

HEC MONTRÉAL
AFFILIÉE À L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

Évaluation d'options avec volatilité stochastique et processus de
Lévy

par

Alexandre ROCH

Mémoire

présenté

pour l'obtention

du grade de maître ès sciences de gestion (M.Sc.) en ingénierie financière

Juillet 2005

©Alexandre Roch, 2005

Dédicace

Je dédie ce mémoire à ma future épouse, Hélène.

Remerciements

Ce travail a été en grande partie subventionné par le CRSNG et l'Institut de finance mathématique de Montréal. Je remercie mon directeur, Bruno Rémillard, pour ses précieux conseils et la révision de ce mémoire. En particulier, il a apporté d'importants éléments dans la preuve de la proposition 10. Je remercie aussi les lecteurs du mémoire, Tony Berrada, ainsi que Chantal Labbé de l'École Polytechnique de Montréal.

Sommaire

Dans ce mémoire, on étudie le modèle d'actifs financiers avec volatilité stochastique de Barndorff-Nielsen et Shephard [3]. La particularité de ce modèle est que la volatilité est donnée par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck régi par un processus de Lévy non-gaussien à sauts positifs. Les problèmes d'évaluation d'options et d'estimation de paramètres sont étudiés. On considère ensuite la problématique associée à la prime de risque de l'option due à l'incomplétude du marché et une unique mesure martingale équivalente est proposée suivant le principe de mesure martingale minimale de Föllmer et Schweizer [16]. Finalement, on étudie la tarification de droits américains et on montre que la prime de contrats américains peut être représentée comme la solution de viscosité d'une équation aux dérivées partielles. La section 4.5 et le chapitre 5 présentent des résultats nouveaux.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Revue de la littérature	3
2.1	Processus de Lévy et modélisation financière	4
2.2	Estimation de paramètres et filtrage	7
3	Processus de Lévy et modélisation	10
3.1	Rappel sur les processus de Lévy	10
3.2	Modèle BN-S	13
3.3	Densité de Lévy et processus inverse-gaussien généralisé	17
3.4	Ensemble de mesures martingales équivalentes	21
4	Évaluation d'options européennes	24

4.1	Transformée de Laplace	24
4.2	Méthodes Monte Carlo	27
4.3	Estimation des paramètres	28
4.3.1	Modèle ARMA pour la volatilité	29
4.3.2	Filtre de Kalman	31
4.4	Le cas Γ -OU	32
4.4.1	Tests numériques	34
4.4.2	<i>Smiles</i> de volatilité	37
4.5	Mesure martingale équivalente minimale	41
5	Solutions de viscosité et évaluation d'options américaines	50
A	Résultats auxiliaires	56
A.1	Lemme d'Itô	56
A.2	Solution de l'équation (3.4)	57
A.3	Preuve de la proposition 10	58

Liste des figures

3.1	Trajectoire simulée de Z avec $\alpha = 4000$ et $\nu = 50$	14
3.2	Trajectoire simulée de S_t (a), Z (b), σ_t^2 (c) et $\sigma_{0,t}^{2*}/t$ (d).	18
4.1	(a) Trajectoire de MSFT du 25 février au 13 avril 2005 et (b) sa volatilité réalisée, (c) Trajectoire de YHOO du 11 mars au 13 avril 2005 et (d) sa volatilité réalisée	35
4.2	Volatilité implicite avec (a) $\rho = 0$, (b) $\rho = -0.01$, (c) $\rho = -0.05$ et (d) $\rho = -0.2$	39
4.3	Volatilité implicite estimée par la méthode des moindres carrés. (a) $T = 29$, (b) $T = 50$, (c) $T = 113$, (d) $T = 176$ et (e) $T = 428$	40

Chapitre 1

Introduction

Les modèles d'actifs financiers avec volatilité stochastique ont attiré beaucoup d'attention depuis quelques années. En plus de modéliser l'effet observé de la dépendance des rendements de l'actif et de leurs distributions plus étendues que dans le cas gaussien, ces modèles offrent une grande flexibilité pour la calibration de prix d'options dans un contexte de *smile* de volatilité. Dans ce contexte, deux auteurs, Ole Barndorff-Nielsen et Neil Shephard, ont développé un modèle de volatilité stochastique dans l'article "Non-gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics" [3] qui a eu d'importantes répercussions sur notre façon de comprendre et d'étudier les processus de volatilité. Certains auteurs ont alors entrepris d'étudier les problèmes de calcul de l'ensemble des mesures martingales équivalentes (Nicolato et al. [25]), d'estimation des paramètres (Roberts et al. [29], Barndorff et al. [4] et Griffin et al. [17]), de l'incomplétude du marché (Benth et al. [7]) et de la gestion optimale de portefeuille (Benth et al. [6]).

dans ce contexte. Le but de ce présent mémoire est de considérer le problème d'évaluation d'options pour ce modèle et d'étudier les problèmes reliés à l'incomplétude du marché et à la tarification des options américaines.

Chapitre 2

Revue de la littérature

Le modèle de Black-Scholes [8] pour un actif financier repose essentiellement sur l'indépendance, la stationnarité et la normalité des rendements. Or, il est largement reconnu dans la littérature que ces rendements reflètent en fait une certaine dépendance temporelle et peuvent prendre des valeurs plus étendues que dans le cas gaussien. De plus, une autre hypothèse contraignante du modèle est que la volatilité est supposée constante dans le temps. Afin de remédier aux problèmes rencontrés par ce modèle, une importante littérature s'est développée récemment dans laquelle de nouveaux modèles financiers sont construits à l'aide des processus de Lévy. Les processus de Lévy ont été introduits par Lévy en 1937 [24] et sont caractérisés comme étant des processus stationnaires avec incréments indépendants dont le mouvement brownien est un cas particulier. Une théorie moderne de ces processus peut être trouvée dans les livres de Sato [30] et Bertoin [2].

2.1 Processus de Lévy et modélisation financière

Plusieurs auteurs ont ainsi développé des modèles d'actifs financiers sur la base de ces processus. Parmi les premiers travaux dans ce domaine, on retient l'article d'Eberlein et Jacod [13] dans lequel un processus de Lévy est utilisé pour modéliser le logarithme du prix de l'actif. Les auteurs se sont d'abord intéressés au cas d'un processus purement discontinu, i.e. sans aucune composante gaussienne. On est alors en présence d'un marché incomplet. Il en résulte dans cet article un intervalle pour le prix d'option de type européen.

Plus récemment, Carr, Geman, Madan et Yor [10] ont développé un modèle dans lequel le logarithme des prix est encore une fois donné par un processus de Lévy pour lequel, cependant, l'échelle de temps est modifiée par l'intégrale d'un processus de retour vers la moyenne de type racine-carrée. Le concept d'échelle de temps modifiée signifie en termes mathématiques, que le processus est évalué au temps aléatoire $T(t)$ modélisé par un processus donné. On peut voir ce processus de déformation du temps comme une mesure relative de l'activité économique cumulée dans le temps. Cette idée a été initialement introduite par Clark [9] qui modélise l'échelle de temps par un processus log-normal.

Suivant les traces de Ole E. Barndorff-Nielsen, Eberlein et Keller [14] ont introduit les processus hyperboliques généralisés en finance. Ces processus ont la propriété intéressante que les distributions marginales ont des queues plus importantes que celles de la loi normale. Ceci a poussé Barndorff-Nielsen à

développer une classe plus généralisée de processus appelée *Normal location-scale mixture processes* (voir [5] pour plus de détails)

Barndorff-Nielsen et Shephard ont par la suite développé [3] un modèle d'actif financier avec volatilité stochastique dans lequel la volatilité est modélisée par un type particulier de processus de Lévy. Dans le modèle BN-S, la dynamique de l'actif est dictée par la même équation que dans le modèle de Black-Scholes tandis que la volatilité, au lieu d'être considérée constante, est modélisée par le processus de type Ornstein-Uhlenbeck suivant

$$d\sigma_t^2 = -\lambda\sigma_t^2 dt + dZ_{\lambda t} \quad \lambda > 0,$$

où $Z_{\lambda t}$ est un processus de Lévy avec incréments positifs et aucune composante gaussienne. Afin de modéliser la propriété observée qu'une hausse subite de la volatilité induit une baisse simultanée de la valeur de l'actif sous-jacent, les auteurs ont introduit un paramètre d'effet de levier ρ dans la dynamique de l'actif sous-jacent de sorte que celui-ci est modélisé de la façon suivante

$$dx_t = (\alpha + \beta\sigma_t^2)dt + \sigma_t dW_t + \rho dZ_{\lambda t}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \rho \leq 0,$$

$$S_t = \exp(x_t),$$

où S_t est la valeur de l'actif sous-jacent au temps t . Parmi les processus proposés pour modéliser la volatilité σ_t^2 , les auteurs suggèrent entre autre les processus avec lois marginales gamma et inverse-gaussienne. On parle alors de processus Γ -OU et IG-OU respectivement.

Sous la dynamique BN-S, le marché devient incomplet ; il existe donc

une infinité de mesures martingales équivalentes. Le problème d'évaluation d'options européennes où l'actif sous-jacent suit la dynamique du modèle BN-S a ensuite été étudié par Nicolato et Vernados [25]. Dans leur article, les auteurs ont caractérisé l'ensemble des mesures martingales équivalentes qui préservent les propriétés du modèle BN-S. C'est alors un résultat bien connu en finance que le prix d'un droit contingent de type européen est donné par

$$\mathbf{E}_Q [\exp(-r(T - t))h(S_T)|\mathcal{F}_t],$$

où T est l'échéance du contrat, h est la fonction de paiement, \mathcal{F}_t est la filtration engendrée par le processus S jusqu'au temps t et Q est la mesure martingale équivalente (voir par exemple [18]). Nicolato et al. trouvent alors l'infimum et le supremum de l'intervalle des prix d'une option européenne pour une fonction de paiement donnée. Ils proposent ensuite quelques méthodes pour évaluer le prix de l'option, dont l'une est basée sur l'approche de Hull et White [20] qui consiste à prendre l'espérance sous Q du prix Black-Scholes par rapport à un prix et une volatilité effective bien définis. Pour évaluer une telle espérance, on propose de se référer aux travaux de Rosiński [28] sur les représentations en séries des processus de Lévy qui permettent de simuler des processus de Lévy et ainsi appliquer des méthodes Monte Carlo pour évaluer les prix d'option. Une autre approche consiste à représenter le prix de l'option par sa transformée de Laplace et celle de l'actif sous-jacent. Les travaux de Eberlein et Raible [15] permettent de calculer la transformée de Laplace de façon analytique.

2.2 Estimation de paramètres et filtrage

Dans la pratique, pour calculer les prix d'options il faut être capable d'estimer les paramètres du modèle. Les modèles de volatilité stochastique, en particulier celui de BN-S, sont suffisamment riches pour construire des processus ayant plusieurs des caractéristiques des prix d'actifs financiers mais ils ont comme principale faiblesse la difficulté à évaluer les paramètres. La raison principale est que contrairement au prix de l'actif, le processus de volatilité est difficilement, sinon impossible, à observer. Il faut donc avoir recours à des techniques de filtrage.

Le filtrage consiste à obtenir a posteriori, i.e. avec l'information des observations, la distribution de la variable non-observable, dite variable d'état. Dans le cas du modèle BN-S, la variable non-observable serait le vecteur composé de la volatilité σ_t^2 et du processus $Z_{\lambda t}$. Le domaine de l'estimation de paramètre pour des modèles de volatilité stochastique avec processus de Lévy est en expansion et quelques travaux méritent d'être mentionnés.

Barndorff-Nielsen et Shephard ont d'abord proposé d'utiliser l'inférence bayésienne basée sur les méthodes Monte Carlo de chaînes de Markov. Cette idée a été développée par Roberts, Papaspiliopoulos et Dellaportas [29]. Dans leur article, les auteurs proposent une méthodologie pour estimer les paramètres du modèle BN-S dans le cas particulier où le processus de Lévy $Z_{\lambda t}$ est un processus de poisson composé qui induit des marges gamma pour la volatilité.

Une autre méthodologie proposée est celle du maximum de vraisemblance.

Pour faciliter les calculs, on suppose que la loi de la variable non-observable est gaussienne. Il est alors possible de calculer analytiquement le maximum de vraisemblance à l'aide du filtre de Kalman. Il en résulte le meilleur estimateur linéaire. Cependant, ce résultat n'est valable qu'asymptotiquement. Pour implanter cette méthodologie, Vernados [31] propose d'ajouter les observations de la variation quadratique dans le vecteur de la variable observable afin d'obtenir une meilleure distribution a posteriori pour la volatilité. La variation quadratique est donnée par la limite de la somme des carrés des rendements. Ceci n'est cependant qu'une approximation du processus de variance intégrée. Des estimations ont été trouvés dans le cas des processus Γ -OU et IG-OU.

Enfin, certains proposent d'avoir recours au filtrage particulaire. Cette méthode consiste à générer pour chaque pas de temps la variable d'état selon la distribution a priori un certain nombre de fois. Les résultats de cette simulation sont appelés particules. Puis on attribue un poids à chaque particule proportionnellement à leur probabilité d'être observée étant donné les observations. On obtient ainsi une approximation de la loi a posteriori de la variable d'état, puis on recommence pour le pas de temps suivant.

Afin d'améliorer l'efficacité de cette simulation, deux méthodes sont proposées. La première, développée par Shephard et Pitt [27], propose d'ajouter une étape à la simulation afin d'obtenir des poids d'échantillonnage plus équilibrés. Ce type de filtre est appelé filtre particulaire avec variable auxiliaire. Enfin, Hürzeler et Künsch [21] reprennent la méthodologie qui consiste à approximer la fonction de vraisemblance à l'aide d'un filtre par-

ticulaire. Cependant, afin d'améliorer l'efficacité et la précision des calculs, le filtre n'est généré qu'une seule fois et réutilisé pour toutes les évaluations de la vraisemblance dans l'espace des paramètres à estimer. Cette méthode ingénieuse n'a cependant pas été testée dans le cas d'un modèle BN-S. De plus, la faiblesse de cet algorithme est que l'on suppose connaître la distribution de la variable d'état, ce qui n'est clairement pas toujours le cas.

Chapitre 3

Processus de Lévy et modélisation

3.1 Rappel sur les processus de Lévy

Un processus de Lévy est un processus stochastique $\{Z_t\}_{0 \leq t < \infty}$ continu en probabilité, i.e. $\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{P}(|Z_{t+h} - Z_t| > \epsilon) = 0$, continu à droite avec limites à gauche (càdlàg) tel que les incréments

$$Z_{t+h} - Z_t \quad 0 \leq t < \infty, h > 0$$

sont indépendants et stationnaires. Par convention, on pose $Z_0 = 0$. Les deux exemples typiques de processus de Lévy sont le processus de Poisson et le mouvement Brownien. En notant $\kappa(\theta)$ la fonction de cumulants de Z_1 ,

$$\kappa(\theta) = \log\{E[\exp(\theta Z_1)]\},$$

on remarque par l'indépendance, la continuité en probabilité et la stationnarité des incréments de Z que la fonction de cumulants de Z_t satisfait

$$\log\{E[\exp(\theta Z_t)]\} = t \log\{E[\exp(\theta Z_1)]\} = t\kappa(\theta),$$

lorsqu'elle existe dans un voisinage de s .

