Christiane Jacques

LOIS DE LINNIK

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de mathématiques et de statistique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL

SEPTEMBRE 1995

Dédié à ma mère, Suzanne

Résumé

Ce mémoire présente, dans un premier temps, les lois de Linnik classiques et généralisées. La loi de Linnik généralisée, définie par la fonction caractéristique

$$f(t) = (1 + |t|^{\alpha})^{-1/\beta}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad \beta > 0,$$

peut s'écrire comme un produit de deux variables aléatoires indépendantes. À l'aide de cette représentation, nous décrivons entre autres le poids des ailes de la loi de Linnik généralisée ainsi qu'un algorithme de simulation.

Dans un deuxième temps, nous généralisons au cas multivarié la loi de Linnik. L'aspect simulation est présenté pour cette loi, de même que pour la loi stable multivariée définie dans ce travail.

Finalement, nous présentons plusieurs méthodes d'estimation des paramètres de la loi de Linnik généralisée, dans les cas univarié et multivarié, ainsi qu'une application faite à l'aide des prix à la fermeture d'une action ordinaire de IBM.

Québec, le 12 septembre 1995

Christiane Jacques
Étudiante

Radu Theodorescu
Directeur de recherche

Bruno Rémillard
Codirecteur de recherche

Avant-propos

J'adresse tout d'abord mes remerciements à mon directeur Monsieur Radu Theodorescu, professeur à l'Université Laval et à mon codirecteur Monsieur Bruno Rémillard, professeur à l'Université du Québec à Trois-Rivières pour le support qu'ils m'ont apporté tout au long de la réalisation de ce travail de recherche. Les nombreux conseils qu'ils ont su me donner m'ont permis d'effectuer de bons choix.

Je remercie mes proches parents et amis. La confiance et les encouragements qu'ils m'ont accordés furent grandement appréciés. Je remercie également le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada pour leur aide financière.

Contents

1 Introduction

Linnik [14] démontra en 1963 que

$$f(t) = \frac{1}{1+|t|^\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

est une fonction caractéristique pour $0 < \alpha \leq 2$. Il s'en servit alors pour démontrer que $e^{-|t|^\alpha}$ est aussi une fonction caractéristique. En effet, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes ayant f comme fonction caractéristique, alors la fonction caractéristique de $(X_1 + \ldots + X_n)/n^{1/\alpha}$ est $f_n(t) = (1 + |t|^\alpha/n)^{-n}$ qui converge vers $e^{-|t|^\alpha}$ lorsque n tend vers l'infini.

Depuis ce temps, la loi ayant (1) comme fonction caractéristique est dite loi de Linnik de paramètre α. Ces lois furent peu étudiées jusqu'à tout récemment, où des auteurs ont généralisé ces lois et démontré certaines propriétés intéressantes notamment sur le plan de la simulation ainsi que de l'invariance des sommes d'un nombre aléatoire de ces variables aléatoires.

C'est dans le cadre d'une étude de diverses méthodes de simulation de variables aléatoires que nous avons découvert l'existence de cette loi. Devroye [7] donne un algorithme pour simuler la loi de Linnik en démontrant qu'elle peut s'écrire sous forme d'un produit de variables aléatoires indépendantes. Mais que se passe-t-il pour la simulation de la loi de Linnik multidimensionnelle ? Il faut d'abord définir cette loi. Anderson [2] nous donne une définition possible pour la loi de Linnik multivariée et propose une méthode d'estimation pour les paramètres de cette loi mais n'aborde pas l'aspect simulation. Anderson et Arnold [3] suggèrent une méthode différente permettant d'estimer le paramètre α de la loi de Linnik univariée, en plus de mentionner qu'elle peut modéliser des phénomènes économiques tels que le changement de prix boursiers, et peut même être plus appropriée que la loi stable pour la modélisation de ces phénomènes.

Le contenu de ces récents articles influencèrent l'orientation de ce mémoire. Tous les points mentionnés précédemment y sont présentés en détail. D'autres aspects de la loi de Linnik sont également abordés. Plus précisément, les chapitres 2 et 3 portent sur la définition de cette loi pour les cas unidimensionnel et multidimensionnel.

Dans le chapitre 2, nous présentons une généralisation de la loi de Linnik utilisant la loi stable, deux lemmes importants reliés au poids des ailes de la loi de Linnik, ainsi que des algorithmes permettant de simuler les lois de Linnik classiques et généralisées.

Le chapitre 3 est un analogue multivarié du chapitre 2. Une représentation de la loi de Linnik généralisée multivariée à l'aide de la loi stable multivariée ainsi que des méthodes de simulation des lois stables et de Linnik généralisées multivariées y sont abordées.

Le dernier chapitre traite de l'estimation des paramètres de la loi de Linnik généralisée univariée et multivariée. Plusieurs méthodes sont proposées dans ce chapitre, mais les principales sont inspirées de la méthode des moments de Press [18]. Nous présentons également plusieurs tableaux de calculs effectués en vue de vérifier la fiabilité de certains de ces estimateurs. À la fin de ce chapitre, nous retrouvons une application faite à partir de données portant sur le prix à la fermeture d'une action ordinaire de IBM.

2 Cas univarié

Devroye [7] démontre d'une manière courte et élégante que (1) est une fonction caractéristique en calculant la fonction caractéristique d'un produit de certaines variables aléatoires indépendantes. Son résultat conduit à une généralisation de la loi de Linnik. Pour débuter notre étude sur les lois de Linnik à l'aide de la représentation qu'apporte Devroye [7], introduisons quelques notions sur les lois stables.

2.1 Lois stables

La densité de probabilité d'une loi stable ne s'exprime pas explicitement en général. Une façon de contourner cette difficulté est de l'étudier à partir de sa fonction caractéristique. En fait, le logarithme de la fonction caractéristique f d'une telle loi ayant comme paramètre de position 0 s'écrit [19, p. 152]

$$\log f(t) = -c|t|^\alpha \left[1 + ib\,\mathrm{sign}(t)\omega(t,\alpha)\right], \quad t \in \mathbb{R},$$

où

$$\omega(t,\alpha) = \begin{cases} \tan(\pi\alpha/2) & \text{pour } \alpha \neq 1, \\ -(2/\pi)\log|t| & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

et

$\alpha \in (0,2]$ est l'exposant ou le paramètre de stabilité,
$b \in [-1,1]$ est un paramètre d'asymétrie,
$c \geq 0$ est un paramètre d'échelle.

Si la variable aléatoire X possède une telle fonction caractéristique, nous écrivons $X \sim S_\alpha(b,c)$. Notons que tout au long de ce travail, nous utilisons la variable aléatoire S_α issue de la famille $S_\alpha(0,1)$. Lorsque $\alpha = 1$, $b = 0$ et $c = 1$, nous obtenons la loi de Cauchy standard et lorsque $\alpha = 2$, $b = 0$ et $c = 1$, nous obtenons la loi normale de moyenne 0 et de variance 2.

Énonçons quelques propriétés des lois stables qui sont démontrées dans [12, p. 112–113] ou [19, p. 153].

Remarque 2.1 *Soit $X \sim S_\alpha(b,c)$. Alors nous avons:*

1. *La fonction de répartition de X est continue.*
2. *$E(|X|^p) < \infty$ si et seulement si $p < \alpha$.*
3. *$P(X > 0) = 1$ si et seulement si $b = -1$ et $\alpha < 1$.*
4. *X est unimodale.*
5. *Si $\alpha \in (0,2)$, alors*

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha P\,(X > x) = C_\alpha \frac{(1-b)c}{2} \tag{2}$$

et

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha P\,(X < -x) = C_\alpha \frac{(1+b)c}{2}, \tag{3}$$

où

$$C_\alpha = \left(\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x \, dx\right)^{-1}. \tag{4}$$

La loi stable que Devroye [7] utilise pour représenter la loi de Linnik est S_α, une loi symétrique, et dans ce cas, (2) et (3) deviennent

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha P\,(|S_\alpha| > x) = C_\alpha. \tag{5}$$

2.2 Lois de Linnik généralisées

Dans cette section, nous décrivons la loi de Linnik généralisée à l'aide de sa fonction caractéristique. Une forme de représentation de cette loi, un théorème sur les sommes aléatoires de lois de Linnik, ainsi que le comportement asymptotique de cette loi seront également abordés. Notons que les paramètres α et β utilisés tout au long de ce travail sont tels que $0 < \alpha \leq 2$ et $\beta > 0$.

Énonçons maintenant un résultat dû à Devroye [7].

Théorème 2.2 *Si V_β est une variable aléatoire ayant comme densité de probabilité*

$$\frac{\exp(-v^\beta)}{\Gamma(1+1/\beta)}, \quad v > 0, \tag{6}$$

et si V_β et S_α sont indépendantes, alors la variable aléatoire X définie par

$$X = S_\alpha V_\beta^{\beta/\alpha} \tag{7}$$

a comme fonction caractéristique

$$f_X(t) = (1+|t|^\alpha)^{-1/\beta}, \;\; t \in I\!R. \tag{8}$$

Démonstration: Nous avons

$$\begin{aligned} f_X(t) &= E\left(e^{itX}\right) \\ &= E\left(e^{itS_\alpha V_\beta^{\beta/\alpha}}\right) \\ &= E\left(e^{itS_\alpha V_\beta^{\beta/\alpha}} | V_\beta\right) \\ &= E\left(e^{-|t|^\alpha V_\beta^\beta}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \frac{\exp(-v^\beta |t|^\alpha - v^\beta)}{\Gamma(1+1/\beta)}\, dv \\ &= \int_0^\infty \frac{\exp(-v^\beta (1+|t|^\alpha))}{\Gamma(1+1/\beta)}\, dv. \end{aligned}$$

Si nous posons $u = v^\beta\,(1+|t|^\alpha)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \int_0^\infty \frac{\exp(-u)}{\Gamma(1+1/\beta)} \frac{u^{1/\beta - 1}}{\beta(1+|t|^\alpha)^{1/\beta}}\, du \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/\beta)(1+|t|^\alpha)^{1/\beta}} \int_0^\infty e^{-u} u^{1/\beta-1} du \\ &= \frac{1}{(1+|t|^\alpha)^{1/\beta}}, \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration. ■

Définition 2.3 *Une variable aléatoire X dont la fonction caractéristique est donnée par (8) suit une loi de Linnik généralisée de paramètres α et β et nous écrivons alors $X \sim \mathrm{Lin}(\alpha, \beta)$.*

Le cas $\beta = 1$ conduit à la loi de Linnik classique, $\mathrm{Lin}(\alpha) = \mathrm{Lin}(\alpha, 1)$. Remarquons aussi que $\mathrm{Lin}(2)$ n'est autre que la loi de Laplace standardisée (ou la loi double exponentielle).

Examinons maintenant la variable aléatoire V_β dont la fonction de densité est donnée par (6). Soient $U(a, b)$ la famille des variables aléatoires uniformes sur (a, b), $\Gamma(p, q)$ la famille des variables aléatoires gamma de paramètres p et q et $\mathrm{Exp}(m)$ la famille des variables aléatoires exponentielles de paramètre m. D'abord, notons que $V_1 \sim \mathrm{Exp}(1)$.

Théorème 2.4 *Soient $U \sim U(0, 1)$ et $T \sim \Gamma(1 + 1/\beta, 1)$, deux variables aléatoires indépendantes. Alors*

$$V_\beta \stackrel{\mathcal{L}}{=} UT^{1/\beta}, \tag{9}$$

où $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ désigne l'égalité en loi.

Démonstration: Pour $v > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} F_{UT^{1/\beta}}(v) &= P(UT^{1/\beta} \le v) \\ &= E(P(UT^{1/\beta} \le v|T)) \\ &= \int_0^{v^\beta} \frac{t^{1/\beta} e^{-t}}{\Gamma(1+1/\beta)}\, dt + \int_{v^\beta}^\infty \frac{v e^{-t}}{\Gamma(1+1/\beta)}\, dt \\ &= \int_0^{v^\beta} \frac{t^{1/\beta} e^{-t}}{\Gamma(1+1/\beta)}\, dt + \frac{v e^{-v^\beta}}{\Gamma(1+1/\beta)}\ . \end{aligned}$$

En dérivant la dernière expression par rapport à v, nous trouvons que la densité de probabilité de $UT^{1/\beta}$ est

$$\begin{aligned} f_{UT^{1/\beta}}(v) &= \frac{d}{dv} F_{UT^{1/\beta}}(v) \\ &= \frac{\beta v^\beta e^{-v^\beta}}{\Gamma(1+1/\beta)} + \frac{e^{-v^\beta}}{\Gamma(1+1/\beta)} - \frac{\beta v^\beta e^{-v^\beta}}{\Gamma(1+1/\beta)} \\ &= \frac{e^{-v^\beta}}{\Gamma(1+1/\beta)} , \end{aligned}$$

d'où $V_\beta \stackrel{\mathcal{L}}{=} UT^{1/\beta}$. ■

Notons que la variable aléatoire V_β suit une loi exponentielle généralisée de paramètres $\mu = 0$, $\sigma = 1$, $\alpha = 1 + 1/\beta$, $\tau = 1/\beta$ et $A = 1$, sous la forme indiquée dans [13, p. 34].

Remarque 2.5 *Soit $X \sim \mathrm{Lin}(\alpha, \beta)$. Alors en combinant les théorèmes 2.2 et 2.4, nous trouvons*

1. La fonction de répartition de X est continue.

2. X est symétrique par rapport à 0.

3. Pour $\alpha < 2$, tous les moments d'ordre inférieur à α existent et le moment d'ordre α est infini; pour $\alpha = 2$, tous les moments existent.

4. X est unimodale.

En effet, la remarque 4 résulte de la représentation (7) et du fait que S_α est unimodale [19, propriété (6), p. 153]. L'unimodalité de S_α implique la représentation $UW(\alpha)$ où $U \sim U(0, 1)$ et $W(\alpha)$ est indépendante de U [8, théorème 1.3, p. 6]. D'où, en vertu de (7), nous avons que X a la même loi que le produit $UW'(\alpha, \beta)$ avec $W'(\alpha, \beta)$ indépendante de U. Et nous concluons sur l'unimodalité de X.

La loi de Linnik a une propriété particulière. La somme d'un nombre aléatoire N de lois de Linnik est une loi de Linnik de même paramètre, lorsque N obéit à une loi géométrique. Voici le théorème donné dans [2].

Théorème 2.6 *Soient $X_i \sim \mathrm{Lin}(\alpha)$, $i \geq 1$, des variables aléatoires indépendantes et N une variable aléatoire géométrique de paramètre q, indépendante des X_i. Alors*

$$q^{1/\alpha}(X_1 + \ldots + X_N) \sim \mathrm{Lin}(\alpha).$$

Démonstration: En conditionnant par rapport à N, nous obtenons

$$\begin{aligned} E\left(e^{itq^{1/\alpha}(X_1+\ldots+X_N)}\right) &= E\left(E\left(e^{itq^{1/\alpha}(X_1+\ldots+X_N)}|N\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+|q^{1/\alpha}t|^\alpha}\right)^n q(1-q)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q}{1-q} \left(\frac{1-q}{1+q|t|^\alpha}\right)^n . \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{1-q}{1+q|t|^\alpha} < 1$, nous concluons que

$$E\left(e^{itq^{1/\alpha}(X_1+\ldots+X_N)}\right) = \frac{1}{1+|t|^\alpha}\ . \ \blacksquare$$

Examinons maintenant le comportement des ailes d'une loi de Linnik généralisée. Commençons par décrire le comportement des ailes de cette loi dans le cas où $\alpha \in (0,2)$. Nous pouvons alors nous servir d'un résultat sur le comportement des ailes de la loi stable symétrique décrit par (5).

Lemme 2.7 *Soient $\alpha \in (0,2)$ et $X \sim \mathrm{Lin}(\alpha,\beta)$. Alors*
(i)

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha P(X > x) = \frac{C_\alpha}{2\beta},$$

(ii)

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha P(X < -x) = \frac{C_\alpha}{2\beta},$$

où C_α est définie en (4).

Démonstration: (i) De (7), nous obtenons, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} P\,(X > x) &= P\left(S_\alpha V_\beta^{\beta/\alpha} > x\right) \\ &= E\left(P\left(S_\alpha V_\beta^{\beta/\alpha} > x \mid V_\beta\right)\right) \\ &= \int_0^\infty P\left(S_\alpha > x v^{-\beta/\alpha}\right) \frac{\exp(-v^\beta)}{\Gamma(1+1/\beta)}\, dv. \qquad (10) \end{aligned}$$

(a) Montrons que $\limsup\limits_{x\to\infty} x^\alpha P(X > x) \le C_\alpha/2\beta$. Etant donné $\epsilon > 0$, de (5), il existe $x_0 > 0$ tel que

$$\left|\frac{P(S_\alpha > xv^{-\beta/\alpha})}{C_\alpha (xv^{-\beta/\alpha})^{-\alpha}/2} - 1\right| \le \epsilon,$$

si $xv^{-\beta/\alpha} > x_0$. Alors, utilisant (10), nous trouvons

$$\begin{aligned} P(X > x) &\le E\left(C_\alpha(1+\epsilon)x^{-\alpha}V_\beta^\beta 1_{\{V_\beta \le (x/x_0)^{\alpha/\beta}\}}/2\right) + P\left(V_\beta > (x/x_0)^{\alpha/\beta}\right) \\ &\le C_\alpha(1+\epsilon)x^{-\alpha}E(V_\beta^\beta)/2 + P\left(V_\beta^\beta > (x/x_0)^\alpha\right) \\ &= C_\alpha(1+\epsilon)x^{-\alpha}/2\beta + P\left(e^{\frac{1}{2}V_\beta^\beta} > e^{\frac{1}{2}(x/x_0)^\alpha}\right) \\ &\le C_\alpha(1+\epsilon)x^{-\alpha}/2\beta + e^{-\frac{1}{2}(x/x_0)^\alpha} E\left(e^{\frac{1}{2}V_\beta^\beta}\right) \quad \text{par l'inégalité de Markov} \\ &= C_\alpha(1+\epsilon)x^{-\alpha}/2\beta + 2^{1/\beta}e^{-\frac{1}{2}(x/x_0)^\alpha}, \qquad (11) \end{aligned}$$

car $E\left(V_\beta^\beta\right) = 1/\beta$ et $E\left(e^{\frac{1}{2}V_\beta^\beta}\right) = 2^{1/\beta}$.

