux équations suivantes :

$$E[X] = e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} \quad (74)$$

$$E[X^2] = e^{2\alpha + 2\beta^2} \quad (75)$$

En substituant les expressions de α et β définies par les équations (72) et (73), on retrouve $E[X] = \mu_1$ et $E[X^2] = \mu_2$. ■

Lemme 21 *Si les paramètres α et β de la fonction de densité f_L définie par l'équation (71) respectent les équations (72) et (73), l'approximation de la fonction de densité obtenue par le développement en série de Edgeworth (66) peut être remplacée par*

$$f_{E_L}(y) = f_L(y) - \frac{(\kappa_3 - \tilde{\kappa}_3)}{3!} \frac{d^3 f_L(y)}{dy^3} + \frac{(\kappa_4 - \tilde{\kappa}_4)}{4!} \frac{d^4 f_L(y)}{dy^4} \quad (76)$$

où κ_i correspond au cumulants d'ordre i de la variable aléatoire Y et $\tilde{\kappa}_i$ correspond au cumulants d'ordre i reproduit par la fonction de densité approximative.

Preuve 21

Puisque f_L permet la reproduction des deux premiers moments de la variable Y , on retrouve $\kappa_i = \tilde{\kappa}_i$ pour $i = 1, 2$. Par conséquent, $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ ce qui implique $E_3 = \kappa_3 - \tilde{\kappa}_3$ et $E_4 = \kappa_4 - \tilde{\kappa}_4$. ■

D.2.2 Expression des cumulants κ_i associés à la distribution lognormale

Lemme 22 *Pour une variable dont la fonction de densité est celle d'une distribution lognormale (71), en reprenant les équations (67) à (70), on retrouve les expressions suivantes pour les cumulants :*

$$\kappa_1 = e^{(\alpha + \frac{\beta^2}{2})} \quad (77)$$

$$\kappa_2 = e^{(2\alpha + \beta^2)}(e^{\beta^2} - 1) \quad (78)$$

$$\kappa_3 = e^{(3\alpha + \frac{3\beta^2}{2})}(e^{\beta^2} - 1)^2(e^{\beta^2} + 2) \quad (79)$$

$$\kappa_4 = e^{(4\alpha + 2\beta^2)}(e^{\beta^2} - 1)^2(e^{4\beta^2} + 2e^{3\beta^2} + 3e^{2\beta^2} - 6) \quad (80)$$

où κ_i représente le cumulants d'ordre i , α et β les paramètres de location et dispersion de la distribution lognormale.

Preuve 22

Voir les équations (67) à (70).

D.3 Développement en série de Edgeworth généralisé basé sur le système f_{S_L}

Lemme 23 *Si les paramètres $[a \ b \ c \ d]^T$ du système S_L des fonctions de densité de Johnson sont fixés de telle sorte que les trois premiers moments de la variable aléatoire Y sont reproduits, l'approximation de f_Y par un développement en série de Edgeworth généralisé basé sur f_{S_L} est donné par*

$$f_{E_{S_L}}(y) = f_{S_L}(y) + \frac{(\kappa_4 - \tilde{\kappa}_4)}{4!} \frac{d^4 f_{S_L}(y)}{dy^4} \quad (81)$$

où κ_i correspond au cumulants d'ordre i de la variable aléatoire Y et $\tilde{\kappa}_i$ correspond au cumulants d'ordre i reproduit par f_{S_L} .

Preuve 23

Puisque f_{S_L} permet la reproduction des trois premiers moments de la variable aléatoire Y , on retrouve $\kappa_i = \tilde{\kappa}_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Par conséquent, $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ et $E_3 = 0$ ce qui implique $E_4 = \kappa_4 - \tilde{\kappa}_4$. ■

E Approximations analytiques basées sur le développement en série de Edgeworth généralisé

E.1 Approximation analytique basée sur la fonction f_{E_L}

Dans cette section, nous allons montrer que la valeur d'une option d'achat européenne, lorsque la distribution de la variable sous-jacente à échéance peut être approchée par le développement en série de Edgeworth généralisé basé sur la distribution lognormale, est donnée par :

$$C_{E_L}(K, s; \theta_Y) = e^{-rs} \left(e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} N(d_1) - KN(d_2) \right) - \frac{e^{-rs}(\tilde{\kappa}_3 - \kappa_3)}{3!} \frac{df_{E_L}(K)}{dy} + \frac{e^{-rs}(\tilde{\kappa}_4 - \kappa_4)}{4!} \frac{d^2 f_{E_L}(K)}{dy^2} \quad (82)$$

où

$$d_2 = \frac{\log(1/K) + \alpha}{\beta} \quad (83)$$

$$d_1 = d_2 + \beta \quad (84)$$

$$\tilde{\kappa}_3 = e^{(3\alpha + \frac{3\beta^2}{2})} (e^{\beta^2} - 1)^2 (e^{\beta^2} + 2)$$

$$\tilde{\kappa}_4 = e^{(4\alpha + 2\beta^2)} (e^{\beta^2} - 1)^2 (e^{4\beta^2} + 2e^{3\beta^2} + 3e^{2\beta^2} - 6)$$

$$\kappa_3 = 2\mu_1^3 - 3\mu_1\mu_2 + \mu_3$$

$$\kappa_4 = -6\mu_1^4 + 12\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 + \mu_4$$

et où K le prix d'exercice de l'option, s l'échéance de l'option en nombre de périodes et $\theta_Y = [\alpha \ \beta]^T$ le vecteur contenant les deux paramètres déterminés par les équations (72) et (73).

Lemme 24 *En notant l'approximation de la fonction de densité de Y obtenue via le développement en série de Edgeworth basé sur une distribution lognormale par f_{E_L} , on retrouve*

$$C_{E_L}(K, s; \theta_Y) = e^{-rs} \int_K^\infty (y - K) f_{E_L}(y) dy - \frac{e^{-rs}(\tilde{\kappa}_3 - \kappa_3)}{3!} \int_K^\infty (y - K) \frac{d^3 f_{E_L}(y)}{dy^3} dy + \frac{e^{-rs}(\tilde{\kappa}_4 - \kappa_4)}{4!} \int_K^\infty (y - K) \frac{d^4 f_{E_L}(y)}{dy^4} dy \quad (85)$$

où $\tilde{\kappa}_i$ représente le cumulants d'ordre i de la variable aléatoire associée à la fonction de densité approximative f_{E_L} définie aux équations (77) à (80) et κ_i , le cumulants d'ordre i de la variable aléatoire sous-jacente au titre contingent.

Preuve 24

$$\begin{aligned}
C_{E_L}(K, s; \theta_Y) &= e^{-rs} \int_{-\infty}^{\infty} (y - K)^+ f_{E_L}(y) dy \\
&= e^{-rs} \int_K^{\infty} (y - K) f_{E_L}(y) dy \\
&= e^{-rs} \int_K^{\infty} (y - K) \left(f_L(y) - \frac{(\tilde{\kappa}_3 - \kappa_3)}{3!} \frac{d^3 f_L(y)}{dy^3} + \frac{(\tilde{\kappa}_4 - \kappa_4)}{4!} \frac{d^4 f_L(y)}{dy^4} \right) dy \\
&= e^{-rs} \int_K^{\infty} (y - K) f_L(y) dy - \frac{e^{-rs}(\tilde{\kappa}_3 - \kappa_3)}{3!} \int_K^{\infty} (y - K) \frac{d^3 f_L(y)}{dy^3} dy \\
&\quad + \frac{e^{-rs}(\tilde{\kappa}_4 - \kappa_4)}{4!} \int_K^{\infty} (y - K) \frac{d^4 f_L(y)}{dy^4} dy.
\end{aligned}$$

E.1.1 Résolution de l'intégrale $\int_K^{\infty} (y - K) f_L(y) dy$

Lemme 25

$$\int_K^{\infty} (y - K) f_L(y) dy = e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} N(d_1) - KN(d_2) \tag{86}$$

où

$$d_2 = \frac{\log(1/K) + \alpha}{\beta} \tag{87}$$

$$d_1 = d_2 + \beta \tag{88}$$

et $N(\bullet)$ est la fonction de densité cumulative d'une distribution normale centrée et réduite.

Preuve 25

Par construction $Y = e^{\alpha + \beta Z}$ où $Z \sim N(0, 1)$. Les fonctions de densité et de distribution de z sont notées respectivement par $n(\bullet)$ et $N(\bullet)$. De là,

$$\begin{aligned}
\int_K^{\infty} (y - K) f_L(y) dy &= \int_{-d_2}^{\infty} (e^{\alpha + \beta z} - K) n(z) dz \\
&= e^{\alpha} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\beta z} n(z) dz - K \int_{-d_2}^{\infty} n(z) dz \\
&= e^{\alpha} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\beta z} n(z) dz - K \int_{-\infty}^{d_2} n(z) dz \\
&= e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\nu^2} n(\nu) d\nu - KN(d_2) \\
&= e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} N(d_1) - KN(d_2)
\end{aligned}$$

où

$$d_2 = \frac{\log(1/K) + \alpha}{\beta}$$

$$d_1 = d_2 + \beta. \blacksquare$$

E.1.2 Résolution de l'intégrale $\int_K^\infty (y - K) \frac{d^i f_L(y)}{dy^i} dy$

Lemme 26

$$\int_K^\infty (y - K) \frac{d^i f_L(y)}{dy^i} dy = \frac{d^{i-2} f_L(K)}{dy^{i-2}} \quad (89)$$

pour $i \geq 2$.

Preuve 26

$$\begin{aligned} \int_K^\infty (y - K) \frac{d^i f_L(y)}{dy^i} dy &= (y - K) \left(\frac{d^{i-1} f_L(y)}{dy^{i-1}} \right) \Big|_K^\infty - \int_K^\infty \frac{d^{i-1} f_L(y)}{dy^{i-1}} dy \\ &= - \int_K^\infty \frac{d^{i-1} f_L(y)}{dy^{i-1}} dy \\ &= - \frac{d^{i-2} f_L(y)}{dy^{i-2}} \Big|_K^\infty \\ &= \frac{d^{i-2} f_L(K)}{dy^{i-2}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

E.2 Approximation analytique basée sur la fonction $f_{E_{S_L}}$

Dans cette section, nous allons montrer que la valeur d'une option d'achat européenne, lorsque la distribution de la variable sous-jacente à échéance peut être approchée par le développement en série de Edgeworth généralisé basé sur le système S_L des fonctions de densité de Johnson, est donnée par :

$$C_{E_{S_L}}(K, s; \theta_Y) = C_{S_L}(K, s; \theta_Y) + \frac{e^{-rs}(\tilde{\kappa}_4 - \kappa_4)}{4!} \frac{d^2 f_{S_L}(K)}{dy^2} \quad (90)$$

où K le prix d'exercice de l'option, s l'échéance de l'option en nombre de périodes et $\theta_Y = [a \ b \ c \ d]^T$ le vecteur de paramètres permettant de reproduire les trois premiers moments de Y et $C_{S_L}(K, s; \theta_Y)$ le résultat donné par l'équation (57).

Lemme 27 *En notant l'approximation de la fonction de densité de Y obtenue via le développement en série de Edgeworth basé sur le système S_L par f_{S_L} , on retrouve*

$$C_{E_{S_L}}(K, s; \theta_Y) = e^{-rs} \int_K^\infty (y - K) f_{S_L}(y) dy + \frac{e^{-rs}(\tilde{\kappa}_4 - \kappa_4)}{4!} \int_K^\infty (y - K) \frac{d^4 f_{S_L}(y)}{dy^4} dy \quad (91)$$

où $\tilde{\kappa}_i$ représente le cumulants d'ordre i de la variable aléatoire associée à la fonction de densité approximative f_{S_L} définie aux équations (67) à (70) et κ_i , le cumulants d'ordre i de la variable aléatoire sous-jacente au titre contingent.

Preuve 27

Ce résultat combine les lemmes 16 et 26. ■

F Fonction de vraisemblance associée au processus NGARCH

Cette section permet d'établir la fonction de vraisemblance caractérisant la distribution jointe du rendement logarithmique d'une série d'observations $\{\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) : t = 1, 2, \dots, n\}$ dont la dynamique est spécifiée par un processus NGARCH sous la mesure P .