Les processus de Lévy sont complètement déterminés par le *triplet caractéristique* composé d'une constante réelle a , d'une variance σ^2 et d'une mesure W , appelée mesure de Lévy. Cette dernière doit satisfaire $W(\{0\}) = 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, x^2) W(dx) < \infty. \quad (3.1)$$

Lorsque W est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, on note par w la dérivée de Radon-Nikodym, aussi appelée la densité de Lévy. Autrement dit,

$$W(dx) = w(x)dx.$$

Ce triplet caractérise le processus de Lévy selon le théorème de Lévy-Khintchine.

Théorème 1 (Théorème de représentation de Lévy-Khintchine) *Soit Z un processus de Lévy et ϕ la fonction caractéristique de Z_1 . Il existe une constante $a \in \mathbb{R}$, une variance $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ et une mesure W qui satisfait la condition 3.1 tel que*

$$\phi(\xi) = \exp\left(ai\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 - \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{i\xi x} + i\xi x\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)\right)W(dx)\right),$$

où $\mathbb{I}_{[-1,1]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1, 1]$.

Remarque 2 Pour tout ensemble borélien A tel que $0 \notin \overline{A}$, le processus $N(t, A) = \#\{s \leq t; \Delta Z_s \in A\}$, où $t \geq 0$ est un processus de Poisson d'intensité $W(A)$. Voir Bertoin [2].

Remarque 3 Si $W(\mathbb{R}) < \infty$, alors

$$\phi(\xi) = \exp\left(bi\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 - \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\xi x})W(dx)\right)$$

où

$$b = a + \int_{\mathbb{R}} x\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)W(dx).$$

Le triplet caractéristique du mouvement brownien est trivialement donné par $(a = 0, \sigma^2 = 1, W \equiv 0)$, tandis que celui du processus de Poisson de paramètre λ est $(a = \lambda, \sigma^2 = 0, W = \lambda\delta_1)$, où $\delta_1(A) = 1$ si $1 \in A$, et $\delta_1(A) = 0$ sinon.

Dans ce qui suit nous allons supposer que les incréments des processus de Lévy étudiés sont non-négatifs. Dans la littérature, on appelle parfois ce type de processus *subordinateurs*. Dans ce cas, $W((-\infty, 0]) = 0$ et

$$Z_t = \sum_{s \leq t} \Delta Z_s.$$

De plus, on suppose que la deuxième valeur du triplet caractéristique est nulle, i. e. le processus ne possède aucune composante gaussienne. Un exemple important et qui sera étudié par la suite est le processus de Lévy à la base du modèle Γ -OU, caractérisé par sa densité de Lévy donnée par

$$w(x) = \nu\alpha \exp(-\alpha x)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x),$$

avec $\alpha > 0$. Ainsi, la fonction de cumulants de Z est

$$\kappa(\theta) = \frac{\nu\theta}{\alpha - \theta}, \quad \theta < \alpha. \quad (3.2)$$

Les détails de ces calculs peuvent être trouvés dans Barndorff et al. [3]. La figure 3.1 présente une simulation de ce type de processus. Nous verrons plus loin qu'un processus de type Γ -OU n'est en fait qu'un cas particulier d'une classe plus large de processus.

3.2 Modèle BN-S

Nous reprenons dans ce présent mémoire le modèle de Barndorff-Nielsen et Shephard (BN-S) [3] pour un actif financier. On modélise ainsi le prix d'un actif $S_t = \exp(x_t)$, défini sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathcal{P})$, par les équations différentielles stochastiques (EDS) suivantes :

$$dx_t = (\mu + \beta\sigma_t^2)dt + \sigma_t dW_t + \rho dZ_{\lambda t} \quad (3.3)$$

$$d\sigma_t^2 = -\lambda\sigma_t^2 dt + dZ_{\lambda t}, \quad \sigma_t^2 > 0 \quad \forall t \quad (3.4)$$

où $\mu, \beta \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ et $\rho \leq 0$; W_t est un mouvement brownien et $Z_{\lambda t}$ est un processus de Lévy à valeurs positives avec aucune composante gaussienne sous la mesure physique \mathcal{P} . De plus, W_t est indépendant du processus $Z_{\lambda t}$ et $Z_0 = 0$.

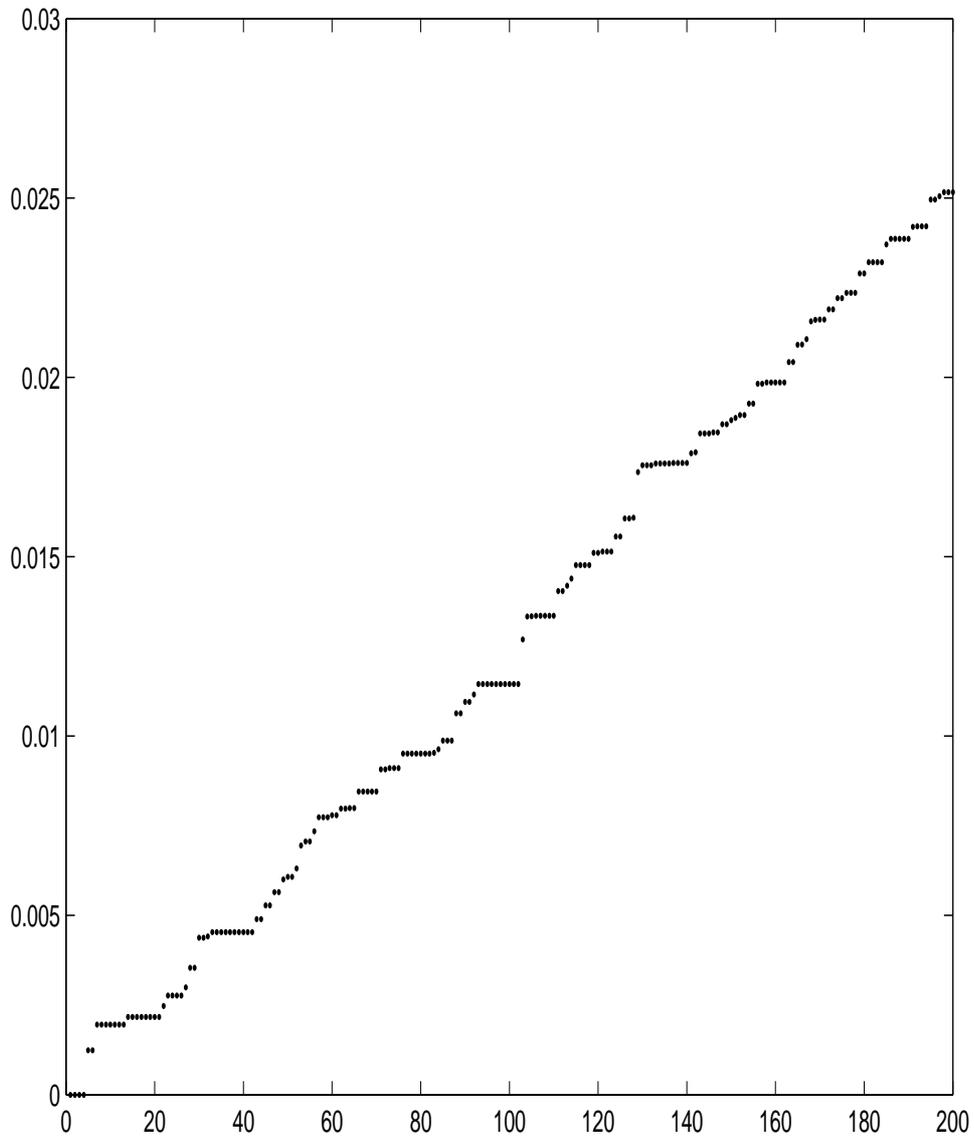


Figure 3.1: Trajectoire simulée de Z avec $\alpha = 4000$ et $\nu = 50$

Suivant Nicolato et Vernados [25] on impose sur $Z_{\lambda t}$ les trois conditions suivantes :

(C1) Z ne possède aucune dérive déterministe et on définit la densité de Lévy $w(x)$ de Z sur $[0, \infty)$ de sorte que sa fonction de cumulants, lorsqu'elle est définie, est donnée par

$$\kappa(\theta) = \log\{E[\exp(\theta Z_1)]\} = \int_0^\infty (e^{\theta x} - 1)w(x)dx;$$

(C2) $\hat{\theta} = \sup\{\theta \in \mathbb{R} \mid \kappa(\theta) < \infty\} > 0;$

(C3) $\lim_{\theta \rightarrow \hat{\theta}} \kappa(\theta) = \infty .$

Notons que la fonction de cumulants (3.2) satisfait ces conditions.

En utilisant la formule d'Itô généralisée (théorème 12 de l'Annexe A), la solution du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (3.4) est

$$\sigma_t^2 = e^{-\lambda t} \sigma_0^2 + \int_0^t e^{\lambda(s-t)} dZ_{\lambda s}.$$

Les détails des calculs sont donnés dans l'annexe A.2.

Pour x_t , on a facilement

$$x_t = x_0 + \mu t + \int_0^t \beta \sigma_s^2 dt + \int_0^t \sigma_s dW_s + \rho Z_{\lambda t}.$$

Le processus x_t est donc linéaire par rapport à sa valeur initiale x_0 , une propriété qui sera utile plus loin. De plus, il est conditionnellement gaussien sachant $\mathcal{G}_t = \sigma\{Z_{\lambda s}, s \leq t\}$.

On définit le processus de variance intégrée de s à t par

$$\sigma_{s,t}^{2*} = \int_s^t \sigma_u^2 du. \quad (3.5)$$

Il est clair par l'équation (3.4) que $\sigma_t^2 dt = \frac{1}{\lambda}(-d\sigma_t^2 + dZ_{\lambda t})$, et donc en intégrant on obtient l'expression analytique

$$\begin{aligned} \sigma_{s,t}^{2*} &= \frac{1}{\lambda}(-\sigma_t^2 + \sigma_s^2 + Z_{\lambda t} - Z_{\lambda s}) \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda} \sigma_s^2 + \int_s^t \frac{1 - e^{-\lambda(t-u)}}{\lambda} dZ_{\lambda u} \end{aligned} \quad (3.6)$$

pour la variance intégrée.

En appliquant la formule d'Itô (théorème 12) au processus $S_t = \exp(x_t)$, on obtient

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t-} dx_t + \frac{1}{2} S_{t-} d\langle x^c \rangle_t - S_{t-} \Delta x_t + \Delta S_t \\ &= S_{t-} (b_t dt + \sigma_t dW_t + dM_t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

où M_t est la martingale (voir Nicolato et al. [25]) sous \mathcal{P} définie par

$$M_t = \sum_{0 \leq s \leq t} (e^{\rho \Delta Z_{\lambda s}} - 1) - \lambda \kappa(\rho) t$$

et $b_t = \mu + (\beta + \frac{1}{2})\sigma_t^2 + \lambda \kappa(\rho)$. Dans cette représentation, $\lambda \kappa(\rho) t$ est le compensateur du processus à sauts

$$\tilde{M}_t = \sum_{0 \leq s \leq t} (e^{\rho \Delta Z_{\lambda s}} - 1)$$

qui fait de M une martingale. Voir Jacod et Shiryaev [22] pour plus de détails.

La figure 3.2 présente une trajectoire simulée d'un actif modélisé par le modèle BN-S. Le temps est mesuré en jours. La distribution de σ_t^2 utilisée est la distribution Γ -OU (se référer à la section suivante pour plus de détails) avec les paramètres $\nu = 5$ et $\alpha = 3000$. Les paramètres de l'actif sont donnés par $\mu = 6.38\%$, $\beta = -0.5$, $\sigma_0^2 = 50\%$, $\rho = -0.5$ et $\lambda = 0.02$.

On observe bien le retour vers 0 de la volatilité à un taux de décroissance exponentielle donné par λ ainsi que des sauts de volatilité observés à des moments aléatoires donnés par le processus de Lévy sous-jacent. La dernière figure présente le processus de variance intégrée. Notons que cette quantité sera cruciale par la suite lors de l'évaluation d'options.

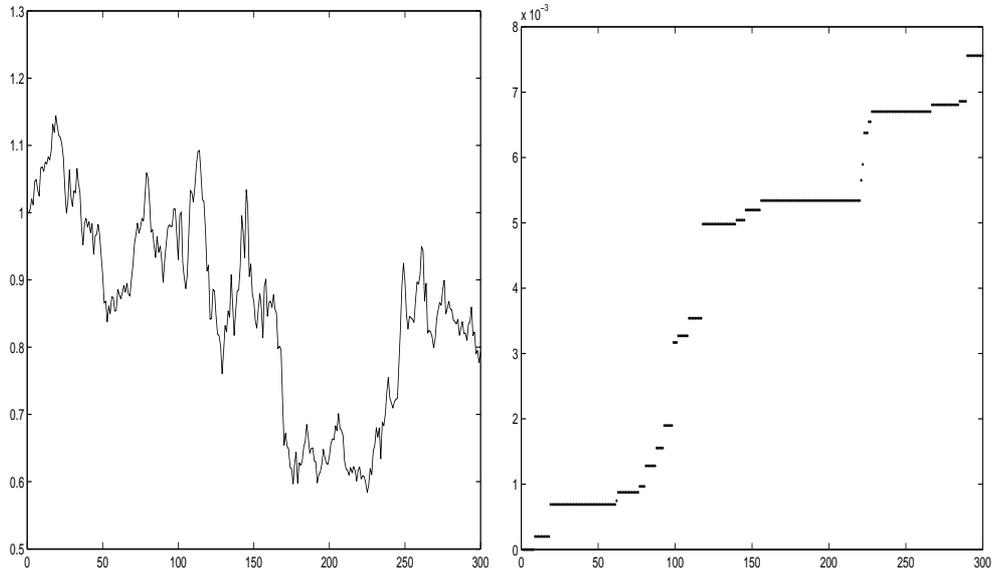
3.3 Densité de Lévy et processus inverse-gaussien généralisé

Avant de poursuivre dans l'évaluation d'options pour le modèles BN-S, il est important de bien définir le concept de densité de Lévy. Pour un meilleur approfondissement, se référer aux ouvrages de Sato [30] et Bertoin [2]. Les résultats de cette section sont principalement tirés de l'article de Barndorff-Nielsen et Shephard [3].