Utilisant (11), nous obtenons finalement

$$\begin{aligned}\limsup_{x\to\infty} x^\alpha P(X>x) &\le \limsup_{x\to\infty} x^\alpha C_\alpha(1+\epsilon)x^{-\alpha}/2\beta + \limsup_{x\to\infty} x^\alpha 2^{1/\beta} e^{-\frac{1}{2}(x/x_0)^\alpha} \\ &\le C_\alpha(1+\epsilon)/2\beta. \qquad (12)\end{aligned}$$

Comme (12) est vraie pour tout $\epsilon > 0$, nous concluons que

$$\limsup_{x\to\infty} x^\alpha P(X>x) \le C_\alpha/2\beta. \qquad (13)$$

(b) Montrons maintenant que $\liminf_{x\to\infty} x^\alpha P(X>x) \ge C_\alpha/2\beta$. Soit $\epsilon > 0$ fixé. En vertu de (5) et (10), nous trouvons

$$\begin{aligned}P(X>x) &\ge E\left(C_\alpha(1-\epsilon)x^{-\alpha}V_\beta^\beta 1_{\{V_\beta \le (x/x_0)^{\alpha/\beta}\}}\right)/2 \\ &= C_\alpha(1-\epsilon)x^{-\alpha}E\left(V_\beta^\beta 1_{\{V_\beta \le (x/x_0)^{\alpha/\beta}\}}\right)/2. \qquad (14)\end{aligned}$$

De (14), nous obtenons

$$\begin{aligned}\liminf_{x\to\infty} x^\alpha P(X>x) &\ge \liminf_{x\to\infty} x^\alpha C_\alpha(1-\epsilon)x^{-\alpha}E\left(V_\beta^\beta 1_{\{V_\beta \le (x/x_0)^{\alpha/\beta}\}}\right)/2 \\ &= C_\alpha(1-\epsilon)E(V_\beta^\beta)/2 = C_\alpha(1-\epsilon)/2\beta. \qquad (15)\end{aligned}$$

Comme (15) est vraie pour tout $\epsilon > 0$, nous en déduisons que

$$\liminf_{x\to\infty} x^\alpha P(X>x) \ge C_\alpha/2\beta. \qquad (16)$$

Combinant maintenant les inégalités (13) et (16), nous concluons que

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha P(X>x) = C_\alpha/2\beta.$$

(ii) Puisque la loi de X est symétrique, nous avons également

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha P(X<-x) = \frac{C_\alpha}{2\beta}. \quad \blacksquare$$

Remarque 2.8 *À l'aide du lemme précédent et de (5), nous remarquons que la loi de Linnik classique a des ailes de même poids que la loi stable. Pour α donné, plus β est grand, plus le poids des ailes de la loi* $\mathrm{Lin}(\alpha,\beta)$ *diminue.*

Pour le cas où $\alpha = 2$, nous pouvons démontrer le lemme suivant.

Lemme 2.9 *Soit $X \sim \mathrm{Lin}(2,\beta)$. Alors*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log P(X>x) = -1. \qquad (17)$$

Démonstration: (a) Montrons d'abord que $\liminf_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} \log P(S_2 V_\beta^{\beta/2} > x) \geq -1$.

Premièrement, écrivons $P(S_2 V_\beta^{\beta/2} > x)$ sous forme explicite. Nous savons que

$$\begin{aligned} P(S_2 V_\beta^{\beta/2} > x) &= E\left(P(S_2 V_\beta^{\beta/2} > x | V_\beta)\right) \\ &= \int_0^\infty P(S_2 > xv^{-\beta/2}) \frac{e^{-v^\beta}}{\Gamma(1+1/\beta)}\, dv. \end{aligned}$$

Comme $S_2 \sim N(0,2)$, $P(S_2 > xv^{-\beta/2}) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{xv^{-\beta/2}}^\infty e^{-z^2/4} dz$. En posant $y = zv^{\beta/2}$, nous obtenons

$$P(S_2 V_\beta^{\beta/2} > x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(1+1/\beta)} \int_x^\infty \int_0^\infty v^{-\beta/2} e^{-v^\beta} e^{-\frac{1}{4}y^2 v^{-\beta}} dv dy.$$

Pour minorer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty v^{-\beta/2} e^{-v^\beta} e^{-\frac{1}{4}y^2 v^{-\beta}} dv$, nous remarquons que l'intégrand est décroissant sur l'intervalle $[(y/2)^{1/\beta}, (cy/2)^{1/\beta}]$, $c > 1$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v^{-\beta/2} e^{-v^\beta} e^{-\frac{1}{4}y^2 v^{-\beta}} dv &\geq \int_{(y/2)^{1/\beta}}^{(cy/2)^{1/\beta}} v^{-\beta/2} e^{-v^\beta} e^{-\frac{1}{4}y^2 v^{-\beta}} dv \\ &\geq \left((cy/2)^{1/\beta} - (y/2)^{1/\beta}\right) ((cy/2)^{1/\beta})^{-\beta/2} e^{-((cy/2)^{1/\beta})^\beta} \\ &\quad \times\ e^{-\frac{1}{4}y^2((y/2)^{1/\beta})^{-\beta}} \\ &= (y/2)^{1/\beta}(c^{1/\beta} - 1)(cy/2)^{-1/2} e^{-(cy/2)} e^{-\frac{1}{2}y}, \end{aligned}$$

et pour un $\epsilon > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} P(S_2 V_\beta^{\beta/2} > x) &\geq \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(1+1/\beta)} \int_x^\infty (y/2)^{1/\beta}(c^{1/\beta} - 1)(cy/2)^{-1/2} e^{-(cy/2)} e^{-\frac{1}{2}y} dy \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(1+1/\beta)} \int_x^{x+\epsilon} (y/2)^{1/\beta}(c^{1/\beta} - 1)(cy/2)^{-1/2} e^{-(cy/2)} e^{-\frac{1}{2}y} dy \\ &\geq \frac{\epsilon(c^{1/\beta} - 1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(1+1/\beta)} (x/2)^{1/\beta}(c(x+\epsilon)/2)^{-1/2} e^{-\frac{c(x+\epsilon)}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x+\epsilon)}\ . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\log P(S_2 V_\beta^{\beta/2} > x) &\geq \frac{\log \frac{\epsilon(c^{1/\beta}-1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(1+1/\beta)}}{x} + \frac{1}{\beta}\frac{\log(x/2)}{x} \\ &\quad + \frac{-1}{2}\frac{\log(c(x+\epsilon)/2)}{x} + \frac{-c(x+\epsilon)}{2x} + \frac{-(x+\epsilon)}{2x}\ , \end{aligned}$$

et donc

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log P(S_2 V_\beta^{\beta/2} > x) \geq -\frac{c}{2} - \frac{1}{2}.$$

En faisant tendre c vers 1, nous obtenons

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log P(S_2 V_\beta^{\beta/2} > x) \geq -1.$$

(b) Montrons maintenant que $\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log P(S_2 V_\beta^{\beta/2} > x) \leq -1.$

Comme $V_\beta \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^{1/\beta}$ où $T \sim \Gamma(1/\beta, 1)$, nous avons

$$\begin{aligned} P\left(S_2 V_\beta^{\beta/2} > x\right) &= P\left(S_2 T^{1/2} > x\right) \\ &= P\left(e^{\lambda S_2 T^{1/2}} > e^{\lambda x}\right) \quad \text{pour } \lambda > 0 \\ &\leq e^{-\lambda x} E\left(e^{\lambda S_2 T^{1/2}}\right) \quad \text{par l'inégalité de Markov.} \end{aligned} \tag{18}$$

Puisque

$$E\left(e^{\lambda t^{1/2} S_2}\right) = e^{t\lambda^2},$$

nous avons pour $0 < \lambda < 1$,

$$\begin{aligned} E\left(e^{\lambda S_2 T^{1/2}}\right) &= E\left(E\left(e^{\lambda S_2 T^{1/2}} | T\right)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/\beta)} \int_0^\infty E\left(e^{\lambda t^{1/2} S_2}\right) t^{1/\beta - 1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/\beta)} \int_0^\infty e^{t\lambda^2} t^{1/\beta - 1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/\beta)} \int_0^\infty e^{-t(1-\lambda^2)} t^{1/\beta - 1} dt. \end{aligned}$$

Posons $u = t(1-\lambda^2)$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} E\left(e^{\lambda S_2 T^{1/2}}\right) &= \frac{1}{\Gamma(1/\beta)} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{1-\lambda^2}\right)^{1/\beta - 1} \frac{du}{1-\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/\beta)(1-\lambda^2)^{1/\beta}} \int_0^\infty e^{-u} u^{1/\beta - 1} du \\ &= \frac{1}{(1-\lambda^2)^{1/\beta}}. \end{aligned}$$

D'où, de (18)

$$P\left(S_2 V_\beta^{\beta/2} > x\right) \leq e^{-\lambda x} \frac{1}{(1-\lambda^2)^{1/\beta}},$$

et donc,

$$\begin{aligned} \limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} \log P\left(S_2 V_\beta^{\beta/2} > x\right) &\leq -\lambda + \limsup_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{\beta}\log(1-\lambda^2)}{x} \\ &= -\lambda. \end{aligned}$$

En faisant tendre λ vers 1, nous obtenons le résultat cherché.

De (a) et (b), nous pouvons maintenant conclure que (17) est vérifiée. ■

Remarque 2.10 *Puisque la loi de $X \sim \mathrm{Lin}(2, \beta)$ est symétrique par rapport à 0, nous avons aussi*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \log P(X < -x) = -1.$$

2.3 Simulation de lois de Linnik

La simulation de la loi $\mathrm{Lin}(\alpha)$ se fait grâce à l'équation (7). Pour la simuler, nous devons donc être apte à générer

1. une variable aléatoire $S_\alpha \sim S_\alpha(0, 1)$;
2. une variable aléatoire $V_1 \sim \mathrm{Exp}(1)$.

L'algorithme pour simuler S_α a été présenté par Chambers, Mallows et Stuck [5]. Il est basé sur un résultat de Zolotarev [24] qui affirme que S_α est de même loi que $\tan(U)$ si $\alpha = 1$ et que

$$\frac{\sin(\alpha U)}{\cos^{1/\alpha} U} \left(\frac{\cos((1-\alpha)U)}{Y} \right)^{(1-\alpha)/\alpha}, \quad \text{lorsque } \alpha \neq 1,$$

où $U \sim U(-\pi/2, \pi/2)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ et U et Y sont indépendantes. L'algorithme est donc le suivant:

1. Générer $V \sim U(0, 1)$.
2. Poser $U = -\pi/2 + \pi V$.

3.a) Si $\alpha \neq 1$, alors générer $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ indépendamment de U et prendre

$$S_\alpha = \frac{\sin(\alpha U)}{\cos^{1/\alpha} U} \left(\frac{\cos((1-\alpha)U)}{Y} \right)^{(1-\alpha)/\alpha};$$

3.b) Si $\alpha = 1$, prendre $S_\alpha = \tan(U)$.

Chambers, Mallows et Stuck [5] nous indiquent aussi un algorithme, basé sur un résultat de Ibragimov et Chernin [11], qui nous permet de simuler une loi stable positive, définie pour $0 < \gamma < 1$ et dénotée M_γ (c'est-à-dire $M_\gamma \sim S_\gamma(-1, 1)$), dont nous aurons besoin à la section 3.3 pour simuler une loi stable multivariée. L'algorithme s'inspire du fait que M_γ est de même loi que

$$\left(\frac{a(U)}{W} \right)^{(1-\gamma)/\gamma},$$

où $U \sim U(0, \pi)$, $W \sim \mathrm{Exp}(1)$, U et W sont indépendantes et

$$a(u) = \frac{\sin((1-\gamma)u)(\sin \gamma u)^{\gamma/(1-\gamma)}}{(\sin u)^{1/(1-\gamma)}}, \quad 0 < u < \pi.$$

Si nous voulons générer une telle loi, nous procédons de la manière suivante:

1. Générer $V \sim U(0,1)$.
2. Poser $U = \pi V$.
3. Générer $W \sim \text{Exp}(1)$ indépendamment de U.
4. Calculer $a(U)$.
5. Prendre $M_\gamma = \left(\frac{a(U)}{W}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$.

Puisque nous connaissons un algorithme pour simuler S_α, nous n'avons qu'à utiliser (9) pour simuler une loi $\text{Lin}(\alpha, \beta)$. Les algorithmes pour simuler une loi gamma sont nombreux; voir, par exemple, [6] ou [22]. Nous pouvons donc facilement fournir un algorithme pour générer une loi $\text{Lin}(\alpha, \beta)$:

1. Générer $S_\alpha \sim S_\alpha(0,1)$.
2. Générer $U \sim U(0,1)$ indépendamment de S_α.
3. Générer $T \sim \Gamma(1+1/\beta, 1)$ indépendamment de U et S_α.
4. Calculer $V_\beta = UT^{1/\beta}$.
5. Prendre $X = S_\alpha V_\beta^{\beta/\alpha}$.

En particulier, pour $\beta = 1$, cet algorithme nous permet de simuler $\text{Lin}(\alpha)$. Le voici:

1. Générer $S_\alpha \sim S_\alpha(0,1)$.
2. Générer $V_1 \sim \text{Exp}(1)$ indépendamment de S_α.
3. Prendre $X = S_\alpha V_1^{1/\alpha}$.

3 Cas multivarié

Dans ce chapitre, nous généralisons au cas multivarié la loi de Linnik que nous avons présentée précédemment. Nous présentons la loi stable symétrique multivariée, la loi de Linnik généralisée multivariée, ainsi que les algorithmes nécessaires à la simulation de ces variables aléatoires.

3.1 Lois stables symétriques

Pour définir la loi de Linnik multivariée, nous devons aborder quelques notions sur les lois stables symétriques multivariées.

Press [19, théorème 6.5.2, p. 158] énonce un théorème permettant d'identifier les lois stables symétriques multivariées. Ce théorème nous conduit à la définition suivante.

Définition 3.1 *Soient $\alpha \in (0, 2]$, $m \geq 1$ un entier, $\Omega_j, \quad j = 1, \ldots, m$, des matrices symétriques semi-définies positives de dimension $p \times p$ et telles que la matrice $\sum_{j=1}^{m} \Omega_j$ soit définie positive. Une loi stable symétrique multivariée de dimension p, d'ordre m, avec exposant α, est définie par sa fonction caractéristique dont le logarithme est donné par l'expression suivante:*

$$\log f(t) = -\sum_{j=1}^{m} \left(t^T \Omega_j t\right)^{\alpha/2}, \quad t \in I\!R^p. \tag{19}$$

Cette famille de lois stables est dénotée par $S_{\alpha;p,m}(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$. Si $X \sim S_{\alpha;p,m}(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$, alors X est symétrique et centrée à 0. Énonçons quelques propriétés que possèdent ces lois.

Remarque 3.2 *Soit $X \sim S_{\alpha;p,m}(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$. Alors [19, p. 159–160]*

1. La fonction de répartition de X est continue.

2. $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{j=1}^{m} X_j$, où les $X_j \sim S_{\alpha;p,1}(\Omega_j), \quad j = 1, \ldots, m$, sont des variables aléatoires indépendantes.

3. $S_{\alpha;1,1}(1\!\!1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_\alpha$, où $1\!\!1$ est la matrice de dimension 1×1 contenant le nombre 1.

3.2 Un analogue multivarié de la loi de Linnik généralisée

Plusieurs généralisations de la loi de Linnik au cas multivarié sont possibles. Nous utilisons celle qui fait intervenir la représentation (7).

