

HEC MONTRÉAL

**Contagion des défauts, copules et application
aux CDOs**

Par

Alexandre Gougeon

**Sciences de la gestion
(Ingénierie financière)**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de
maîtrise ès sciences (M.Sc.)*

Janvier 2011

© Alexandre Gougeon, 2011

Résumé

Ce mémoire introduit en premier lieu les copules hiérarchiques dynamiques, en combinant les copules hiérarchiques et les copules dynamiques. Dans un contexte financier, les copules archimédiennes hiérarchiques servent typiquement à modéliser à la fois une dépendance plus forte entre les titres d'un même secteur et une dépendance plus faible entre les titres de secteurs différents. Quant à elles, les copules dynamiques sont en fait des copules conditionnelles appliquées à des séries temporelles, de telle sorte qu'elles modélisent la dépendance sérielle. La combinaison de la dépendance sérielle des copules dynamiques avec la structure de dépendance flexible et intuitive des copules hiérarchiques donne naissance aux copules hiérarchiques dynamiques. Différents arrangements de ces dernières sont possibles, dont le plus intéressant est la copule baptisée momentum de marché, où une copule hiérarchique modélise le marché à une période donnée, et une autre copule la dépendance sérielle sur le marché dans son ensemble. D'ailleurs, les CDS ou *Credit Default Swap* étudiés présentent précisément ce comportement. Une bonne partie du mémoire est consacré au développement d'algorithmes de simulation pour les copules hiérarchiques dynamiques, ainsi qu'à l'évaluation de leur performance. À cet effet, les tests démontrent que les copules hiérarchiques dynamiques à deux niveaux peuvent être simulées rapidement pour 125 variables, alors que les copules à trois niveaux ne peuvent être simulées que pour de faibles dimensions.

En second lieu, les copules hiérarchiques sont appliquées à la dépendance entre les défauts, plus particulièrement à l'évaluation de CDOs ou *Collateralized Debt Obligations* synthétiques. Pour ce faire, la principale hypothèse est que la dépendance entre les CDS indique celle entre les défauts, qui est inobservable. Les prix théoriques de CDOs ainsi obtenus ne correspondent pas précisément à ceux observés sur les marchés, mais l'expérience permet de proposer des solutions pour mieux utiliser l'information de marché des CDS. Également, le tout confirme, si besoin en est, l'impact significatif de la copule utilisée pour évaluer des dérivés de crédit.

Abstract

This thesis first introduces dynamic hierarchical copulas by combining hierarchical and dynamic copulas. In a financial context, archimedean hierarchical copulas are typically used to model both a stronger dependence between securities that belong to the same sector, and a weaker dependence between securities from different sectors. On the other hand, dynamic copulas are in effect conditional copulas applied to time series, such that they model serial dependence. The combination of the serial dependence from dynamic copulas along with the flexible and intuitive dependence structure from hierarchical copulas yields dynamic hierarchical copulas. Various arrangements of the latter are possible, the most promising having been baptised market momentum, where a hierarchical copula models the market at any given period, on top of which serial dependence is applied to the entire market. This is precisely the behaviour observed on studied CDS (Credit Default Swap). A significant portion of the thesis is dedicated to the development of simulation algorithms for dynamic hierarchical copulas, as well as to assessing their performance. In this matter, tests show that two level dynamic hierarchical copulas can be conveniently simulated for up to 125 variables, whereas their three level counterparts can only be simulated for small dimensions.

Secondly, dynamic hierarchical copulas are applied to default dependence, specifically to synthetic CDOs (Collateralized Debt Obligations) pricing. To do so, the CDS dependence observed in the markets is used as a proxy for the unobservable default dependence. Although computed CDOs prices do not precisely match market prices, this experiment suggests solutions to better use CDS market information. Additionally, the results confirm the significant impact of the choice of copula on credit derivatives pricing and default contagion modeling.

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de mémoire Bruno Rémillard, de même que mon co-directeur de mémoire Nicolas Papageorgiou. L'idée du projet vient d'eux et ce fût un grand plaisir d'y travailler sous leur excellent encadrement. Merci en particulier à Bruno pour l'orientation dans la littérature pertinente, les développements théoriques sur les copules et les échanges fructueux concernant le développement des algorithmes de simulation. Un merci particulier à Nicolas aussi pour le support à toutes les étapes du projet, de la revue de littérature à l'évaluation des CDOs, notamment les démarches pour l'obtention des données financières à la salle des marchés des HEC et chez Desjardins, leur analyse, interprétation et traitement. J'aimerais aussi remercier les professeurs Tolga Cenesizoglu et Debbie J. Dupuis, pour avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire, ainsi que pour leurs commentaires.