Tel que noté précédemment, on note par $w(x)$ la densité de Lévy de Z , de sorte que

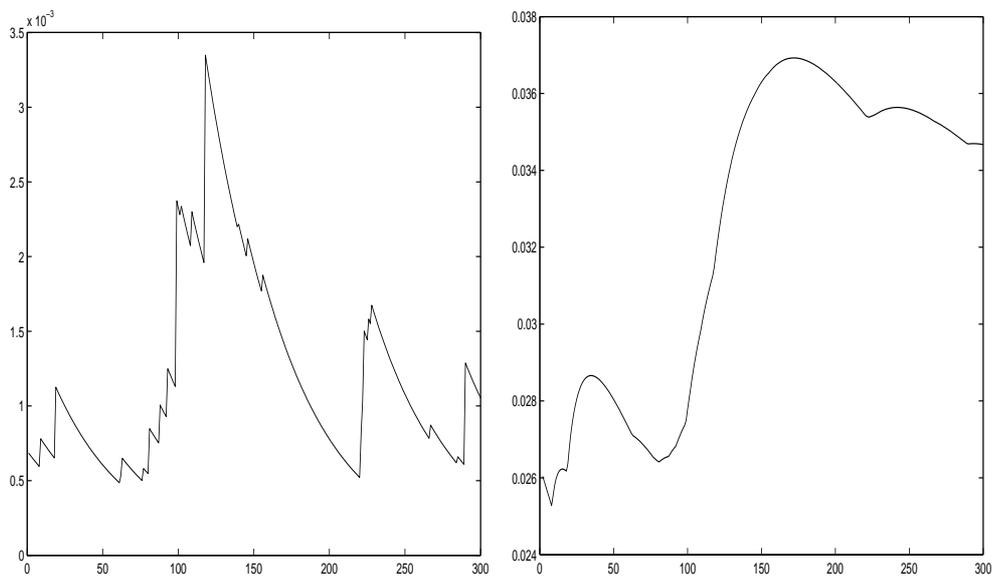
$$\kappa(\theta) = \int_0^\infty (e^{\theta x} - 1)w(x)dx.$$

Le premier résultat important est la relation entre la fonction de cumulants



(a)

(b)



(c)

(d)

Figure 3.2: Trajectoire simulée de S_t (a), Z (b), σ_t^2 (c) et $\sigma_{0,t}^{2*}/t$ (d).

de Z et celle de la loi invariante de la volatilité σ_t^2 . Si on note $\tilde{\kappa}(\theta)$ la fonction de cumulants de σ_t^2 , i.e.

$$\tilde{\kappa}(\theta) = \log\{E[\exp(\theta\sigma_t^2)]\}$$

alors on trouve la relation

$$\kappa(\theta) = \theta \frac{d\tilde{\kappa}(\theta)}{d\theta}. \quad (3.8)$$

De plus, si $u(x)$ dénote la densité de Lévy de σ_t^2 , alors les densités sont reliées de la façon suivante :

$$w(x) = -u(x) - xu'(x) \quad (3.9)$$

où, on le rappelle, $w(x)$ est la densité de Lévy de Z . Finalement, en posant

$$W^+(x) = \int_x^\infty w(\zeta)d\zeta, \quad x > 0$$

on obtient

$$W^+(x) = xu(x). \quad (3.10)$$

Pour référence ultérieure, définissons la fonction inverse de W^+ par

$$W^{-1}(y) = \inf\{x > 0 \mid W^+(x) \leq y\}.$$

Dans le cas où $W^+(0) < \infty$, le processus Z se dit à activité finie. Z peut alors s'écrire comme un processus de Poisson composé, i. e.

$$Z_t = \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j,$$

où les ξ_j sont des sauts indépendents et identiquement distribués de densité $\frac{w(x)}{W^+(0)}$ et N_t est un processus de Poisson d'intensité $W^+(0)$. Les processus

à activité finie sont caractérisés par le fait que, dans un intervalle de temps donné, il y a un nombre fini de sauts, avec probabilité 1. Dans le cas $W^+(0) = \infty$, le processus est dit à activité infinie.

Barndorff-Nielsen et Shephard [3] proposent une classe de modèles pour la volatilité qui a récemment attiré beaucoup d'attention, la distribution inverse-gaussienne généralisée.

Définition 1 Une variable aléatoire X suit une loi inverse-gaussienne généralisée, noté $X \sim GIG(\nu, \delta, \gamma)$ avec $\delta, \gamma \geq 0$ et $\nu \in \mathbb{R}$, si sa densité est donnée par

$$p(x) = \frac{\gamma^\nu}{2\delta^\nu K_\nu(\delta\gamma)} x^{\nu-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\delta^2 x^{-1} + \gamma^2 x)\right\}, \quad x > 0, \quad (3.11)$$

où K_ν est la fonction de Bessel modifiée du troisième type. Les cas spéciaux de cette distribution sont la loi inverse-gaussienne ($\nu = -\frac{1}{2}$), la loi hyperbolique positive ($\nu = 1$), la loi chi-carrée inverse de δ^2 degrés de liberté ($\nu = -\frac{\delta^2}{2}, \gamma = 0$) et la loi gamma ($\delta = 0, \nu > 0, \gamma > 0$).

Remarque 4 La loi gamma est en fait un cas limite puisque l'équation (3.11) n'est pas définie pour $\delta = 0$. Dans ce cas, on pose

$$p(x) = \frac{\gamma^{2\nu} x^{\nu-1}}{2^\nu \Gamma(\nu)} \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 x\right).$$

Ils trouvent alors que la densité de Lévy d'une distribution GIG est donnée par

$$u(x) = x^{-1} \exp\left(-\frac{\gamma^2 x}{2}\right) \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\delta^{-2} x \zeta\right) g_\nu(\zeta) d\zeta + \max(0, \nu) \right\}$$

où $g_\nu(\zeta) = \frac{2}{\zeta^{\pi^2}} \left(J_{|\nu|}^2(\sqrt{\zeta}) + N_{|\nu|}^2(\sqrt{\zeta}) \right)^{-1}$, J et N sont les fonctions de Bessel de premier et deuxième type, respectivement. Et donc, à l'aide de la relation (3.10), on obtient

$$W^+(x) = \exp\left(-\frac{\gamma^2 x}{2}\right) \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\delta^{-2}x\zeta\right) g_\nu(\zeta) d\zeta + \max(0, \nu) \right\}.$$

Les modèles de volatilité stochastique étudiés dans ce mémoire seront donc les modèles GIG-OU. Ceci signifie que la loi invariante de la volatilité σ_t^2 est de type GIG et la processus Z est un processus de type OU (Ornstein-Uhlenbeck), vérifiant l'équation (3.4). La densité de Lévy de Z est alors obtenue à l'aide de l'équation (3.9). Dans ce cas, notons que la fonction de cumulants de Z satisfait aux conditions (C1)-(C3).

3.4 Ensemble de mesures martingales équivalentes

Notons d'abord que pour une mesure \mathcal{Q} dans l'ensemble \mathcal{M} des mesures martingales équivalentes à \mathcal{P} (MME), Z n'est pas nécessairement un processus de Lévy sous \mathcal{Q} , indépendant de W_t . Pour cette raison, Nicolato et al. [25] ont d'abord défini l'ensemble \mathcal{M}' des MME à \mathcal{P} pour lesquelles la structure du modèle BN-S est conservée, possiblement avec d'autres paramètres et une autre loi pour Z . Afin de caractériser cet ensemble, définissons l'ensemble suivant

$$\mathcal{Y}' = \left\{ y : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) ; \int_0^\infty (\sqrt{y(x)} - 1)^2 w(x) dx < \infty \right\}.$$

En notant r le taux sans risque, ils obtiennent alors le théorème suivant :

Théorème 5 *Quelle que soit $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}'$, il existe $y \in \mathcal{Y}'$ tel que*

$$\begin{aligned} dx_t &= \left(r - \lambda \kappa^y(\rho) - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dW_t^{\mathcal{Q}} + \rho dZ_{\lambda t} \\ \text{où } \kappa^y(\theta) &= \int_0^\infty (e^{\theta x} - 1) y(x) w(x) dx, \end{aligned}$$

$W_t^{\mathcal{Q}} = W_t - \int_0^t \sigma_s^{-1} (r - \mu - (\beta + \frac{1}{2}) \sigma_s^2 - \lambda \kappa^y(\rho)) ds$ et $Z_{\lambda t}$ sont respectivement un mouvement brownien et un processus de Lévy sous \mathcal{Q} . $w^y(x) = y(x)w(x)$ est la densité de Lévy de Z sous \mathcal{Q} et $\kappa^y(\theta)$ est sa fonction de cumulants.

On s'intéresse ensuite à évaluer un droit contingent de fonction de paiement $H(S_T) = h(x_T)$ tel que H est une fonction convexe telle que $H(0) = 0$, $0 \leq H(x) < x$ pour $x > 0$, et $x - H(x)$ est borné. On note

$$C_t(\mathcal{Q}) = \mathbf{E}_{\mathcal{Q}}[e^{-r(T-t)} h(x_T) \mid \mathcal{F}_t] \quad (3.12)$$

la valeur du droit contingent au temps t . Ils montrent ensuite que l'ensemble de prix induit par \mathcal{M}' est en effet un intervalle et correspond au même intervalle $I = \{C_t(\mathcal{Q}) \mid \mathcal{Q} \in \mathcal{M}\}$ induit par \mathcal{M} , l'ensemble de toutes les MME du modèle BN-S. Leur conclusion est qu'il suffit donc de considérer seulement les MME qui conservent les propriétés du modèle BN-S afin d'obtenir tous les prix valables en absence d'opportunité d'arbitrage. De plus, l'infimum de l'intervalle est donné par $g(s, t)$, où g est la solution de l'EDP de Black-Scholes suivante

$$\frac{\partial g}{\partial t} + rs \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{1}{2} s^2 \sigma^2 e^{-\lambda t} \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} = rg,$$

avec les bonnes conditions aux bornes, i. e. le prix Black-Scholes lorsque la volatilité est déterministe et égale à $\sigma_0^2 e^{-\lambda t}$. De plus, le supremum de l'intervalle est S_t , la borne triviale en absence d'opportunité d'arbitrage.

Chapitre 4

Évaluation d'options européennes

Notre but est maintenant d'évaluer le prix de l'option européenne avec fonction de paiement $H(S_T)$ selon l'équation (3.12) pour une mesure $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}'$ donnée.

4.1 Transformée de Laplace

La première méthode, proposée par Heston [19], consiste à calculer la transformée de Laplace de la fonction de paiement

$$\widehat{h}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zx} h(x) dx, \quad (4.1)$$

puis à partir de la transformée de Laplace $\varphi(z) = \mathbf{E}_{\mathcal{Q}}\left(e^{-zxT} \mid \mathcal{F}_t\right)$, la solution de (3.12) est donnée par

$$C_t(\mathcal{Q}) = \frac{e^{-r(T-t)}}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \varphi(z) \widehat{h}(z) dz. \quad (4.2)$$

La proposition suivante donne la transformée de Laplace pour les options de vente et d'achat.

Proposition 6 *Soient $h_c(x)$, et $h_p(x)$ les fonctions de paiement d'une option d'achat et de vente, respectivement, dans lequel x est le log du prix de l'actif sous-jacent,*

$$h_c(x) = \max(\exp(x) - K, 0)$$

et

$$h_p(x) = \max(K - \exp(x), 0).$$

Alors,

$$\widehat{h}_c(z) = \widehat{h}_p(z) = \frac{K^{1-z}}{(z-1)z}.$$

De plus, $\widehat{h}_c(z)$ est bien définie pour $\operatorname{Re}(z) > 1$ et $\widehat{h}_p(z)$ pour $\operatorname{Re}(z) < 0$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \widehat{h}_c(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zx} \max(e^x - K, 0) dx = \int_{\log(K)}^{\infty} e^{-zx} (e^x - K) dx \\ &= \int_{\log(K)}^{\infty} e^{(1-z)x} - K e^{-zx} dx = \frac{1}{z-1} K^{1-z} - \frac{1}{z} K^{1-z}, \end{aligned}$$

si $Re(z) > 1$. Donc

$$\widehat{h}_c(z) = K^{1-z} \frac{1}{(z-1)z},$$

pour $Re(z) > 1$. Le calcul est essentiellement le même pour l'option de vente.

■

La transformée de Laplace de x_T étant donné \mathcal{F}_t sous la mesure risque-neutre est calculée par Nicolato et al. [25] comme étant

$$\begin{aligned} \varphi(z) = \exp \left\{ z(x_t + (r - \lambda\kappa^y(\rho))(T-t)) + (z^2 - z) \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{2\lambda} \sigma_t^2 \right. \\ \left. + \int_t^T \lambda\kappa(f(s, z)) ds \right\}, \end{aligned}$$

avec $f(s, z) = \rho z + \frac{1 - e^{-\lambda(T-s)}}{2\lambda} (z^2 + 2\beta z)$.

De plus, Nicolato et Vernados montrent $\varphi(z)$ est bien définie dans l'ensemble

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) \in (\theta_-, \theta_+)\},$$

où

$$\begin{aligned} \theta_- &= \sup_{t \leq s < T} \left\{ \frac{1}{2} - \rho \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda(T-s)}} - \sqrt{\Delta(s)} \right\}, \\ \theta_+ &= \inf_{t \leq s < T} \left\{ \frac{1}{2} - \rho \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda(T-s)}} + \sqrt{\Delta(s)} \right\}, \\ \Delta(s) &= \left(-\frac{1}{2} + \rho \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda(T-s)}} \right)^2 + 2\widehat{\theta} \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda(T-s)}}. \end{aligned}$$

Pour calculer le prix d'une option, il suffit donc de multiplier les fonctions \widehat{h} et φ et d'en calculer numériquement la transformée inverse de Fourier selon l'équation (4.2).

4.2 Méthodes Monte Carlo

En reprenant les idées de Hull et White [20], la deuxième méthode consiste à évaluer par simulation Monte Carlo l'expression

$$\mathbf{E}_{\mathcal{Q}}[BS_t(x_{\text{eff}}, v_{\text{eff}})|\mathcal{F}_t] \quad (4.3)$$

où $x_{\text{eff}} = x_t + \rho(Z_{\lambda T} - Z_{\lambda t}) - \lambda \kappa^y(\rho)(T - t)$, $v_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{\sigma_{t,T}^{2*}}{T-t}}$ et $BS_t(x, v)$ est le prix pour une fonction de paiement $h(x_T)$ avec une volatilité v et $x = \log(S_0)$, sous les hypothèses du modèle Black-Scholes. Plus précisément,

$$BS_t(x, v) = \mathbf{E}_{\mathcal{Q}}\left(e^{-r(T-t)}h(\tilde{x}_T)\middle|\mathcal{F}_t\right),$$

où

$$\tilde{x}_T = x + \left(r - \frac{1}{2}v^2\right)(T - t) + v\tilde{W}_T^{\mathcal{Q}}$$

et $\tilde{W}^{\mathcal{Q}}$ est un \mathcal{Q} -mouvement brownien.

Avec la représentation (3.6) de $\sigma_{t,T}^{2*}$, on voit que pour mettre en oeuvre cette méthode Monte Carlo on doit simuler conjointement les variables σ_t^2 et $Z_{\lambda t}$. À cet effet, Rosiński [28] a développé une technique simple de génération de processus de Lévy. Il trouve ainsi que pour une suite $\{r_i\}$ de variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendante de la suite $\{a_i\}$ de temps d'arrivées d'un processus de Poisson d'intensité 1, ($a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots$), on a

$$\int_0^t f(s)dZ_{\lambda s} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} W^{-1}\left(\frac{a_i}{\lambda t}\right)f(tr_i).$$

Ainsi, on peut générer conjointement les variables σ_t^2 et $Z_{\lambda t}$ par

$$\begin{pmatrix} Z_{\lambda t} \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} W^{-1}\left(\frac{a_i}{\lambda t}\right) \\ e^{-\lambda t}\left(\sigma_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} W^{-1}\left(\frac{a_i}{\lambda t}\right)e^{\lambda tr_i}\right) \end{pmatrix}.$$

Rappelons que W^{-1} est la fonction inverse de W^+ définie par

$$W^{-1}(y) = \inf\{x > 0 \mid W^+(x) \leq y\}.$$

Lorsque $W^+(0) < \infty$, la somme est finie. Par contre, la mise en oeuvre de cet algorithme de génération est difficile pour les processus à activité infinie. En pratique, la somme infinie est tronquée à une valeur de i suffisamment grande. Or, pour plusieurs classes de processus de Lévy, la fonction W^{-1} est inconnue explicitement. On doit donc l'approximer et cette approximation n'est en général précise que pour des grandes valeurs de y . Ceci nous oblige donc à sommer les termes de la série précédente jusqu'à des valeurs très grandes de l'indice i .