Définition 3.3 *Soient $\beta > 0$, $p \geq 1$, $m \geq 1$ où p et m sont des entiers. La variable aléatoire Y de dimension p et d'ordre m définie par $Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} XV_\beta^{\beta/\alpha}$ avec $X \sim S_{\alpha;p,m}(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$ obéit à une loi de Linnik généralisée multivariée, et nous notons $Y \sim \mathrm{Lin}_{p,m}(\alpha, \beta; \Omega_1, \ldots, \Omega_m)$, où V_β est une variable aléatoire indépendante de X, ayant comme densité de probabilité celle définie en (6) et $\Omega_j, j = 1, \ldots, m$, sont des matrices symétriques semi-définies positives telles que la matrice $\sum_{j=1}^{m} \Omega_j$ soit définie positive.*

Théorème 3.4 *Soit $Y \sim \mathrm{Lin}_{p,m}(\alpha, \beta; \Omega_1, \ldots, \Omega_m)$. Alors sa fonction caractéristique est*

$$f_Y(t) = \left(1 + \sum_{j=1}^{m} (t^T \Omega_j t)^{\alpha/2}\right)^{-1/\beta}, \quad t \in I\!R^p . \tag{20}$$

Démonstration: En effet,

$$\begin{aligned} f_Y(t) &= E\left(e^{itY}\right) \\ &= E\left(E\left(e^{itXV_\beta^{\beta/\alpha}} | V_\beta\right)\right) \\ &= \int_0^\infty e^{-\sum_{j=1}^m \left((tv^{\beta/\alpha})^T \Omega_j (tv^{\beta/\alpha})\right)^{\alpha/2}} \frac{\exp(-v^\beta)}{\Gamma(1+1/\beta)}\, dv \\ &= \int_0^\infty e^{-v^\beta \sum_{j=1}^m (t^T \Omega_j t)^{\alpha/2}} \frac{\exp(-v^\beta)}{\Gamma(1+1/\beta)}\, dv \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-v^\beta \left(1+\sum_{j=1}^m (t^T \Omega_j t)^{\alpha/2}\right)}}{\Gamma(1+1/\beta)}\, dv. \end{aligned}$$

Opérons le changement de variable $v = u^{1/\beta}$. Alors,

$$\begin{aligned} f_Y(t) &= \int_0^\infty \frac{e^{-u\left(1+\sum_{j=1}^m (t^T \Omega_j t)^{\alpha/2}\right)}}{\Gamma(1+1/\beta)} \frac{1}{\beta} u^{1/\beta - 1} du \\ &= \frac{1}{\beta\Gamma(1+1/\beta)\left(1+\sum_{j=1}^m (t^T \Omega_j t)^{\alpha/2}\right)^{1/\beta-1}} \times \\ &\quad \int_0^\infty e^{-u\left(1+\sum_{j=1}^m (t^T \Omega_j t)^{\alpha/2}\right)} \left(u\left(1+\sum_{j=1}^{m} (t^T \Omega_j t)^{\alpha/2}\right)\right)^{1/\beta-1} du\ . \end{aligned}$$

Posons maintenant $s = u\left(1+\sum_{j=1}^{m}(t^T\Omega_j t)^{\alpha/2}\right)$. Nous obtenons alors

$$f_Y(t) = \frac{1}{\beta\Gamma(1+1/\beta)\left(1+\sum_{j=1}^{m}(t^T\Omega_j t)^{\alpha/2}\right)^{1/\beta}} \int_0^\infty e^{-s}s^{1/\beta-1}ds.$$

Comme $\int_0^\infty e^{-s}s^{1/\beta-1}ds = \Gamma(1/\beta)$, nous retrouvons (20). ■

Si nous posons $\beta = 1$ dans (20), nous obtenons la fonction caractéristique d'une loi que nous appelons la loi de Linnik classique multivariée $\mathrm{Lin}_{p,m}(\alpha; \Omega_1, \ldots, \Omega_m)$.

L'analogue multivarié du théorème 2.6 devient alors:

Théorème 3.5 *Soient* $X_i \sim \mathrm{Lin}_{p,m}(\alpha; \Omega_1, \ldots, \Omega_m)$, $i \geq 1$, *des variables aléatoires indépendantes et soit* N *une variable aléatoire géométrique de paramètre* q, *indépendante des* X_i. *Alors*

$$Z = q^{1/\alpha}(X_1 + \ldots + X_N) \sim \mathrm{Lin}_{p,m}(\alpha; \Omega_1, \ldots, \Omega_m).$$

Démonstration: En conditionnant par rapport à N, nous obtenons

$$\begin{aligned} E\left(e^{itq^{1/\alpha}(X_1+\ldots+X_N)}\right) &= E\left(E\left(e^{itq^{1/\alpha}(X_1+\ldots+X_N)}|N\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+q\sum_{j=1}^{m}(t^T\Omega_j t)^{\alpha/2}}\right)^n q(1-q)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q}{1-q}\left(\frac{1-q}{1+q\sum_{j=1}^{m}(t^T\Omega_j t)^{\alpha/2}}\right)^n. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1-q}{1+q\sum_{j=1}^{m}(t^T\Omega_j t)^{\alpha/2}} < 1$, nous concluons que

$$E\left(e^{itq^{1/\alpha}(X_1+\ldots+X_N)}\right) = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{m}(t^T\Omega_j t)^{\alpha/2}}. \quad ■$$

3.3 Simulation de lois de Linnik

Le but de cette section est de présenter un algorithme expliquant comment simuler une loi $\mathrm{Lin}_{p,m}(\alpha, \beta; \Omega_1, \ldots, \Omega_m)$. En vertu de la définition 3.3, nous pourrons simuler une telle loi si nous sommes en mesure de simuler une loi stable symétrique multivariée $S_{\alpha;p,m}(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$. Pour cela, nous utilisons un résultat de De Silva [23, théorème p. 336].

Théorème 3.6 *Soient* $0 < \alpha < \lambda \leq 2$ *et* X *un vecteur de dimension* r *de variables aléatoires* S_λ. *Soit* $Z \sim M_{\alpha/\lambda}$ *une variable aléatoire stable positive indépendante de* X, *et soit* $C = (c_{ij})$ *une matrice de dimension* $r \times p$, $p \leq r$, *et de rang* p. *Posons* $Y = C^T X Z^{1/\lambda}$. *Alors* Y *est un vecteur de dimension* p, *de variables aléatoires stables* $Y_i \sim$

$S_\lambda\left(0, (\sum_{k=1}^{r} |c_{ki}|^\lambda)^{\alpha/\lambda}\right)$, $i = 1, \ldots, p$, *tel que le logarithme de sa fonction caractéristique est donné par*

$$\log f_Y(t) = -\left(\sum_{k=1}^{r} |\sum_{l=1}^{p} c_{kl} t_l|^\lambda\right)^{\alpha/\lambda} .$$

Nous voulons générer une loi stable symétrique multivariée dont la fonction caractéristique est donnée par (19). À l'aide du théorème 3.6, nous serons aptes à le faire car nous sommes en mesure de générer S_λ et Z. Pour simuler ces variables aléatoires, nous n'avons qu'à nous référer aux algorithmes présentés à la section 2.3 p. 11 qui nous indiquent comment générer ces types de variables aléatoires. Montrons maintenant que si nous sommes capables de simuler $Y = C^T X Z^{1/\lambda}$, nous serons également aptes à simuler une loi issue de la famille $S_{\alpha;p,m}(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$. Nous obtenons immédiatement la proposition suivante.

Proposition 3.7 *Soient* $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(m)}$ *m vecteurs indépendants de dimension p tels que définis au théorème 3.6 et dont le logarithme de la fonction caractéristique est*

$$\log f_{Y^{(j)}}(t) = -\left(\sum_{k=1}^{r} |\sum_{l=1}^{p} c_{kl}^{(j)} t_l|^\lambda\right)^{\alpha/\lambda}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Alors le logarithme de la fonction caractéristique de $Y = \sum_{j=1}^{m} Y^{(j)}$ *est*

$$\log f_Y(t) = -\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r} |\sum_{l=1}^{p} c_{kl}^{(j)} t_l|^\lambda\right)^{\alpha/\lambda} . \tag{21}$$

Démonstration: La démonstration de cette proposition découle du fait que la fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale au produit des fonctions caractéristiques des composantes de la somme. ■

Prenons $\lambda = 2$. Alors (21) devient

$$\log f_Y(t) = -\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{l=1}^{p} c_{kl}^{(j)} t_l\right)^2\right)^{\alpha/2}, \quad 0 < \alpha < 2 . \tag{22}$$

Mais $Q_j(t) = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{l=1}^{p} c_{kl}^{(j)} t_l\right)^2$ est une forme quadratique et $Q_j(t) \geq 0$ pour tout t, $j = 1, \ldots, m$. Nous pouvons donc écrire $Q_j(t)$ sous la forme $t^T\Omega_j t$, où $\Omega_j = C_j C_j^T$ est une matrice symétrique semi-définie positive. Donc, l'équation (22) s'écrit sous la forme

$$\log f_Y(t) = -\sum_{j=1}^{m}\left(t^T\Omega_j t\right)^{\alpha/2}, \quad 0 < \alpha < 2 .$$

Nous retrouvons donc la forme de la fonction caractéristique d'une loi issue de la famille $S_{\alpha;p,m}(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$ définie en (19). L'algorithme suivant explique la procédure à suivre pour simuler cette variable aléatoire dans le cas où $0 < \alpha < 2$.

1. Calculer la solution de Choleski C_j du système d'équations $\Omega_j = C_j C_j^T$, où Ω_j, $1 \leq j \leq m$, et α sont les paramètres de la loi de Linnik multivariée que nous voulons simuler.
2. Générer r nombres $X_i \sim N(0,2)$ indépendants (car $S_2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} N(0,2)$).
3. Poser $X = (X_1, \ldots, X_r)$.
4. Générer $Z \sim M_{\alpha/2}$ indépendamment de X.
5. Calculer $Y^{(j)} = C_j^T X Z^{1/2}$, $j = 1, \ldots, m$.
6. Prendre $Y = \sum_{j=1}^m Y^{(j)}$.

Pour $\alpha = 2$, la loi stable multivariée $S_{2;p,m}(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$ n'est en fait que la loi normale multivariée $N(0, 2\Omega)$ où $\Omega = \sum_{j=1}^m \Omega_j$. Pour générer cette loi, nous avons consulté le livre de Johnson [13, p. 52–53]. L'algorithme est le suivant:

1. Générer p nombres $X_i \sim N(0,1)$ indépendants.
2. Poser $X = (X_1, \ldots, X_p)$.
3. Calculer la solution de Choleski A du système d'équations $AA^T = 2\Omega$.
4. Prendre $Y = AX$.

Et maintenant, il est facile de simuler la loi $\mathrm{Lin}_{p,m}(\alpha; \Omega_1, \ldots, \Omega_m)$ en utilisant la définition 3.3:

1. Générer $X \sim S_{\alpha;p,m}(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$.
2. Générer $V_1 \sim \mathrm{Exp}(1)$ indépendamment de X.
3. Prendre $W = X V_1^{1/\alpha}$.

L'algorithme pour simuler la loi $\mathrm{Lin}_{p,m}(\alpha, \beta; \Omega_1, \ldots, \Omega_m)$ se déduit de la définition 3.3 et de l'équation (9):

1. Générer $X \sim S_{\alpha;p,m}(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$.
2. Générer $U \sim U(0,1)$ indépendamment de X.
3. Générer $T \sim \Gamma(1 + 1/\beta, 1)$ indépendamment de U et X.
4. Calculer $V_\beta = U T^{1/\beta}$.
5. Prendre $W = X V_\beta^{\beta/\alpha}$.

Comme cas particulier, regardons ce que nous obtenons si nous posons $p = 1$, $m = 1$ et $\Omega = \mathbb{1}$, c'est-à-dire si $\mathrm{Lin}_{p,m}(\alpha; \Omega_1, \ldots, \Omega_m) = \mathrm{Lin}(\alpha)$. Notons que $\mathbb{1}$ est la matrice contenant le nombre 1. Alors $C_1 = \mathbb{1}$, $X = (X_1)$ où $X_1 \sim S_2(0,1)$ et $Z \sim M_{\alpha/2}$ indépendamment de X. Donc, $Y = XZ^{1/2} \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_2 Z^{1/2}$. Montrons que $Y \sim S_\alpha(0,1)$.

Soit $f_{S_2 Z^{1/2}}$, la fonction caractéristique de $S_2 Z^{1/2}$ et ψ_{S_2}, ψ_Z les fonctions génératrices des moments de S_2 et Z respectivement. Alors

$$
\begin{aligned}
f_{S_2 Z^{1/2}}(t) &= E(e^{itS_2 Z^{1/2}}) = E(E(e^{itZ^{1/2} S_2} | Z)) \\
&= E(\psi_{S_2}(itZ^{1/2})) \\
&= E(e^{(itZ^{1/2})^2}) = \psi_Z(-t^2) \\
&= \exp(-(t^2)^{\alpha/2}) = \exp(-|t|^\alpha) ,
\end{aligned}
$$

et donc $S_2 Z^{1/2} \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_\alpha$. Comme $Y \sim S_\alpha(0,1)$, nous retrouvons donc l'algorithme que nous avons utilisé à la section 2.3 p. 12 pour simuler la loi $\mathrm{Lin}(\alpha)$ car nous venons de montrer que $S_{\alpha;1,1}(\mathbb{1}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} S_\alpha$.

4 Estimation

Dans ce chapitre, nous proposons plusieurs méthodes d'estimation des paramètres de la loi de Linnik généralisée univariée et multivariée. Nous y présentons également les résultats de simulations effectuées pour vérifier la fiabilité de certains de ces estimateurs et une application de la loi de Linnik généralisée.

4.1 Cas univarié

Cette section se subdivise en deux parties. La première présente différentes méthodes d'estimation des paramètres de la loi de Linnik généralisée ainsi que la convergence presque sûre de la plupart de ces estimateurs. Dans la deuxième partie, nous retrouvons les tableaux de résultats permettant de vérifier la fiabilité des estimateurs issus de la méthode de Press.

4.1.1 Convergence des estimateurs

Puisque les lois stables et les lois de Linnik ne peuvent être représentées que par leur fonction caractéristique en général, une méthode classique d'estimation, comme la méthode du maximum de vraisemblance, ne peut être utilisée.

Dans Anderson et Arnold [3], les auteurs proposent une méthode d'estimation pour le paramètre α de la loi stable et de la loi Lin(α). Soit f la fonction caractéristique de la loi considérée. Cette méthode consiste à minimiser

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n(t) - f(t)|^2 \exp(-t^2)\, dt, \tag{23}$$

où $\hat{f}_n$ est la fonction caractéristique échantillonnalle, le poids e^{-t^2} faisant en sorte que la quantité I soit finie.

De Abramowitz et Stegun [1, p. 890], (23) est bien approximée par

$$\sum_{j=1}^{m} w_j g(z_j) + R_m,$$

où $g(t) = |\hat{f}_n(t) - f(t)|^2$, z_j est le $j$ème zéro du polynôme d'Hermite de degré m, $w_j = 2^{m-1}m!\sqrt{\pi}/(mH_{m-1}(z_j))^2$ et $R_m = m!\sqrt{\pi}/(2^m(2m)!)g^{(2m)}(\xi)$, $-\infty < \xi < \infty$. Donc, $I \simeq \sum_{j=1}^{m} w_j|\hat{f}_n(z_j) - f(z_j)|^2$. Cette méthode sera utilisée subséquemment comme estimation possible des paramètres de la loi de Linnik généralisée.

Passons maintenant au but de cette section, c'est-à-dire l'estimation des paramètres α et β d'une loi de Linnik généralisée. Pour permettre un meilleur ajustement à un ensemble de données, nous utilisons $f(t) = (1+\gamma|t|^\alpha)^{-1/\beta}$, la fonction caractéristique de la loi Lin(α,β) à laquelle nous avons ajouté un paramètre d'échelle γ. Pour les différents estimateurs possibles présentés dans cette section, trois cas se présentent: 1) α inconnu, β connu; 2) α connu, β inconnu; 3) α et β inconnus.

1) α inconnu, β connu

Une première méthode consiste à utiliser la technique proposée dans [3] et présentée précédemment. Il s'agit de minimiser, simultanément par rapport à α et γ, la quantité

$$I \simeq \sum_{j=1}^{m} w_j |\hat{f}_n(z_j) - (1+\gamma|z_j|^\alpha)^{-1/\beta}|^2. \tag{24}$$

Les valeurs pour lesquelles I est minimale sont les estimations des paramètres α et γ. Le minimum de I définie par (24) peut être évalué à l'aide de la fonction *fsolve* de Maple.

Une deuxième méthode d'estimation du paramètre α s'inspire d'une version de la méthode des moments de Press [18].

Lemme 4.1 *Le paramètre α s'exprime sous la forme*

$$\alpha = \frac{\log(|f(t_1)|^{-\beta}-1) - \log(|f(t_2)|^{-\beta}-1)}{\log|t_1| - \log|t_2|}, \tag{25}$$

où $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in I\!R \backslash \{0\}$.

Démonstration: Soit $f(t) = (1+\gamma|t|^\alpha)^{-1/\beta}$. Alors $|f(t)| = (1+\gamma|t|^\alpha)^{-1/\beta}$ et $\gamma|t|^\alpha = |f(t)|^{-\beta} - 1$. Choisissons $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Alors

$$\begin{aligned} \gamma|t_1|^\alpha &= |f(t_1)|^{-\beta} - 1 \\ \gamma|t_2|^\alpha &= |f(t_2)|^{-\beta} - 1 \end{aligned}$$

et

$$\left(\frac{|t_1|}{|t_2|}\right)^\alpha = \frac{|f(t_1)|^{-\beta}-1}{|f(t_2)|^{-\beta}-1}. \tag{26}$$

En prenant le logarithme de chaque côté de l'équation (26) et en isolant α, nous retrouvons (25). ■

Du lemme 4.1, pour β connu et γ inconnu, nous proposons l'estimateur

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\log(|\hat{f}_n(t_1)|^{-\beta}-1) - \log(|\hat{f}_n(t_2)|^{-\beta}-1)}{\log|t_1| - \log|t_2|}, \tag{27}$$

où $\hat{f}_n$ est la fonction caractéristique échantillonnalle. Il est important de remarquer ici que, peu importe que nous connaissions ou non le paramètre d'échelle γ, nous pouvons estimer α. Le lemme suivant démontre la convergence de cet estimateur.