Ensuite, j'aimerais également remercier mes collègues François Tessier et Romain Cuchet pour du code que nous avons écrit ensemble pour un travail pratique dans le cours de Titres à revenus fixes, mon collègue Soufian Zitouni pour son aide à la salle des marchés, mon collègue Clarence Simard pour les nombreux échanges techniques sur divers sujets, Mohamed Jabir pour son soutien technique au LACFAS, et Daniel Charbonneau, Luc Rocheleau et Pierre Girard pour leur soutien technique au du GERAD/CIRRELT.

Il me fait également plaisir de souligner la contribution de Desjardins Gestion internationale d'actifs (DGIA) pour les données de CDOs, ainsi que celle de l'Institut de finance mathématique de Montréal (IFM2) pour son soutien financier par le biais d'une bourse de maîtrise.

Finalement, je souhaite remercier mon épouse Hélène de m'avoir soutenu et encouragé dans mon retour aux études.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Remerciements	iii
Table des matières	iv
Table des figures	viii
Liste des tableaux	x
1 Introduction	1
2 Revue de littérature	4
2.1 Risque de crédit d'un seul titre	4
2.1.1 Approche structurelle	5
2.1.2 Approche par forme réduite	7
2.1.3 Approche hybride	9
2.2 Risque de crédit de plusieurs titres	11
2.2.1 Principaux modèles	11
2.2.2 Importance du choix des copules	14
2.3 Copules et applications financières	15
2.3.1 Copules hiérarchiques	15
2.3.2 Copules dynamiques	17
2.4 Conclusion	18

3	Copules	19
3.1	Copules gaussiennes	20
3.1.1	Définition et propriétés	20
3.1.2	Simulation	21
3.2	Copules gaussiennes dynamiques	21
3.2.1	Définition et propriétés	21
3.2.2	Simulation	22
3.3	Copules archimédiennes	23
3.3.1	Définition et propriétés	23
3.3.2	Simulation	24
3.3.3	Estimation	26
3.4	Copules archimédiennes hiérarchiques	26
3.4.1	Définition et propriétés	26
3.4.2	Simulation	28
3.5	Copules archimédiennes dynamiques	32
3.5.1	Définition et propriétés	32
3.5.2	Simulation	33
3.6	Copules archimédiennes hiérarchiques dynamiques	35
3.6.1	Deux niveaux type I - Momentum de marché	35
3.6.2	Deux niveaux type II - Momentum de titre	38
3.6.3	Trois niveaux type I - Momentum de marché	42
3.6.4	Trois niveaux type II - Momentum de titre	48
3.6.5	Trois niveaux type III - Momentum de secteur	53
3.7	Synthèse des structures de dépendance	58
3.8	Estimation des paramètres	59
4	Application aux CDOs	61
4.1	Définitions et données	61
4.1.1	Taux d'intérêt	61
4.1.2	CDS	62
4.1.3	CDO	62

4.2	Évaluation des CDOs synthétiques	65
4.2.1	Courbe des taux d'intérêt sans risque	66
4.2.2	Distribution des temps de défaut individuels	67
4.2.3	Dépendance entre les temps de défaut	69
4.2.4	Simulation des défauts du portefeuille	69
4.2.5	Actualisation des flux monétaires du CDO	70
5	Résultats et analyse	73
5.1	Simulation des copules	73
5.1.1	Graphes bivariés	73
5.1.2	Validation et performance	75
5.2	Analyse des données CDS	85
5.3	Évaluation de CDOs	90
5.3.1	Taux d'intérêt	90
5.3.2	Estimation des paramètres des copules	92
5.3.3	Prix des modèles et prix du marché	96
6	Discussion	116
6.1	Copules hiérarchiques dynamiques	116
6.1.1	Simulation des copules	117
6.1.2	Estimation de paramètres	117
6.1.3	Tests d'adéquation	118
6.2	Analyse des données de marché CDS	118
6.2.1	Inefficiences de marché	118
6.2.2	Adéquation des modèles	119
6.3	Évaluation des CDOs	120
6.3.1	Importance de la copule	120
6.3.2	Dépendance sérielle du marché CDS	121
6.3.3	Limites des autres hypothèses	122
6.4	Dépendance entre les défauts	123
7	Conclusion	124