4.3 Estimation des paramètres

Dans les représentations (4.2) et (4.3) du prix d'une option, on voit que les seuls paramètres nécessaires à estimer sont λ et ρ . Les autres paramètres sont déterminés par la loi de Z sous la mesure risque-neutre. Dans le cas $\rho = 0$, Barndorff-Nielsen et Shephard [4] proposent une méthode pour estimer λ et, par le fait même, les paramètres associés à la loi choisie pour Z . Nous allons donc supposer dans cette section que $\rho = 0$.

4.3.1 Modèle ARMA pour la volatilité

En adoptant les notations des auteurs, on pose

$$\sigma_n^2 = \sigma_{0,n\Delta}^{2*} - \sigma_{0,(n-1)\Delta}^{2*} = \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} \sigma_u^2 du, \quad (4.4)$$

la volatilité actuelle, puis ζ, ω^2 et ϱ représentent respectivement l'espérance, la variance, et la fonction d'autocorrélation de la loi invariante de $\sigma^2(t)$, i.e.

$$\varrho(h) = \text{Cor}\left(\sigma^2(t), \sigma^2(t+h)\right) = \frac{\text{Cov}\left(\sigma^2(t), \sigma^2(t+h)\right)}{\sqrt{\text{Var}\left(\sigma^2(t)\right)\text{Var}\left(\sigma^2(t+h)\right)}}.$$

Le paramètre Δ représente la période d'observation de la variable σ_n^2 . Afin d'estimer la volatilité actuelle, nous disposons de M observations du logarithme du prix $x_t = \log(S_t)$, dans l'intervalle de temps de longueur Δ . On définit

$$\{y\}_n = \sum_{j=1}^M \left[x\left((n-1)\Delta + \frac{\Delta j}{M}\right) - x\left((n-1)\Delta + \frac{\Delta(j-1)}{M}\right) \right]^2, \quad (4.5)$$

un estimé de σ_n^2 . On peut alors montrer que

$$\text{Cor}(\sigma_n^2, \sigma_{n+s}^2) = \frac{(1 - e^{-\lambda\Delta})^2}{2(e^{-\lambda\Delta} - 1 + \lambda\Delta)} e^{-\lambda\Delta(s-1)}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\sigma_n^2 &= \Delta\zeta \quad \text{et} \\ \text{Var}(\sigma_n^2) &= \frac{2\omega^2}{\lambda^2}(e^{-\lambda\Delta} - 1 + \lambda\Delta). \end{aligned}$$

Ceci implique que la volatilité actuelle peut être modélisée par un processus $ARMA(1,1)$ de paramètre autorégressif $e^{-\lambda\Delta}$ et de paramètre de

moyenne mobile θ , solution de

$$\text{Cor}(\sigma_n^2, \sigma_{n+1}^2) = \frac{(1 - e^{-\lambda\Delta})^2}{2(e^{-\lambda\Delta} - 1 + \lambda\Delta)} = \frac{(1 + e^{-\lambda\Delta}\theta)(e^{-\lambda\Delta} + \theta)}{1 + \theta^2 + 2\theta e^{-\lambda\Delta}}.$$

On peut donc écrire le problème sous la forme

$$y_n = \Delta\zeta + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_n + \sigma_u \varepsilon_n \quad (4.6)$$

$$\alpha_n = \begin{pmatrix} e^{-\lambda\Delta} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_{n-1} + \begin{pmatrix} \sigma_\sigma \\ \theta\sigma_\sigma \end{pmatrix} \eta_n \quad n = 1, \dots, N \quad (4.7)$$

où la première composante de α_n , $\alpha_n^{(1)} = \sigma_n^2 - \Delta\zeta$, $\{\varepsilon_n\}$ et $\{\eta_n\}$ sont des bruits blancs indépendants de variance 1, et σ_u est donnée dans Barndorff et al. [4] comme étant

$$\sigma_u = 2M \left(2\frac{\omega^2}{\lambda^2} \left(e^{-\lambda\Delta M^{-1}} - 1 + \lambda\Delta M^{-1} \right) + (\Delta M^{-1})^2 \zeta^2 \right).$$

Finalement,

$$\sigma_\sigma^2 = \frac{2\omega^2(e^{-\lambda\Delta} - 1 + \lambda\Delta)(1 - e^{-2\lambda\Delta})}{\lambda^2(1 + \theta^2 + 2\theta e^{-\lambda\Delta})}.$$

Il est alors possible, à l'aide d'un filtre de Kalman, d'évaluer la fonction de vraisemblance, en supposant une distribution normale pour les bruits, et de la maximiser afin d'obtenir les estimés désirés. Cette méthode est appelée maximum de vraisemblance quasi-normale. Elle donne asymptotiquement les meilleurs estimateurs linéaires. Voir Dunsmuir [12] pour plus d'informations.

4.3.2 Filtre de Kalman

Suivant la formulation (4.6)-(4.7), définissons

$$\begin{aligned}
 Y_{n|n-1} &= \mathbf{E}(y_n | y_{n-1}, \dots, y_0) \\
 Z_{n|n-1} &= \mathbf{E}(\alpha_n | y_{n-1}, \dots, y_0) \\
 Z_{n|n} &= \mathbf{E}(\alpha_n | y_n, \dots, y_0) \\
 e_n &= y_n - Y_{n|n-1} \\
 \Sigma_{n|n-1} &= \text{Var}(Z_n | y_{n-1}, \dots, y_0) \\
 \Sigma_{n|n} &= \text{Var}(Z_n | y_n, \dots, y_0) \\
 v_n^2 &= E e_n^2.
 \end{aligned}$$

Les équation de Kalman sont alors données par

$$\begin{aligned}
 Z_{n|n-1} &= \begin{pmatrix} e^{-\lambda\Delta} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z_{n-1|n-1} \\
 Y_{n|n-1} &= \Delta\zeta + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z_{n|n-1} \\
 e_n &= y_n - \Delta\zeta - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z_{n|n-1} \\
 \Sigma_{n|n-1} &= \begin{pmatrix} e^{-\lambda\Delta} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Sigma_{n-1|n-1} \begin{pmatrix} e^{-\lambda\Delta} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_\sigma^2 & \theta\sigma_\sigma^2 \\ \theta\sigma_\sigma^2 & \theta^2\sigma_\sigma^2 \end{pmatrix} \\
 v_n^2 &= (\Sigma_{n|n-1})_{11} + \sigma_u^2 \\
 Z_{n|n} &= Z_{n|n-1} + \begin{pmatrix} (\Sigma_{n|n-1})_{11} \frac{e_n}{v_n^2} \\ (\Sigma_{n|n-1})_{21} \frac{e_n}{v_n^2} \end{pmatrix} \\
 \Sigma_{n|n} &= \Sigma_{n|n-1} - \begin{pmatrix} \frac{(\Sigma_{n|n-1})_{11}}{v_n^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 n &= 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

La fonction de log-vraisemblance à maximiser s'écrit alors

$$L(\theta) = \log [p(y_1, \dots, y_N | \theta, y_0)] = - \sum_{n=1}^N \log(v_n) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{e_n^2}{v_n^2}.$$

4.4 Le cas Γ -OU

Nous supposons dans la présente section que le processus de volatilité σ_t^2 suit un processus Γ -OU, i.e. la loi invariante de σ_t^2 est $GIG(\nu > 0, 0, \gamma)$. Ce cas particulier a attiré beaucoup d'attention récemment dans la littérature par le fait que sa densité de Lévy a une forme analytique simple et qu'il est donc possible de générer facilement un tel processus. En effet, sa fonction de cumulants est donnée par

$$\kappa^\Gamma(\theta) = \nu \log \left(\frac{\alpha}{\alpha - \theta} \right), \quad \theta < \alpha,$$

ce qui implique par (3.8) que la fonction de cumulants de Z est

$$\kappa(\theta) = \frac{\nu\theta}{\alpha - \theta}, \quad \theta < \alpha \quad (\alpha = \frac{\gamma^2}{2}),$$

et sa densité de Lévy est donnée par

$$w(x) = \nu\alpha \exp(-\alpha x).$$

L'estimation des paramètres peut se faire par la méthode décrite ci-haut, si on suppose $\rho = 0$. Il est à noter que dans le cas Γ -OU, l'espérance et la variance de la volatilité sont données par

$$\zeta = E\sigma_t^2 = \frac{\nu}{\alpha}$$

et

$$\omega^2 = \text{Var}\left(\sigma_t^2\right) = \frac{\nu}{\alpha^2}.$$

De plus,

$$W^+(x) = \nu \exp(-\alpha x) \quad x > 0$$

et peut facilement être inversée pour obtenir

$$W^{-1}(y) = \max\left\{0, -\frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{y}{\nu}\right)\right\}.$$

On peut ainsi générer conjointement les processus σ_t^2 et $Z_{\lambda t}$ en générant une suite $\{r_i\}$ de variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendante de la suite $\{a_i\}$ de temps d'arrivés d'un processus de Poisson d'intensité 1 ($a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots$) pour obtenir

$$\begin{pmatrix} Z_{\lambda t} \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} \max\left\{0, -\frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{a_i}{\nu \lambda t}\right)\right\} \\ e^{-\lambda t} (\sigma_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \max\left\{0, -\frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{a_i}{\nu \lambda t}\right)\right\} e^{\lambda t r_i}) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Cette caractérisation des processus nous indique clairement que le paramètre α est inversement proportionnel à la grandeur d'un saut. De plus, on observe un tel saut seulement si $a_i < \nu \lambda t$, autrement dit si les paramètres ν et λ sont proportionnels à la fréquence des sauts.

En notant \mathcal{M}^Γ l'ensemble des MME pour lesquelles la structure du modèle BN-S est conservée, possiblement avec d'autres paramètres mais avec une loi Γ pour σ_t^2 , Nicolato et Vernados [25] montrent alors que

$$\mathcal{M}^\Gamma = \left\{ \mathcal{Q} \in \mathcal{M}' \mid y(x) = \frac{\tilde{\nu} \tilde{\alpha}}{\nu \alpha} \exp((\alpha - \tilde{\alpha})x) \quad \tilde{\nu}, \tilde{\alpha} \geq 0 \right\}.$$

Ce résultat nous indique qu'en effet quels que soient les paramètres $\tilde{\nu}$ et $\tilde{\alpha}$, il existe une mesure $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}^\Gamma$ tel que sous cette mesure,

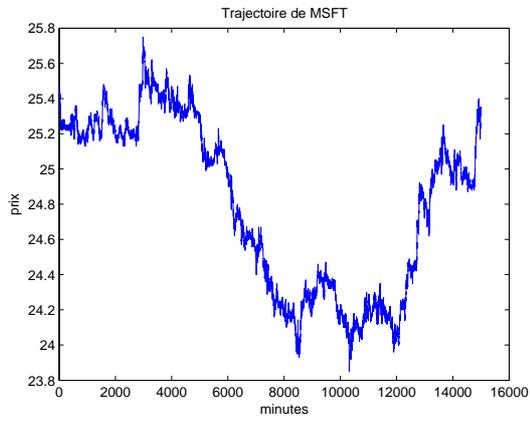
$$\tilde{w}(x) = \tilde{\nu} \tilde{\alpha} \exp(-\tilde{\alpha}x)$$

est la densité de Lévy de Z . Il est alors possible d'en calculer le prix associé par la formule (4.2) ou (4.3).

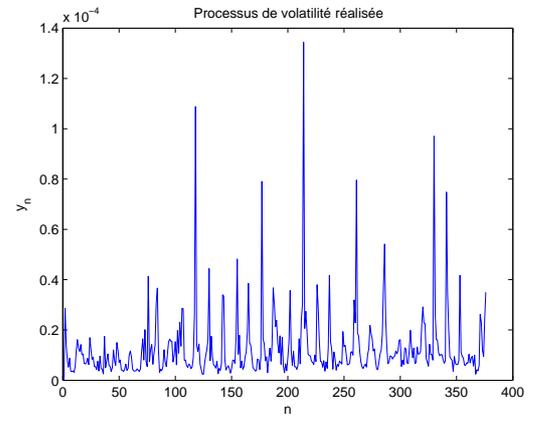
4.4.1 Tests numériques

Nous avons testé la méthode d'estimation des paramètres sur des données réelles. Pour ce faire, nous avons choisi deux actions transigées sur le marché : Microsoft Corp. (MSFT) et Yahoo! Inc (YHOO). Nous avons supposé que le processus de volatilité est donné par un modèle Γ -OU avec $\rho = 0$ et nous avons estimé les paramètres λ , α et ν du modèle. Pour MSFT, les données utilisées sont les prix de fermeture à toutes les minutes du 25 février au 13 avril 2005. Nous avons estimé la volatilité actuelle σ_n^2 par l'équation (4.5), avec $M = 40$ ce qui nous donne $N = 375$ valeurs de y_n . Pour YHOO, les données sont les prix du 11 mars au 13 avril 2005 avec $M = 200$ et $N = 50$.

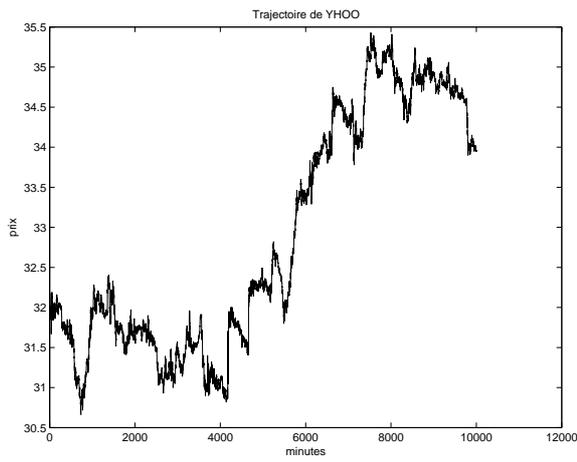
Il est important de noter que la routine d'optimisation de la fonction de vraisemblance est hautement dépendante des conditions initiales. Il faut donc avoir une bonne idée de l'ordre de grandeur pour les paramètres à estimer. En regardant les figures des processus y_n (figure 4.1 (b) et (d)), on remarque que la volatilité varie beaucoup pendant une journée. Ceci peut être expliqué par le fait que l'activité de transactions n'est pas constante dans le temps et qu'il y a, en effet, des périodes de pointe d'activité qui induisent une forte volatilité. Dans ce modèle, les arrivées de telles périodes d'activité sont données par les temps τ où $\Delta Z_\tau > 0$, autrement dit lorsqu'il y a un saut dans le processus Z . Par un examen visuel de la figure, on déduit que les sauts



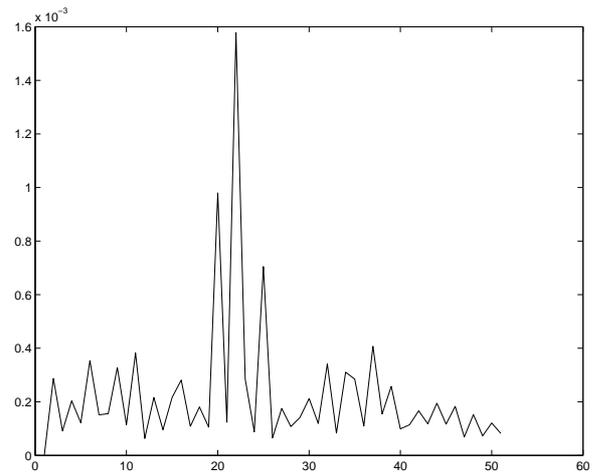
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 4.1: (a) Trajectoire de MSFT du 25 février au 13 avril 2005 et (b) sa volatilité réalisée, (c) Trajectoire de YHOO du 11 mars au 13 avril 2005 et (d) sa volatilité réalisée

	MSFT	YHOO
α	(3999994.7,4000005.1)	(799999.9,800000.0)
ν	(1.526,2.033)	(1.088,1.809)
λ	(0.021,0.049)	(0.002,0.025)

Tableau 4.1: Paramètres estimés pour MSFT et YHOO

sont fréquents (ν est élevé) et de petite taille (α est élevé). Puis on observe que l'activité décroît de façon exponentielle telle que décrite par le modèle OU. À l'aide de simulations, nous avons pu conclure que les valeurs initiales $\nu_0 \approx 2$, $\alpha_0 \approx 4 \times 10^6$ et $\lambda_0 \approx 0.01$ sont raisonnables. Notons que la valeur α est pour une échelle de temps calculée en minutes. Les valeurs estimées pour MSFT sont $\hat{\lambda} = 0.0324$, $\hat{\alpha} = 4 \times 10^6$ et $\hat{\nu} = 1.8163$. Les valeurs estimées pour YHOO sont $\hat{\lambda} = 0.0107$, $\hat{\alpha} = 8 \times 10^5$ et $\hat{\nu} = 1.4437$ à partir des valeurs initiales $\nu_0 \approx 1.6$, $\alpha_0 \approx 8 \times 10^5$ et $\lambda_0 \approx 0.005$. La valeur de α change rarement par rapport à la valeur initiale. C'est pourquoi on conclut que les deux autres paramètres dépendent fortement de ce dernier et que les résultats obtenus sont influencés par le type de modèle qu'on a postulé a priori.