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = r_t + \lambda\sqrt{h_{t+1}} - \frac{1}{2}h_{t+1} + \sqrt{h_{t+1}}\varepsilon_{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (92)$$

$$h_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 h_t + \beta_2 h_t (\varepsilon_t - \theta)^2, \quad t = 1, 2, \dots \quad (93)$$

où, tel que détaillé dans la section 6, r_t est le rendement composé périodique d'un actif non-risqué, λ est une prime de risque constante, h_{t+1} est la variance conditionnelle du rendement de l'actif risqué et $\{\varepsilon_t : t = 0, 1, 2, \dots\}$, sous la mesure P , est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi gaussienne centrée et réduite. La structure d'information est modélisée par la filtration $\{\mathcal{F}_t : t \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$ où \mathcal{F}_0 est la tribu engendrée par (S_0, h_1) et \mathcal{F}_t , la tribu engendrée par $\{S_0, h_1, \varepsilon_s : s \in \{1, 2, \dots, t\}\}$; ce qui implique que h_t est \mathcal{F}_{t-1} -mesurable.

Lemme 28 *La fonction de vraisemblance conditionnelle caractérisant la distribution jointe d'observations provenant de la série définie par l'équation (92) est*

$$L(Y_2, \dots, Y_n; \phi) = \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi h_i}} e^{-\frac{1}{2h_i} \left(Y_i - (r_{i-1} + \lambda\sqrt{h_i} - \frac{h_i}{2}) \right)^2} \quad (94)$$

où

$$Y_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \quad (95)$$

et où $\phi = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \lambda \ \theta]^T$ correspond au vecteur de paramètres associés au processus NGARCH.

Preuve 28

En posant $Y_{t+1} = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$, on obtient par construction du processus NGARCH que la fonction de densité de Y_{t+1} conditionnelle à \mathcal{F}_t est donnée par

$$f_{Y_{t+1}|\mathcal{F}_t}(y; \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{1}{2h_t} \left(y - (r_{t-1} + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{h_t}{2}) \right)^2} \quad (96)$$

En utilisant le fait que la fonction de densité jointe d'une série d'observations peut être exprimée comme le produit des densités conditionnelles et en négligeant le premier terme associé à Y_1 , on retrouve la fonction de vraisemblance conditionnelle posée à l'équation (94). ■

G Programmes Matlab

Moments de la variance conditionnelle future

```
function[Output]=Expressions_Moments(Input);

[Nb_Sim,Param,Period,Nb_Per,Test]=Extract_Monte_Carlo_Simulation(Input);
[Beta_0,Beta_1,Beta_2,Theta,Lambda,h_1]=Extract_Param(Param);
Pos_Index=1;
Mu=Compute_Mu(Param);
M=Compute_M(Param,Mu);
V_Beta_0=Beta_0.^(1:4)';
Moments_Theoriques(1,:)=(h_1*ones(4,1)).^((1:4)')');
if Period(1)==1
    Moments(Pos_Index,:)=Moments_Theoriques(1,:);
    Pos_Index=Pos_Index+1;
end
for Ind=1:Nb_Per-1
    Moments_Theoriques(Ind+1,:)=(V_Beta_0+M*Moments_Theoriques(Ind,:))';
    if Ind+1==Period(Pos_Index)
        Moments(Pos_Index,:)=Moments_Theoriques(Ind+1,:);
        Pos_Index=Pos_Index+1;
    end
end
if Test.Variable
    Output.Moments=Moments;
else
    Temp=Moments;
    E_H1=Temp(:,1);
    E_H2=Temp(:,2);
    E_H3=Temp(:,3);
    E_H4=Temp(:,4);
    clear Moments;
    Moments(:,[2 4])=Temp(:,[1 2]);
    Ordre=2;
    Frac=[0.5];
    Frac_Moments=(E_H1.^Frac)+0.5*(E_H2-E_H1.^2).*Frac.*(Frac-1).*(E_H1.^(Frac-2));
    if Ordre>2
        Frac_Moments=Frac_Moments+((Frac*(Frac-1)*(Frac-2))/6)*(E_H1.^(Frac-3))
            .*(E_H3-3*E_H1.*E_H2+2*E_H1.^3);
    end
    if Ordre>3
        Frac_Moments=Frac_Moments+0.5*((Frac*(Frac-1)*(Frac-2)*(Frac-3))/24)*(E_H1.^(Frac-4))
            .*(E_H4-4*E_H3.*E_H1+6*E_H2.*E_H1.^2-3*E_H1.^4);
    end
end
```

```

end
Moments(:,1)=Frac_Moments;
Frac=[1.5];
Frac_Moments=(E_H1.^Frac)+0.5*(E_H2-E_H1.^2).*Frac.*(Frac-1).*(E_H1.^(Frac-2));
if Ordre>2
    Frac_Moments=Frac_Moments+((Frac*(Frac-1)*(Frac-2))/6)*(E_H1.^(Frac-3))
        .*(E_H3-3*E_H1.*E_H2+2*E_H1.^3);
end
if Ordre>3
    Frac_Moments=Frac_Moments+0.5*((Frac*(Frac-1)*(Frac-2)*(Frac-3))/24)*(E_H1.^(Frac-4))
        .*(E_H4-4*E_H3.*E_H1+6*E_H2.*E_H1.^2-3*E_H1.^4);
end
Moments(:,3)=Frac_Moments;
Output.Moments=Moments;
end

function [Mu]=Compute_Mu(Param)

[Beta_0,Beta_1,Beta_2,Theta,Lambda,h_1]=Extract_Param(Param);
ID=(0:4)'; v1=v_factorial(2*ID)/(2.^ID.*v_factorial(ID)) ;
nu=zeros(5,5); for j=0:4
    for l=0:j
        nu(l+1,j+1)=(v_factorial(2*j)/(v_factorial(2*1).*v_factorial(2*j-2*1)))
            *(Theta+Lambda)^(2*(j-1))*v1(l+1);
    end
end nu=sum(nu)';
Mu=zeros(5,4); for k=1:4
    for j=0:k
        Mu(j+1,k)=(v_factorial(k)/(v_factorial(j)*v_factorial(k-j)))*Beta_1^(k-j)
            *Beta_2^(j)*nu(j+1);
    end
end Mu=sum(Mu)';

function M=Compute_M(Param,Mu);

[Beta_0,Beta_1,Beta_2,Theta,Lambda,h_1]=Extract_Param(Param);
M=zeros(4,4); for Ind_1=1:4
    for Ind_2=1:Ind_1
        M(Ind_1,Ind_2)=Beta_0^(Ind_1-Ind_2)*(v_factorial(Ind_1)/(v_factorial(Ind_2)
            *v_factorial(Ind_1-Ind_2)))*Mu(Ind_2);
    end
end
end

```

Simulation Monte-Carlo

```
function [Output]=Monte_Carlo_Simulation(Input)

[Nb_Sim,Param,Period,Nb_Per,Test]=Extract_Monte_Carlo_Simulation(Input);
[Beta_0,Beta_1,Beta_2,Theta,Lambda,h_1]=Extract_Param(Param);
Pos_Index=1;
h_1=h_1*ones(Nb_Sim,1);
Nb_Points=max(size(Period,1),size(Period,2));
if Test.Trajectoires==1
    Output.Trajectoires=zeros(Nb_Sim,Nb_Points);
end
if Period(Pos_Index)==1
    if Test.Variable==1
        Data=h_1;
    else
        Data=sqrt(h_1);
    end
    if Test.Trajectoires==1
        Output.Trajectoires(:,Pos_Index)=Data;
    end
    if Test.Data_Figure==1
        Output.Data_Figure.Moyenne(:,Pos_Index)=
            [mean(Data);mean(Data.^2);mean(Data.^3);mean(Data.^4)];
        Output.Data_Figure.Ecart_Type(:,Pos_Index)=
            [std(Data);std(Data.^2);std(Data.^3);std(Data.^4)]/sqrt(Nb_Sim);
    end
    if Test.Moments==1
        Output.Moments(:,Pos_Index)=[mean(Data);mean(Data.^2);mean(Data.^3);mean(Data.^4)];
    end
    Pos_Index=Pos_Index+1;
end
for Ind_1=2:Nb_Per
    e=randn(Nb_Sim,1);
    Y=Beta_1+Beta_2*(e-(Theta+Lambda)).^2;
    h_2=Beta_0+h_1.*Y;
    if Ind_1==Period(Pos_Index)
        if Test.Variable==1
            Data=h_2;
        else
            Data=sqrt(h_2);
        end
        if Test.Trajectoires==1
            Output.Trajectoires(:,Pos_Index)=Data;
        end
        if Test.Data_Figure==1
```

```

Output.Data_Figure.Moyenne(:,Pos_Index)=
    [mean(Data);mean(Data.^2);mean(Data.^3);mean(Data.^4)];
Output.Data_Figure.Ecart_Type(:,Pos_Index)=
    [std(Data);std(Data.^2);std(Data.^3);std(Data.^4)]/sqrt(Nb_Sim);
end
if Test.Moments==1
    Output.Moments(:,Pos_Index)=[mean(Data);mean(Data.^2);mean(Data.^3);mean(Data.^4)];
end
Pos_Index=Pos_Index+1;
end
h_1=h_2;
end
end

```

Paramétrisation du système S_U

```

function [Parameters, Johnson_Moments]=Parametrisation_Johnson_SU(A analytical_Moments)

options=optimset('TolFun',1e-16);
for Ind_Temps=1:size(A analytical_Moments,2)
    Param=fsolve(@Johnson_Moments_Param_SU,[1;1;1;1],options,A analytical_Moments(:,Ind_Temps));
    Moments=Eval_Johnson_Moments_SU(Param);
    Parameters(:,Ind_Temps)=Param;
    Johnson_Moments(:,Ind_Temps)=Moments;
end

```

```

function [Moments]=Eval_Johnson_Moments_SU(Param)

a=Param(1);
b=Param(2);
c=Param(3);
d=Param(4);

v1=exp(1/(2*d^2))*sinh(-c/d);
v2=0.5*(exp(2/(d^2))*cosh(2*c/d)-1);
v3=0.25*(exp(9/(2*d^2))*sinh(-3*c/d)-3*exp(1/(2*d^2))*sinh(-c/d));
v4=(1/16)*(2*exp(8/(d^2))*cosh(4*c/d)-8*exp(2/(d^2))*cosh(2*c/d)+6);
E_Y(1,1)=a+b*v1;
E_Y(2,1)=a^2+2*a*b*v1+b^2*v2;
E_Y(3,1)=a^3+3*a^2*b*v1+3*a*b^2*v2+b^3*v3;
E_Y(4,1)=a^4+4*a^3*b*v1+6*a^2*b^2*v2+4*a*b^3*v3+b^4*v4;
Moments=[E_Y];

```

```

function [Eqn_System]=Johnson_Moments_Param_SU(Param,Moments)

```

```

Scale_Factor=1./Moments;

a=Param(1);
b=Param(2);
c=Param(3);
d=Param(4);

v1=exp(1/(2*d^2))*sinh(-c/d);
v2=0.5*(exp(2/(d^2))*cosh(2*c/d)-1);
v3=0.25*(exp(9/(2*d^2))*sinh(-3*c/d)-3*exp(1/(2*d^2))*sinh(-c/d));
v4=(1/16)*(2*exp(8/(d^2))*cosh(4*c/d)-8*exp(2/(d^2))*cosh(2*c/d)+6);
E_Y(1,1)=a+b*v1;
E_Y(2,1)=a^2+2*a*b*v1+b^2*v2;
E_Y(3,1)=a^3+3*a^2*b*v1+3*a*b^2*v2+b^3*v3;
E_Y(4,1)=a^4+4*a^3*b*v1+6*a^2*b^2*v2+4*a*b^3*v3+b^4*v4;
Eqn_System(:,1)=E_Y-Moments; Eqn_System=Eqn_System.*Scale_Factor;