Lemme 4.2 *Nous avons*

$$\hat{\alpha}_n \xrightarrow{p.s.} \alpha \ \ \text{lorsque } n \to \infty,$$

où $\xrightarrow{p.s.}$ *indique la convergence presque sûre.*

Démonstration: Comme $\hat{\alpha}_n$ est une fonction continue de $\hat{f}_n$, le résultat découle de la convergence presque sûre de $\hat{f}_n(t)$ vers $f(t)$. Or, comme $\hat{f}_n(t) = \dfrac{\sum_{j=1}^n e^{itX_j}}{n}$, où $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, nous obtenons de la loi forte des grands nombres,

$$\hat{f}_n(t) = \frac{e^{itX_1} + \ldots + e^{itX_n}}{n} \xrightarrow{p.s.} E(e^{itX_1}) = f(t) \ ,$$

ce qui démontre le résultat cherché. ■

2) α connu, β inconnu

Dans ce cas, nous proposons différents estimateurs pour le paramètre β obtenus à l'aide des méthodes utilisées en 1). Pour la première méthode, nous n'avons qu'à minimiser (24) par rapport à β et γ au lieu de α et γ. Les valeurs pour lesquelles (24) est minimale sont les estimations des paramètres β et γ. La fonction *fsolve* de Maple peut servir à évaluer le minimum d'une telle fonction.

En ce qui a trait à la méthode suggérée par Press [18], voici un lemme qui nous permettra de connaître l'expression à évaluer pour obtenir une estimation de β connaissant α et γ.

Lemme 4.3 *Le paramètre β s'exprime sous la forme*

$$\beta = \frac{-\log(1 + \gamma|t_1|^\alpha)}{\log|f(t_1)|}, \tag{28}$$

où $t_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Démonstration: Soit $f(t) = (1 + \gamma|t|^\alpha)^{-1/\beta}$. Alors $|f(t)| = (1 + \gamma|t|^\alpha)^{-1/\beta}$. Choisissons $t_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Alors

$$|f(t_1)|^{-\beta} = 1 + \gamma|t_1|^\alpha.$$

En prenant le logarithme de chaque côté de l'égalité et en isolant β, nous retrouvons l'équation (28). ■

Pour α et γ connus, nous suggérons l'estimateur

$$\hat{\beta}_n = \frac{-\log(1 + \gamma|t_1|^\alpha)}{\log|\hat{f}_n(t_1)|}. \tag{29}$$

Le lemme suivant démontre la convergence de cet estimateur.

Lemme 4.4 *Soit $\hat{\beta}_n$ défini par (29). Nous avons*

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow{p.s.} \beta \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Démonstration: Nous avons établi, dans la démonstration du lemme 4.2, que $\hat{f}_n(t) \xrightarrow{p.s.} f(t)$. Comme $\hat{\beta}_n$ est une fonction continue de $\hat{f}_n$, nous obtenons le résultat cherché. ■

Pour le cas particulier où $\alpha = 2$, nous suggérons deux autres méthodes d'estimation pour le paramètre β de la loi $\mathrm{Lin}(2, \beta)$. Un premier estimateur est basé sur le coefficient d'applatissement défini par

$$\kappa = \frac{E[(X - E(X))^4]}{(\mathrm{Var}(X))^2} - 3.$$

Lemme 4.5 *Pour la loi* $\mathrm{Lin}(2, \beta)$*, nous avons*

$$\kappa = 3\beta.$$

Démonstration: De la remarque 2.5, puisque $\alpha = 2$, tous les moments de la loi $\mathrm{Lin}(2, \beta)$ existent. La fonction caractéristique de cette loi est $f(t) = (1 + \gamma t^2)^{-1/\beta}$. Nous pouvons évaluer les moments à l'aide de la relation $f^{(m)}(0) = i^m E(X^m)$.

Si nous dérivons la fonction f le nombre de fois désiré, et que nous évaluons cette dérivée à $t = 0$, nous retrouvons les moments suivants:

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0, \\
E(X^2) &= \frac{2\gamma}{\beta}, \\
E(X^4) &= \frac{12\gamma^2}{\beta} + \frac{12\gamma^2}{\beta^2}.
\end{aligned}$$

De la définition de κ, nous trouvons après calculs que $\kappa = 3\beta$. ■

Par le lemme précédent, nous présentons une estimation possible pour le paramètre β de la loi $\mathrm{Lin}(2, \beta)$ qui est

$$\hat{\beta}_n = \hat{\kappa}_n / 3 \tag{30}$$

et où

$$\hat{\kappa}_n = \frac{n \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^4}{(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2)^2} - 3. \tag{31}$$

Notons que l'estimateur $\hat{\beta}_n$ défini précédemment ne dépend pas du paramètre d'échelle γ. Montrons que l'estimateur $\hat{\kappa}_n$ est convergent.

Lemme 4.6 *Soit $\hat{\kappa}_n$ défini par (31). Nous avons*

$$\hat{\kappa}_n \xrightarrow{p.s.} \kappa \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Démonstration: De la loi forte des grands nombres, nous avons

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X))^4 \xrightarrow{p.s} E((X - E(X))^4)$$

et

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X))^2\right)^2 \xrightarrow{p.s.} E\left((X - E(X))^2\right)^2.$$

Donc,

$$\hat{\kappa}_n = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^4}{(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2)^2} - 3 \xrightarrow{p.s.} \frac{E((X - E(X))^4)}{E((X - E(X))^2)^2} - 3 = \kappa. \quad \blacksquare$$

Remarquons que l'estimateur $\hat{\beta}_n$ défini par (30) est également un estimateur convergent puisque $\hat{\beta}_n$ est une fonction continue de $\hat{\kappa}_n$.

Le deuxième estimateur que nous suggérons est obtenu par la méthode des moments. Comme $E(X^2) = 2\gamma/\beta$, si $\alpha = 2$ et γ est connu, nous obtenons l'estimateur suivant pour le paramètre β:

$$\hat{\beta}_n = \frac{2\gamma n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}. \tag{32}$$

Le lemme qui suit démontre la convergence de cet estimateur.

Lemme 4.7 *Soit $\hat{\beta}_n$ défini par (32). Nous avons*

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow{p.s.} \beta \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Démonstration: De la loi forte des grands nombres, nous avons

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} \xrightarrow{p.s.} E(X^2).$$

Par conséquent,

$$\hat{\beta}_n = \frac{2\gamma n}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \xrightarrow{p.s.} \frac{2\gamma}{E(X^2)} = \beta. \quad \blacksquare$$

3) α et β inconnus

Lorsque nous voulons estimer les paramètres α, β et γ de la loi $\text{Lin}(\alpha, \beta)$ à laquelle nous avons ajouté un paramètre d'échelle γ, la méthode de Press ne peut être utilisée car il est impossible d'obtenir une expression permettant d'évaluer ces paramètres. La méthode que nous suggérons d'utiliser pour estimer ces paramètres à partir d'un échantillon est basée sur la minimisation, par rapport à α, β et γ, de I définie par (24). Les valeurs qui minimisent cette somme sont les estimations des paramètres α, β et γ.

Press, Flannery et Teukolsky [20, p. 305] décrivent des méthodes itératives que nous pouvons utiliser pour évaluer le minimum d'une fonction de plusieurs variables. Une de ces méthodes, la méthode descendante du simplexe, serait une méthode appropriée pour évaluer le minimum de I.

4.1.2 Résultats numériques

Les estimateurs définis par (27) et (29) dépendent de nombres réels non nuls. Nous avons donc effectué quelques calculs pour vérifier la fiabilité de ces estimateurs issus de la méthode de Press. Ces résultats et leur analyse sont présentés dans cette partie.

Pour bâtir les tableaux 1 et 2, nous avons généré 500 échantillons de 100 nombres et pour les tableaux 3 et 4, 250 échantillons de 1000 nombres, tous issus de la loi $\mathrm{Lin}(\alpha, \beta)$ avec paramètre d'échelle $\gamma = 1$. Dans les tableaux 1 à 4, les différentes valeurs présentées ont été calculées pour $\alpha \in \{0.5, 1, 1.5, 2\}$ et $\beta \in \{0.5, 1, 2, 5, 10\}$. Ces tableaux indiquent la moyenne échantillonnale, l'écart-type échantillonnal, le minimum, le maximum, le biais estimé, le biais relatif estimé ainsi que l'erreur quadratique moyenne estimée des deux estimateurs étudiés.

Plus spécifiquement, les tableaux 1 et 3 présentent les résultats pour l'estimateur défini par (27) en fonction de deux valeurs t_1 et t_2 non nulles. Pour l'estimateur défini par (29), ces résultats présentés dans les tableaux 2 et 4 sont évalués en fonction de la valeur t_1 non nulle.

Tableau 1

α	β	t_1	t_2	$\hat{\alpha}$ moyen où $\hat{\alpha}$ est donné par (27) β connu	écart-type échantillonnal pour $\hat{\alpha}$ β connu	min $\hat{\alpha}$ β connu	max $\hat{\alpha}$ β connu	biais estimé pour $\hat{\alpha}$ β connu	biais relatif estimé pour $\hat{\alpha}$ β connu	erreur quadratique moyenne estimée pour $\hat{\alpha}$ β connu
0.5	0.5	1	1.01	-0.2451	9.2256	-32.7139	28.4382	-0.7451	-1.4901	85.4972
		1	1.1	0.5068	1.6072	-3.5009	5.9625	0.0068	0.0136	2.5780
		1	2	0.5079	0.3242	-0.4998	1.5310	0.0079	0.0158	0.1050
		1	3	0.5003	0.2296	-0.3030	1.1705	0.0003	0.0006	0.0526
		1	4	0.5006	0.1992	-0.0446	1.0966	0.0006	0.0012	0.0396
		10	20	0.4822	0.6603	-1.8180	3.2327	-0.0178	-0.0357	0.4354
	1	1	1.01	0.6659	9.6301	-39.0654	27.6023	0.1659	0.3317	92.5813
		1	1.1	0.5504	1.6896	-4.6489	6.3460	0.0504	0.1008	2.8517
		1	2	0.5229	0.3780	-0.8921	1.5261	0.0229	0.0457	0.1432
		1	3	0.5133	0.2654	-0.2473	1.4017	0.0133	0.0266	0.0705
		1	4	0.5130	0.2155	-0.0950	1.1912	0.0130	0.0260	0.0465
		10	20	0.5012	0.5240	-1.1896	2.7413	0.0012	0.0023	0.2740
	2	1	1.01	0.2248	11.9220	-38.2231	38.9650	-0.2752	-0.5504	141.9256
		1	1.1	0.5152	2.0773	-9.2268	7.4075	0.0152	0.0304	4.3069
		1	2	0.5160	0.4313	-0.9652	1.7439	0.0160	0.0319	0.1859
		1	3	0.5127	0.3061	-0.4895	1.2091	0.0127	0.0253	0.0937
		1	4	0.5087	0.2327	-0.2165	1.2198	0.0087	0.0175	0.0541
		10	20	0.5041	0.5417	-1.9862	1.9321	0.0041	0.0082	0.2929
	5	1	1.01	1.8132	16.3298	-64.3128	83.3548	1.3132	2.6265	267.8550
		1	1.1	0.5003	2.8398	-7.8877	9.5780	0.0003	0.0006	8.0483
		1	2	0.5151	0.5600	-0.9643	1.9807	0.0151	0.0302	0.3131
		1	3	0.5050	0.3809	-0.6687	1.5992	0.0050	0.0100	0.1448
		1	4	0.5064	0.3149	-0.2485	1.3820	0.0064	0.0128	0.0990
		10	20	0.4993	0.6094	-1.4484	2.1793	-0.0007	-0.0013	0.3706
	10	1	1.01	-1.7182	25.1483	-163.1657	106.4897	-2.2182	-4.4365	636.0907
		1	1.1	0.3507	4.2132	-21.6439	25.9349	-0.1493	-0.2986	17.7378
		1	2	0.5248	0.7797	-1.8787	2.1535	0.0248	0.0497	0.6073
		1	3	0.5151	0.5456	-1.2076	2.0966	0.0151	0.0302	0.2973
		1	4	0.5353	0.4476	-0.6873	2.1141	0.0353	0.0707	0.2012
		10	20	0.5416	0.8066	-2.3806	3.0764	0.0416	0.0832	0.6510
1	0.5	1	1.01	0.9236	2.9158	-12.2413	10.2635	-0.0764	-0.0764	8.4904
		1	1.1	0.9960	0.9230	-1.5829	3.7147	-0.0040	-0.0040	0.8503
		1	2	1.0051	0.3202	0.0761	1.8654	0.0051	0.0051	0.1023
		1	3	0.9963	0.2677	0.2574	1.8576	-0.0037	-0.0037	0.0716
		1	4	0.9764	0.2645	0.3529	1.9615	-0.0236	-0.0236	0.0704
		10	20	0.0945	0.8912	-3.4284	3.6700	-0.9055	-0.9055	1.6125
	1	1	1.01	1.0133	3.1673	-10.3285	12.1684	0.0133	0.0133	10.0118
		1	1.1	1.0659	1.0484	-1.9963	3.9682	0.0659	0.0659	1.1013
		1	2	1.0089	0.3575	-0.4094	2.0325	0.0089	0.0089	0.1276
		1	3	1.0079	0.2785	0.1960	1.7779	0.0079	0.0079	0.0775
		1	4	1.0046	0.2516	0.2704	1.8415	0.0046	0.0046	0.0632
		10	20	0.7396	1.2338	-5.2653	5.4773	-0.2604	-0.2604	1.5869
	2	1	1.01	0.7555	3.6253	-17.7290	17.7924	-0.2445	-0.2445	13.1760
		1	1.1	1.0210	1.1756	-2.7970	4.8357	0.0210	0.0210	1.3798
		1	2	1.0011	0.3912	-0.1462	2.0506	0.0011	0.0011	0.1528
		1	3	1.0190	0.2997	0.2235	1.9905	0.0190	0.0190	0.0900
		1	4	1.0038	0.2633	0.2607	1.8373	0.0038	0.0038	0.0692
		10	20	1.0494	0.9415	-2.4335	4.5580	0.0494	0.0494	0.8870
	5	1	1.01	1.1623	5.1050	-23.9506	27.6386	0.1623	0.1623	26.0357
		1	1.1	1.0658	1.7705	-5.5962	8.9834	0.0658	0.0658	3.1329
		1	2	1.0637	0.5383	-0.5895	2.4556	0.0637	0.0637	0.2933
		1	3	1.0505	0.4103	-0.2150	2.3754	0.0505	0.0505	0.1705
		1	4	1.0575	0.3506	-0.0403	2.1251	0.0575	0.0575	0.1260
		10	20	1.0904	0.8085	-1.4923	4.2367	0.0904	0.0904	0.6606

Tableau 1 (suite)