Afin de vérifier la vraisemblance de ces résultats, nous avons simulé une trajectoire de l'actif sous-jacent à l'aide de l'équation (4.8) avec les paramètres estimés ci-haut. Puis nous avons estimé les paramètres de ce processus simulé à partir des mêmes valeurs initiales. Les intervalles de confiance à un niveau de 95% sont présentés dans le tableau 4.1.

Il est important de remarquer que la valeur α demeure à toutes fins pratiques inchangée par rapport à la valeur initiale choisie. Cette caractéristique

est le point faible de l'estimation de paramètres pour ce modèle. Il faut donc a priori choisir le type de sauts qu'on désire modéliser, c'est-à-dire la grandeur des sauts qui est dictée par le paramètre α , avant de mettre en oeuvre la méthode proposée. Néanmoins, cette méthode d'estimation est valable conditionnellement à ce choix. En effet, dans tous les cas, on observe que les vraies valeurs des paramètres se retrouvent à l'intérieur des intervalles de confiance obtenus. Pour obtenir une plus grande précision, il faut évidemment augmenter le nombre de données. On peut donc conclure que conditionnellement au choix de α , cette méthode est robuste.

Dans ces tests, nous avons modélisé la volatilité sur des intervalles de temps à court terme. Les sauts dans le processus de volatilité sont généralement causés dans ce cas par différentes périodes d'activité de transactions pendant la journée. Une analyse basée sur des données sur de plus longs intervalles de temps nous permettrait de concevoir les sauts de volatilité comme l'arrivée de nouvelles informations financières qui modifient la valeur de la firme sur le marché et induit une période d'activité intense. Il serait donc nécessaire dans ce deuxième cas d'introduire deux processus à sauts Z_1 et Z_2 indépendants afin de modéliser ces deux observations, une à long terme et l'autre à court terme.

4.4.2 *Smiles* de volatilité

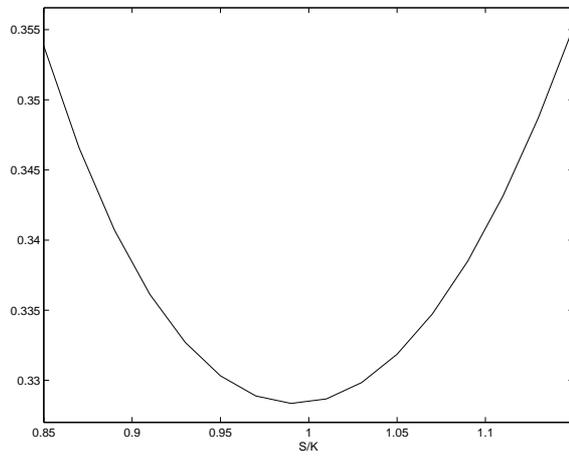
Une des caractéristiques majeures des modèles de volatilité stochastique est que ceux-ci prédisent les *smiles* de volatilité tels qu'observés sur le marché.

Un *smile* de volatilité est une courbe de volatilité implicite définie comme la volatilité dans le modèle de Black Scholes qui correspond au prix observé.

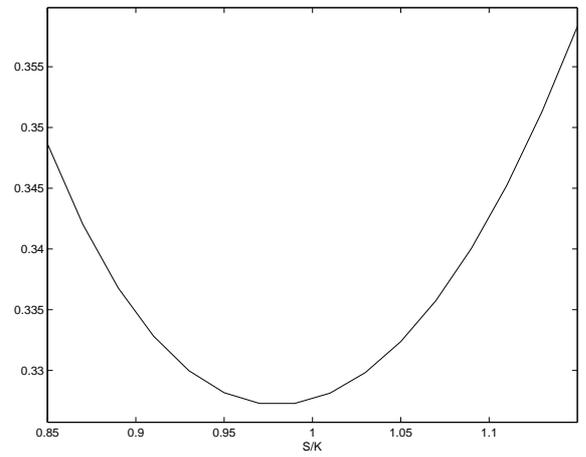
Pour démontrer la flexibilité du modèle BN-S dans le calibrage de *smile* de volatilité, des prix d'options d'achat ont été calculés dans le cas Γ -OU. La figure 4.2 présente les valeurs de la volatilité implicite (*implied volatility*). La méthode de la transformée de Laplace a été utilisée pour faire ces calculs. Tel que désiré, on observe l'effet d'un *smile* qui décrit le fait que la prime de l'option prédite par ce modèle est plus élevée que dans le modèle de Black-Scholes lorsque l'option est fortement en-jeu ou hors-jeu. Le calcul des prix a été fait avec un taux sans risque de $r = 5\%$ et une échéance de 6 mois.

On a pris les valeurs $\lambda = 1$ et $\sigma_0 = 10\%$, et la prime de risque de l'option a été caractérisée par la mesure risque-neutre associée aux valeurs $\nu = 1$ et $\alpha = 1$ du processus Z . Les 4 figures présentent des valeurs de ρ différentes. On observe que la valeur ρ a une influence directe sur l'asymétrie du *smile*. En effet, plus ρ est négatif, plus le modèle de Black-Scholes (σ constant et $\rho = 0$) tend à sous-évaluer les options d'achats fortement en-jeu et sur-évaluer les options hors-jeu.

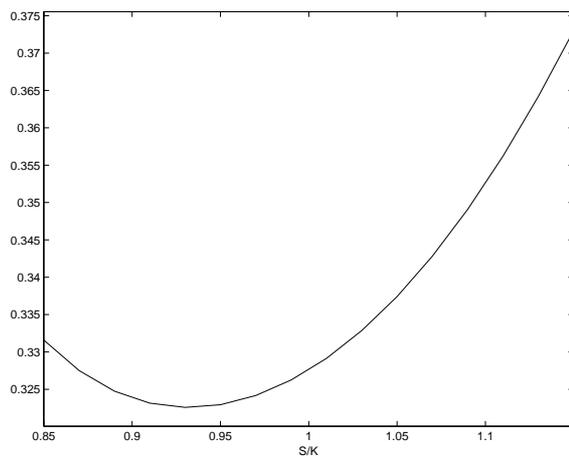
Afin de tester le modèle, nous avons calibré une série d'options sur l'action YHOO avec différentes valeurs d'exercice K et différentes maturité T . La méthode des moindres-carrés a été utilisée pour le calibrage. Les paramètres obtenus sont donnés dans le tableau 4.2 qui suit. La figure 4.3 présente les prix observés.



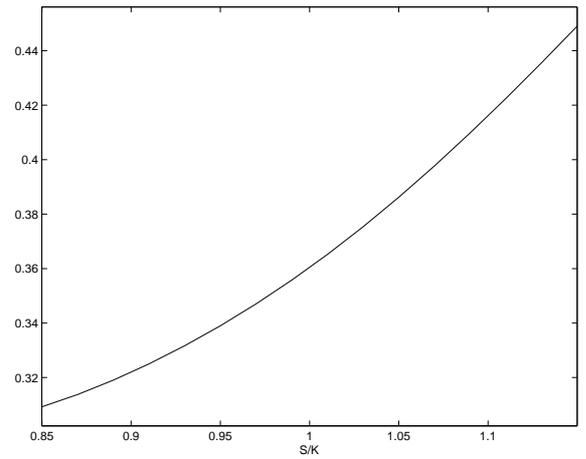
(a)



(b)

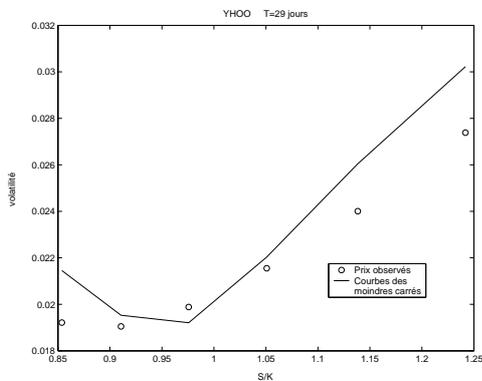


(c)

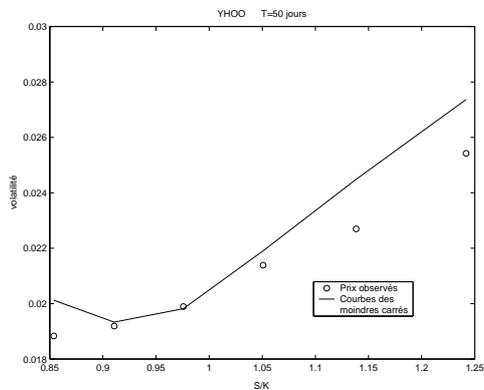


(d)

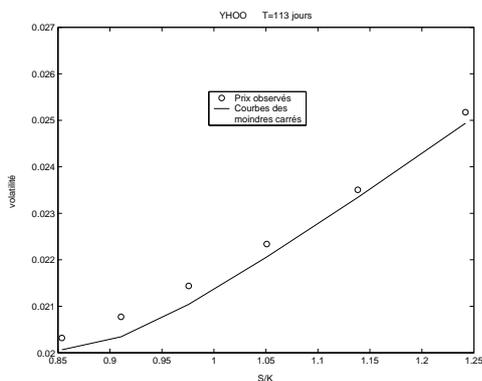
Figure 4.2: Volatilité implicite avec (a) $\rho = 0$, (b) $\rho = -0.01$, (c) $\rho = -0.05$ et (d) $\rho = -0.2$



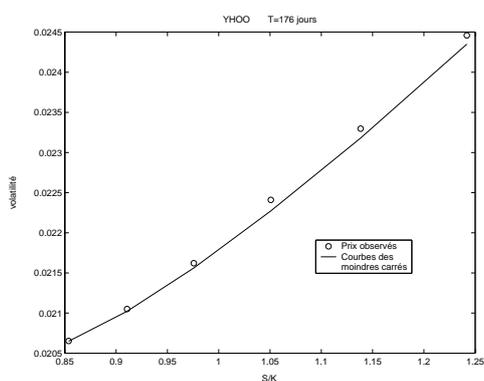
(a)



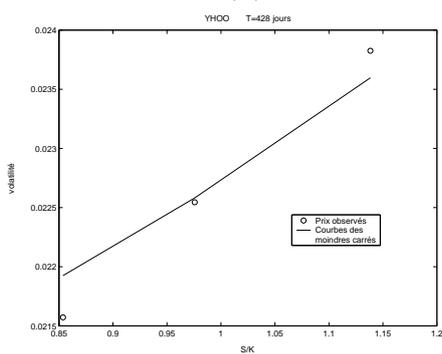
(b)



(c)



(d)



(e)

Figure 4.3: Volatilité implicite estimée par la méthode des moindres carrés.

(a) $T = 29$, (b) $T = 50$, (c) $T = 113$, (d) $T = 176$ et (e) $T = 428$.

α	100.0444
ν	0.0449
λ	0.9399
ρ	-1.9985
σ_0^2	0.0018

Tableau 4.2: Paramètres calibrés pour YHOO

4.5 Mesure martingale équivalente minimale

Nous avons vu précédemment qu'il existe plus d'une mesure martingale équivalente à \mathcal{P} , i.e. le marché est incomplet. Or, en pratique il n'y a qu'une seule mesure observée. Cette mesure est directement reliée à la prime de risque du droit contingent associé. Dans cette section, nous proposerons une mesure parmi toutes les mesures martingales, suivant le principe de mesure martingale minimale introduit par Föllmer et Schweizer [16].

Définition 2 *Une mesure martingale \mathcal{P}' équivalente à \mathcal{P} est dite minimale si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$ sur \mathcal{F}_0 ;
- (ii) *chaque \mathcal{P} -martingale de carré intégrable (i.e. $\sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E}(X_t^2) < \infty$) qui est orthogonale à M sous \mathcal{P} demeure une martingale sous \mathcal{P}' , où M est la composante martingale locale dans la décomposition de Doob-Meyer de la valeur actualisée de l'actif S ,*

$$Y_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{-rt} S_t = S_0 + M_t + \mathcal{A}_t$$

et \mathcal{A} est un processus prévisible à variation finie.

Dans le cas du modèle BN-S sans effet de levier, i.e. lorsque $\rho = 0$, l'EDS (3.7) nous indique que

$$\mathcal{A}_t = \int_0^t Y_u \left(\mu - r + \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \sigma_u^2 \right) du$$

est la composante prévisible et

$$M_t = \int_0^t Y_u \sigma_u dW_u$$

est la composante martingale. Notons que nous devons nécessairement supposer $\rho = 0$ afin d'appliquer le modèle de Föllmer et Schweizer [16] car dans cet article on suppose implicitement que la semimartingale S est spéciale, i.e. que la composante à variation finie est prévisible. Ce détail sera essentiel par la suite afin d'écrire \mathcal{A} sous la forme

$$\mathcal{A}_t = \int_0^t \alpha_u d\langle Y \rangle_u$$

avec

$$\alpha_t = \frac{\mu - r + (\beta + \frac{1}{2})\sigma_t^2}{Y_t \sigma_t^2}$$

Définissons maintenant le concept de stratégie optimale.

Définition 3 *Un droit contingent (de type européen) est une variable aléatoire D \mathcal{F}_T -mesurable. Une stratégie optimale associée au droit contingent D est une paire (ξ, η) formée d'un processus $\xi = (\xi_t)_{0 \leq t \leq T}$ prévisible et d'un processus adapté $\eta = (\eta_t)_{0 \leq t \leq T}$ tel que la valeur du portefeuille au temps t est donnée par*

$$V_t = \xi_t S_t + \eta_t e^{rt}.$$

De plus,

$$V_T = D \quad p.s.,$$

la condition d'intégrabilité

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T \xi_u^2 d\langle S \rangle_u + \left(\int_0^T |\xi_u| d|A|_u \right)^2 \right) < \infty$$

est satisfaite et le processus de coût actualisé

$$e^{-rt} \mathcal{C}_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{-rt} V_t - \int_0^t \xi_u dY_u$$

est une martingale de carré intégrable orthogonale à M sous \mathcal{P} .