```

Paramétrisation du système S_L

```
function [Parameters, Johnson_Moments]=Parametrisation_Johnson_SL(Analytical_Moments)
```

```

options=optimset('TolFun',1e-16);
for Ind_Temps=1:size(Analytical_Moments,2)
    [Output]=Moment_Conversion(Analytical_Moments(:,Ind_Temps)');
    Omega=fsolve(@Spec_System,1,optimset('fsolve'),Output.Beta1);
    b=sign(Output.Beta1);
    d=(log(Omega))^(1/2);
    c=(1/2)*d*log(Omega*(Omega-1)/(Output.Statistics(2)^2));
    a=b*Output.Statistics(1)-exp((1/(2*d)-c)/d);
    Param=[a;b;c;d];
    Moments=Eval_Johnson_Moments_SL(Param);
    Parameters(:,Ind_Temps)=Param;
    Johnson_Moments(:,Ind_Temps)=Moments;
end

```

```
function [Moments]=Eval_Johnson_Moments_SL(Param)
```

```

a=Param(1);
b=Param(2);
c=Param(3);
d=Param(4);
v1=exp((1^2-2*1*c*d)/(2*d^2));
v2=exp((2^2-2*2*c*d)/(2*d^2));
v3=exp((3^2-2*3*c*d)/(2*d^2));
v4=exp((4^2-2*4*c*d)/(2*d^2));

```

```

E_Y(1,1)=a+b*v1; E_Y(2,1)=a^2+2*a*b*v1+b^2*v2;
E_Y(3,1)=a^3+3*a^2*b*v1+3*a*b^2*v2+b^3*v3;
E_Y(4,1)=a^4+4*a^3*b*v1+6*a^2*b^2*v2+4*a*b^3*v3+b^4*v4;
Moments=[E_Y];

```

Approximation analytique S_U

```

function Price=Approximation_SU(Param,K,r,s);

a=Param(1);
b=Param(2);
c=Param(3);
d=Param(4);
kappa=c+d*invsinh((K-a)/b);
Price=exp(-r*s)*(a-b*exp(1/(2*d^2))*sinh(c/d)-K
    +(b*exp(-r*s)*exp(1/(2*d^2)))/(2)*(exp(c/d)*normcdf(kappa+(1/d))-exp(-c/d)
        *normcdf(kappa-(1/d)))+exp(-r*s)*(K-a)*normcdf(kappa));

```

Approximation analytique S_L

```

function Price=Approximation_SL(Param,K,r,s);

a=Param(1);
b=Param(2);
c=Param(3);
d=Param(4);
kappa=c+d*log((K-a)/b);
Price=exp(-r*s)*(a+b*exp((1/(2*d^2))-(c/d))-K
    +exp(-r*s)*((K-a)*normcdf(kappa)-b*exp((1/(2*d^2))-(c/d))*normcdf(kappa-(1/d))));

```

Approximation analytique Edgeworth E

```

function Price=Approximation_Edgeworth(Param,K,r,s);

Alpha=Param(1);
Beta=Param(2);
Coeff1=Param(3);
Coeff2=Param(4);
d_2=(log(1/K)+Alpha)/Beta;
d_1=d_2+Beta;
Price=exp(-r*s)*(exp(Alpha+0.5*Beta^2)*normcdf(d_1)-K*normcdf(d_2))
    +Coeff1*d1(K,Alpha,Beta)+Coeff2*d2(K,Alpha,Beta);

```

Approximation analytique Edgeworth S_L

```
Coeff=Param(4); a=Param_Johnson(1); b=Param_Johnson(2); c=Param_Johnson(3); d=Param_Johnson(4);  
Price=Approximation_SL(Param_Johnson,K,r,s)+Coeff*d2(K,a,b,c,d);
```

Estimation des paramètres du processus NGARCH

```
function [Outputs]=Estim_NGARCH(Data_Set,Risk_Free_Rate)  
  
Figures=1; Nb_Set=size(Data_Set,2); Options = optimset('display','iter',  
'TolX',1e-16,'TolFun',1e-16,'MaxFunEvals',25000,'DiffMinChange',1e-16,'MaxIter',10000,'Largescale','off');  
  
Y=log((1./Data_Set(2:end))./(1./Data_Set(1:end-1)))-(Risk_Free_Rate(2:end)/252);  
Theta0=[0.10; 1e-5 ; 0.75; 0.10; 0.10]; % Valeurs de d\{e}part  
  
Outputs.Data_Brute=Data_Set; Outputs.Log_Rendement=Y;  
  
[Theta,Log_Likelihood]=fminsearch('NGARCH_Likelihood',Theta0,Options,Y,0);  
[Outputs.Likelihood,St_Dev,Outputs.Innovations,Outputs.Cond_Var]=NGARCH_Likelihood(Theta,Y,1);  
  
Outputs.Estimations=[Theta]; Outputs.Std_Dev=[St_Dev];  
Outputs.T_Stat=Outputs.Estimations./Outputs.Std_Dev; pos=isinf(Outputs.T_Stat);  
Outputs.T_Stat(pos)=0;  
  
function [Log_Likelihood,Std_Dev,Innov,Variance]=NGARCH_Likelihood(Param,Data,Flag)  
  
% Fonction de vraisemblance d'une s\{e}rie g\{e}n\{e}r\{e}e par une processus  
% NGARCH sans constante  
Lambda=Param(1); b0=Param(2); b1=Param(3); b2=Param(4); Theta=Param(5);  
% Initialisation des variables  
n=length(Data);  
e=zeros(n,1);  
h=zeros(n,1);  
Log_Likelihood=zeros(n,1);  
e(1)=0;  
h(1)=b0/(1-b1-b2*(1+Theta^2));  
  
for i=2:n  
    h(i,1)=b0+b1.*h(i-1,1)+b2.*h(i-1,1).*(e(i-1,1)-Theta).^2;  
    e(i,1)=(Data(i,1)-Lambda*sqrt(h(i,1))+0.5*h(i,1))/sqrt(h(i,1));  
end  
Log_Likelihood = 0.5*log(h)+0.5*(e.^2);  
  
if Flag==0  
    Log_Likelihood=sum(Log_Likelihood);
```

```

end

if Flag==1
    Log_Likelihood=sum(Log_Likelihood);
    Variance=h;
    Innov=e;
    % Estimation de la matrice variance-covariance par l'inversion de la
    % matrice d'information estim\ '{e}e
    I=Info_Matrix(Data,Param);
    Cov=inv(I);
    Std_Dev=sqrt(diag(Cov));
end

function [I]=Info_Matrix(Data,Param)

Flag=2; dx=0.00000001; for i=1:length(Param)
    Choc=zeros(length(Param),1);
    Choc(i)=dx;
    G(:,i)=(NGARCH_Likelihood(Param+Choc,Data,Flag)-NGARCH_Likelihood(Param-Choc,Data,Flag))/(2*dx);
end I=G'*G;

```

Autres routines

```

function [Mu]=Compute_Mu(Param)

[Beta_0,Beta_1,Beta_2,Theta,Lambda,h_1]=Extract_Param(Param);
ID=(0:4)'; v1=v_factorial(2*ID)/(2.^ID.*v_factorial(ID)) ;
nu=zeros(5,5); for j=0:4
    for l=0:j
        nu(l+1,j+1)=(v_factorial(2*j)/(v_factorial(2*l).*v_factorial(2*j-2*l)))
            *(Theta+Lambda)^(2*(j-l))*v1(l+1);
    end
end nu=sum(nu)'; Mu=zeros(5,4); for k=1:4
    for j=0:k
        Mu(j+1,k)=(v_factorial(k)/(v_factorial(j)*v_factorial(k-j)))
            *Beta_1^(k-j)*Beta_2^j*nu(j+1);
    end
end Mu=sum(Mu)';

```

```

function p = v_factorial(n) for i=1:length(n)
    p(i,1) = prod(1:n(i));
end

```

```

function [Beta_0,Beta_1,Beta_2,Theta,Lambda,h_1]=Extract_Param(Param);

```



```

Beta_0 = Param.Beta_0;
Beta_1 = Param.Beta_1;
Beta_2 = Param.Beta_2;
Theta = Param.Theta;
Lambda = Param.Lambda;
Stat_h = Beta_0/(1-Beta_1-Beta_2*(1+(Theta+Lambda)^2));
h_1 = Param.h_1*Stat_h;

function [Nb_Sim,Param,Period,Nb_Per,Test]=Extract_Monte_Carlo_Simulation(Input);

Nb_Sim = Input.Nb_Sim;
Param = Input.Param;
Period = Input.Period;
Nb_Per = Period(end);
Test = Input.Test;

function [Output]=Moment_Conversion(Moments)

Nb_Data=size(Moments,1);

Output.Raw_Moments=Moments;

Output.Centered_Moments(:,1)=Moments(:,1);
Output.Centered_Moments(:,2)=Moments(:,2)-Moments(:,1).^2;
Output.Centered_Moments(:,3)=Moments(:,3)-3.*Moments(:,1).*Moments(:,2)
+2.*Moments(:,1).^3;
Output.Centered_Moments(:,4)=Moments(:,4)-4.*Moments(:,1).*Moments(:,3)
+6.*Moments(:,1).^2.*Moments(:,2)-3.*Moments(:,1).^4;

Output.Cumulants(:,1)=Moments(:,1); Output.Cumulants(:,2)=Moments(:,2)-Moments(:,1).^2;
Output.Cumulants(:,3)=Moments(:,3)-3.*Moments(:,1).*Moments(:,2)+2.*Moments(:,1).^3;
Output.Cumulants(:,4)=Moments(:,4)-4.*Moments(:,1).*Moments(:,3)-3.*Moments(:,2).^2
+12.*Moments(:,2).*Moments(:,1).^2-6.*Moments(:,1).^4;

Output.Statistics(:,1)=Moments(:,1); Output.Statistics(:,2)=sqrt(Output.Centered_Moments(:,2));
Output.Statistics(:,3)=Output.Centered_Moments(:,3)/(Output.Centered_Moments(:,2).^(3/2));
Output.Statistics(:,4)=Output.Centered_Moments(:,4)/(Output.Centered_Moments(:,2).^(2));

Output.Beta1=(Output.Centered_Moments(:,3))/Output.Statistics(:,2).^3;
Output.Beta2=Output.Centered_Moments(:,4)/(Output.Centered_Moments(:,2).^(2));

```

```

function output=invsinh(input)
output=log(input+sqrt(1+input^2));

function [dens]=d1(x,mu,sig)
dens=-1/2*(log(x)-mu)./sig^3./x.^2.*exp(-1/2*(log(x)-mu).^2/sig^2)*2^(1/2)/pi^(1/2)
-1/2*exp(-1/2*(log(x)-mu).^2/sig^2)*2^(1/2)/pi^(1/2)/sig./x.^2;

function [dens]=d2(x,mu,sig)
dens=-1/2./x.^3/sig^3.*exp(-1/2*(log(x)-mu).^2/sig^2)*2^(1/2)/pi^(1/2)
+3/2*(log(x)-mu)./sig^3./x.^3.*exp(-1/2*(log(x)-mu).^2/sig^2)*2^(1/2)/pi^(1/2)
+1/2*(log(x)-mu).^2./sig^5./x.^3.*exp(-1/2*(log(x)-mu).^2/sig^2)*2^(1/2)/pi^(1/2)
+exp(-1/2*(log(x)-mu).^2/sig^2)*2^(1/2)/pi^(1/2)/sig./x.^3;

function [dens]=d2(x,a,b,c,d) PI=pi;
dens=-1./2.*2.^(1./2)./PI.^(1./2).*d.^3./(x-a).^3.*exp(-1./2.*(c+d.*log((x-a)./b)).^2)
+3./2.*2.^(1./2)./PI.^(1./2).*(c+d.*log((x-a)./b)).*d.^2./(x-a).^3.*exp(-1./2.*(c+d.*log((x-a)./b)).^2)
+1./2.*2.^(1./2)./PI.^(1./2).*(c+d.*log((x-a)./b)).^2.*d.^3./(x-a).^3.*exp(-1./2.*(c+d.*log((x-a)./b)).^2)
+2.^(1./2)./PI.^(1./2).*exp(-1./2.*(c+d.*log((x-a)./b)).^2).*d./(x-a).^3;