Bibliographie

126

Table des figures

2.1	Copule hiérarchique : exemple tiré de Savu and Trede (2006)	16
2.2	Copule hiérarchique : exemple tiré de Berg and Aas (2009)	18
3.1	Copule hiérarchique de Savu and Trede (2006), en quatre dimensions	27
3.2	Copule à deux niveaux type I - Momentum de marché	36
3.3	Copule hiérarchique dynamique à deux niveaux, momentum de titre	39
3.4	Copule hiérarchique dynamique à trois niveaux, momentum de marché	43
3.5	Copule hiérarchique dynamique à trois niveaux, momentum de titre	48
3.6	Copule hiérarchique dynamique à trois niveaux, momentum de secteur	54
5.1	Simulation des copules gaussiennes, Gumbel et Clayton, pour des tau de Kendall de 0.25, 0.5 et 0.75	74
5.2	Distribution du tau de Kendall et de la corrélation sur les CDS du CDX.NA.IG.7	88
5.3	Distribution du tau de Kendall et de la corrélation sérielles sur les CDS du CDX.NA.IG.7	88
5.4	Taux LIBOR 6 mois et swap 5 ans	91
5.5	Paramètres Nelson-Siegel optimisés : α , β et δ	92
5.6	Paramètre Nelson-Siegel optimisé : τ	93
5.7	Résidus de l'optimisation sur les paramètres Nelson-Siegel	94
5.8	Prix de la tranche équité (0-3%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gaussiennes et Clayton	98
5.9	Prix de la tranche mezzanine 1 (3-7%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gaussiennes et Clayton	99

5.10	Prix de la tranche mezzanine 2 (7-10%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gaussiennes et Clayton	100
5.11	Prix de la tranche senior (10-15%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gaussiennes et Clayton	101
5.12	Prix de la tranche super senior (15-30%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gaussiennes et Clayton	102
5.13	Prix de la tranche équité (0-3%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gumbel	103
5.14	Prix de la tranche mezzanine 1 (3-7%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gumbel	104
5.15	Prix de la tranche mezzanine 2 (7-10%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gumbel	105
5.16	Prix de la tranche senior (10-15%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gumbel	106
5.17	Prix de la tranche super senior (15-30%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gumbel	107
5.18	Prix de la tranche équité (0-3%), CDX.NA.IG série 10, avec copules dynamiques	108
5.19	Prix de la tranche mezzanine 1 (3-7%), CDX.NA.IG série 10, avec copules dynamiques	109
5.20	Prix de la tranche mezzanine 2 (7-10%), CDX.NA.IG série 10, avec copules dynamiques	110
5.21	Prix de la tranche senior (10-15%), CDX.NA.IG série 10, avec copules dynamiques	111
5.22	Prix de la tranche super senior (15-30%), CDX.NA.IG série 10, avec copules dynamiques	112

Liste des tableaux

3.1	Définition des copules Clayton et Gumbel	24
3.2	Facteur latent pour l'algorithme de Marshall and Olkin (1988) . . .	25
3.3	Simulation des facteurs latents des copules archimédiennes hiérarchiques	32
3.4	Niveau de définition de la dépendance, copule à deux niveaux type I - Momentum de marché	36
3.5	Niveau de définition de la dépendance, copule à deux niveaux type II - Momentum de titre	39
3.6	Niveau hiérarchique de dépendance, copule momentum de marché .	43
3.7	Niveau hiérarchique de dépendance, copule momentum de titre . . .	49
3.8	Niveau hiérarchique de dépendance, copule momentum de secteur . .	54
3.9	Synthèse des structures de dépendance archimédiennes	58
4.1	Nombre d'entreprises par sous-indices du CDX.NA.IG (Source : Mar- kit Group Limited)	64
4.2	Séries CDX.NA.IG (Source : Bloomberg)	64
4.3	Tranches du CDX.NA.IG, noms à titre indicatif	64
4.4	Défauts de paiement affectant les CDX.NA.IG (1er janvier 2007 au 25 juin 2009)	64
5.1	Résultats de simulation, copules gaussiennes et archimédiennes avec $d = 2$, $N = 40,000$ et $\Delta\tau = 0.01$	77
5.2	Résultats de simulation, copules gaussiennes et archimédiennes avec $d = 125$, $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.1$	78
5.3	Résultats de simulation, copules dynamiques avec $d_1 = d_2 = 2$, $N =$ $40,000$ et $\Delta\tau = 0.01$	79