Notons que, dans la définition que nous venons de donner, on ne demande pas que la stratégie soit auto-financée. En effet, avec la condition

$$V_T = D \quad p.s.,$$

l'auto-financement impliquerait que le droit contingent peut être répliqué, ce qui n'est clairement pas toujours le cas dans un marché incomplet. Au contraire, l'approche retenue par Föllmer et Schweizer est d'imposer que la valeur finale du portefeuille associée à la stratégie est égale presque sûrement à la valeur du droit contingent, quitte à ajouter et retirer des parts de l'actif sans risque dans le portefeuille au fur et à mesure. Les flux monétaires associés à ces ajouts et retraits sont ainsi reflétés dans le processus de coût C . Dans une stratégie optimale, le processus de coût est alors minimale, en ce sens qu'il est orthogonal à la martingale M sous la mesure physique \mathcal{P} . Nous verrons avec les deux prochains théorèmes comment calculer la stratégie optimale à l'aide de la mesure martingale minimale.

Puisque Y et M sont deux martingales, la mesure minimale est alors donnée par le théorème suivant de Föllmer et Schweizer [16] :

Théorème 7 *La mesure martingale minimale \mathcal{P}' est uniquement déterminée par le changement de mesure*

$$\frac{d\mathcal{P}'}{d\mathcal{P}} = \exp \left(- \int_0^T \alpha_u dM_u - \frac{1}{2} \int_0^T \alpha_u^2 d\langle Y \rangle_u \right).$$

Ce résultat nous indique donc que

$$\frac{d\mathcal{P}'}{d\mathcal{P}} = \exp \left(- \int_0^T \alpha_u \sigma_u y_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^T \alpha_u^2 \sigma_u^2 Y_u^2 du \right).$$

Conformément aux notations du théorème 5, on trouve à l'aide du théorème de Girsanov que sous \mathcal{P}'

$$W_t^{\mathcal{P}'} = W_t - \int_0^t \sigma_s^{-1} \left\{ r - \mu - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \sigma_s^2 \right\} ds$$

est un mouvement brownien et la prime de risque pour le processus de Lévy Z est nulle. Autrement dit, $y \equiv 1$ et la loi de Z est inchangée. Ceci est dû, en partie, au fait que dans ce modèle, la volatilité est indépendante du mouvement brownien. Dans un modèle de volatilité stochastique où l'indépendance est absente, la loi de la volatilité sous la mesure minimale pourrait changer.

Les auteurs prouvent alors l'existence d'une stratégie optimale et établissent la relation avec la mesure martingale minimale.

Théorème 8 *La stratégie optimale associée au droit contingent D est uniquement déterminée par*

$$\xi_t = \frac{d\langle V, S \rangle_t}{d\langle S \rangle_t}$$

et

$$\eta_t = e^{-rt}(V_t - \xi_t S_t)$$

où

$$V_t = \mathbf{E}_{\mathcal{P}'} (e^{-r(T-t)} D | \mathcal{F}_t)$$

et $e^{-rt}V_t$ est la \mathcal{P}' -martingale donnée par la valeur actualisée du droit contingent au temps t .

Démonstration. Dans le cas d'un taux sans risque $r > 0$, la démonstration de ce théorème est essentiellement la même que dans Föllmer et Schweizer [16]. Il suffit de remarquer que dans ce cas-ci, c'est la valeur actualisée du portefeuille au temps t , $e^{-rt}V_t = \xi_t e^{-rt}S_t + \eta_t$, qui est une \mathcal{P}' -martingale donnée par

$$e^{-rt}V_t = \mathbf{E}_{\mathcal{P}'} (e^{-rT} D | \mathcal{F}_t).$$

Le résultat du théorème s'obtient alors de la même façon que pour le cas $r = 0$. ■

Sous l'hypothèse

$$V = v(S, \sigma^2, t) \in C^{2,1,1}, \quad (4.9)$$

on applique la formule d'Itô (théorème 12, Annexe A.1) pour obtenir que la dynamique de V est donnée par

$$\begin{aligned} dV_t = & \left(\frac{\partial v}{\partial t} + S_{t-r} \frac{\partial v}{\partial S} - \lambda \sigma_t^2 \frac{\partial v}{\partial (\sigma^2)} + \frac{1}{2} S_{t-r}^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \right. \\ & \left. + \lambda \int_0^\infty (v(S_t, \sigma_{t-}^2 + z, t) - v(S_t, \sigma_{t-}^2, t)) y(z) w(z) dz \right) dt \\ & + \frac{\partial v}{\partial S} S_{t-r} \sigma_t dW_t^{\mathcal{P}'} + d\mathcal{V}_t, \end{aligned} \quad (4.10)$$

où \mathcal{V}_t est la \mathcal{P}' -martingale

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t = & \sum_{0 < u \leq t} v(S_u, \sigma_{u-}^2 + \Delta Z_{\lambda u}, u) - v(S_u, \sigma_{u-}^2, u) \\ & - \lambda \int_0^t \int_0^\infty (v(S_u, \sigma_{u-}^2 + z, u) - v(S_u, \sigma_{u-}^2, u)) w(z) dz du. \end{aligned}$$

Dans cette dernière représentation,

$$\lambda \int_0^t \int_0^\infty (v(S_u, \sigma_{u-}^2 + z, u) - v(S_u, \sigma_{u-}^2, u)) w(z) dz du$$

est le compensateur du terme

$$\sum_{0 < u \leq t} v(S_u, \sigma_{u-}^2 + \Delta Z_{\lambda u}, u) - v(S_u, \sigma_{u-}^2, u)$$

faisant en sorte que \mathcal{V}_t est une \mathcal{P}' -martingale. (Voir Jacod et Shiryaev [22])

À l'aide de l'équation (3.7) et (4.10), on trouve

$$d\langle V, S \rangle_t = \frac{\partial v}{\partial S} S_{t-}^2 \sigma_t^2 dt$$

et

$$d\langle S \rangle_t = S_{t-}^2 \sigma_t^2 dt.$$

Donc

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial S},$$

ce qui nous permet de conclure que, comme dans le modèle de Black-Scholes, la quantité d'actif à détenir au temps t dans une stratégie optimale est donnée par la dérivé partielle de la valeur du droit contingent par rapport au sous-jacent.

Remarquons que la dynamique de V , donnée par l'équation ci-haut nous permet, comme dans le modèle de Black-Scholes, de caractériser le problème

de l'évaluation du droit contingent par une équation différentielle. En effet, sous une mesure risque-neutre \mathcal{Q} quelconque, le droit contingent actualisé

$$e^{-rt}V_t = e^{-rT}\mathbf{E}_{\mathcal{Q}}[D|\mathcal{F}_t]$$

est une martingale en absence d'opportunité d'arbitrage. En supposant l'hypothèse (4.9),

$$\int_0^t \frac{\partial v}{\partial S} S_{u-} \sigma_u dW_u^{\mathcal{Q}}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t = & \sum_{0 < u \leq t} v(S_u, \sigma_{u-}^2 + \Delta Z_{\lambda u}, u) - v(S_u, \sigma_{u-}^2, u) \\ & - \lambda \int_0^t \int_0^{\infty} (v(S_u, \sigma_{u-}^2 + z, u) - v(S_u, \sigma_{u-}^2, u)) y(z) w(z) dz du \end{aligned}$$

sont toutes deux des \mathcal{Q} -martingales, et on obtient ainsi à l'aide de l'équation (4.10) une équation integro-différentielle partielle (EIDP) pour la fonction v

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}[v] - rv = 0 \quad (4.11)$$

avec l'opérateur différentiel

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v] = & rS \frac{\partial v}{\partial S} - \lambda \sigma^2 \frac{\partial v}{\partial(\sigma^2)} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \\ & + \lambda \int_0^{\infty} (v(S, \sigma^2 + z, t) - v(S, \sigma^2, t)) y(z) w(z) dz \end{aligned}$$

et des conditions aux bornes spécifiquement choisies selon la nature du droit contingent en question. Par exemple, dans le cas d'un produit dérivé européen avec fonction de paiement $H(S_T)$ les conditions s'énoncent

$$v(S, \sigma^2, T) = H(S), \quad v(0, \sigma^2, t) = 0 \quad (4.12)$$

et $v(S, 0, t) = e^{-rt}H(S)$.

Notons que (4.11) peut être modifiée pour être fonction de $x = \log(S)$. L'EIDP devient alors

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \tilde{\mathcal{L}}[v] - rv = 0 \quad (4.13)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}[v] &= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial v}{\partial x} - \lambda\sigma^2\frac{\partial v}{\partial(\sigma^2)} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &+ \lambda \int_0^\infty (v(x, \sigma^2 + z, t) - v(x, \sigma^2, t))y(z)w(z)dz \end{aligned}$$

et les conditions aux bornes sont modifiées de la même façon.

La condition de dérivabilité (4.9) est très restrictive car en général elle n'est pas satisfaite. En effet, dans le cas où le processus de volatilité σ_t^2 n'est pas à activité finie (le cas inverse-gaussien par exemple), sa densité n'est pas dérivable. En conséquence, la première dérivée de quelconque droit contingent V_t par rapport à la volatilité n'est pas définie et l'équation (4.10) non plus. Nous verrons cependant comment contourner ce problème dans le chapitre suivant.

Remarquons, pour terminer ce chapitre, que si

$$V_t = v(S_t, \sigma_t^2, t) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_{\mathcal{Q}}[H(S_T)|\mathcal{F}_t],$$

v est partout dérivable par rapport à S . En effet, notons \tilde{V} la version de V avec σ_t^2 déterministe. Or, lorsque la volatilité est une fonction du temps, $x_t = \log(S_t)$ a une densité C^∞ . En conséquence, S_t a aussi une densité C^∞

et \tilde{v} est une fonction dérivable en S . De plus

$$v(S_t, \sigma_t^2, t) = \mathbf{E}_{\mathcal{Q}}[\tilde{V}_T | \mathcal{G}_t],$$

où \mathcal{G}_t est la tribu générée par le processus $\{Z_{\lambda_s}\}_{0 \leq s \leq t}$. Puisque Z est indépendant de W ,

$$\frac{\partial v(S, \sigma^2, t)}{\partial S} = \mathbf{E}_{\mathcal{Q}} \left[\frac{\partial \tilde{v}(S, \sigma^2, t)}{\partial S} \middle| \mathcal{G}_t \right].$$

Donc v est dérivable par rapport à S et

$$\xi_t = \frac{\partial v}{\partial S}(S_t, \sigma_t^2, t).$$

Chapitre 5

Solutions de viscosité et évaluation d'options américaines

Considérons le droit contingent de type américain

$$V_t = v(x_t, \sigma_t^2, t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}_Q[e^{-r(\tau-t)} h(x_\tau) | \mathcal{F}_t], \quad (5.1)$$

où \mathcal{T}_t est l'ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans l'intervalle $[t, T]$, par rapport à la filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_s\}_{s=0}^T$ et Q est une mesure martingale donnée. Dans ce qui suit, toutes les espérances seront par rapport à cette mesure et le symbole Q sera omis.

Dans ce qui suit nous allons supposer que h est lipschitzienne, i.e. $\exists C$ tel

que $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|.$$

C'est le cas, par exemple, pour une option de vente américaine, où $h(x) = \max(0, K - \exp(x))$. Dans cet exemple, on a $C = 1$.

Supposons pour un instant que $v \in C^{2,1,1}$. Dans ce cas, il est possible de montrer que, lorsque $V_t > h(x_t)$, v satisfait à l'EIDP

$$-\frac{\partial v(x, \sigma^2, t)}{\partial t} - \tilde{\mathcal{L}}[v](x, \sigma^2, t) + rv(x, \sigma^2, t) = 0 \quad (5.2)$$

et $V_t = h(x_t)$ sinon. Dans le cas général $\rho \geq 0$, l'opérateur différentiel est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}[v](x, \sigma^2, t) &= (r - \lambda\kappa^y(\rho) - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial v}{\partial x} - \lambda\sigma^2\frac{\partial v}{\partial(\sigma^2)} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &+ \lambda \int_0^\infty (v(x + \rho z, \sigma^2 + z, t) - v(x, \sigma^2, t))y(z)w(z)dz. \end{aligned}$$

Afin de donner un sens à l'équation (5.2) pour une fonction v qui ne satisfait pas la condition de dérivabilité (4.9), on définit la notion de solution de viscosité suivant Crandall et Lions [11].

Définition 4 *La fonction $v \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times [0, T])$ est une super-solution de viscosité (sous-solution) de (5.2) si $\forall (x, \sigma^2, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times [0, T]$ et $\forall \psi \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times [0, T])$ tel que*

(i)

$$\sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times [0, T]} \frac{|\psi(x, \sigma^2, t)|}{1 + x^2 + \sigma^4} < \infty$$

(ii)

$$\psi(x, \sigma^2, t) = v(x, \sigma^2, t)$$

et

(iii)

$$\forall (x', \sigma'^2, t') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times [0, T] \quad \psi(x', \sigma'^2, t') \leq v(x', \sigma'^2, t') \quad (\geq),$$

alors

$$\min \left(-\frac{\partial \psi(x, \sigma^2, t)}{\partial t} - \tilde{\mathcal{L}}[\psi](x, \sigma^2, t) + r\psi(x, \sigma^2, t); v(x, \sigma^2, t) - h(x) \right) \geq 0 \quad (\leq). \quad (5.3)$$

On dit que v est solution de viscosité de (5.2) si elle est à la fois sous-solution et super-solution.

Nous allons démontrer que (5.1) est une solution de viscosité de (5.2). Pour ce faire, nous avons recouru au principe de programmation dynamique de Bellman énoncé par le lemme suivant (Voir [23] pour une preuve.)

Lemme 9 *Quels que soient $\epsilon > 0$, $(x, \sigma^2, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times [0, T]$ et quel que soit le temps d'arrêt τ tel que*

$$\tau \leq \tau^\epsilon := \inf\{t \leq s \leq T \mid v(x_s, \sigma_s^2, s) - \epsilon \leq h(x_s)\},$$

où $\sigma_t^2 = \sigma^2$ et $x_t = x$, on a la relation

$$v(x, \sigma^2, t) = \mathbf{E}[e^{-r(\tau-t)} v(x_\tau, \sigma_\tau^2, \tau) \mid \mathcal{F}_t]. \quad (5.4)$$

Proposition 10 *Sous l'hypothèse où h est lipschitzienne, $v = v(x, \sigma^2, t)$ définie par (5.1) est une fonction continue.*

Démonstration. Voir l'annexe A.3.

■

Théorème 11 *Sous l'hypothèse où h est lipschitzienne, $v = v(x, \sigma^2, t)$ est une solution de viscosité de l'EIDP (5.2).*

Démonstration.