```

Références

- [1] Abramowitz, M. Stegun, I. A., (1972). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing, New-Yorw, *Dover*, p. 928.
- [2] Barton, D.E., Dennis, K.E., (1949). The Conditions under wich Gram-Charlier and Edgeworth Curves are Positive Definite and Unimodal *Biometrika*, **39**, 425-427.
- [3] Black, F., Scholes, M., (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities *Journal of Political Economy*, **81-3**, 637-659.
- [4] Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- [5] Brenner, M., Galai, D., (1989). New Financial Instruments for Hedging Changes in Volatility *Financial Analyst Journal*, **July-August**, 61-65.
- [6] Broadie, M., Detemple, J., (1996). American Option Valuaton : New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods *The Review of Financial Studies*, **9-4**, 1211-1250.
- [7] Brockhaus, O., Long, D., (2000). Volatility Swaps Made Simple *Risk*, **January**, 92-95.
- [8] Carr, P., Madan, D., (1997). Towards a Theory of Volatility Trading *Working Paper*
- [9] Carr, P., Madan, D., (1999). Currency Covariance Contracting *Working Paper*
- [10] Demeterfi, K., Derman, E., Kamal, M., Zou, J., (1999). A Guide to Volatility and Variance Swaps *Journal of Derivatives*, **Summer**, 9-32.
- [11] Detemple, J., Osakwe, C., (2000). The Valuation of Volatility Options *European Finance Review*, **4**, 21-50.
- [12] Draper, J., (1952). Properties of Distributions Resulting for Certain Simple Transformations of the Normal Distribution *Biometrika*, **39**, 290-301.
- [13] Duan, J.-C. (1994). Maximum Likelihood Estimation Using Price Data Of The Derivative Contract *Mathematical Finance*, **4-2**, 155-167.
- [14] Duan, J.-C. (1995). The Garch Option Pricing Model *Mathematical Finance*, **5-1**, 13-32.
- [15] Duan, J.-C., Gauthier, G., Simonato, J.-G. (1999). An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model *Journal of Computational Finance*, **2**, 75-116.
- [16] Engle, R.F., Ng, V.K., (1993). Measuring and Testing the Impact of News on Volatility *Journal of Finance*, **48-5**, 1749-1778.

- [17] Glosten, L., Jagannathan, R., Runkle, D., (1993). On The Relationship Between The Expected Value And The Volatility Of The Nominal Excess Return On Stocks *Journal of Finance*, **48-5**, 1779-1801.
- [18] Grünbichler, A., Longstaff, F.A., (1996). Valuing futures and options on volatility *Journal of Banking and Finance*, **20**, 985-1001.
- [19] Heston, S.-L., Nandi, S. (2000). A Closed-Form GARCH Option Pricing Model *Review of Financial Studies*, **13**,585-625.
- [20] Heston, S.-L., Nandi, S. (2000). Derivatives on Volatility : Some Simple Solutions Based on Observables *Working Paper*, Federal Reserve Bank of Atlanta.
- [21] Hill, I., Hill, R., Holder, R. (1976). Fitting Johnson Curves by Moments *Applied Statistics*, **25-2**, 180-192.
- [22] Jarrow, R., Rudd, A., (1982). Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes *Journal of Financial Economics*, **10**, 347-369.
- [23] Johnson, N.L., (1949). Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation *Biometrika*, **36**, 149-176.
- [24] Nelson, D.B., (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : A New Approach *Econometrica*, **59-2**, 347-370.
- [25] Neuberger, A., (1994). The Log Contract *The Journal of Portfolio Management*, **Winter**, 74-80.
- [26] Posner, S.E., Milevsky, M.A., (1998). Valuing Exotic Options by Approximating the SPD with Higher Moments *Journal of Financial Engineering*, **7-2**, 109-125.
- [27] Posner, S.E., Milevsky, M.A., (1999). Another Moment for the Average Option *Derivatives Quarterly*, **Summer**, 47-53.
- [28] Saseville, C., (2002). Option Pricing Using GARCH Models : An Empirical Examination *Working Paper*.
- [29] Whaley, R.E, (1993). Derivatives on Market Volatility : Hedging Tools Long Overdue *Journal of Derivatives*, **Fall**, 71-84 .

TAB. 1 – Validation de l’expression analytique pour $E_t[h_{t+s}]$ et $E_t[h_{t+s}^2]$

	s = 10 jours		s = 30 jours		s = 90 jours		s = 270 jours	
	$E_t[h_{t+s}]$	$E_t[h_{t+s}^2]$	$E_t[h_{t+s}]$	$E_t[h_{t+s}^2]$	$E_t[h_{t+s}]$	$E_t[h_{t+s}^2]$	$E_t[h_{t+s}]$	$E_t[h_{t+s}^2]$
$h_{t+1} = 0.80 \times E[h]$								
Analytique	5.51e-005	3.32e-009	5.71e-005	3.60e-009	5.71e-005	3.60e-009	5.71e-005	3.60e-009
Monte Carlo	5.51e-005	3.32e-009	5.71e-005	3.60e-009	5.71e-005	3.60e-009	5.71e-005	3.60e-009
Écart-Type	(2.37e-008)	(3.84e-012)	(2.60e-008)	(4.63e-012)	(2.60e-008)	(4.59e-012)	(2.60e-008)	(4.63e-012)
$h_{t+1} = 1.00 \times E[h]$								
Analytique	5.71e-005	3.59e-009	5.71e-005	3.60e-009	5.71e-005	3.60e-009	5.71e-005	3.60e-009
Monte Carlo	5.72e-005	3.59e-009	5.72e-005	3.60e-009	5.71e-005	3.61e-009	5.71e-005	3.60e-009
Écart-Type	(2.55e-008)	(4.49e-012)	(2.60e-008)	(4.65e-012)	(2.61e-008)	(4.83e-012)	(2.60e-008)	(4.62e-012)
$h_{t+1} = 1.20 \times E[h]$								
Analytique	5.92e-005	3.87e-009	5.72e-005	3.61e-009	5.71e-005	3.60e-009	5.71e-005	3.60e-009
Monte Carlo	5.92e-005	3.87e-009	5.72e-005	3.62e-009	5.72e-005	3.61e-009	5.71e-005	3.60e-009
Écart-Type	(2.72e-008)	(4.97e-012)	(2.62e-008)	(4.70e-012)	(2.60e-008)	(4.73e-012)	(2.59e-008)	(4.55e-012)

	s = 10 jours		s = 30 jours		s = 90 jours		s = 270 jours	
	$E_t[h_{t+s}]$	$E_t[h_{t+s}^2]$	$E_t[h_{t+s}]$	$E_t[h_{t+s}^2]$	$E_t[h_{t+s}]$	$E_t[h_{t+s}^2]$	$E_t[h_{t+s}]$	$E_t[h_{t+s}^2]$
$h_{t+1} = 0.80 \times E[h]$								
Analytique	7.17e-005	6.32e-009	7.57e-005	7.40e-009	7.60e-005	7.47e-009	7.60e-005	7.47e-009
Monte Carlo	7.17e-005	6.29e-009	7.58e-005	7.40e-009	7.60e-005	7.44e-009	7.60e-005	7.52e-009
Écart-Type	(4.81e-008)	(1.61e-011)	(5.77e-008)	(3.13e-011)	(5.77e-008)	(2.60e-011)	(5.90e-008)	(3.35e-011)
$h_{t+1} = 1.00 \times E[h]$								
Analytique	7.60e-005	7.22e-009	7.60e-005	7.47e-009	7.60e-005	7.47e-009	7.60e-005	7.47e-009
Monte Carlo	7.59e-005	7.19e-009	7.59e-005	7.46e-009	7.59e-005	7.44e-009	7.61e-005	7.52e-009
Écart-Type	(5.34e-008)	(1.84e-011)	(5.81e-008)	(2.65e-011)	(5.78e-008)	(2.46e-011)	(5.89e-008)	(3.77e-011)
$h_{t+1} = 1.20 \times E[h]$								
Analytique	8.02e-005	8.19e-009	7.62e-005	7.54e-009	7.60e-005	7.47e-009	7.60e-005	7.47e-009
Monte Carlo	8.03e-005	8.21e-009	7.61e-005	7.51e-009	7.58e-005	7.41e-009	7.60e-005	7.46e-009
Écart-Type	(5.94e-008)	(2.56e-011)	(5.85e-008)	(3.14e-011)	(5.77e-008)	(2.76e-011)	(5.80e-008)	(2.46e-011)

$\beta_0 = 0.00001, \beta_1 = 0.70, \beta_2 = 0.10, \lambda + \theta = 0.50$
 $\mu_1 = 0.825, \mu_2 = 0.711, \mu_3 = 0.650, \mu_4 = 0.644$

$\beta_0 = 0.00001, \beta_1 = 0.70, \beta_2 = 0.15, \lambda + \theta = 0.35$
 $\mu_1 = 0.868, \mu_2 = 0.810, \mu_3 = 0.838, \mu_4 = 0.996$

“Analytique” désigne l’expressions analytique développée pour les moments d’ordre entier. “Monte Carlo” est l’estimation obtenue par une simulation de 500000 trajectoires et “Écart-Type” est l’écart-type de l’estimé Monte Carlo. De plus, $E[h]$ correspond à la variance inconditionnelle du rendement de l’actif risqué sous la mesure Q , $t \geq 0$ dénote l’instant présent et $s > 0$ dénote un nombre de périodes futures. Les résultats en gras indiquent que la différence entre l’estimé Monte Carlo et le résultat de l’expression analytique est significativement différente de zéro pour un seuil de signification de 5%.

TAB. 2 – Validation de l’expression analytique pour $E_t[h_{t+s}^3]$ et $E_t[h_{t+s}^4]$

		s = 10 jours			s = 30 jours			s = 90 jours			s = 270 jours		
		$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$
$h_{t+1} = 0.80 \times E[h]$													
Analytique		2.26e-013	1.87e-017	2.62e-013	2.39e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017
Monte Carlo		2.26e-013	1.84e-017	2.62e-013	2.36e-017	2.61e-013	2.35e-017	2.62e-013	2.37e-017	2.62e-013	2.37e-017	2.62e-013	2.37e-017
Écart-Type		(6.55e-016)	(1.48e-019)	(9.79e-016)	(3.14e-019)	(9.36e-016)	(2.85e-019)	(9.83e-016)	(3.20e-019)	(9.83e-016)	(3.20e-019)	(9.83e-016)	(3.20e-019)
$h_{t+1} = 1.00 \times E[h]$													
Analytique		2.58e-013	2.28e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017
Monte Carlo		2.59e-013	2.30e-017	2.62e-013	2.38e-017	2.64e-013	2.47e-017	2.62e-013	2.36e-017	2.62e-013	2.36e-017	2.62e-013	2.36e-017
Écart-Type		(9.92e-016)	(3.71e-019)	(1.11e-015)	(5.14e-019)	(1.30e-015)	(6.51e-019)	(1.02e-015)	(3.71e-019)	(1.02e-015)	(3.71e-019)	(1.02e-015)	(3.71e-019)
$h_{t+1} = 1.20 \times E[h]$													
Analytique		2.93e-013	2.77e-017	2.63e-013	2.42e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017
Monte Carlo		2.93e-013	2.73e-017	2.64e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.42e-017	2.61e-013	2.38e-017	2.61e-013	2.38e-017	2.61e-013	2.38e-017
Écart-Type		(1.02e-015)	(2.94e-019)	(1.03e-015)	(3.57e-019)	(1.33e-015)	(8.14e-019)	(9.08e-016)	(3.57e-019)	(9.08e-016)	(3.57e-019)	(9.08e-016)	(3.57e-019)

		s = 10 jours			s = 30 jours			s = 90 jours			s = 270 jours		
		$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$
$h_{t+1} = 0.80 \times E[h]$													
Analytique		7.86e-013	1.84e-016	1.20e-012	9.22e-016	1.20e-012	9.22e-016	1.25e-012	9.22e-016	1.25e-012	9.22e-016	1.25e-012	9.22e-016
Monte Carlo		7.75e-013	1.70e-016	1.18e-012	5.46e-016	1.15e-012	5.46e-016	1.15e-012	5.46e-016	1.15e-012	5.46e-016	1.15e-012	5.46e-016
Écart-Type		(1.17e-014)	(1.42e-017)	(6.91e-014)	(2.15e-016)	(2.97e-014)	(2.15e-016)	(2.97e-014)	(2.15e-016)	(2.97e-014)	(2.15e-016)	(2.97e-014)	(2.15e-016)
$h_{t+1} = 1.00 \times E[h]$													
Analytique		1.00e-012	2.81e-016	1.24e-012	1.09e-015	1.25e-012	1.09e-015	1.25e-012	1.09e-015	1.25e-012	1.09e-015	1.25e-012	1.09e-015
Monte Carlo		9.72e-013	2.20e-016	1.18e-012	4.08e-016	1.15e-012	4.08e-016	1.15e-012	4.08e-016	1.15e-012	4.08e-016	1.15e-012	4.08e-016
Écart-Type		(9.78e-015)	(7.27e-018)	(2.55e-014)	(3.55e-017)	(2.07e-014)	(3.55e-017)	(2.07e-014)	(3.55e-017)	(2.07e-014)	(3.55e-017)	(2.07e-014)	(3.55e-017)
$h_{t+1} = 1.20 \times E[h]$													
Analytique		1.26e-012	4.18e-016	1.27e-012	1.30e-015	1.25e-012	1.30e-015	1.25e-012	1.30e-015	1.25e-012	1.30e-015	1.25e-012	1.30e-015
Monte Carlo		1.27e-012	3.95e-016	1.23e-012	5.49e-016	1.17e-012	5.49e-016	1.15e-012	5.49e-016	1.15e-012	5.49e-016	1.15e-012	5.49e-016
Écart-Type		(2.38e-014)	(3.40e-017)	(5.47e-014)	(1.43e-016)	(3.41e-014)	(1.43e-016)	(3.41e-014)	(1.43e-016)	(3.41e-014)	(1.43e-016)	(3.41e-014)	(1.43e-016)