α	β	t_1	t_2	$\hat{\alpha}$ moyen où $\hat{\alpha}$ est donné par (27) β connu	écart-type échantillonnal pour $\hat{\alpha}$ β connu	min $\hat{\alpha}$ β connu	max $\hat{\alpha}$ β connu	biais estimé pour $\hat{\alpha}$ β connu	biais relatif estimé pour $\hat{\alpha}$ β connu	erreur quadratique moyenne estimée pour $\hat{\alpha}$ β connu
1	10	1	1.01	1.5030	7.2537	-34.5203	78.4459	0.5030	0.5030	52.7646
		1	1.1	1.1012	2.2319	-7.9733	11.6594	0.1012	0.1012	4.9816
		1	2	1.0571	0.7377	-1.7080	2.6759	0.0571	0.0571	0.5464
		1	3	1.0390	0.5581	-0.6179	2.4449	0.0390	0.0390	0.3124
		1	4	1.0662	0.4655	-0.2517	2.2806	0.0662	0.0662	0.2206
		10	20	1.0219	0.9399	-1.6375	3.4967	0.0219	0.0219	0.8822
1.5	0.5	1	1.01	1.5642	0.7323	-1.3675	7.1045	0.0642	0.0428	0.5393
		1	1.1	1.5098	0.5328	-0.5114	3.2223	0.0098	0.0065	0.2834
		1	2	1.5202	0.3543	0.4692	2.8538	0.0202	0.0135	0.1257
		1	3	1.4966	0.3733	0.6638	2.9558	-0.0034	-0.0022	0.1391
		1	4	1.3897	0.3407	0.4643	2.9406	-0.1103	-0.0735	0.1280
		10	20	-0.0447	0.9295	-3.7933	3.7074	-1.5447	-1.0298	3.2483
	1	1	1.01	1.5001	0.7954	-3.2243	5.2594	0.0001	0.0001	0.6314
		1	1.1	1.5336	0.5645	-0.5176	3.2755	0.0336	0.0224	0.3191
		1	2	1.5011	0.3546	0.3432	2.6531	0.0011	0.0007	0.1255
		1	3	1.5095	0.3094	0.5862	2.7864	0.0095	0.0064	0.0956
		1	4	1.5004	0.3538	0.5405	3.7179	0.0004	0.0003	0.1249
		10	20	0.2522	1.4897	-5.3478	4.4991	-1.2478	-0.8319	3.7717
	2	1	1.01	1.5724	1.0370	-5.2981	12.3842	0.0724	0.0482	1.0784
		1	1.1	1.5633	0.5869	-0.2868	3.3722	0.0633	0.0422	0.3478
		1	2	1.5131	0.3788	0.5671	2.4469	0.0131	0.0087	0.1434
		1	3	1.5110	0.3190	0.5001	2.4504	0.0110	0.0073	0.1017
		1	4	1.5201	0.3033	0.7019	2.5789	0.0201	0.0134	0.0922
		10	20	1.4634	1.8207	-3.2005	10.4418	-0.0366	-0.0244	3.3096
	5	1	1.01	1.5519	1.4222	-8.4596	14.0673	0.0519	0.0346	2.0213
		1	1.1	1.5179	0.9261	-2.4436	4.6253	0.0179	0.0119	0.8562
		1	2	1.5412	0.4651	-0.1016	2.6126	0.0412	0.0275	0.2176
		1	3	1.5301	0.3813	0.2045	2.8005	0.0301	0.0201	0.1460
		1	4	1.5285	0.3635	0.5484	2.8032	0.0285	0.0190	0.1327
		10	20	1.4592	1.1208	-2.6388	4.8623	-0.0408	-0.0272	1.2553
	10	1	1.01	1.5469	2.2580	-36.2499	8.1046	0.0469	0.0313	5.0908
		1	1.1	1.5572	1.2710	-5.4481	6.6539	0.0572	0.0382	1.6156
		1	2	1.5799	0.6007	-0.5905	3.1748	0.0799	0.0533	0.3665
		1	3	1.5883	0.4904	0.1144	2.8145	0.0883	0.0589	0.2478
		1	4	1.5839	0.4555	-0.0615	2.8300	0.0839	0.0559	0.2141
		10	20	1.6189	1.2477	-3.9277	4.9755	0.1189	0.0792	1.5677
2	0.5	1	1.01	2.0131	0.2128	1.4055	2.5472	0.0131	0.0066	0.0453
		1	1.1	2.0140	0.2294	1.3468	2.5866	0.0140	0.0070	0.0527
		1	2	2.0058	0.4101	1.0424	4.1732	0.0058	0.0029	0.1679
		1	3	1.7797	0.4059	0.8509	3.5108	-0.2203	-0.1102	0.2130
		1	4	1.4988	0.3397	0.6082	2.8328	-0.5012	-0.2506	0.3663
		10	20	-0.0321	0.9059	-2.4025	2.8750	-2.0321	-1.0160	4.9483
	1	1	1.01	2.0152	0.2299	0.8419	2.7065	0.0152	0.0076	0.0530
		1	1.1	2.0150	0.2419	0.7785	2.7631	0.0150	0.0075	0.0586
		1	2	2.0198	0.3284	1.1243	3.1635	0.0198	0.0099	0.1080
		1	3	1.9891	0.4177	0.9151	4.7951	-0.0109	-0.0054	0.1743
		1	4	1.9462	0.4576	0.8674	3.8147	-0.0538	-0.0269	0.2119
		10	20	-0.0810	1.4447	-5.5186	4.1360	-2.0810	-1.0405	6.4134
	2	1	1.01	2.0469	0.2614	1.0754	2.6905	0.0469	0.0234	0.0704
		1	1.1	2.0461	0.2746	1.0785	2.7349	0.0461	0.0230	0.0774
		1	2	2.0279	0.3376	0.8136	2.8451	0.0279	0.0140	0.1145
		1	3	2.0062	0.3485	1.0729	3.5334	0.0062	0.0031	0.1212
		1	4	2.0076	0.3725	1.0268	4.2373	0.0076	0.0038	0.1386
		10	20	1.0660	2.5601	-10.2244	11.2013	-0.9340	-0.4670	7.4135

Tableau 1 (suite)

α	β	t_1	t_2	$\hat{\alpha}$ moyen où $\hat{\alpha}$ est donné par (27) β connu	écart-type échantillonnal pour $\hat{\alpha}$ β connu	min $\hat{\alpha}$ β connu	max $\hat{\alpha}$ β connu	biais estimé pour $\hat{\alpha}$ β connu	biais relatif estimé pour $\hat{\alpha}$ β connu	erreur quadratique moyenne estimée pour $\hat{\alpha}$ β connu
2	5	1	1.01	2.0559	0.3425	0.7749	3.2814	0.0559	0.0280	0.1202
		1	1.1	2.0551	0.3530	0.7666	3.0809	0.0551	0.0276	0.1274
		1	2	2.0343	0.4097	0.5566	3.4631	0.0343	0.0172	0.1687
		1	3	2.0417	0.4116	0.9778	3.4178	0.0417	0.0208	0.1708
		1	4	2.0286	0.3898	0.7946	3.2997	0.0286	0.0143	0.1524
		10	20	2.0582	1.7476	-4.4609	9.8575	0.0582	0.0291	3.0513
	10	1	1.01	2.0774	0.4509	-0.3251	4.1787	0.0774	0.0387	0.2088
		1	1.1	2.0830	0.4619	-0.0739	4.1475	0.0830	0.0415	0.2198
		1	2	2.0647	0.5250	0.1810	3.4756	0.0647	0.0323	0.2792
		1	3	2.0680	0.5160	0.5266	3.5810	0.0680	0.0340	0.2704
		1	4	2.0829	0.4920	0.3305	3.5533	0.0829	0.0414	0.2484
		10	20	2.1085	1.5065	-2.7695	6.4968	0.1085	0.0543	2.2768

Tableau 2

α	β	t_1	$\hat{\beta}$ moyen où $\hat{\beta}$ est donné par (29) α connu	écart-type échantillonnal pour $\hat{\beta}$ α connu	min $\hat{\beta}$ α connu	max $\hat{\beta}$ α connu	biais estimé pour $\hat{\beta}$ α connu	biais relatif estimé pour $\hat{\beta}$ α connu	erreur quadratique moyenne estimée pour $\hat{\beta}$ α connu
0.5	0.5	1	1.2286	0.2566	0.6691	2.5856	0.7286	1.4571	0.5965
		1.1	1.2201	0.2617	0.6711	2.7589	0.7201	1.4401	0.5868
		2	1.1564	0.2245	0.7094	1.9996	0.6564	1.3128	0.4812
		3	1.1213	0.2103	0.6657	1.9202	0.6213	1.2426	0.4301
		4	1.0986	0.2300	0.5783	2.2365	0.5986	1.1972	0.4111
		10	1.0115	0.2222	0.4256	1.7565	0.5115	1.0229	0.3108
	1	1	1.7744	0.4013	0.9902	3.6677	0.7744	0.7744	0.7604
		1.1	1.7593	0.4018	0.9906	3.7373	0.7593	0.7593	0.7377
		2	1.6835	0.3498	0.8949	3.3780	0.6835	0.6835	0.5893
		3	1.6485	0.3370	0.9512	3.2547	0.6485	0.6485	0.5339
		4	1.6150	0.3146	0.8352	2.6703	0.6150	0.6150	0.4771
		10	1.5635	0.3070	0.7938	2.8026	0.5635	0.5635	0.4116
	2	1	2.9146	0.8463	1.4828	7.4635	0.9146	0.4573	1.5513
		1.1	2.8944	0.7940	1.4227	6.3867	0.8944	0.4472	1.4292
		2	2.7955	0.6989	1.5772	6.7608	0.7955	0.3978	1.1204
		3	2.7507	0.6610	1.4501	5.9530	0.7507	0.3753	0.9995
		4	2.7144	0.6027	1.5206	4.9020	0.7144	0.3572	0.8729
		10	2.6035	0.5351	1.2454	4.4160	0.6035	0.3018	0.6501
	5	1	6.5166	2.8143	2.2826	20.8662	1.5166	0.3033	10.2046
		1.1	6.4825	2.7789	2.5415	29.9362	1.4825	0.2965	9.9047
		2	6.2891	2.3680	2.4441	19.7806	1.2891	0.2578	7.2583
		3	6.2361	2.2975	2.6491	23.9096	1.2361	0.2472	6.7959
		4	6.1370	1.9941	2.5845	15.7729	1.1370	0.2274	5.2612
		10	5.9375	1.7005	3.0341	15.4634	0.9375	0.1875	3.7649
	10	1	15.2710	22.6683	4.3330	416.3271	5.2710	0.5271	540.6096
		1.1	15.2589	20.5757	3.9333	274.1895	5.2589	0.5259	450.1673
		2	13.4396	9.1477	4.0842	135.6883	3.4396	0.3440	95.3444
		3	13.2511	8.5376	4.4369	85.0434	3.2511	0.3251	83.3144
		4	12.4986	6.0009	4.3864	46.9072	2.4986	0.2499	42.1819
		10	12.1935	4.7541	4.5449	40.1590	2.1935	0.2193	27.3671
1	0.5	1	1.2223	0.2317	0.6724	2.2019	0.7223	1.4446	0.5753
		1.1	1.2050	0.2241	0.6533	1.9746	0.7050	1.4101	0.5472
		2	1.0895	0.2018	0.6404	1.8025	0.5895	1.1789	0.3881
		3	1.0251	0.2024	0.4580	1.6320	0.5251	1.0501	0.3166
		4	1.0013	0.2186	0.4441	1.8874	0.5013	1.0026	0.2990
		10	1.0219	0.2518	0.3991	1.9835	0.5219	1.0438	0.3357
	1	1	1.7691	0.3907	0.9783	3.4227	0.7691	0.7691	0.7439
		1.1	1.7430	0.3844	1.0118	3.1386	0.7430	0.7430	0.6995
		2	1.6287	0.3306	0.8945	2.9479	0.6287	0.6287	0.5043
		3	1.5483	0.2860	0.9243	2.4692	0.5483	0.5483	0.3822
		4	1.5032	0.2738	0.7973	2.5708	0.5032	0.5032	0.3280
		10	1.3969	0.3167	0.4682	2.5674	0.3969	0.3969	0.2576
	2	1	2.8496	0.7409	1.4219	7.3597	0.8496	0.4248	1.2697
		1.1	2.8216	0.7007	1.5178	6.0172	0.8216	0.4108	1.1650
		2	2.6895	0.5482	1.5489	5.3782	0.6895	0.3448	0.7753
		3	2.5862	0.5342	1.4388	5.3717	0.5862	0.2931	0.6285
		4	2.5575	0.4910	1.4721	4.8002	0.5575	0.2787	0.5513
		10	2.4108	0.4696	1.1050	4.0316	0.4108	0.2054	0.3889
	5	1	6.4858	2.4709	2.2688	18.8531	1.4858	0.2972	8.3006
		1.1	6.4220	2.4281	2.7097	20.7218	1.4220	0.2844	7.9059
		2	5.9706	1.7038	2.7407	14.1540	0.9706	0.1941	3.8394
		3	5.8373	1.5516	2.6200	11.7931	0.8373	0.1675	3.1038
		4	5.6864	1.4083	2.9768	11.9767	0.6864	0.1373	2.4505
		10	5.5403	1.2131	2.9804	10.3431	0.5403	0.1081	1.7607

Tableau 2 (suite)

α	β	t_1	$\hat{\beta}$ moyen où $\hat{\beta}$ est donné par (29) α connu	écart-type échantillonnal pour $\hat{\beta}$ α connu	min $\hat{\beta}$ α connu	max $\hat{\beta}$ α connu	biais estimé pour $\hat{\beta}$ α connu	biais relatif estimé pour $\hat{\beta}$ α connu	erreur quadratique moyenne estimée pour $\hat{\beta}$ α connu
1	10	1	14.2294	13.0086	3.9122	133.8474	4.2294	0.4229	186.7732
		1.1	13.7699	11.2491	3.9775	119.1999	3.7699	0.3770	140.5019
		2	12.3517	6.3626	4.8572	58.3642	2.3517	0.2352	45.9319
		3	12.0066	5.4907	4.0551	51.8165	2.0066	0.2007	34.1140
		4	11.3760	4.0510	4.8830	30.9075	1.3760	0.1376	18.2713
		10	11.4472	3.9318	5.4077	37.5463	1.4472	0.1447	17.5223
1.5	0.5	1	1.2381	0.2237	0.6894	2.1991	0.7381	1.4761	0.5947
		1.1	1.2103	0.2168	0.6832	2.1932	0.7103	1.4206	0.5514
		2	1.0339	0.2013	0.4870	1.7591	0.5339	1.0677	0.3254
		3	0.9551	0.2212	0.3323	1.6709	0.4551	0.9103	0.2560
		4	0.9726	0.2343	0.3598	1.6804	0.4726	0.9452	0.2782
		10	1.4098	0.3278	0.5779	2.3064	0.9098	1.8195	0.9349
	1	1	1.7686	0.3534	0.9220	3.3501	0.7686	0.7686	0.7154
		1.1	1.7361	0.3364	0.9296	3.0585	0.7361	0.7361	0.6548
		2	1.5716	0.2859	0.8606	2.8677	0.5716	0.5716	0.4083
		3	1.4696	0.2897	0.7097	2.7228	0.4696	0.4696	0.3043
		4	1.4314	0.3135	0.4900	2.5895	0.4314	0.4314	0.2842
		10	1.5245	0.3768	0.6164	2.7103	0.5245	0.5245	0.4168
	2	1	2.8612	0.6652	1.5601	5.5915	0.8612	0.4306	1.1834
		1.1	2.8197	0.6427	1.6082	5.4752	0.8197	0.4099	1.0842
		2	2.6287	0.5072	1.5753	4.3522	0.6287	0.3143	0.6520
		3	2.5236	0.4700	1.5496	4.2338	0.5236	0.2618	0.4947
		4	2.4502	0.4568	1.3871	3.9115	0.4502	0.2251	0.4109
		10	2.3572	0.4877	1.2878	4.4084	0.3572	0.1786	0.3650
	5	1	6.2964	2.2477	2.8467	19.1757	1.2964	0.2593	6.7230
		1.1	6.2352	2.1119	3.0322	17.7264	1.2352	0.2470	5.9772
		2	5.8295	1.4563	2.8172	12.7880	0.8295	0.1659	2.8046
		3	5.6761	1.2547	2.7945	12.8591	0.6761	0.1352	2.0281
		4	5.6104	1.2320	2.8859	12.9509	0.6104	0.1221	1.8873
		10	5.4750	1.1420	2.8231	9.8729	0.4750	0.0950	1.5273
	10	1	13.3273	7.4844	4.3255	116.6989	3.3273	0.3327	66.9747
		1.1	13.1668	7.1808	4.4291	107.0268	3.1668	0.3167	61.4893
		2	11.8636	4.2239	5.0089	58.6780	1.8636	0.1864	21.2790
		3	11.3914	3.6234	5.1665	37.7875	1.3914	0.1391	15.0384
		4	11.1731	3.2350	5.6354	28.1072	1.1731	0.1173	11.8204
		10	10.8830	2.6249	5.4530	24.4448	0.8830	0.0883	7.6562
2	0.5	1	1.2438	0.2009	0.7486	1.9821	0.7438	1.4876	0.5935
		1.1	1.2068	0.1956	0.7078	1.9017	0.7068	1.4136	0.5378
		2	0.9926	0.2099	0.3644	1.6221	0.4926	0.9852	0.2866
		3	1.0065	0.2402	0.3638	2.1543	0.5065	1.0130	0.3141
		4	1.1508	0.2672	0.4958	2.1804	0.6508	1.3016	0.4948
		10	1.8614	0.4503	0.7657	3.6097	1.3614	2.7227	2.0557
	1	1	1.7754	0.3174	1.0071	3.2107	0.7754	0.7754	0.7018
		1.1	1.7380	0.3083	0.9821	3.1156	0.7380	0.7380	0.6396
		2	1.5127	0.2874	0.8102	3.0835	0.5127	0.5127	0.3453
		3	1.4286	0.3027	0.4895	2.4532	0.4286	0.4286	0.2752
		4	1.4137	0.3349	0.6152	2.5291	0.4137	0.4137	0.2831
		10	1.8553	0.4287	0.8208	3.5499	0.8553	0.8553	0.9149
	2	1	2.8523	0.5811	1.6587	5.8134	0.8523	0.4262	1.0635
		1.1	2.8046	0.5576	1.6596	5.6286	0.8046	0.4023	0.9576
		2	2.5569	0.4721	1.4273	4.5382	0.5569	0.2784	0.5325
		3	2.4614	0.4597	1.2607	4.9417	0.4614	0.2307	0.4238
		4	2.4006	0.4467	1.0317	4.0036	0.4006	0.2003	0.3596
		10	2.3654	0.5763	0.9012	4.1085	0.3654	0.1827	0.4650

Tableau 2 (suite)