Nous avons déjà montré que v est continue. Montrons maintenant que v est super-solution de viscosité de (5.2). Soient $(x, \sigma^2, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times [0, T)$ et ψ satisfaisant aux conditions de la définition ci-haut. Par la définition de v nous savons que

$$e^{-r\Delta t} \mathbf{E} \left(v(x_{t+\Delta t}, \sigma_{t+\Delta t}^2, t + \Delta t) \middle| \mathcal{F}_t \right) = \sup_{\tau \in \mathcal{I}_{t+\Delta t}} \mathbf{E}_{\mathcal{Q}} [e^{-r(\tau-t)} h(x_\tau) | \mathcal{F}_t]$$

et puisque

$$\mathcal{I}_{t+\Delta t} \subseteq \mathcal{I}_t$$

nous trouvons l'inégalité

$$0 \geq e^{-r\Delta t} \mathbf{E} \left(v(x_{t+\Delta t}, \sigma_{t+\Delta t}^2, t + \Delta t) \middle| \mathcal{F}_t \right) - v(x_t, \sigma_t^2, t). \quad (5.5)$$

Par la définition de ψ , nous avons donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mathbf{E} \left(e^{-r\Delta t} \psi(x_{t+\Delta t}, \sigma_{t+\Delta t}^2, t + \Delta t) - \psi(x_t, \sigma_t^2, t) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\int_t^{t+\Delta t} \left(-re^{-ru} \psi + e^{-ru} \frac{\partial \psi}{\partial t} + e^{-ru} \tilde{\mathcal{L}}[\psi] \right) du \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \psi}{\partial x} e^{-ru} \sigma_u dW_u + \Psi_{t+\Delta t} - \Psi_t \middle| \mathcal{F}_t \right), \end{aligned}$$

où Ψ_t est la martingale définie comme

$$\begin{aligned} \Psi_t &= \sum_{0 < u \leq t} e^{-ru} (\psi(x_{u-} + \rho z, \sigma_{u-}^2 + \Delta Z_{\lambda u}, u) - \psi(x_{u-}, \sigma_{u-}^2, u)) \\ &- \lambda \int_0^t e^{-ru} \int_0^\infty (\psi(x_{u-} + \rho z, \sigma_{u-}^2 + z, u) - \psi(x_{u-}, \sigma_{u-}^2, u)) y(z) w(z) dz du. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \psi}{\partial x} e^{-ru} \sigma_u dW_u$$

est aussi une martingale, on en déduit l'inégalité suivante

$$0 \geq \mathbf{E} \int_t^{t+\Delta t} e^{-ru} \left(-r\psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} + \tilde{\mathcal{L}}[\psi] \right) du,$$

i.e., en divisant par Δt et en prenant la limite lorsque $\Delta t \rightarrow 0$

$$0 \geq -r\psi(x, \sigma^2, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, \sigma^2, t) + \tilde{\mathcal{L}}[\psi](x, \sigma^2, t).$$

Puisque, par définition, $v(x_t, \sigma_t^2, t) \geq h(x_t)$, v satisfait à l'équation (5.3).

Finalement, montrons que v est sous-solution de viscosité de (5.2). Soient $(x, \sigma^2, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times [0, T)$ et ψ satisfaisant aux conditions de la définition de sous-solution. Nous savons déjà que $v(x, \sigma^2, t) \geq h(x)$. Si $v(x, \sigma^2, t) = h(x)$, l'inégalité (5.3) est satisfaite donc supposons que

$$\epsilon = v(x, \sigma^2, t) - h(x) > 0.$$

Nous savons par le lemme précédent que, pour $\tau = s \wedge \tau^\epsilon$ ($t < s$),

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{E}[e^{-r(\tau-t)} v(x_\tau, \sigma_\tau^2, \tau) | \mathcal{F}_t] - v(x, \sigma^2, t) \\ &\leq \mathbf{E}[e^{-r(\tau-t)} \psi(x_\tau, \sigma_\tau^2, \tau) | \mathcal{F}_t] - \psi(x, \sigma^2, t) \\ &= \mathbf{E} \int_t^\tau e^{-ru} \left(-r\psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} + \tilde{\mathcal{L}}[\psi] \right) du. \end{aligned}$$

Étant donné que nous avons déjà démontré que $\mathcal{Q}(\tau^\epsilon < s) \rightarrow 0$ lorsque $|s - t| \rightarrow 0$ (voir la preuve de la proposition 10), en divisant par $s - t$ dans l'équation précédente et en le faisant tendre vers 0, on obtient le résultat voulu. ■

Annexe A

Résultats auxiliaires

A.1 Lemme d'Itô

Considérons $X = \{X_t\}_{0 \leq t < \infty}$ un processus càdlàg à sauts dans \mathbb{R}^d (un processus de Lévy, par exemple). Notons X_t^c la composante continue de X_t et

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-}.$$

On peut alors énoncer la généralisation du lemme d'Itô comme suit.

Théorème 12 (Formule d'Itô généralisée) *Soit $f(x, t)$ une fonction réelle deux fois continûment dérivable dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$. Alors, $f(X_t, t)$ est un proces-*

sus càdlàg et

$$\begin{aligned}
f(X_t, t) &= f(X_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f(X_{s-}, s)}{\partial x} \cdot dX_s + \int_0^t \frac{\partial f(X_{s-}, s)}{\partial s} ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq d} \int_0^t \frac{\partial^2 f(X_{s-}, s)}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} d\langle X^{(i)c}, X^{(j)c} \rangle_t \\
&\quad + \sum_{s \leq t} \left(f(X_s, s) - f(X_{s-}, s) \right) - \sum_{s \leq t} \frac{\partial f(X_{s-}, s)}{\partial x} \cdot \Delta X_s,
\end{aligned}$$

dans lequel $x^{(i)}$ représente la i -ème coordonnée de x , \cdot est le produit scalaire et $\langle X^{(i)c}, X^{(j)c} \rangle$ est le processus de covariance entre $X^{(i)c}$ et $X^{(j)c}$.

Pour plus de détails, voir Protter [26].

A.2 Solution de l'équation (3.4)

Par la formule d'Itô (théorème 12) et l'équation 3.4 on déduit les égalités

$$\begin{aligned}
de^{\lambda t} \sigma_t^2 &= \lambda e^{\lambda t} \sigma_t^2 dt + e^{\lambda t} d\sigma_t^2 \\
&= e^{\lambda t} (\lambda \sigma_t^2 dt + -\lambda \sigma_t^2 dt + dZ_{\lambda t}) \\
&= e^{\lambda t} dZ_{\lambda t}.
\end{aligned}$$

Donc, en intégrant,

$$\begin{aligned}
\int_0^t de^{\lambda s} \sigma_s^2 &= e^{\lambda t} \sigma_t^2 - \sigma_0^2 \\
&= \int_0^t e^{\lambda s} dZ_{\lambda s},
\end{aligned}$$

d'où

$$\sigma_t^2 = \sigma_0^2 e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(s-t)} dZ_{\lambda s}.$$

■

A.3 Preuve de la proposition 10

Pour débiter, énonçons un lemme.

Lemme 13 *Soient $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonction. Alors,*

$$|\sup_{x \in E} f(x) - \sup_{x \in E} g(x)| \leq \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sup_{x \in E} f(x) - \sup_{x \in E} g(x) &= \sup_{x \in E} (f(x) - g(x) + g(x)) - \sup_{x \in E} g(x) \\ &\leq \sup_{x \in E} (f(x) - g(x)) + \sup_{x \in E} g(x) - \sup_{x \in E} g(x) \leq \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|, \end{aligned}$$

et vice versa en échangeant f et g .

■

Dans la preuve qui suit, nous allons supposer sans perdre de généralité que $r = 0$. Autrement, il suffit de considérer la fonction de paiement actualisée $e^{-rt}h(x_t)$ au lieu de $h(x_t)$ et la propriété lipschitzienne par rapport à x_t est conservée. Commençons par montrer la continuité par rapport à (x, σ^2) , uniformément en t .

En notant $\{x_s^{x,\nu}\}_{t \leq s \leq T}$ le processus x avec $x_t = x$ et $\nu_t = \nu$, $\{\nu_s^\nu\}_{t \leq s \leq T}$ le processus de volatilité commençant en $\nu_t = \nu$ et $\{\nu_{t,s}^{\nu,*}\}_{t \leq s \leq T}$ le processus de volatilité intégrée associé, on trouve les relations suivantes,

$$\begin{aligned}
x_s^{x,\nu} &= x - \frac{1}{2}\nu_{t,s}^{\nu,*} + \int_t^s \sqrt{\nu_u^\nu} dW_u + \rho(Z_{\lambda s} - Z_{\lambda t}), \\
\nu_s^\nu &= \nu e^{-\lambda(s-t)} + \int_t^s e^{-\lambda(s-y)} dZ_{\lambda y}, \\
\nu_{t,s}^{\nu,*} &= \nu \varepsilon(s-t) + \int_t^s \varepsilon(s-y) dZ_{\lambda y}, \\
\Delta \nu_s &= \nu_s^{\nu'} - \nu_s^\nu = \Delta \nu e^{-\lambda(s-t)}, \\
\Delta \nu_s^* &= \nu_{t,s}^{\nu',*} - \nu_{t,s}^{\nu,*} = \Delta \nu \varepsilon(s-t), \\
\Delta x_s &= x_s^{x',\nu'} - x_s^{x,\nu} = x' - x - \frac{1}{2} \Delta \nu \varepsilon(s-t) + \int_t^s \sqrt{\nu_u^{\nu'}} - \sqrt{\nu_u^\nu} dW_u, \\
&= \Delta x - \frac{1}{2} \Delta \nu \varepsilon(s-t) + M_{t,s},
\end{aligned}$$

en posant $\varepsilon(t) = \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}$.

On a donc

$$\begin{aligned}
|v(x', \nu', t) - v(x, \nu, t)| &= \left| \sup_{\tau \in \mathcal{I}_t} \mathbf{E} h(x_\tau^{x',\nu'}) - \sup_{\tau \in \mathcal{I}_t} \mathbf{E} h(x_\tau^{x,\nu}) \right| \\
&\leq \sup_{\tau \in \mathcal{I}_t} \mathbf{E} \left| h(x_\tau^{x',\nu'}) - h(x_\tau^{x,\nu}) \right| \\
&\leq C \sup_{\tau \in \mathcal{I}_t} \mathbf{E} \left| x_\tau^{x',\nu'} - x_\tau^{x,\nu} \right|,
\end{aligned}$$

par le lemme précédent et la propriété lipschitzienne.

Donc,

$$\begin{aligned}
|v(x', \nu', t) - v(x, \nu, t)| & \\
&\leq C|\Delta x| + \frac{1}{2}C|\Delta \nu| \sup_{\tau \in \mathcal{I}_t} \mathbf{E} \varepsilon(\tau - t) + C \sup_{\tau \in \mathcal{I}_t} \mathbf{E} |M_{t,\tau}| \\
&\leq C|\Delta x| + \frac{1}{2}C|\Delta \nu|T + C \sup_{\tau \in \mathcal{I}_t} \mathbf{E} |M_{t,\tau}|,
\end{aligned}$$

puisque $\varepsilon(t) \leq t$ et $\tau \leq T$.

En posant $\mathcal{G} = \sigma(\{Z_{\lambda y}\}_{0 \leq y \leq T})$, la tribu engendrée par le processus Z jusqu'à l'échéance T , on remarque que $\{M_{t,s}, \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_s\}$ est une martingale. Ainsi, $\{|M_{t,s}|, \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_s\}$ est une sous-martingale et le théorème de Doob s'applique, i.e.

$$\begin{aligned}
\sup_{\tau \in \mathcal{I}_t} \mathbf{E}(|M_{t,\tau}| | \mathcal{F}_t) &\leq \mathbf{E}(|M_{t,T}| | \mathcal{F}_t) \\
&\leq \sqrt{\mathbf{E}(\mathbf{E}(M_{t,T}^2 | \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_t)}.
\end{aligned}$$

Or, on sait que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(M_{t,T}^2 | \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_t) &= \int_t^T (\nu_u^{\nu'} - 2\sqrt{\nu_u^{\nu'} \nu_u^\nu} + \nu_u^\nu) du \\
&= \int_t^T \Delta \nu e^{-\lambda(u-t)} du + 2 \int_t^T \nu_u^\nu - \sqrt{(\nu_u^\nu)^2 + \nu_u^\nu \Delta \nu} e^{-\lambda(u-t)} du \\
&= \int_t^T \Delta \nu e^{-\lambda(u-t)} du + 2 \int_t^T \frac{-\nu_u^\nu \Delta \nu e^{-\lambda(u-t)}}{\nu_u^\nu + \sqrt{(\nu_u^\nu)^2 + \nu_u^\nu \Delta \nu} e^{-\lambda(u-t)}} du \\
&\leq \int_t^T |\Delta \nu| e^{-\lambda(u-t)} du = |\Delta \nu| \varepsilon(T-t) \leq |\Delta \nu| T.
\end{aligned}$$

Il en résulte l'inégalité

$$|v(x', \nu', t) - v(x, \nu, t)| \leq C|\Delta x| + \frac{1}{2}C|\Delta \nu|T + C\sqrt{|\Delta \nu|T} \rightarrow 0$$

avec $|\Delta x|$ et $|\Delta \nu| \rightarrow 0$ et on obtient que la continuité de v en (x, σ^2) est uniforme en t .

Avant de continuer, énonçons un deuxième lemme.

Lemme 14

$$\mathbf{E} |x_s - x_t| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E} |\nu_s - \nu_t| \rightarrow 0$$

lorsque $s \rightarrow t$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |x_s - x_t| &\leq \frac{1}{2} \mathbf{E} |\nu_{t,s}^*| + \mathbf{E} \left| \int_t^s \sqrt{\nu_u} dW_u \right| + \rho \mathbf{E} |Z_{\lambda s} - Z_{\lambda t}| \\ &\leq \frac{1}{2} \nu |\varepsilon(s-t)| + \mathbf{E} \left| \int_t^s e^{-\lambda(s-y)} dZ_{\lambda y} \right| + \sqrt{\mathbf{E} |\nu_{t,s}^*|} + \rho \mathbf{E} |Z_{\lambda s} - Z_{\lambda t}| \\ &\leq \frac{1}{2} \nu |\varepsilon(s-t)| + \mathbf{E} |Z_{\lambda s} - Z_{\lambda t}| + \sqrt{\frac{1}{2} \nu |\varepsilon(s-t)| + \mathbf{E} |Z_{\lambda s} - Z_{\lambda t}|} \\ &\quad + \rho \mathbf{E} |Z_{\lambda s} - Z_{\lambda t}| \end{aligned}$$

et si $s > t$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |\nu_s - \nu_t| &\leq \nu_t |1 - e^{-\lambda(s-t)}| + \mathbf{E} \left| \int_t^s e^{-\lambda(s-y)} dZ_{\lambda y} \right| \\ &\leq \nu_t |1 - e^{-\lambda(s-t)}| + \mathbf{E} |Z_{\lambda s} - Z_{\lambda t}|, \end{aligned}$$

tandis que si $t > s$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |\nu_s - \nu_t| &\leq \nu_s |1 - e^{-\lambda(t-s)}| + \mathbf{E} \left| \int_s^t e^{-\lambda(t-y)} dZ_{\lambda y} \right| \\ &\leq \nu_s |1 - e^{-\lambda(t-s)}| + \mathbf{E} |Z_{\lambda t} - Z_{\lambda s}|. \end{aligned}$$

Donc, puisque $\nu_t \leq \nu_0 + Z_{\lambda T}$ pour $t \leq T$, quels que soient t et s ,

$$\mathbf{E} |\nu_s - \nu_t| \leq \nu_0 + |t - s| \mathbf{E} Z_{\lambda T} + \mathbf{E} |Z_{\lambda t} - Z_{\lambda s}|,$$

et il suffit de montrer que $\mathbf{E} |Z_{\lambda s} - Z_{\lambda t}| \rightarrow 0$ lorsque $|s - t| \rightarrow 0$. Or, puisque la condition (C2) est vérifiée, tous les moments de Z_t existe donc Z est uniformément intégrable. Puisque Z est aussi continue en probabilité, on obtient la continuité dans \mathcal{L}_1 et la conclusion du lemme. \blacksquare

Montrons maintenant la continuité par rapport au temps. Par le lemme 9, en prenant $\tau = \tau^\epsilon \wedge s$ (avec $t < s$), nous avons

$$|v(x, \nu, t) - v(x, \nu, s)|$$

$$\leq \mathbf{E} \mathbb{I}_{\{\tau^\epsilon < s\}} |v(x_{\tau^\epsilon}^{x, \nu}, \nu_{\tau^\epsilon}^\nu, \tau^\epsilon) - v(x, \nu, s)| \quad (\text{A.1})$$

$$+ \mathbf{E} \mathbb{I}_{\{\tau^\epsilon \geq s\}} |v(x_s^{x, \nu}, \nu_s^\nu, s) - v(x, \nu, s)|. \quad (\text{A.2})$$

Le terme de A.2 est borné grâce à la continuité de v par rapport (x, ν) et le lemme 14, i.e.