$\beta_0 = 0.00001, \beta_1 = 0.70, \beta_2 = 0.15, \lambda + \theta = 0.35$
 $\mu_1 = 0.868, \mu_2 = 0.810, \mu_3 = 0.838, \mu_4 = 0.996$

”Analytique” désigne l’expressions analytique développée pour les moments d’ordre entier. ”Monte Carlo” est l’estimation obtenue par une simulation de 500000 trajectoires et ”Écart-Type” est l’écart-type de l’estimé Monte Carlo. De plus, $E[h]$ correspond à la variance inconditionnelle du rendement de l’actif risqué sous la mesure Q , $t \geq 0$ dénote l’instant présent et $s > 0$ dénote un nombre de périodes futures. Les résultats en gras indiquent que la différence entre l’estimé Monte Carlo et le résultat de l’expression analytique est significativement différente de zéro pour un seuil de signification de 5%.

TAB. 3 – Reproduction de $E_t[h_{t+s}^3]$ et $E_t[h_{t+s}^4]$

	s = 10 jours		s = 30 jours		s = 90 jours		s = 270 jours	
	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$	$E_t[h_{t+s}^3]$	$E_t[h_{t+s}^4]$
$h_{t+1} = 0.80 \times E[h]$								
Analytique	2.26e-013	1.87e-017	2.62e-013	2.39e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017
Johnson S_U	2.26e-013	1.87e-017	2.62e-013	2.39e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017
Johnson S_L	2.26e-013	1.86e-017	2.62e-013	2.37e-017	2.63e-013	2.38e-017	2.63e-013	2.38e-017
Edgeworth L	2.26e-013	1.68e-017	2.62e-013	2.13e-017	2.63e-013	2.14e-017	2.63e-013	2.14e-017
Edgeworth S_L	2.26e-013	1.87e-017	2.62e-013	2.39e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017
$h_{t+1} = 1.00 \times E[h]$								
Analytique	2.58e-013	2.28e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017
Johnson S_U	2.58e-013	2.28e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017
Johnson S_L	2.58e-013	2.27e-017	2.63e-013	2.38e-017	2.63e-013	2.38e-017	2.63e-013	2.38e-017
Edgeworth L	2.58e-013	2.04e-017	2.63e-013	2.14e-017	2.63e-013	2.14e-017	2.63e-013	2.14e-017
Edgeworth S_L	2.58e-013	2.28e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017
$h_{t+1} = 1.20 \times E[h]$								
Analytique	2.93e-013	2.77e-017	2.63e-013	2.42e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017
Johnson S_U	2.93e-013	2.77e-017	2.63e-013	2.42e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017
Johnson S_L	2.93e-013	2.75e-017	2.63e-013	2.39e-017	2.63e-013	2.38e-017	2.63e-013	2.38e-017
Edgeworth L	2.93e-013	2.47e-017	2.63e-013	2.15e-017	2.63e-013	2.14e-017	2.63e-013	2.14e-017
Edgeworth S_L	2.93e-013	2.77e-017	2.63e-013	2.42e-017	2.63e-013	2.41e-017	2.63e-013	2.41e-017
$h_{t+1} = 0.80 \times E[h]$								
Analytique	7.86e-013	1.84e-016	1.20e-012	9.22e-016	1.25e-012	3.16e-015	1.25e-012	7.40e-015
Johnson S_U	7.86e-013	1.84e-016	1.20e-012	9.22e-016	1.25e-012	3.16e-015	1.25e-012	7.40e-015
Johnson S_L	7.86e-013	1.69e-016	1.20e-012	4.72e-016	1.25e-012	5.25e-016	1.25e-012	5.25e-016
Edgeworth L	7.86e-013	1.54e-016	1.20e-012	8.40e-016	1.25e-012	3.07e-015	1.25e-012	7.31e-015
Edgeworth S_L	7.86e-013	1.84e-016	1.20e-012	9.22e-016	1.25e-012	3.16e-015	1.25e-012	7.40e-015
$h_{t+1} = 1.00 \times E[h]$								
Analytique	1.00e-012	2.81e-016	1.24e-012	1.09e-015	1.25e-012	3.29e-015	1.25e-012	7.46e-015
Johnson S_U	1.00e-012	2.81e-016	1.24e-012	1.09e-015	1.25e-012	3.29e-015	1.25e-012	7.46e-015
Johnson S_L	1.00e-012	2.55e-016	1.24e-012	5.07e-016	1.25e-012	5.25e-016	1.25e-012	5.25e-016
Edgeworth L	1.00e-012	2.37e-016	1.24e-012	1.00e-015	1.25e-012	3.20e-015	1.25e-012	7.37e-015
Edgeworth S_L	1.00e-012	2.81e-016	1.24e-012	1.09e-015	1.25e-012	3.29e-015	1.25e-012	7.46e-015
$h_{t+1} = 1.20 \times E[h]$								
Analytique	1.26e-012	4.18e-016	1.27e-012	1.30e-015	1.25e-012	3.47e-015	1.25e-012	7.55e-015
Johnson S_U	1.26e-012	4.18e-016	1.27e-012	1.30e-015	1.25e-012	3.47e-015	1.25e-012	7.55e-015
Johnson S_L	1.26e-012	3.73e-016	1.27e-012	5.46e-016	1.25e-012	5.25e-016	1.25e-012	5.25e-016
Edgeworth L	1.26e-012	3.54e-016	1.27e-012	1.21e-015	1.25e-012	3.38e-015	1.25e-012	7.46e-015
Edgeworth S_L	1.26e-012	4.18e-016	1.27e-012	1.30e-015	1.25e-012	3.47e-015	1.25e-012	7.55e-015

"Analytique" désigne l'expressions analytique développée pour les moments d'ordre entier. "Johnson S_U " désigne l'approximation obtenue par le système non-borné de Johnson, "Johnson S_L " désigne l'approximation obtenue par le système lognormal de Johnson, "Edgeworth L " désigne l'approximation obtenue par le développement en série de Edgeworth basé sur la loi lognormale et "Edgeworth S_L " désigne l'approximation obtenue par le développement en série de Edgeworth basé sur le système S_L . h_{t+s} correspond à la variance conditionnelle future. De plus, $E[h]$ correspond à la variance inconditionnelle du rendement de l'actif risqué sous la mesure Q , $t \geq 0$ dénote l'instant présent et $s > 0$ dénote un nombre de périodes futures.

TAB. 4 – Validation des approximations analytiques pour une option d'achat européenne dans un contexte de faible persistance

K/h_{t+1}	s = 10 jours			s = 30 jours			s = 90 jours			s = 270 jours		
	0.75	1.00	1.25	0.75	1.00	1.25	0.75	1.00	1.25	0.75	1.00	1.25
$h_{t+1} = 0.80 \times E[h]$												
Johnson S_U	2.081e-005	1.071e-005	5.079e-006	2.273e-005	1.247e-005	6.208e-006	2.251e-005	1.236e-005	6.160e-006	2.172e-005	1.193e-005	5.944e-006
Johnson S_L	2.079e-005	1.064e-005	5.118e-006	2.268e-005	1.229e-005	6.269e-006	2.245e-005	1.218e-005	6.220e-006	2.166e-005	1.175e-005	6.002e-006
Edgeworth L	1.887e-005	4.235e-006	4.748e-006	2.008e-005	2.534e-006	4.466e-006	1.983e-005	2.314e-006	4.364e-006	1.904e-005	1.843e-006	4.118e-006
Edgeworth S_L	2.823e-005	9.011e-006	5.422e-006	4.550e-005	5.175e-006	6.112e-006	4.593e-005	4.902e-006	6.079e-006	4.521e-005	4.535e-006	5.902e-006
Monte Carlo	2.079e-005	1.067e-005	5.139e-006	2.267e-005	1.236e-005	6.309e-006	2.248e-005	1.228e-005	6.289e-006	2.166e-005	1.182e-005	6.041e-006
Écart-Type	(2.365e-008)	(2.221e-008)	(1.798e-008)	(2.590e-008)	(2.469e-008)	(2.066e-008)	(2.563e-008)	(2.445e-008)	(2.045e-008)	(2.472e-008)	(2.358e-008)	(1.974e-008)
$h_{t+1} = 1.00 \times E[h]$												
Johnson S_U	1.476e-005	6.181e-006	2.730e-006	1.480e-005	6.233e-006	2.791e-006	1.462e-005	6.160e-006	2.758e-006	1.411e-005	5.944e-006	2.661e-006
Johnson S_L	1.461e-005	6.218e-006	2.790e-006	1.457e-005	6.295e-006	2.890e-006	1.440e-005	6.220e-006	2.856e-006	1.390e-005	6.002e-006	2.756e-006
Edgeworth L	6.160e-006	4.751e-006	5.175e-006	4.125e-006	4.449e-006	5.672e-006	3.934e-006	4.364e-006	5.640e-006	3.390e-005	4.118e-006	5.544e-006
Edgeworth S_L	8.222e-006	6.625e-006	3.042e-006	1.836e-006	7.003e-006	3.280e-006	1.639e-006	6.931e-006	3.249e-006	1.135e-006	6.716e-006	3.152e-006
Monte Carlo	1.464e-005	6.250e-006	2.779e-006	1.463e-005	6.336e-006	2.865e-006	1.445e-005	6.249e-006	2.824e-006	1.395e-005	6.045e-006	2.748e-006
Écart-Type	(2.486e-008)	(2.015e-008)	(1.503e-008)	(2.525e-008)	(2.054e-008)	(1.546e-008)	(2.495e-008)	(2.031e-008)	(1.530e-008)	(2.415e-008)	(1.967e-008)	(1.483e-008)
$h_{t+1} = 1.20 \times E[h]$												
Johnson S_U	1.028e-005	3.935e-006	1.695e-006	8.855e-006	3.266e-006	1.389e-006	8.718e-006	3.211e-006	1.365e-006	8.412e-006	3.099e-006	1.317e-006
Johnson S_L	1.022e-005	4.015e-006	1.746e-006	8.815e-006	3.372e-006	1.448e-006	8.680e-006	3.315e-006	1.422e-006	8.375e-006	3.199e-006	1.372e-006
Edgeworth L	3.258e-006	6.140e-006	3.867e-006	2.626e-006	5.920e-006	3.375e-006	2.550e-006	5.855e-006	3.332e-006	2.205e-006	5.738e-006	3.297e-006
Edgeworth S_L	9.243e-006	4.490e-006	1.898e-006	8.930e-006	4.607e-006	1.933e-006	8.839e-006	4.545e-006	1.908e-006	8.486e-006	4.407e-006	1.848e-006
Monte Carlo	1.027e-005	4.000e-006	1.704e-006	8.859e-006	3.357e-006	1.415e-006	8.815e-006	3.357e-006	1.426e-006	8.432e-006	3.185e-006	1.339e-006
Écart-Type	(2.442e-008)	(1.797e-008)	(1.290e-008)	(2.297e-008)	(1.669e-008)	(1.205e-008)	(2.279e-008)	(1.656e-008)	(1.193e-008)	(2.172e-008)	(1.569e-008)	(1.121e-008)