α	β	t_1	$\hat{\beta}$ moyen où $\hat{\beta}$ est donné par (29) α connu	écart-type échantillonnal pour $\hat{\beta}$ α connu	min $\hat{\beta}$ α connu	max $\hat{\beta}$ α connu	biais estimé pour $\hat{\beta}$ α connu	biais relatif estimé pour $\hat{\beta}$ α connu	erreur quadratique moyenne estimée pour $\hat{\beta}$ α connu
2	5	1	6.2449	1.8471	3.2124	14.0069	1.2449	0.2490	4.9548
		1.1	6.1624	1.7477	3.1947	13.4886	1.1624	0.2325	4.3994
		2	5.7806	1.3162	3.0061	11.8699	0.7806	0.1561	2.3383
		3	5.5934	1.1816	2.8935	10.7699	0.5934	0.1187	1.7456
		4	5.5297	1.1036	3.2214	10.7586	0.5297	0.1059	1.4961
		10	5.4331	0.9948	2.7063	8.6677	0.4331	0.0866	1.1752
	10	1	13.0080	6.0514	5.2659	63.0786	3.0080	0.3008	45.5940
		1.1	12.7856	5.7201	5.1643	59.8620	2.7856	0.2786	40.4137
		2	11.7181	3.8515	4.8645	38.6415	1.7181	0.1718	17.7565
		3	11.3154	3.3106	5.3860	26.9774	1.3154	0.1315	12.6684
		4	11.0064	3.0126	5.3128	26.5438	1.0064	0.1006	10.0707
		10	10.7833	2.5374	5.5109	23.1537	0.7833	0.0783	7.0392

Tableau 3

α	β	t_1	t_2	$\hat{\alpha}$ moyen où $\hat{\alpha}$ est donné par (27) β connu	écart-type échantillonnal pour $\hat{\alpha}$ β connu	min $\hat{\alpha}$ β connu	max $\hat{\alpha}$ β connu	biais estimé pour $\hat{\alpha}$ β connu	biais relatif estimé pour $\hat{\alpha}$ β connu	erreur quadratique moyenne estimée pour $\hat{\alpha}$ β connu
0.5	0.5	1	1.01	0.1200	2.6795	-6.9582	8.2098	-0.3800	-0.7599	7.2955
		1	1.1	0.4822	0.4983	-0.7648	1.9880	-0.0178	-0.0355	0.2476
		1	2	0.5039	0.1003	0.2627	0.8029	0.0039	0.0078	0.0100
		1	3	0.5016	0.0741	0.2978	0.7192	0.0016	0.0032	0.0055
		1	4	0.5013	0.0627	0.3224	0.6447	0.0013	0.0025	0.0039
		10	20	0.4989	0.1886	0.0379	0.9702	-0.0011	-0.0022	0.0354
	1	1	1.01	0.3224	3.0433	-6.9784	10.1539	-0.1776	-0.3553	9.2561
		1	1.1	0.5059	0.5365	-0.9815	1.9291	0.0059	0.0119	0.2867
		1	2	0.5003	0.1149	0.1161	0.8785	0.0003	0.0006	0.0131
		1	3	0.4984	0.0790	0.2987	0.7130	-0.0016	-0.0031	0.0062
		1	4	0.5041	0.0640	0.3297	0.6680	0.0041	0.0082	0.0041
		10	20	0.4940	0.1531	0.0217	0.9710	-0.0060	-0.0121	0.0234
	2	1	1.01	0.3979	3.7916	-10.5962	9.5446	-0.1021	-0.2042	14.3289
		1	1.1	0.5192	0.5959	-1.6461	2.4104	0.0192	0.0383	0.3540
		1	2	0.5058	0.1423	0.1414	0.9272	0.0058	0.0116	0.0202
		1	3	0.5080	0.0887	0.2089	0.7655	0.0080	0.0160	0.0079
		1	4	0.5054	0.0721	0.3047	0.7004	0.0054	0.0108	0.0052
		10	20	0.5138	0.1641	0.0478	0.9733	0.0138	0.0275	0.0270
	5	1	1.01	0.9200	4.2873	-12.5141	13.8292	0.4200	0.8399	18.4837
		1	1.1	0.5451	0.7993	-1.8184	3.0279	0.0451	0.0902	0.6384
		1	2	0.5129	0.1902	-0.2326	1.0259	0.0129	0.0258	0.0362
		1	3	0.5094	0.1282	0.1785	0.8809	0.0094	0.0188	0.0165
		1	4	0.5068	0.0984	0.2308	0.7632	0.0068	0.0136	0.0097
		10	20	0.4925	0.2017	-0.0840	1.0103	-0.0075	-0.0150	0.0406
	10	1	1.01	0.1914	6.4067	-24.2222	22.3533	-0.3086	-0.6173	40.9772
		1	1.1	0.5404	1.1574	-3.4979	4.1002	0.0404	0.0807	1.3359
		1	2	0.5075	0.2506	-0.2020	1.0945	0.0075	0.0149	0.0626
		1	3	0.5005	0.1618	0.1146	0.9012	0.0005	0.0010	0.0261
		1	4	0.5030	0.1475	0.1370	0.9641	0.0030	0.0060	0.0217
		10	20	0.5051	0.2469	-0.1993	1.1307	0.0051	0.0102	0.0607
1	0.5	1	1.01	1.0151	1.0207	-1.8343	3.7900	0.0151	0.0151	1.0380
		1	1.1	1.0218	0.2560	0.3385	1.9289	0.0218	0.0218	0.0657
		1	2	1.0096	0.1043	0.7006	1.3194	0.0096	0.0096	0.0109
		1	3	1.0066	0.0865	0.7942	1.2389	0.0066	0.0066	0.0075
		1	4	1.0133	0.0859	0.7536	1.2500	0.0133	0.0133	0.0075
		10	20	0.5618	0.6647	-1.0307	2.7083	-0.4382	-0.4382	0.6321
	1	1	1.01	1.0319	1.0624	-2.0812	3.5196	0.0319	0.0319	1.1252
		1	1.1	1.0230	0.3254	0.0209	2.0582	0.0230	0.0230	0.1060
		1	2	1.0101	0.1080	0.6908	1.3076	0.0101	0.0101	0.0117
		1	3	1.0086	0.0860	0.7662	1.2715	0.0086	0.0086	0.0074
		1	4	1.0104	0.0770	0.7677	1.2499	0.0104	0.0104	0.0060
		10	20	1.0061	0.4559	-0.0288	2.6901	0.0061	0.0061	0.2071
	2	1	1.01	0.9936	1.0958	-3.5120	3.7494	-0.0064	-0.0064	1.1961
		1	1.1	1.0063	0.3353	-0.1110	1.6955	0.0063	0.0063	0.1120
		1	2	0.9976	0.1199	0.7332	1.3064	-0.0024	-0.0024	0.0143
		1	3	1.0026	0.0974	0.6924	1.2338	0.0026	0.0026	0.0095
		1	4	1.0008	0.0829	0.7819	1.2142	0.0008	0.0008	0.0068
		10	20	1.0123	0.2784	0.3277	1.7980	0.0123	0.0123	0.0774
	5	1	1.01	0.9094	1.6033	-5.2393	6.3744	-0.0906	-0.0906	2.5687
		1	1.1	0.9959	0.5067	-0.3682	2.5125	-0.0041	-0.0041	0.2558
		1	2	1.0062	0.1783	0.4837	1.5358	0.0062	0.0062	0.0317
		1	3	1.0087	0.1227	0.6765	1.3156	0.0087	0.0087	0.0151
		1	4	1.0059	0.1065	0.7647	1.3342	0.0059	0.0059	0.0113
		10	20	1.0358	0.2568	0.2913	1.7479	0.0358	0.0358	0.0670

Tableau 3 (suite)

α	β	t_1	t_2	$\hat{\alpha}$ moyen où $\hat{\alpha}$ est donné par (27) β connu	écart-type échantillonnal pour $\hat{\alpha}$ β connu	min $\hat{\alpha}$ β connu	max $\hat{\alpha}$ β connu	biais estimé pour $\hat{\alpha}$ β connu	biais relatif estimé pour $\hat{\alpha}$ β connu	erreur quadratique moyenne estimée pour $\hat{\alpha}$ β connu
1	10	1	1.01	1.1503	2.0659	-6.4595	9.3654	0.1503	0.1503	4.2734
		1	1.1	1.0630	0.6346	-0.5888	2.8124	0.0630	0.0630	0.4050
		1	2	0.9952	0.2343	0.1639	1.7550	-0.0048	-0.0048	0.0547
		1	3	0.9955	0.1635	0.6389	1.5137	-0.0045	-0.0045	0.0266
		1	4	1.0038	0.1398	0.6157	1.3837	0.0038	0.0038	0.0195
		10	20	1.0154	0.2972	0.2388	2.0417	0.0154	0.0154	0.0882
1.5	0.5	1	1.01	1.4928	0.2687	0.6108	2.6027	-0.0072	-0.0048	0.0719
		1	1.1	1.4847	0.1536	1.0636	1.8885	-0.0153	-0.0102	0.0237
		1	2	1.5000	0.1121	1.0783	1.8077	0.0000	0.0000	0.0125
		1	3	1.5047	0.1198	1.0987	1.9067	0.0047	0.0032	0.0143
		1	4	1.5188	0.1595	1.1913	2.3199	0.0188	0.0125	0.0257
		10	20	-0.0526	0.7418	-2.2804	3.5268	-1.5526	-1.0351	2.9586
	1	1	1.01	1.5228	0.2894	0.4907	2.4265	0.0228	0.0152	0.0839
		1	1.1	1.5120	0.1774	0.9532	1.9338	0.0120	0.0080	0.0315
		1	2	1.4978	0.1097	1.1961	1.8284	-0.0022	-0.0015	0.0120
		1	3	1.4938	0.1054	1.2186	1.7645	-0.0062	-0.0041	0.0111
		1	4	1.4941	0.1061	1.2011	1.7829	-0.0059	-0.0039	0.0112
		10	20	0.9866	1.1320	-1.6047	5.3707	-0.5134	-0.3423	1.5399
	2	1	1.01	1.5339	0.3637	-0.1584	2.8773	0.0339	0.0226	0.1329
		1	1.1	1.5239	0.1926	0.9347	2.0556	0.0239	0.0160	0.0375
		1	2	1.5005	0.1136	1.2116	1.7792	0.0005	0.0004	0.0129
		1	3	1.5063	0.0982	1.2727	1.8290	0.0063	0.0042	0.0096
		1	4	1.5093	0.0932	1.2473	1.7677	0.0093	0.0062	0.0087
		10	20	1.5451	0.6098	0.0817	3.6990	0.0451	0.0300	0.3724
	5	1	1.01	1.5269	0.4662	-1.1051	3.4602	0.0269	0.0179	0.2172
		1	1.1	1.4915	0.2502	0.7699	2.2387	-0.0085	-0.0057	0.0624
		1	2	1.5002	0.1431	1.1652	1.8573	0.0002	0.0001	0.0204
		1	3	1.5070	0.1199	1.1916	1.9141	0.0070	0.0047	0.0144
		1	4	1.5104	0.1071	1.2039	1.8247	0.0104	0.0070	0.0115
		10	20	1.5296	0.3768	0.4648	2.6580	0.0296	0.0197	0.1423
	10	1	1.01	1.4948	0.6472	-1.9124	4.5171	-0.0052	-0.0035	0.4173
		1	1.1	1.4999	0.3792	0.5039	2.8612	-0.0001	-0.0001	0.1432
		1	2	1.5100	0.2049	0.9214	1.9832	0.0100	0.0066	0.0419
		1	3	1.5200	0.1642	1.0410	1.9884	0.0200	0.0134	0.0272
		1	4	1.5148	0.1489	1.1269	1.9092	0.0148	0.0099	0.0223
		10	20	1.5037	0.3719	0.3259	2.5507	0.0037	0.0025	0.1378
2	0.5	1	1.01	1.9961	0.0608	1.8102	2.1542	-0.0039	-0.0020	0.0037
		1	1.1	1.9955	0.0650	1.7979	2.1592	-0.0045	-0.0022	0.0042
		1	2	1.9917	0.1178	1.6430	2.3794	-0.0083	-0.0041	0.0139
		1	3	1.9877	0.2160	1.5392	2.7501	-0.0123	-0.0062	0.0466
		1	4	1.8925	0.2610	1.3617	2.8045	-0.1075	-0.0537	0.0794
		10	20	-0.0369	0.7530	-3.2843	1.8403	-2.0369	-1.0184	4.7135
	1	1	1.01	2.0016	0.0724	1.6667	2.2049	0.0016	0.0008	0.0052
		1	1.1	2.0010	0.0762	1.6629	2.2114	0.0010	0.0005	0.0058
		1	2	1.9922	0.0986	1.7115	2.2421	-0.0078	-0.0039	0.0097
		1	3	1.9922	0.1402	1.6559	2.4807	-0.0078	-0.0039	0.0196
		1	4	1.9973	0.1767	1.5540	2.6159	-0.0027	-0.0014	0.0311
		10	20	0.2011	1.3384	-5.1609	3.3562	-1.7989	-0.8994	5.0203
	2	1	1.01	2.0129	0.0836	1.7272	2.2198	0.0129	0.0065	0.0071
		1	1.1	2.0129	0.0867	1.7230	2.2139	0.0129	0.0065	0.0076
		1	2	2.0016	0.0978	1.6555	2.2679	0.0016	0.0008	0.0095
		1	3	2.0039	0.1065	1.6783	2.3107	0.0039	0.0019	0.0113
		1	4	2.0077	0.1081	1.6984	2.2746	0.0077	0.0038	0.0117
		10	20	1.9245	1.3206	-0.9692	10.0723	-0.0755	-0.0378	1.7427

Tableau 3 (suite)

α	β	t_1	t_2	$\hat{\alpha}$ moyen où $\hat{\alpha}$ est donné par (27) β connu	écart-type échantillonnal pour $\hat{\alpha}$ β connu	min $\hat{\alpha}$ β connu	max $\hat{\alpha}$ β connu	biais estimé pour $\hat{\alpha}$ β connu	biais relatif estimé pour $\hat{\alpha}$ β connu	erreur quadratique moyenne estimée pour $\hat{\alpha}$ β connu
2	5	1	1.01	2.0027	0.1129	1.5173	2.2643	0.0027	0.0014	0.0127
		1	1.1	2.0034	0.1176	1.4880	2.2740	0.0034	0.0017	0.0138
		1	2	2.0035	0.1340	1.5781	2.3901	0.0035	0.0018	0.0179
		1	3	2.0043	0.1234	1.7069	2.4112	0.0043	0.0021	0.0152
		1	4	2.0075	0.1152	1.7305	2.3423	0.0075	0.0038	0.0133
		10	20	2.0173	0.4681	0.6731	3.1725	0.0173	0.0086	0.2186
	10	1	1.01	2.0086	0.1465	1.5327	2.3505	0.0086	0.0043	0.0215
		1	1.1	2.0095	0.1508	1.5460	2.3606	0.0095	0.0047	0.0227
		1	2	2.0050	0.1729	1.5536	2.4141	0.0050	0.0025	0.0298
		1	3	2.0144	0.1673	1.5637	2.3822	0.0144	0.0072	0.0281
		1	4	2.0173	0.1621	1.5604	2.5460	0.0173	0.0087	0.0265
		10	20	1.9761	0.4781	0.3611	3.0426	-0.0239	-0.0120	0.2282