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} |v(x_s^{x, \nu}, \nu_s^\nu, s) - v(x, \nu, s)| \\ & \leq \mathbf{E} |X_s^{x, \nu} - x| + \frac{1}{2} T \mathbf{E} |\nu_s^\nu - \nu| + \sqrt{T} \mathbf{E} \sqrt{|\nu_s^\nu - \nu|} \\ & \leq \mathbf{E} |X_s^{x, \nu} - x| + \frac{1}{2} T \mathbf{E} |\nu_s^\nu - \nu| + \sqrt{T} \sqrt{\mathbf{E} |\nu_s^\nu - \nu|}. \end{aligned}$$

L'autre terme se borne à l'aide du lemme suivant.

Lemme 15 *Soit $0 < \varepsilon < v(x, \nu, t) - h(x)$. Il existe un intervalle I autour de t tel que $v(x, \nu, s') - h(x) > \varepsilon$ pour tout $s' \in I$.*

Démonstration. Supposons au contraire qu'il existe une suite $\{t_n\} \rightarrow t$ tel que $0 \leq v(x, \nu, t_n) - h(x) \leq \varepsilon$ pour tout n . Soit $\varepsilon > 0$. Montrons pour commencer que $v(x_{\tau^\varepsilon}^{x, \nu}, \nu_{\tau^\varepsilon}^\nu, \tau^\varepsilon) - h(x_{\tau^\varepsilon}^{x, \nu}) \leq \varepsilon$ presque sûrement. Pour ce faire, nous allons d'abord démontrer que $\liminf_{n \rightarrow \infty} v(x, \nu, t_n) \geq v(x, \nu, t)$ si $t_n \downarrow t$. Nous avons que

$$\sup_{\tau \in \mathcal{I}_t} \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_{t_n} \right) \geq \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_{t_n} \right) \rightarrow \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_t \right),$$

quel que soit $\tau \in \mathcal{I}_t$, par la continuité à droite de la filtration \mathbb{F} (voir [1], proposition 1.1.5). Donc,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathcal{I}_t} \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_{t_n} \right) \geq \sup_{\tau \in \mathcal{I}_t} \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_t \right) = v(x, \nu, t). \quad (\text{A.3})$$

De plus,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{I}_t} \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_{t_n} \right) - \sup_{\tau \in \mathcal{I}_{t_n}} \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_{t_n} \right) \\ &= \max \{ 0, \sup_{\tau \in \mathcal{I}_t, t \leq \tau \leq t_n} \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_{t_n} \right) - \sup_{\tau \in \mathcal{I}_{t_n}} \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_{t_n} \right) \}, \end{aligned}$$

et

$$0 \leq h(x) \leq \sup_{\tau \in \mathcal{I}_t, t \leq \tau \leq t_n} \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_{t_n} \right) \leq \mathbf{E} \left(\sup_{t \leq s \leq t_n} h(x_s) \middle| \mathcal{F}_{t_n} \right).$$

Puisque x est un processus continu à droite, on en déduit que $\sup_{t \leq s \leq t_n} h(x_s) \rightarrow h(x)$ p. s., et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathcal{I}_t, t \leq \tau \leq t_n} \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_{t_n} \right) - \sup_{\tau \in \mathcal{I}_{t_n}} \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_{t_n} \right) \leq 0.$$

Donc,

$$\sup_{\tau \in \mathcal{I}_t} \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_{t_n} \right) - \sup_{\tau \in \mathcal{I}_{t_n}} \mathbf{E} \left(h(x_\tau) \middle| \mathcal{F}_{t_n} \right) \rightarrow 0$$

et, à partir de l'équation A.3, on en déduit que $\liminf_{n \rightarrow \infty} v(x, \nu, t_n) \geq v(x, \nu, t)$. À partir de ce résultat, si $s_n \downarrow \tau_\epsilon$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors $v(x_{s_n}, \nu_{s_n}, s_n) \leq h(x_{s_n}) + \epsilon$. Puisque $v(x_{s_n}, \nu_{s_n}, s_n) \rightarrow v(x_{\tau_\epsilon}, \nu_{\tau_\epsilon}, s_n)$ et $h(x_{s_n}) \rightarrow h(x_{\tau_\epsilon})$ p. s. avec $n \rightarrow \infty$, on a aussi la relation

$$v(x_{\tau_\epsilon}, \nu_{\tau_\epsilon}, s_n) \leq h(x_{\tau_\epsilon}) + \epsilon \quad \text{p. s.}$$

En prenant la limite inférieure, on trouve

$$v(x_{\tau_\epsilon}, \nu_{\tau_\epsilon}, \tau^\epsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} v(x_{\tau_\epsilon}, \nu_{\tau_\epsilon}, s_n) \leq h(x_{\tau_\epsilon}) + \epsilon \quad \text{p. s.}$$

Montrons, à présent, l'énoncé du lemme. Par l'équation A.1-A.2, on a

$$\begin{aligned} 0 &< v(x, \nu, t) - h(x) - \varepsilon \leq v(x, \nu, t) - v(x, \nu, t_n) \\ &\leq \mathbf{E}\mathbb{I}_{\{\tau^\epsilon < t_n\}}(v(x_{\tau^\epsilon}^{x,\nu}, \nu_{\tau^\epsilon}^\nu, \tau^\epsilon) - v(x, \nu, t_n)) + \mathbf{E}(v(x_{t_n}^{x,\nu}, \nu_{t_n}^\nu, t_n) - v(x, \nu, t_n)). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} 0 &< v(x, \nu, t) - v(x, \nu, t_n) \\ &\leq \mathbf{E}\left(\mathbb{I}_{\{\tau^\epsilon < t_n\}}(v(x_{\tau^\epsilon}^{x,\nu}, \nu_{\tau^\epsilon}^\nu, \tau^\epsilon) - h(x_{\tau^\epsilon}^{x,\nu})) + (h(x_{\tau^\epsilon}^{x,\nu}) - h(x))\right. \\ &\quad \left.+ (h(x) - v(x, \nu, t_n))\right) + \mathbf{E}(v(x_{t_n}^{x,\nu}, \nu_{t_n}^\nu, t_n) - v(x, \nu, t_n)) \\ &\leq \epsilon + \mathbf{E}\mathbb{I}_{\{\tau^\epsilon < t_n\}}(h(x_{\tau^\epsilon}^{x,\nu}) - h(x)) + \mathbf{E}(v(x_{t_n}^{x,\nu}, \nu_{t_n}^\nu, t_n) - v(x, \nu, t_n)). \end{aligned}$$

Ainsi, puisque ϵ est choisi de façon arbitraire,

$$\begin{aligned} 0 &< |v(x, \nu, t) - v(x, \nu, t_n)| \\ &\leq \mathbf{E}\mathbb{I}_{\{\tau^\epsilon < t_n\}}|h(x_{\tau^\epsilon}^{x,\nu}) - h(x)| + \mathbf{E}|v(x_{t_n}^{x,\nu}, \nu_{t_n}^\nu, t_n) - v(x, \nu, t_n)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

si $n \rightarrow \infty$ car h et v sont des fonctions continues par rapport à x et ν . On en conclue que $\varepsilon + h(x) \geq v(x, \nu, t_n) \rightarrow v(x, \nu, t) > \varepsilon + h(x)$. D'où la contradiction. \blacksquare

Le terme de (A.1) se borne de la façon suivante.

Soient $I = (s', s)$ l'intervalle autour de t du lemme 15 et $0 < \epsilon < \varepsilon$. Alors,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\mathbb{1}_{\{\tau^\epsilon < s\}} |v(x_{\tau^\epsilon}^{x,\nu}, \nu_{\tau^\epsilon}^\nu, \tau^\epsilon) - v(x, \nu, s)| \\ &= \mathbf{E}\left(|v(x_{\tau^\epsilon}^{x,\nu}, \nu_{\tau^\epsilon}^\nu, \tau^\epsilon) - v(x, \nu, s)| \mathbb{1}_{\{\tau^\epsilon < s\}} \right) \mathcal{Q}(\tau^\epsilon < s) \\ &\leq 2M \mathcal{Q}(\tau^\epsilon < s) \end{aligned}$$

où $v(x, \nu, s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}h(X_\tau) \leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}K(1 + |X_\tau|) \leq \mathbf{E}K(1 + |X_T|) = M < \infty$ quel que soit $s \leq T$.

De plus,

$$\begin{aligned} & \mathcal{Q}(t \leq \tau^\epsilon < s) \\ &= \mathcal{Q}\left(\left| v(x, \nu, \tau^\epsilon) - h(x) + h(x_{\tau^\epsilon}^{x,\nu}) - v(x_{\tau^\epsilon}^{x,\nu}, \nu_{\tau^\epsilon}^\nu, \tau^\epsilon) \right| > \varepsilon - \epsilon, \tau^\epsilon < s \right) \\ &\leq \mathcal{Q}\left(\left| v(x, \nu, \tau^\epsilon) - v(x_{\tau^\epsilon}^{x,\nu}, \nu_{\tau^\epsilon}^\nu, \tau^\epsilon) \right| + \left| h(x_{\tau^\epsilon}^{x,\nu}) - h(x) \right| > \varepsilon - \epsilon, \tau^\epsilon < s \right) \\ &\leq \mathcal{Q}\left(\left| \nu_{\tau^\epsilon}^\nu - \nu \right| > \delta_2, \tau^\epsilon < s \right) + \mathcal{Q}\left(\left| x_{\tau^\epsilon}^{x,\nu} - x \right| > \delta_3, \tau^\epsilon < s \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $|s - t| \rightarrow 0$ par la continuité en probabilité des processus de Lévy. Et on obtient la continuité par rapport au temps.

La continuité globale est assuré par l'inégalité suivante

$$|v(x', \nu', s) - v(x, \nu, t)| \leq |v(x', \nu', s) - v(x, \nu, s)| + |v(x, \nu, s) - v(x, \nu, t)|$$

et le fait que la première borne est indépendante de s . \blacksquare

Références

- [1] Applebaum, D. (2004) *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press.
- [2] Bertoin, J. (1996) *Lévy Processes*. Cambridge University Press.
- [3] Barndorff-Nielsen, O. E. et N. Shephard (2001) Non-gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *Journal of the Royal Statistical Society* 63(2), 167-241.
- [4] Barndorff-Nielsen, O. E. et N. Shephard (2001) Econometric analysis of realised volatility and its use in estimating stochastic volatility models. *Economics Papers 2001-W4, Economics Group, Nuffield College, University of Oxford*.
- [5] Barndorff-Nielsen, O.E. et N. Shephard (2002) *Financial volatility and Lévy based models*. À paraître.
- [6] Benth, F. E., K. H. Karlsen et K. Reikvam (2001) Merton's portfolio optimization problem in a Black and Scholes market with non-Gaussian stochastic volatility of Ornstein-Uhlenbeck type. *UCLA Computational and Applied Mathematics Report*

- [7] Benth, F. E. et T. Meyer-Brandis (2004) Indifference pricing and the minimal entropy martingale measure in a stochastic volatility model with jumps. *E-print No. 3, February 2004, University of Oslo.*
- [8] Black, F. et M. Scholes (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637-654.
- [9] Clark, P. K. (1973) A subordinated stochastic process model with fixed variance for speculative prices. *Econometrica* 41, 135-156.
- [10] Carr, P., H. Geman, D. B. Madan et M. Yor (2003) Stochastic Volatility for Lévy Processes. *Mathematical Finance Vol. 13, No. 3*, 345-382.
- [11] Crandall, M. G. et P. L. Lions (1983) Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations, *Trans. A.M.S* 277, 1-42.
- [12] W. Dunsmuir (1979) A Central Limit Theorem For Parameter Estimation In Stationary Vector Time Series And Its Application To Models For A Signal Observed With Noise. *The Annals of Statistics Vol. 7, No. 3*, 490-506.
- [13] Eberlein, E. et J. Jacod (1997) On the range of option prices. *Finance and Stochastics* 1, 131-140.
- [14] Eberlein, E. et U. Keller (1995) Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli* 1, 281-299.
- [15] Eberlein, E. et S. Raible (1999) Term structure models driven by general Lévy processes. *Mathematical Finance* 9(1), 31-53.
- [16] Föllmer H. et M. Schweizer (1990) Hedging of contingent claims under incomplete information. Dans *Applied Stochastic Analysis*, Gordon and Breach Science Publishers.

- [17] Griffin, J. E. et M. F. J. Steel (2002) Inference With Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck Processes for Stochastic Volatility *Econometrics* 0201002, *Economics Working Paper Archive at WUSTL*.
- [18] Harrison, J. M. et S. R. Pliska (1981) Martingales and Stochastic Integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications* 11, 215-260.
- [19] Heston, S. L. (1993) A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies* 6, 327-343.
- [20] Hull, J. C. et A. White (1987) The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance* 42, 281-300.
- [21] Hürzeler, M et H. R. Künsch (2001) Approximating and Maximising the Likelihood for a General State-Space Model. Dans *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer-Verlag.
- [22] Jacod, J. et Shiryaev, A. N. (2003) *Limit theorems for stochastic processes*, Springer-Verlag.
- [23] N. V. Krylov (1980) *Controlled Diffusion Processes*. Springer-Verlag.
- [24] Lévy, P. (1937) *Théories de l'addition aléatoire*. Gauthier-Villars.
- [25] Nicolato, E. et E Vernados (2003) Option pricing in volatility models of the Ornstein-Uhlenbeck type. *Mathematical Finance* Vol. 13, No. 4, 445-466.
- [26] Protter, P. (2004) *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2ième édition, Springer-Verlag, Heidelberg.

- [27] Pitt, M. K. et N. Shephard (2001) Auxiliary Variable Based Particle Filters. Dans *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer-Verlag.
- [28] Rosiński, J. (2001) Series representations of Lévy processes from the perspective of point processes. Dans *Lévy Processes*, pp. 401-415. Birkhäuser Boston.
- [29] Roberts, G.O., O. Papaspiliopoulos et P. Dellaportas (2004) Bayesian inference for non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck stochastic volatility processes. *Journal of Royal Statistical Society B* 66, Part 2, 369-393.
- [30] Sato, K. (1999) *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press.
- [31] Vernados, E. (2001) *Derivatives Pricing and Ornstein-Uhlenbeck type Stochastic Volatility*. Dissertation, University of Oxford.