"Johnson S_U " désigne l'approximation analytique basée sur le système S_U des fonctions de densité de Johnson, "Johnson S_L " désigne l'approximation analytique basée sur le système S_L des fonctions de densité de Johnson, "Edgeworth L " désigne l'approximation analytique basée sur le développement en série de Edgeworth construit autour de la loi lognormale, "Edgeworth S_L " désigne l'approximation analytique basée sur le développement en série de Edgeworth construit autour du système S_L , "Monte Carlo" est l'estimation de la valeur de l'option obtenue par une simulation de 500000 trajectoires et "Écart-Type" est l'écart-type de l'estimé Monte Carlo. h_{t+s} correspond à la variance conditionnelle future. De plus, $E[h]$ correspond à la variance conditionnelle du rendement de l'actif risqué sous la mesure Q , $t \geq 0$ dénote l'instant présent et $s > 0$ dénote un nombre de périodes futures. Les résultats en gras indiquent que la différence entre l'estimé Monte Carlo et le résultat de l'expression analytique est significativement différente de zéro pour un seuil de signification de 5%

TAB. 5 – Validation des approximations analytiques pour une option d’achat européenne dans un contexte de forte persistance

K/h_{t+1}	s = 10 jours			s = 30 jours			s = 90 jours			s = 270 jours		
	0.75	1.00	1.25	0.75	1.00	1.25	0.75	1.00	1.25	0.75	1.00	1.25
$h_{t+1} = 0.80 \times E[h]$												
Johnson S_U	2.709e-005	1.583e-005	9.402e-006	3.204e-005	1.933e-005	1.089e-005	3.224e-005	1.907e-005	9.465e-006	3.110e-005	1.814e-005	8.303e-006
Johnson S_L	2.627e-005	1.556e-005	9.658e-006	2.997e-005	1.833e-005	1.199e-005	2.985e-005	1.821e-005	1.193e-005	2.881e-005	1.757e-005	1.152e-005
Edgeworth L	-6.834e-005	-1.705e-005	1.600e-005	-7.246e-004	-2.563e-004	1.819e-005	-3.094e-003	-1.148e-003	-1.002e-007	-7.641e-003	-2.863e-003	-3.675e-005
Edgeworth S_L	-4.072e-004	2.607e-005	2.324e-005	-1.337e-002	3.401e-004	4.292e-004	-7.833e-002	1.915e-003	2.465e-003	-2.046e-001	4.976e-003	6.422e-003
Monte Carlo	2.647e-005	1.588e-005	9.786e-006	3.035e-005	1.936e-005	1.267e-005	3.021e-005	1.932e-005	1.266e-005	2.909e-005	1.859e-005	1.218e-005
Écart-Type	(4.804e-008)	(4.414e-008)	(3.873e-008)	(5.745e-008)	(5.400e-008)	(4.894e-008)	(5.754e-008)	(5.419e-008)	(4.924e-008)	(5.478e-008)	(5.150e-008)	(4.665e-008)
$h_{t+1} = 1.00 \times E[h]$												
Johnson S_U	2.192e-005	1.188e-005	6.987e-006	2.250e-005	1.091e-005	6.127e-006	2.219e-005	9.418e-006	4.885e-006	2.124e-005	8.295e-006	4.123e-006
Johnson S_L	2.117e-005	1.208e-005	7.399e-006	2.078e-005	1.212e-005	7.766e-006	2.049e-005	1.193e-005	7.654e-006	1.977e-005	1.152e-005	7.386e-006
Edgeworth L	-5.644e-005	1.321e-005	2.750e-005	-4.460e-004	1.691e-005	1.203e-004	-1.680e-003	-1.276e-006	3.901e-004	-4.018e-003	-3.732e-005	9.008e-004
Edgeworth S_L	-3.264e-005	3.543e-005	1.733e-005	-1.151e-003	5.207e-004	2.238e-004	-5.571e-003	2.439e-003	1.040e-003	-1.399e-002	6.093e-003	2.594e-003
Monte Carlo	2.160e-005	1.229e-005	7.392e-006	2.192e-005	1.288e-005	8.051e-006	2.166e-005	1.272e-005	7.939e-006	2.069e-005	1.210e-005	7.513e-006
Écart-Type	(5.141e-008)	(4.502e-008)	(3.864e-008)	(5.570e-008)	(4.953e-008)	(4.340e-008)	(5.498e-008)	(4.887e-008)	(4.282e-008)	(5.202e-008)	(4.606e-008)	(4.015e-008)
$h_{t+1} = 1.20 \times E[h]$												
Johnson S_U	1.828e-005	9.708e-006	5.731e-006	1.463e-005	6.742e-006	3.952e-006	1.344e-005	5.393e-006	3.122e-006	1.246e-005	4.592e-006	2.665e-006
Johnson S_L	1.798e-005	1.013e-005	6.180e-006	1.497e-005	8.547e-006	5.396e-006	1.461e-005	8.316e-006	5.237e-006	1.410e-005	8.024e-006	5.053e-006
Edgeworth L	-2.333e-005	3.151e-005	2.970e-005	-1.397e-004	1.360e-004	1.239e-004	-4.934e-004	3.871e-004	3.634e-004	-1.153e-003	8.535e-004	8.097e-004
Edgeworth S_L	5.066e-005	3.038e-005	1.347e-005	5.642e-004	3.485e-004	1.280e-004	2.154e-003	1.334e-003	4.827e-004	5.115e-003	3.168e-003	1.143e-003
Monte Carlo	1.851e-005	1.032e-005	6.180e-006	1.602e-005	8.956e-006	5.447e-006	1.558e-005	8.626e-006	5.186e-006	1.509e-005	8.372e-006	5.044e-006
Écart-Type	(5.374e-008)	(4.574e-008)	(3.870e-008)	(5.399e-008)	(4.664e-008)	(4.051e-008)	(5.134e-008)	(4.389e-008)	(3.768e-008)	(4.949e-008)	(4.226e-008)	(3.621e-008)

"Johnson S_U " désigne l'approximation analytique basée sur le système S_U des fonctions de densité de Johnson, "Johnson S_L " désigne l'approximation analytique basée sur le système S_L des fonctions de densité de Johnson, "Edgeworth L " désigne l'approximation analytique basée sur le développement en série de Edgeworth construit autour de la loi lognormale, "Edgeworth S_L " désigne l'approximation analytique basée sur le développement en série de Edgeworth construit autour du système S_L , "Monte Carlo" est l'estimation de la valeur de l'option obtenue par une simulation de 500000 trajectoires et "Écart-Type" est l'écart-type de l'estimé Monte Carlo. h_{t+s} correspond à la variance conditionnelle future, $t \geq 0$ dénote l'instant présent et $s > 0$ dénote un nombre de périodes futures. De plus, $E[h]$ correspond à la variance inconditionnelle du rendement de l'actif risqué sous la mesure Q . Les résultats en caractère gras indiquent que la différence entre l'estimé Monte Carlo et le résultat de l'expression analytique est significativement différente de zéro pour un seuil de signification de 5%

TAB. 6 – Validation de l'approximation analytique S_L pour les paramètres de l'indice S&P500

$$\beta_0 = 1.3348e - 006, \beta_1 = 0.87, \beta_2 = 0.07, \lambda + \theta = -0.85$$

$$\mu_1 = 0.994, \mu_2 = 1.011, \mu_3 = 1.061, \mu_4 = 1.156$$

K/h_{t+1}	s = 10 jours			s = 30 jours			s = 90 jours			s = 180 jours		
	0.75	1.00	1.25	0.75	1.00	1.25	0.75	1.00	1.25	0.75	1.00	1.25
$h_{t+1} = 0.80 \times E[h]$												
Johnson S_L	3.411e-005	1.721e-005	1.026e-005	5.377e-005	3.791e-005	2.946e-005	6.909e-005	5.700e-005	5.013e-005	5.482e-005	4.600e-005	4.172e-005
Monte Carlo	(3.419e-005)	(1.709e-005)	(1.012e-005)	(5.489e-005)	(3.828e-005)	(2.945e-005)	(7.922e-005)	(6.498e-005)	(5.659e-005)	(9.246e-005)	(7.944e-005)	(7.168e-005)
Écart-Type	9.573e-008	7.531e-008	6.153e-008	1.953e-007	1.774e-007	1.642e-007	4.261e-007	4.131e-007	4.031e-007	8.054e-007	7.972e-007	7.909e-007
$h_{t+1} = 1.00 \times E[h]$												
Johnson S_L	6.278e-005	3.575e-005	2.304e-005	7.912e-005	5.823e-005	4.657e-005	8.682e-005	7.261e-005	6.445e-005	6.394e-005	5.379e-005	4.896e-005
Monte Carlo	(6.331e-005)	(3.592e-005)	(2.302e-005)	(8.093e-005)	(5.917e-005)	(4.694e-005)	(9.954e-005)	(8.333e-005)	(7.357e-005)	(1.053e-004)	(9.161e-005)	(8.335e-005)
Écart-Type	1.326e-007	1.127e-007	9.628e-008	2.492e-007	2.312e-007	2.170e-007	5.471e-007	5.349e-007	5.254e-007	9.224e-007	9.143e-007	9.080e-007
$h_{t+1} = 1.20 \times E[h]$												
Johnson S_L	9.723e-005	6.098e-005	4.185e-005	1.071e-004	8.149e-005	6.664e-005	1.054e-004	8.909e-005	7.965e-005	7.364e-005	6.200e-005	5.659e-005
Monte Carlo	(9.760e-005)	(6.123e-005)	(4.184e-005)	(1.099e-004)	(8.352e-005)	(6.799e-005)	(1.207e-004)	(1.027e-004)	(9.166e-005)	(1.170e-004)	(1.028e-004)	(9.407e-005)
Écart-Type	1.659e-007	1.496e-007	1.330e-007	3.054e-007	2.883e-007	2.738e-007	6.328e-007	6.205e-007	6.108e-007	9.935e-007	9.853e-007	9.787e-007

"Johnson S_L " désigne l'approximation analytique basée sur le système S_L des fonctions de densité de Johnson, "Monte Carlo" est l'estimation de la valeur de l'option obtenue par une simulation de 500000 trajectoires et "Écart-Type" est l'écart-type de l'estimé Monte Carlo. h_{t+s} correspond à la variance conditionnelle future. De plus, $E[h]$ correspond à la variance inconditionnelle du rendement de l'actif risqué sous la mesure Q , $t \geq 0$ dénote l'instant présent et $s > 0$ dénote un nombre de périodes futures. Les résultats en gras indiquent que la différence entre l'estimé Monte Carlo et le résultat de l'expression analytique est significativement différente de zéro pour un seuil de signification de 5%

TAB. 7 – Estimation des paramètres du processus NGARCH.

Paramètre	S&P500		S&P TSX		CAD-USD		WTI Crude		USD-EUR	
	Valeur	Écart-Type	Valeur	Écart-Type	Valeur	Écart-Type	Valeur	Écart-Type	Valeur	Écart-Type
β_0	1.33e-006	1.66e-007	9.94e-007	1.05e-007	1.36e-007	3.56e-008	2.94e-006	5.70e-007	3.74e-007	3.78e-007
β_1	0.8705	0.0087	0.8968	0.0052	0.9431	0.0083	0.9458	0.0042	0.9781	0.0130
β_2	0.0665	0.0063	0.0782	0.0047	0.0374	0.0055	0.0495	0.0038	0.0136	0.0071
λ	-0.0703	0.0196	-0.0838	0.0203	-0.1094	0.0194	0.0043	0.0197	0.0308	0.0363
θ	-0.8528	0.1050	-0.4063	0.0605	0.4086	0.1236	0.0083	0.0535	0.0972	0.3961
$-\ln L(\phi)$	-11165.89		-11416.59		-13808.14		-8842.81		-3498.45	

TAB. 8 – Évaluation des constantes critiques liées au processus NGARCH.