Tableau 4

α	β	t_1	$\hat{\beta}$ moyen où $\hat{\beta}$ est donné par (29) α connu	écart-type échantillonnal pour $\hat{\beta}$ α connu	min $\hat{\beta}$ α connu	max $\hat{\beta}$ α connu	biais estimé pour $\hat{\beta}$ α connu	biais relatif estimé pour $\hat{\beta}$ α connu	erreur quadratique moyenne estimée pour $\hat{\beta}$ α connu
0.5	0.5	1	1.2100	0.0794	1.0037	1.4723	0.7100	1.4201	0.5104
		1.1	1.2030	0.0759	1.0176	1.4394	0.7030	1.4061	0.5000
		2	1.1432	0.0704	0.9810	1.3549	0.6432	1.2864	0.4186
		3	1.1054	0.0652	0.9034	1.2969	0.6054	1.2108	0.3708
		4	1.0786	0.0707	0.8808	1.2858	0.5786	1.1572	0.3398
		10	0.9928	0.0666	0.8100	1.2109	0.4928	0.9857	0.2473
	1	1	1.7128	0.1147	1.4841	2.1694	0.7128	0.7128	0.5212
		1.1	1.7037	0.1133	1.4335	2.1671	0.7037	0.7037	0.5080
		2	1.6508	0.1050	1.4248	1.9352	0.6508	0.6508	0.4346
		3	1.6165	0.1044	1.3603	1.9363	0.6165	0.6165	0.3909
		4	1.5807	0.0876	1.3729	1.8757	0.5807	0.5807	0.3448
		10	1.5050	0.0940	1.2846	1.7810	0.5050	0.5050	0.2638
	2	1	2.7376	0.2149	2.1606	3.4070	0.7376	0.3688	0.5901
		1.1	2.7248	0.2067	2.2205	3.4602	0.7248	0.3624	0.5679
		2	2.6680	0.1974	2.1897	3.2339	0.6680	0.3340	0.4850
		3	2.6212	0.1697	2.1798	3.0547	0.6212	0.3106	0.4146
		4	2.5999	0.1844	2.1676	3.1193	0.5999	0.2999	0.3937
		10	2.5344	0.1573	2.0342	2.9744	0.5344	0.2672	0.3103
	5	1	5.7988	0.6800	4.4681	9.4630	0.7988	0.1598	1.0986
		1.1	5.7679	0.6363	4.2634	8.0495	0.7679	0.1536	0.9929
		2	5.6936	0.5852	4.4375	7.8423	0.6936	0.1387	0.8222
		3	5.6496	0.5323	4.4715	7.5463	0.6496	0.1299	0.7042
		4	5.6273	0.5210	4.4704	7.6775	0.6273	0.1255	0.6639
		10	5.5269	0.4527	4.5097	7.1203	0.5269	0.1054	0.4817
	10	1	10.9731	1.7922	8.0164	17.0357	0.9731	0.0973	4.1463
		1.1	10.9455	1.8404	6.9004	17.8427	0.9455	0.0945	4.2674
		2	10.8472	1.5984	7.6043	16.1759	0.8472	0.0847	3.2622
		3	10.8092	1.3742	7.8673	16.2041	0.8092	0.0809	2.5357
		4	10.7513	1.3164	8.0941	15.6395	0.7513	0.0751	2.2903
		10	10.6231	1.1158	8.4567	14.7284	0.6231	0.0623	1.6283
1	0.5	1	1.2119	0.0698	1.0471	1.3940	0.7119	1.4238	0.5116
		1.1	1.1923	0.0667	1.0235	1.3455	0.6923	1.3847	0.4838
		2	1.0761	0.0650	0.8901	1.2552	0.5761	1.1521	0.3361
		3	1.0007	0.0640	0.8225	1.1849	0.5007	1.0015	0.2548
		4	0.9441	0.0663	0.7936	1.1016	0.4441	0.8883	0.2016
		10	0.8220	0.1048	0.5297	1.0647	0.3220	0.6439	0.1146
	1	1	1.7215	0.1064	1.4837	2.1163	0.7215	0.7215	0.5318
		1.1	1.7015	0.1019	1.4611	2.0564	0.7015	0.7015	0.5024
		2	1.5875	0.0977	1.3033	1.8862	0.5875	0.5875	0.3546
		3	1.5130	0.0895	1.2599	1.8191	0.5130	0.5130	0.2711
		4	1.4605	0.0803	1.2636	1.7969	0.4605	0.4605	0.2185
		10	1.3389	0.1043	0.8933	1.6485	0.3389	0.3389	0.1257
	2	1	2.7315	0.2012	2.1614	3.4802	0.7315	0.3658	0.5754
		1.1	2.7136	0.1944	2.2228	3.3626	0.7136	0.3568	0.5468
		2	2.6106	0.1687	2.1701	3.2159	0.6106	0.3053	0.4012
		3	2.5330	0.1648	2.1533	3.4170	0.5330	0.2665	0.3112
		4	2.4889	0.1573	2.1177	3.0870	0.4889	0.2444	0.2636
		10	2.3548	0.1434	2.0311	2.7306	0.3548	0.1774	0.1463
	5	1	5.7628	0.6006	4.5259	7.7474	0.7628	0.1526	0.9411
		1.1	5.7485	0.5944	4.4385	7.6445	0.7485	0.1497	0.9121
		2	5.6205	0.4961	4.5116	7.5106	0.6205	0.1241	0.6301
		3	5.5339	0.4465	4.3572	7.2067	0.5339	0.1068	0.4836
		4	5.4906	0.3957	4.5070	6.6770	0.4906	0.0981	0.3966
		10	5.4010	0.3594	4.4709	6.5744	0.4010	0.0802	0.2894

Tableau 4 (suite)

α	β	t_1	$\hat{\beta}$ moyen où $\hat{\beta}$ est donné par (29) α connu	écart-type échantillonnal pour $\hat{\beta}$ α connu	min $\hat{\beta}$ α connu	max $\hat{\beta}$ α connu	biais estimé pour $\hat{\beta}$ α connu	biais relatif estimé pour $\hat{\beta}$ α connu	erreur quadratique moyenne estimée pour $\hat{\beta}$ α connu
1	10	1	10.8056	1.5866	7.6444	19.2652	0.8056	0.0806	3.1562
		1.1	10.7365	1.5208	7.3656	18.4616	0.7365	0.0737	2.8460
		2	10.6847	1.2766	8.0059	15.7522	0.6847	0.0685	2.0918
		3	10.6176	1.1567	7.1820	16.0329	0.6176	0.0618	1.7140
		4	10.5132	1.0832	7.5278	15.8348	0.5132	0.0513	1.4320
		10	10.4386	0.8794	8.0658	14.2941	0.4386	0.0439	0.9626
1.5	0.5	1	1.2174	0.0655	1.0590	1.3952	0.7174	1.4348	0.5189
		1.1	1.1926	0.0640	1.0424	1.3910	0.6926	1.3852	0.4838
		2	1.0204	0.0589	0.8703	1.2356	0.5204	1.0409	0.2743
		3	0.9145	0.0744	0.7348	1.1967	0.4145	0.8290	0.1773
		4	0.8477	0.1000	0.4925	1.0742	0.3477	0.6953	0.1308
		10	0.9587	0.1519	0.5955	1.3861	0.4587	0.9174	0.2334
	1	1	1.7099	0.1029	1.4576	2.0986	0.7099	0.7099	0.5146
		1.1	1.6833	0.0979	1.4550	2.0365	0.6833	0.6833	0.4765
		2	1.5254	0.0820	1.3237	1.7728	0.5254	0.5254	0.2828
		3	1.4323	0.0891	1.1995	1.7178	0.4323	0.4323	0.1948
		4	1.3745	0.0961	1.1446	1.6501	0.3745	0.3745	0.1495
		10	1.2571	0.1667	0.8068	1.7382	0.2571	0.2571	0.0937
	2	1	2.7297	0.1909	2.3272	3.2321	0.7297	0.3648	0.5687
		1.1	2.7003	0.1857	2.2782	3.1567	0.7003	0.3501	0.5247
		2	2.5448	0.1481	2.1903	2.9180	0.5448	0.2724	0.3186
		3	2.4407	0.1450	2.1074	2.9490	0.4407	0.2204	0.2152
		4	2.3780	0.1457	2.0006	2.8917	0.3780	0.1890	0.1640
		10	2.2538	0.1495	1.7912	2.6896	0.2538	0.1269	0.0866
	5	1	5.7591	0.5591	4.3477	7.5059	0.7591	0.1518	0.8876
		1.1	5.7381	0.5494	4.3738	7.4422	0.7381	0.1476	0.8455
		2	5.5742	0.4471	4.6063	7.0370	0.5742	0.1148	0.5288
		3	5.4555	0.3793	4.2685	6.6326	0.4555	0.0911	0.3507
		4	5.3839	0.3488	4.3572	6.5991	0.3839	0.0768	0.2686
		10	5.2841	0.3328	4.5268	6.1355	0.2841	0.0568	0.1911
	10	1	10.9453	1.4362	8.0213	15.6987	0.9453	0.0945	2.9481
		1.1	10.9093	1.3600	8.1328	15.4211	0.9093	0.0909	2.6690
		2	10.6655	1.0725	7.8985	13.9270	0.6655	0.0666	1.5885
		3	10.4859	0.9652	8.0683	13.2971	0.4859	0.0486	1.1639
		4	10.4374	0.9243	8.6576	13.3998	0.4374	0.0437	1.0423
		10	10.2771	0.7858	8.5323	13.0400	0.2771	0.0277	0.6918
2	0.5	1	1.2169	0.0590	1.0611	1.3976	0.7169	1.4339	0.5175
		1.1	1.1822	0.0576	1.0210	1.3586	0.6822	1.3644	0.4687
		2	0.9630	0.0654	0.7903	1.1908	0.4630	0.9260	0.2186
		3	0.8515	0.1031	0.5667	1.1214	0.3515	0.7031	0.1342
		4	0.8451	0.1352	0.5057	1.1930	0.3451	0.6902	0.1373
		10	1.2588	0.2028	0.6310	1.7819	0.7588	1.5175	0.6167
	1	1	1.7135	0.0908	1.4988	1.9533	0.7135	0.7135	0.5174
		1.1	1.6799	0.0885	1.4530	1.9388	0.6799	0.6799	0.4701
		2	1.4738	0.0816	1.2505	1.7129	0.4738	0.4738	0.2311
		3	1.3633	0.1036	1.0793	1.6590	0.3633	0.3633	0.1427
		4	1.3020	0.1215	0.9490	1.6562	0.3020	0.3020	0.1059
		10	1.3117	0.2093	0.6299	1.8299	0.3117	0.3117	0.1408
	2	1	2.7303	0.1732	2.3668	3.3288	0.7303	0.3651	0.5632
		1.1	2.6945	0.1651	2.3461	3.2503	0.6945	0.3472	0.5095
		2	2.4875	0.1319	2.1523	2.8768	0.4875	0.2438	0.2550
		3	2.3735	0.1376	2.0488	2.8983	0.3735	0.1868	0.1584
		4	2.3084	0.1374	1.9687	2.8129	0.3084	0.1542	0.1139
		10	2.1927	0.2046	1.6301	2.7572	0.1927	0.0964	0.0788

Tableau 4 (suite)

α	β	t_1	$\hat{\beta}$ moyen où $\hat{\beta}$ est donné par (29) α connu	écart-type échantillonnal pour $\hat{\beta}$ α connu	min $\hat{\beta}$ α connu	max $\hat{\beta}$ α connu	biais estimé pour $\hat{\beta}$ α connu	biais relatif estimé pour $\hat{\beta}$ α connu	erreur quadratique moyenne estimée pour $\hat{\beta}$ α connu
2	5	1	5.7605	0.5317	4.4744	7.4020	0.7605	0.1521	0.8600
		1.1	5.7257	0.5121	4.4787	7.2717	0.7257	0.1451	0.7879
		2	5.5116	0.4007	4.3592	6.7604	0.5116	0.1023	0.4217
		3	5.3949	0.3504	4.6258	6.4883	0.3949	0.0790	0.2783
		4	5.3246	0.3309	4.5563	6.2873	0.3246	0.0649	0.2144
		10	5.2204	0.3102	4.5222	6.3146	0.2204	0.0441	0.1444
	10	1	10.9137	1.2871	7.4501	15.5580	0.9137	0.0914	2.4850
		1.1	10.8658	1.2298	7.6963	15.3000	0.8658	0.0866	2.2559
		2	10.6040	0.9257	8.3860	13.0184	0.6040	0.0604	1.2183
		3	10.4361	0.8959	8.2208	13.3432	0.4361	0.0436	0.9896
		4	10.3490	0.8586	8.1500	13.1538	0.3490	0.0349	0.8561
		10	10.2031	0.7066	8.5796	12.6029	0.2031	0.0203	0.5385

Tout d'abord, énonçons quelques observations faites pour l'estimateur défini par (27). En examinant attentivement les tableaux 1 et 3, nous remarquons que:
1) pour $t_1 = 1$, plus t_2 est grand, plus l'écart-type et l'erreur quadratique moyenne tendent à diminuer, sauf pour le cas $\alpha = 2$ où aucune tendance générale ne se dégage des tableaux 1 et 3;
2) l'écart-type et l'erreur quadratique moyenne ont tendance à augmenter lorsque t_1 est près de t_2 sauf pour le cas $\alpha = 2$ où nous obtenons pour $t_1 = 1$, $t_2 = 1.01$ et $t_1 = 1$, $t_2 = 1.1$, un écart-type et une erreur quadratique moyenne plus petits que dans les autres cas;
3) l'écart-type et l'erreur quadratique moyenne sont plus grands lorsque $t_1 = 10$ et $t_2 = 20$ que dans le cas où $t_1 = 1$ et $t_2 = 4$.

D'après les remarques précédentes et les calculs effectués, $t_1 = 1$ et $t_2 = 4$ nous assurent un écart-type échantillonnal et une erreur quadratique moyenne assez petits pour $\alpha \neq 2$. Les tableaux 1 et 3 ne font ressortir aucune tendance particulière en ce qui concerne les biais estimé et biais relatif estimé. Nous avons aussi vérifié ce qu'il advenait de l'écart-type échantillonnal pour différentes valeurs de t_1 et t_2 où $|t_1 - t_2| = 3$. Il semblerait que plus les valeurs t_1 et t_2 sont grandes, plus l'écart-type échantillonnal est grand. Par contre, lorsque l'une de ces valeurs est près de 0, l'écart-type échantillonnal est plus petit que celui obtenu pour $t_1 = 1$ et $t_2 = 4$.

En comparant les résultats obtenus pour les échantillons de taille 100 et 1000, nous remarquons que l'écart-type échantillonnal évalué à partir d'échantillons de 1000 données est environ trois fois plus petit que celui évalué à partir d'échantillons de taille 100. Ceci pourrait laisser croire que l'écart-type de l'estimateur est de l'ordre de $1/\sqrt{n}$. L'intervalle $[\min \hat{\alpha}, \max \hat{\alpha}]$ est grand. Si nous n'avions qu'un seul échantillon et que nous devions estimer α à partir de celui-ci, l'estimation obtenue ne serait pas d'une grande fiabilité.

En ce qui a trait à l'estimation de β, nous retrouvons le même rapport de comparaison entre les écarts-types calculés pour les échantillons de taille 100 et 1000 que celui obtenu à l'aide des données recueillies pour α. De même, l'intervalle $[\min \hat{\beta}, \max \hat{\beta}]$ est grand. Nous pouvons aussi mentionner que, d'après les résultats obtenus dans les tableaux 2 et 4, la valeur t_1 choisie n'a pas d'influence majeure sur l'écart-type échantillonnal, le biais, le biais relatif et l'erreur quadratique moyenne.

Nous annonçons, sous forme de conjecture, que le théorème central limite peut s'appliquer pour les estimateurs définis par (27) et (29). Le rapport trouvé entre l'écart-type échantillonnal évalué pour un échantillon de 1000 données et celui évalué pour 100 est près de $\sqrt{1000/100} \simeq 3.16$. Les graphiques des figures 1 et 2 nous montrent la tendance à la normalité asymptotique des estimations données par (27) et (29).

En résumé, les calculs qui nous ont servi à présenter ces tableaux nous ont confirmé que l'estimation obtenue à l'aide de l'estimateur (27) ou (29) n'est pas une estimation très fiable si elle n'est calculée qu'à partir d'un seul échantillon. La valeur donnée par ces estimateurs peut varier beaucoup selon la ou les valeurs réelles non nulles fournies par l'utilisateur. Le but principal de ces tableaux était de déterminer les valeurs t_1 et

t_2 à utiliser pour l'estimateur (27) et la valeur t_1 à utiliser pour l'estimateur (29) pour que l'écart-type échantillonnal, le biais, le biais relatif et l'erreur quadratique moyenne soient petits et que l'estimation obtenue soit bonne. Malheureusement, nous ne pouvons proposer des valeurs t_1 et t_2 faisant en sorte que l'estimation obtenue par (27) soit bonne. Une étude plus approfondie devra être faite. Par contre, les remarques que nous avons formulées précédemment pourront aider à trouver ces valeurs idéales. Pour l'estimateur (29), l'écart-type échantillonnal, le biais, le biais relatif et l'erreur quadratique moyenne sont relativement petits, peu importe la valeur t_1 utilisée. Le choix de ce nombre réel non nul est donc laissé à la discrétion de l'utilisateur.

4.2 Cas multivarié

Regardons maintenant l'estimation des différents paramètres d'une loi de Linnik multivariée. Dans ce qui suit, nous étudions la loi de Linnik multivariée d'ordre m, c'est-à-dire la loi $\mathrm{Lin}_{p,m}(\alpha, \beta; \Omega_1, \ldots, \Omega_m)$. Par la suite, nous abordons un cas particulier: la loi $\mathrm{Lin}_{p,1}(\alpha, \beta; \Omega)$. Les méthodes d'estimation que nous utilisons sont inspirées de Press [18].

Rappelons que la fonction caractéristique d'une loi $\mathrm{Lin}_{p,m}(\alpha, \beta; \Omega_1, \ldots, \Omega_m)$ est

$$f(t) = (1 + \sum_{j=1}^{m} (t^T \Omega_j t)^{\alpha/2})^{-1/\beta}, \quad t \in \mathbb{R}^p .$$

Lemme 4.8 *Soit $X \sim \mathrm{Lin}_{p,m}(\alpha, \beta; \Omega_1, \ldots, \Omega_m)$. Alors le paramètre β s'exprime sous la forme*

$$\beta = \frac{-\log(1 + \sum_{j=1}^{m} (t_1^T \Omega_j t_1)^{\alpha/2})}{\log |f(t_1)|}, \tag{33}$$

où $t_1 \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$.

Démonstration: Puisque $f(t) = (1 + \sum_{j=1}^{m} (t^T \Omega_j t)^{\alpha/2})^{-1/\beta}$, nous avons $|f(t)| = (1 + \sum_{j=1}^{m} (t^T \Omega_j t)^{\alpha/2})^{-1/\beta}$ et $|f(t)|^{-\beta} = 1 + \sum_{j=1}^{m} (t^T \Omega_j t)^{\alpha/2}$.

Choisissons $t_1 \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$. Alors en prenant le logarithme de chaque côté de l'égalité et en isolant β, nous retrouvons l'expression (33). ■

Le résultat du lemme 4.8 nous suggère d'utiliser l'estimateur suivant pour β, lorsque sont connus α et $\Omega_j,\ j = 1, \ldots, m$:

$$\hat{\beta}_n = \frac{-\log(1 + \sum_{j=1}^{m} (t_1^T \Omega_j t_1)^{\alpha/2})}{\log |\hat{f}_n(t_1)|}.$$

Il est difficile d'estimer les paramètres α et $\Omega_j, \quad j = 1, \ldots, m$. Par contre, si nous nous intéressons à la loi de Linnik multivariée d'ordre 1, nous pouvons alors procéder comme suit pour estimer les paramètres α et Ω, connaissant β.

Lemme 4.9 *Soit* $X \sim \mathrm{Lin}_{p,1}(\alpha, \beta; \Omega)$ *avec* β *connu. Alors*

$$\alpha = \frac{\log\left(|f(t_1)|^{-\beta} - 1\right) - \log\left(|f(t_2)|^{-\beta} - 1\right)}{\log|s_1| - \log|s_2|}, \tag{34}$$

où $t_1 = s_1 e$, $t_2 = s_2 e$, $s_1, s_2 \in I\!R \backslash \{0\}$, $e \in I\!R^p \backslash \{0\}$ *et* $s_1 \neq s_2$.

Démonstration: Comme $f(t) = (1 + (t^T \Omega t)^{\alpha/2})^{-1/\beta}$, nous avons $|f(t)| = (1 + (t^T \Omega t)^{\alpha/2})^{-1/\beta}$ et $t^T \Omega t = (|f(t)|^{-\beta} - 1)^{2/\alpha}$.

Comme $t_1 = s_1 e$ et $t_2 = s_2 e$,

$$\begin{aligned} t_1^T \Omega t_1 &= \left(|f(t_1)|^{-\beta} - 1\right)^{2/\alpha} \\ t_2^T \Omega t_2 &= \left(|f(t_2)|^{-\beta} - 1\right)^{2/\alpha} \end{aligned}$$

et

$$\left(\frac{|f(t_1)|^{-\beta} - 1}{|f(t_2)|^{-\beta} - 1}\right)^{2/\alpha} = \frac{t_1^T \Omega t_1}{t_2^T \Omega t_2} = \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2.$$

En prenant le logarithme de chaque côté de l'égalité de la dernière équation et en isolant α, nous retrouvons (34). ■

Connaissant β, le lemme 4.9 nous permet d'estimer α. Cette estimation est

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\log\left(|\hat{f}_n(t_1)|^{-\beta} - 1\right) - \log\left(|\hat{f}_n(t_2)|^{-\beta} - 1\right)}{\log|s_1| - \log|s_2|}.$$

Pour estimer $\Omega = (\omega_{ij})$, une matrice symétrique semi-définie positive de dimension $p \times p$, connaissant $\hat{\alpha}$ et β, il suffit de noter que si t_i est le vecteur dont la $i$ème composante est 1 et toutes les autres sont nulles, $1 \leq i \leq p$, et si t_{ij} représente le vecteur dont les $i$ème et $j$ème composantes sont 1 et toutes les autres sont nulles, $1 \leq i < j \leq p$, nous avons alors

$$t_i^T \Omega t_i = \omega_{ii},\ 1 \leq i \leq p,\ \text{ et } t_{ij}^T \Omega t_{ij} = \omega_{ii} + \omega_{jj} + 2\omega_{ij},\ 1 \leq i < j \leq p.$$

Comme $\left(|\hat{f}_n(t)|^{-\beta} - 1\right)^{2/\alpha} \approx t^T \Omega t$, les estimateurs suivants sont convergents:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{ii} &= \left(|\hat{f}_n(t_i)|^{-\beta} - 1\right)^{2/\hat{\alpha}},\ 1 \leq i \leq p, \\ \hat{\omega}_{ij} &= \frac{1}{2}\left(|\hat{f}_n(t_{ij})|^{-\beta} - 1\right)^{2/\hat{\alpha}} - \frac{1}{2}(\hat{\omega}_{ii} + \hat{\omega}_{jj}),\ 1 \leq i < j \leq p. \end{aligned} \tag{35}$$

Nous obtenons donc $\hat{\Omega}$.

Donnons un exemple dans le cas où $p = 2$. Nous avons simulé, à l'aide de l'algorithme présenté à la p. 17, 250 000 couples de nombres issus de la loi $\mathrm{Lin}_{2,1}(1, 1; \Omega)$, où

$$\Omega = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}.$$

Pour cet échantillon, en résolvant le système d'équations défini par (35), nous trouvons $\omega_{11} = 9.754799$, $\omega_{12} = 13.608201$ et $\omega_{22} = 19.67903$. Ainsi,

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 9.754799 & 13.608201 \\ 13.608201 & 19.67903 \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.10 *Les estimateurs précédents sont de la forme $\hat{\theta}_n = H(\hat{f}_n)$, où H est une fonction continue. Puisque cette dernière converge presque sûrement vers f, les estimateurs sont convergents car $\hat{\theta}_n = H(\hat{f}_n) \to H(f) = \theta$.*

4.3 Application

Dans cette section, nous proposons plusieurs phénomènes pouvant être modélisés de façon adéquate par la loi de Linnik. La plupart de ces phénomènes sont reliés au domaine financier. Nous présentons également une application concrète faite à partir d'un fichier de données portant sur le prix à la fermeture d'une action ordinaire de IBM.

La loi de Pareto est une loi qui est fréquemment utilisée pour modéliser des phénomènes financiers présentant de grandes déviations. La loi stable possède des ailes asymptotiques à la loi de Pareto. De plus, ses caractéristiques telles que l'invariance sous l'addition de composantes indépendantes et identiquement distribuées, des ailes plus lourdes que la loi normale pour $0 < \alpha < 2$, une moyenne finie pour $1 < \alpha < 2$ et une variance infinie font que cette loi est susceptible de modéliser plusieurs phénomènes présentant de grandes déviations.

Des auteurs comme Fama [9], Mandelbrot [15], [16] et McCulloch [17] ont suggéré que plusieurs processus peuvent être bien modélisés par les lois stables. Le prix du coton, le prix des actions en bourse, la distribution du revenu, la distribution des tailles de firmes, les commodités, les retours d'avoir, les portefeuilles financiers, les obligations et les taux de change sont cités comme exemples par ces auteurs. Mandelbrot [15] a même proposé de modéliser à l'aide d'une loi stable multivariée des phénomènes reliés à la théorie de l'attraction newtonnienne.

Puisque la loi de Linnik $\mathrm{Lin}(\alpha, \beta)$ a une allure semblable à la loi stable symétrique avec des ailes un peu plus lourdes pour $1 < \alpha < 2$ et $\beta > 1$, que ses caractéristiques sont similaires à celles de la loi stable et qu'elle possède des ailes également asymptotiques à la loi de Pareto, les phénomènes énumérés ci-hauts pourraient être modélisés par cette loi.

Voyons concrètement la possibilité d'application de la loi de Linnik. Pour ceci, nous utilisons la série B de Box et Jenkins [4] qui a été analysée par Anderson et Arnold

[3]. Cette série comprend 369 données, dénotée x_t, portant sur le prix à la fermeture d'une action ordinaire de IBM. La série analysée est $z_t = 100 \times (\ln(x_{t+1}) - \ln(x_t))$ qui représente le taux nominal, en pourcentage, de capitalisation continue. Selon l'hypothèse de la marche aléatoire, fréquemment utilisée en finance pour des suites de rendements (e.g. [16]), nous supposons ici que les z_t sont indépendantes et identiquement distribuées.

Dans cet article [3], les auteurs cherchaient à déterminer quelle loi, entre la loi stable et la loi de Linnik classique, était la plus appropriée pour modéliser cette série de données. En utilisant le critère de la minimisation de la somme définie par (24) avec $m = 20$ et $\beta = 1$, ils ont obtenu comme résultats:

1) modélisation par la loi de Linnik classique

$$\begin{aligned} \min I_L(\alpha, \gamma) &= 0.008414 \\ \hat{\alpha} &= 2.0 \\ \hat{\gamma} &= 1.34525 \end{aligned}$$

2) modélisation par la loi stable

$$\begin{aligned} \min I_S(\alpha, c) &= 0.016501 \\ \hat{\alpha} &= 1.27487 \\ \hat{c} &= 0.74317 \ \text{(paramètre d'échelle)} \end{aligned}$$

Comme $\min I_L(\alpha, \gamma) < \min I_S(\alpha, c)$, les auteurs concluent que la loi de Linnik classique de paramètres $\alpha = 2$ et $\gamma = 1.34525$ est plus appropriée pour modéliser la série z_t qu'une loi stable quelconque.

Il faut mentionner que nous avons repris les calculs faits par Anderson et Arnold [3]. Nos résultats numériques ne sont pas exactement les mêmes. Ceci peut être dû à l'erreur que l'on retrouve à la p. 333 de l'article dans la définition de w_j. L'expression $\sqrt{m}$ doit être remplacée par $\sqrt{\pi}$. Nos résultats, obtenus à l'aide du logiciel Maple, sont les suivants:

1) modélisation par la loi de Linnik classique

$$\begin{aligned} \min I_L(\alpha, \gamma) &= 0.00028 \\ \hat{\alpha} &= 1.87945 \\ \hat{\gamma} &= 1.26753 \end{aligned}$$

2) modélisation par la loi stable

$$\begin{aligned} \min I_S(\alpha, c) &= 0.00076 \\ \hat{\alpha} &= 1.47207 \\ \hat{c} &= 0.80101 \ \text{(paramètre d'échelle)} \end{aligned}$$

De même, pour $\hat{\alpha} = 2.0$ et $\hat{\gamma} = 1.34525$, nous trouvons $\min I_L(\alpha, \gamma) = 0.00045$ et non $\min I_L(\alpha, \gamma) = 0.008414$.

Puisque la loi de Linnik semble mieux modéliser cette série, la loi de Linnik généralisée, ayant un paramètre supplémentaire, répondra encore plus efficacement à cette modélisation.

Pour estimer les paramètres α et β, nous avons minimisé la somme définie par (24) avec $m = 20$, simultanément par rapport à α, β et γ. Les résultats obtenus à l'aide du logiciel Maple sont:

$$\begin{aligned} \min I(\alpha, \beta, \gamma) &= 0.0002747982698 \\ \hat{\alpha} &= 1.86 \\ \hat{\beta} &= 0.95 \\ \hat{\gamma} &= 1.17 \end{aligned}$$

Donc la loi Lin$(1.86, 0.95)$ avec paramètre d'échelle $\gamma = 1.17$ serait appropriée pour modéliser le taux nominal de capitalisation continue du prix à la fermeture d'une action ordinaire de IBM (en pourcentage). À la page suivante, nous retrouvons le graphique fait à l'aide du logiciel Splus représentant l'histogramme de la série z_t étudiée et la densité de probabilité de la loi de Linnik modélisant cette série.

Nous avons effectué un test du χ^2 pour vérifier l'adéquation de la loi Lin$(1.86, 0.95)$ avec paramètre d'échelle $\gamma = 1.17$ aux données z_t. Nous savons que [10, p. 273]

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{(F_{O_i} - F_{T_i})^2}{F_{T_i}} \ ,$$

où

F_{O_i} est la fréquence observée de la classe i,
F_{T_i} est la fréquence théorique de la classe i,
k est le nombre de classes utilisées,

est distribuée approximativement selon une loi du χ^2 avec $k-4$ degrés de liberté, puisque nous avons dû estimer les paramètres α, β et γ de la loi théorique à l'aide des données de l'échantillon. Le calcul de D avec $k = 10$ nous donne 10.09169. À un seuil de 5%, nous acceptons donc le fait que la loi Lin$(1.86, 0.95)$ avec paramètre d'échelle $\gamma = 1.17$ modélise bien la série z_t.

5 Conclusion

Ce travail de recherche, basé principalement sur les articles de Devroye [7], Anderson [2] et Anderson et Arnold [3], nous a permis de présenter plusieurs facettes intéressantes des lois de Linnik.

Premièrement, dans le cas univarié, nous avons montré que la loi de Linnik généralisée, ayant comme fonction caractéristique

$$f(t) = (1 + |t|^{\alpha})^{-1/\beta}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad \beta > 0,$$

peut s'écrire, grâce à Devroye [7], sous la forme $S_\alpha V_\beta^{\beta/\alpha}$ où S_α est une variable aléatoire distribuée selon la loi stable symétrique , V_β est une variable aléatoire ayant comme densité de probabilité $\exp(-v^\beta)/\Gamma(1 + 1/\beta)$, $v > 0$, et, S_α et V_β sont indépendantes. À l'aide de cette représentation, nous avons pu affirmer que le poids des ailes de la loi de Linnik $\text{Lin}(\alpha, \beta)$ est sensiblement le même que celui de la loi stable, et présenter un algorithme de simulation pour cette loi. Pour la loi de Linnik classique, nous avons vu que la somme d'un nombre aléatoire N de lois de Linnik de paramètre α est une loi de même type, pourvu que N obéisse à une loi géométrique.

Par la suite, nous avons généralisé au cas multivarié la loi de Linnik. Cette extension se fit bien, grâce à la représentation qu'apporte Devroye [7]. Ceci nous permit de définir la loi stable symétrique multivariée, et de présenter un algorithme de simulation pour la loi stable symétrique multivariée et pour la loi de Linnik généralisée multivariée.

Pour conclure ce travail sur les lois de Linnik, plusieurs méthodes d'estimation des paramètres de la loi de Linnik généralisée dans les cas univarié et multivarié furent présentées. Quelques calculs permettant de vérifier la fiabilité de certains estimateurs furent effectués et leur analyse nous permet d'espérer à la validité du théorème central limite pour ces estimateurs. Ce résultat très difficile ne fut pas démontré dans le cadre de ce travail. À la toute fin, nous avons présenté une application possible de la loi de Linnik généralisée univariée à l'étude des prix à la fermeture d'une action ordinaire de IBM. Plusieurs autres suggestions d'applications sont faites pour la loi stable. Celles-ci constituent de bonnes possibilités d'applications pour la loi de Linnik généralisée.

Nous avons déjà conjecturé l'application du théorème central limite pour les estimateurs (27) et (29). Le lecteur intéressé à poursuivre les recherches sur le sujet peut étudier les propriétés qui découlent de l'unimodalité de la loi de Linnik, ou encore ordonner selon l'ordre étoilé [21] les lois de Linnik par rapport au poids de leurs ailes. Pour le côté application, des tests d'adéquation pourraient être développés, d'autres applications à la loi de Linnik pourraient être trouvées. Un processus défini à l'aide de la loi $\text{Lin}(\alpha, \beta)$

pourrait en outre aider à modéliser les phénomènes mentionnés dans ce travail comme exemple d'applications.

References

[1] M. Abramowitz et I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standard, Applied Mathematics Series No. 55, Ninth Edition, 1970.

[2] Dale N. Anderson, *A Multivariate Linnik Distribution*, Statist. Probab. Letters **14** (1992), 333–336.

[3] Dale N. Anderson et Barry C. Arnold, *Linnik Distributions and Processes*, J. Appl. Probab. **30** (1993), 330–340.

[4] G. E. Box et G. M. Jenkins, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, Oakland, 1976.

[5] J. M. Chambers, C. L. Mallows et B. W. Stuck, *A Method for Simulating Stable Random Variables*, J. Amer. Statist. Assoc., **71** (1976), 340–344.

[6] L. Devroye, *Non-uniform Random Variate Generation*, Springer, New York, 1987.

[7] L. Devroye, *A Note on Linnik's Distribution*, Statist. Probab. Letters **9** (1990), 305–306.

[8] S. Dharmadhikari et K. Joag-dev, *Unimodality, Convexity, and Applications*, Academic Press, New York, 1988.

[9] E. Fama, *Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis*, Journal of Business, **36** (1963), 420–429.

[10] R. V. Hogg et A. T. Craig, *Introduction to Mathematical Statistics*, Fourth Edition, Macmillan, New York, 1978.

[11] I. A. Ibragimov et K. E. Chernin, *On the Unimodality of Stable Laws*, Theory of Probability and Its Applications, **4** (1959), 417–419.

[12] A. Janicki et A. Weron, *Can One See α-Stable Variables and Processes?*, Statist. Science, **9** (1994), 109–126.

[13] M. E. Johnson, *Multivariate Statistical Simulation*, Wiley, New York, 1987.

[14] Ju. V. Linnik, *Linear Forms and Statistical Criteria. I, II*, Selected Trans. Math. Stat. Probab. **3** (1963), 1–90.

[15] B. Mandelbrot, *News Methods in Statistical Economics*, The Journal of Political Economy, **LXXI** (1963), 421–440.

[16] B. Mandelbrot, *The Variation of Certain Speculative Prices*, Journal of Business, **36** (1963), 394–419.

[17] J. H. McCulloch, *Financial Applications of Stable Distributions*, Technical report (1995), Ohio State University, Ohio, 45 pages.

[18] S. J. Press, *Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions* , J. Amer. Stat. Assoc., **67** (1972), 842–846.

[19] S. J. Press, *Applied Multivariate Analysis*, Second Edition, Krieger, Malabar, Florida, 1982.

[20] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky et W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, New York, 1988.

[21] L. P. Rivest, *Products of Random Variables and Star-shaped Ordering*, Canadian J. Stat., **10** (1982), 219–223.

[22] R. Y. Rubinstein, *Simulation and the Monte Carlo Method*, Wiley, New York, 1981.

[23] B. M. De Silva, *A Class of Multivariate Symmetric Stable Distributions*, J. Mult. Anal. **8** (1978), 335–345.

[24] V. M. Zolotarev, *On Representation of Stable Laws by Integrals*, Selected Trans. Math. Stat. Probab. **6** (1966), 84–88.