	S&P500	S&P TSX	CAD-USD	WTI Crude	EUR-USD
μ_1	0.9938	0.9938	0.9839	0.9954	0.9919
μ_2	1.0115	1.0057	0.9713	0.9957	0.9843
μ_3	1.0612	1.0420	0.9627	1.0019	0.9771
μ_4	1.1563	1.1133	0.9585	1.0151	0.9704

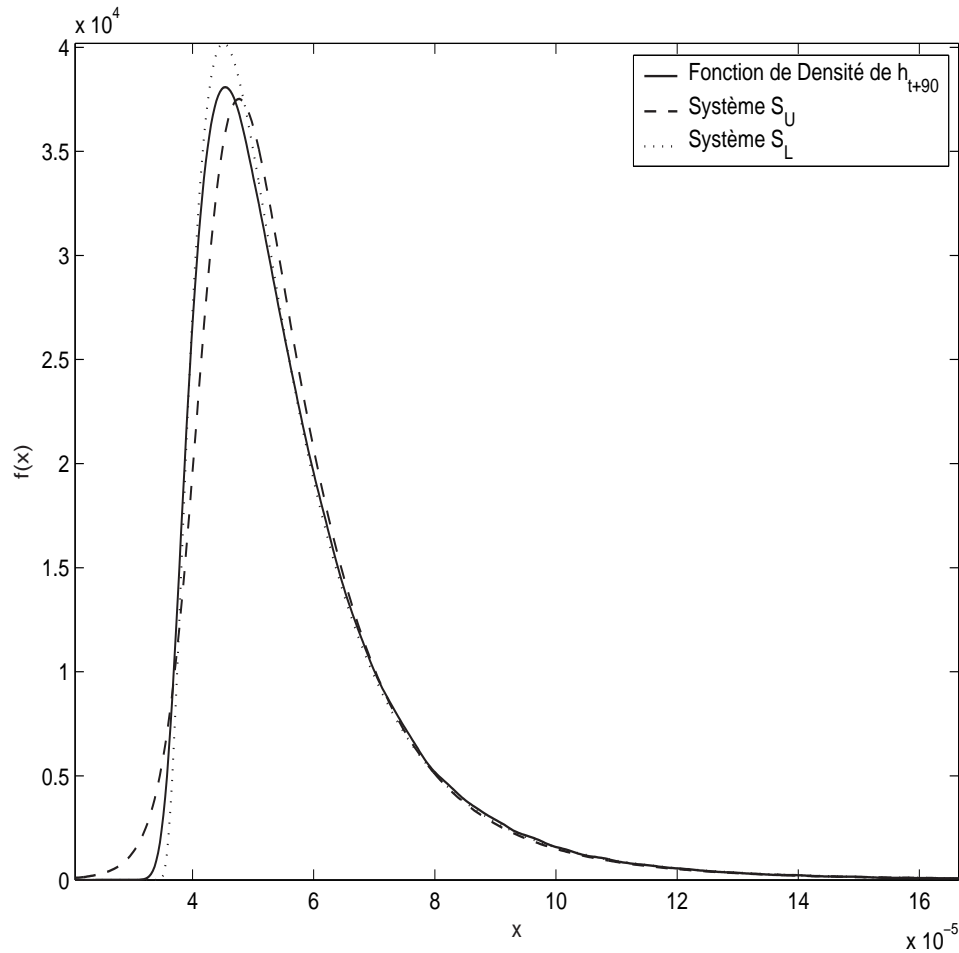
Le S&P500 et le S&P TSX sont respectivement des indices boursiers américain et canadien. CAD-USD, correspond au taux de change exprimé en dollars canadien par dollars américain, USD-EUR correspond au taux de change exprimé en dollars américain par Euro et WTI Crude représente le cours au comptant du baril de pétrole. Valeur désigne l'estimation obtenue par maximum de vraisemblance et Écart-Type représente l'écart-type de la valeur estimée. Outre la série EUR-USD, pour laquelle les données sont recueillies du 31 décembre 1999 au 31 décembre 2002, toutes les séries sont observées pour la période du 1 janvier 1992 au 31 décembre 2001. Le rendement est défini comme le logarithme naturel du quotient des cours de fermeture pour deux journées successives.

FIG. 1 – Reproduction de la fonction de densité de h_{t+s} dans un contexte de faible persistance

Paramètres NGARCH : $\beta_0 = 0.00001$, $\beta_1 = 0.70$, $\beta_2 = 0.1000$, $\theta + \lambda = 0.5000$

Constantes critiques : $\mu_1 = 0.825$, $\mu_2 = 0.711$, $\mu_3 = 0.650$, $\mu_4 = 0.644$

$$h_{t+1} = E[h]$$



Les deux approximations de la fonction de densité basées sur un développement en série de Edgeworth ne sont pas présentées.

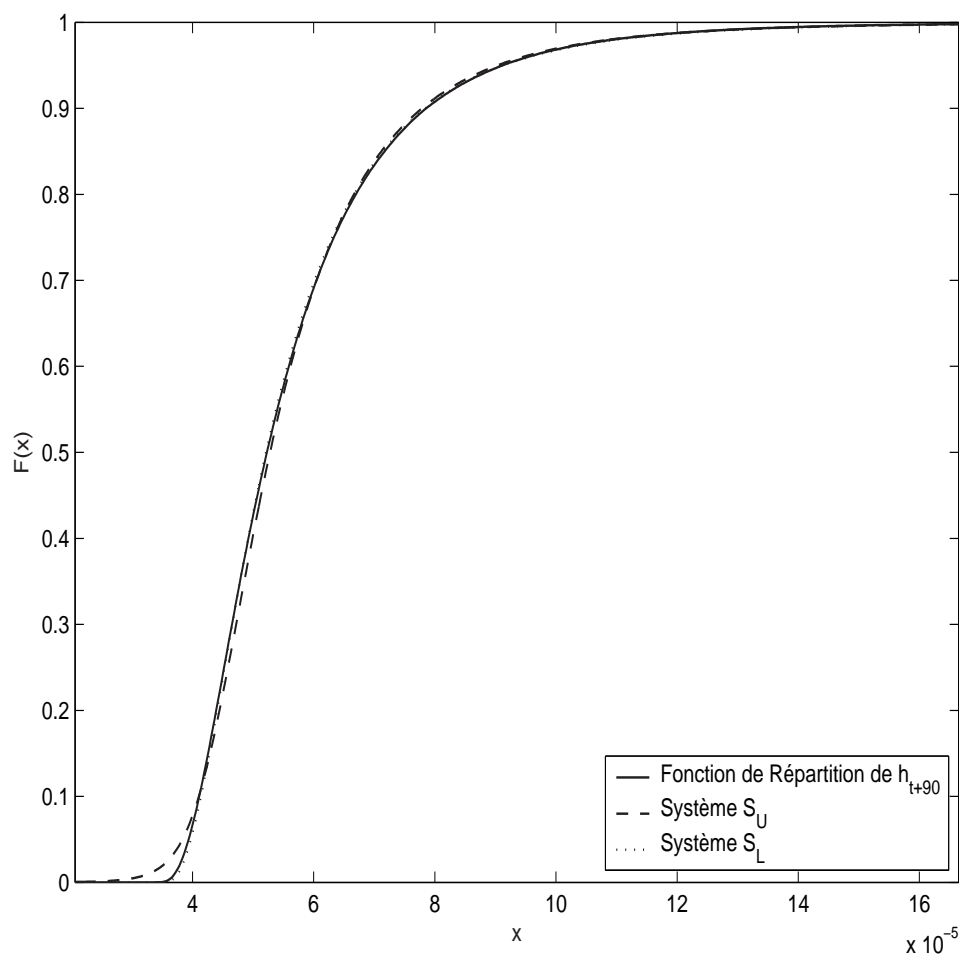
Les facteurs de corrections font en sorte que l'ordre de grandeur de la fonction obtenue n'est pas comparable. L'estimation de la fonction de densité est obtenue par une méthode de noyau basée sur une simulation Monte Carlo de 500000 trajectoires. La valeur initiale de h_{t+s} est fixée à son niveau stationnaire.

FIG. 2 – Reproduction de la fonction de répartition de h_{t+s} dans un contexte de faible persistance

Paramètres NGARCH : $\beta_0 = 0.00001$, $\beta_1 = 0.70$, $\beta_2 = 0.1000$, $\theta + \lambda = 0.5000$

Constantes critiques : $\mu_1 = 0.825$, $\mu_2 = 0.711$, $\mu_3 = 0.650$, $\mu_4 = 0.644$

$$h_{t+1} = E[h]$$



Les deux approximations de la fonction de répartition basées sur un développement en série de Edgeworth ne sont pas présentées.

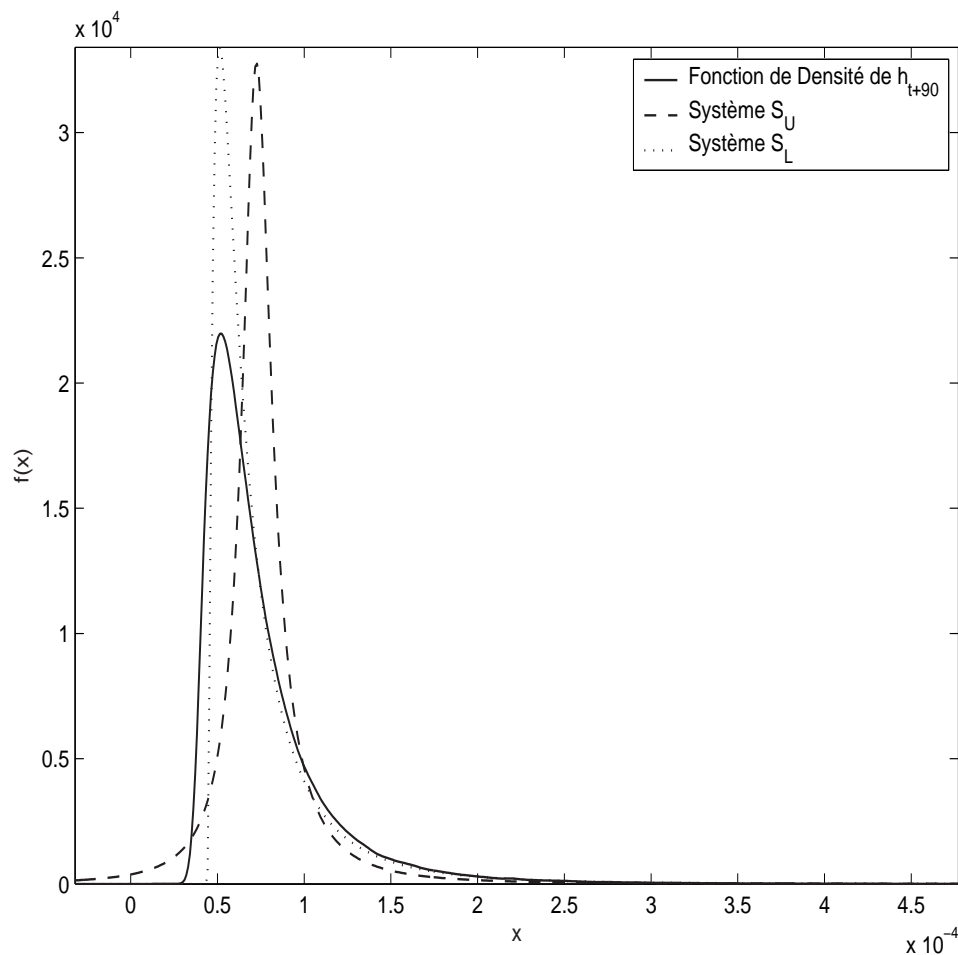
Les facteurs de corrections font en sorte que l'ordre de grandeur de la fonction obtenue n'est pas comparable. L'estimation de la fonction de répartition est obtenue par une simulation Monte Carlo de 500000 trajectoires. La valeur initiale de h_{t+s} est fixée à son niveau stationnaire.

FIG. 3 – Reproduction de la fonction de densité de h_{t+s} dans un contexte de forte persistance

Paramètres NGARCH : $\beta_0 = 0.00001$, $\beta_1 = 0.70$, $\beta_2 = 0.1500$, $\theta + \lambda = 0.3500$

Constantes critiques : $\mu_1 = 0.825$, $\mu_2 = 0.711$, $\mu_3 = 0.650$, $\mu_4 = 0.644$

$$h_{t+1} = E[h]$$



Les deux approximations de la fonction de densité basées sur un développement en série de Edgeworth ne sont pas présentées.

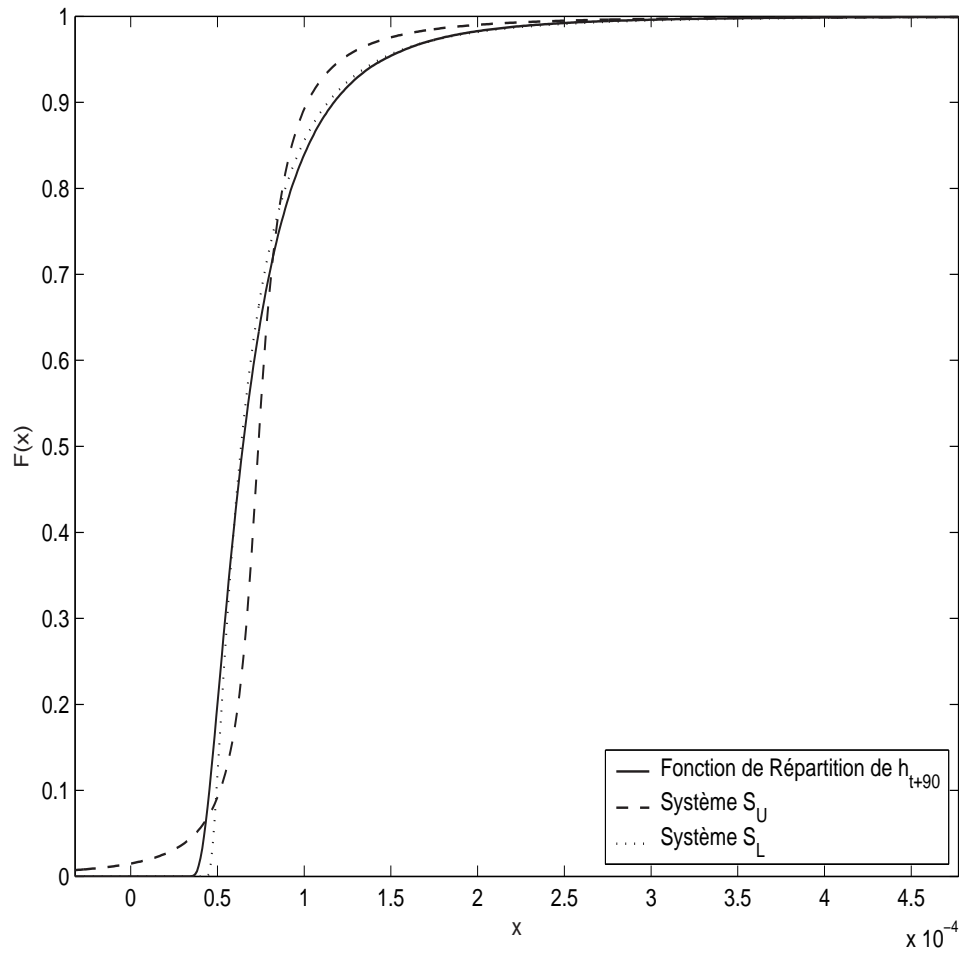
Les facteurs de corrections font en sorte que l'ordre de grandeur de la fonction obtenue n'est pas comparable. L'estimation de la fonction de densité est obtenue par une méthode de noyau basée sur une simulation Monte Carlo de 500000 trajectoires. La valeur initiale de h_{t+s} est fixée à son niveau stationnaire.

FIG. 4 – Reproduction de la fonction de répartition de h_{t+s} dans un contexte de forte persistance

Paramètres NGARCH : $\beta_0 = 0.00001$, $\beta_1 = 0.70$, $\beta_2 = 0.1500$, $\theta + \lambda = 0.3500$

Constantes critiques : $\mu_1 = 0.825$, $\mu_2 = 0.711$, $\mu_3 = 0.650$, $\mu_4 = 0.644$

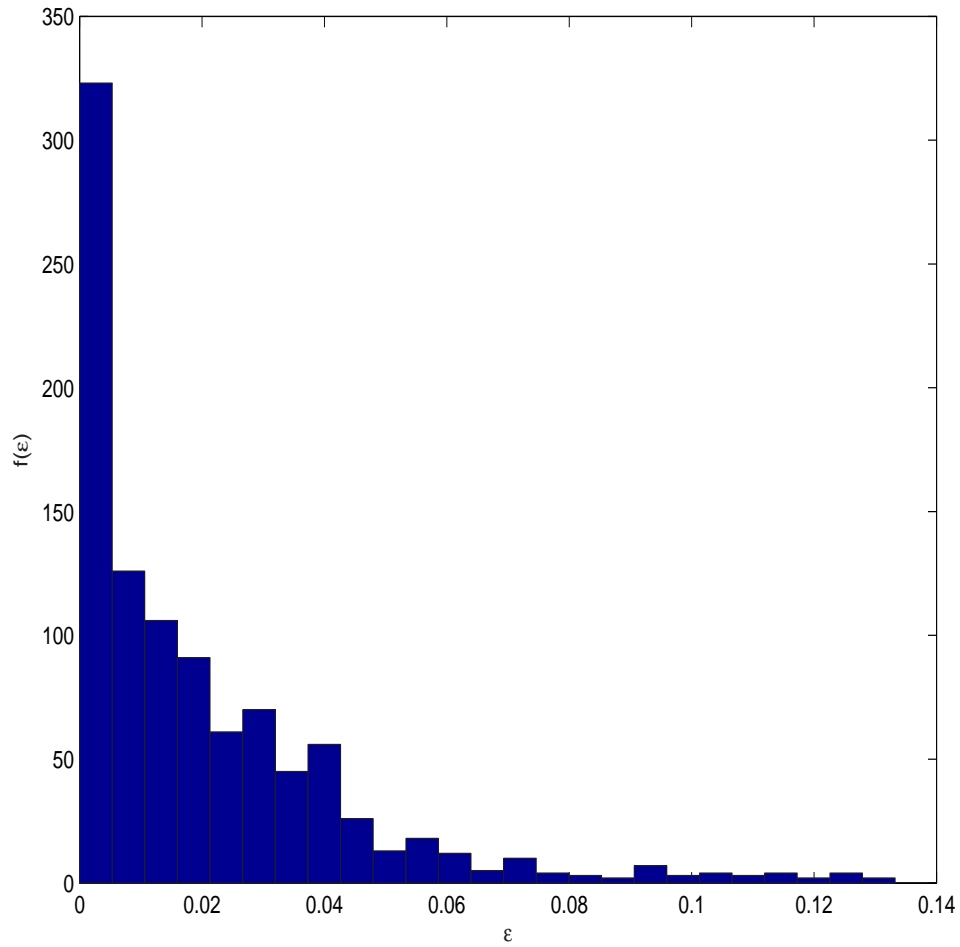
$$h_{t+1} = E[h]$$



Les deux approximations de la fonction de répartition basées sur un développement en série de Edgeworth ne sont pas présentées.

Les facteurs de corrections font en sorte que l'ordre de grandeur de la fonction obtenue n'est pas comparable. L'estimation de la fonction de répartition est obtenue par une simulation Monte Carlo de 500000 trajectoires. La valeur initiale de h_{t+s} est fixée à son niveau stationnaire.

FIG. 5 – Histogramme des erreurs relatives d'évaluation par l'approximation S_L



Les erreurs relatives d'évaluation sont obtenues par le ratio entre l'erreur d'évaluation absolue et l'estimé Monte-Carlo obtenu par une simulation de 1000000 trajectoires. L'erreur d'évaluation absolue consiste en la valeur absolue de la différence entre l'estimé Monte-Carlo et la valeur obtenue par l'approximation S_L .

FIG. 6 – Analyse de sensibilité de C_{S_L} par rapport à h_{t+1}

Paramètres NGARCH : $\beta_0 = 0.00000$, $\beta_1 = 0.98$, $\beta_2 = 0.0136$, $\theta + \lambda = 0.1280$

Constantes critiques : $\mu_1 = 0.992$, $\mu_2 = 0.984$, $\mu_3 = 0.977$, $\mu_4 = 0.970$

$$K = E[h]$$

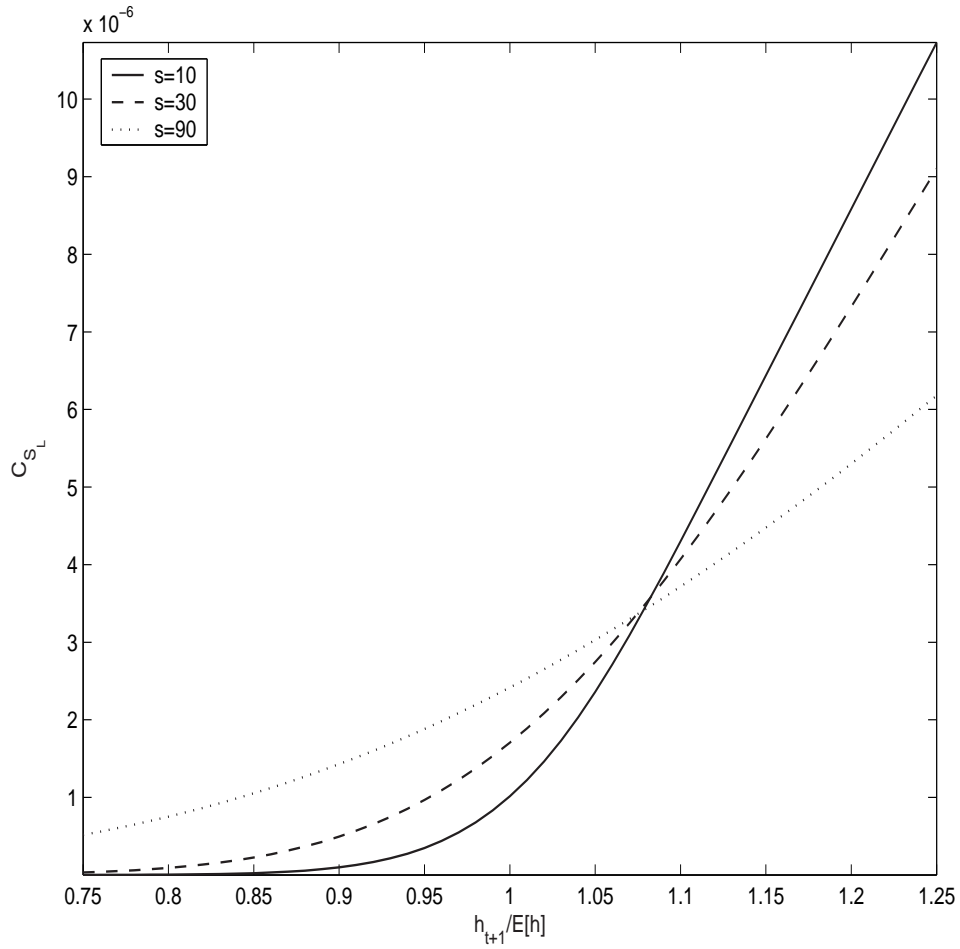


FIG. 7 – Analyse de sensibilité de C_{S_L} par rapport à s

Paramètres NGARCH : $\beta_0 = 0.00000$, $\beta_1 = 0.98$, $\beta_2 = 0.0136$, $\theta + \lambda = 0.1280$

Constantes critiques : $\mu_1 = 0.992$, $\mu_2 = 0.984$, $\mu_3 = 0.977$, $\mu_4 = 0.970$

$$K = E[h]$$