5.4	Résultats de simulation, copules dynamiques avec $d_1 = d_2 = 125$, $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.1$	79
5.5	Résultats de simulation, copules hiérarchiques à deux niveaux avec $s = 2$, $d = 4$, $N = 40,000$ et $\Delta\tau = 0.05$	80
5.6	Résultats de simulation, copules hiérarchiques Gumbel à deux niveaux avec $s = 5$, $d = 125$, $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.05$	80
5.7	Résultats de simulation, copules hiérarchiques Gumbel à trois niveaux avec $d = 8$, $N = 40,000$ et $\Delta\tau = 0.1$	81
5.8	Résultats de simulation, copules hiérarchiques Gumbel à trois niveaux avec $d = 125$, $N = 5,000$ et $\Delta\tau = 0.1$	81
5.9	Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à deux niveaux de type I - momentum de marché avec $d = 2$, $N = 5,000$ et $\Delta\tau = 0.05$	82
5.10	Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à deux niveaux de type I - momentum de marché avec $d = 125$, $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.05$	82
5.11	Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à deux niveaux de type II - momentum de titre avec $d = 2$, $N = 5,000$ et $\Delta\tau = 0.05$	83
5.12	Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à deux niveaux de type II - momentum de titre avec $d = 3$, $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.05$	83
5.13	Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à deux niveaux de type II - momentum de titre avec $d = 125$, $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.05$	83
5.14	Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à trois niveaux avec $s = 2$, $d = 4$, $N = 5,000$ et $\Delta\tau = 0.1$	84
5.15	Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à trois niveaux de type II - momentum de titre avec $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.1$	84
5.16	Temps moyen de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à trois niveaux de type II - momentum de titre avec $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.1$	85
5.17	Synthèse des temps de simulation et restrictions, copules Gumbel	86
5.18	Tau de Kendall et corrélation moyens des CDS du CDX.NA.IG.7	87
5.19	Tau de Kendall moyen des CDS du CDX.NA.IG.7	89
5.20	Corrélations moyennes des CDS du CDX.NA.IG.7	89

5.21	Tau de Kendall et corrélation moyens par sous-indice des CDS du CDX.NA.IG.7	89
5.22	Tau de Kendall et corrélation moyens des CDS du CDX.NA.IG.10	96
5.23	Tau de Kendall moyen des CDS du CDX.NA.IG.10	96
5.24	Corrélations moyennes des CDS du CDX.NA.IG.10	96
5.25	Tau de Kendall et corrélation moyens par sous-indice des CDS du CDX.NA.IG.10	97
5.26	Prix moyen de marché des tranches de CDX.NA.IG.10	109
5.27	Erreur moyenne sur les prix des tranches de CDX.NA.IG.10	113
5.28	Erreur moyenne relative (%) sur les prix des tranches de CDX.NA.IG.10	114
5.29	Écart type de l'erreur sur les prix des tranches de CDX.NA.IG.10	115

Chapitre 1

Introduction

La crise financière de l'automne 2008 a brutalement ramené à l'avant-plan la réalité du risque de crédit, tout comme celle du risque potentiellement dévastateur de contagion des défauts. Alors que le risque de crédit est le risque qu'un emprunteur n'honore pas un paiement promis, le risque de contagion est le risque qu'un nombre anormalement élevé d'emprunteurs n'honorent pas leurs engagements. La récente crise a cruellement mis en lumière l'importance du risque de contagion, qui est non seulement fonction du risque de crédit de chacun des emprunteurs, mais également de la dépendance entre ces risques. En effet, la dépendance est le facteur clé du risque de contagion, et affecte de façon significative l'évaluation et la gestion des risques.

Ce mémoire vise précisément à étudier le risque de contagion des défauts, à travers le développement de nouvelles copules pour modéliser la dépendance et leur application à l'évaluation de CDOs (*Collateralized Debt Obligations*). La principale contribution est l'introduction de copules hiérarchiques dynamiques, une combinaison des copules hiérarchiques et de copules dynamiques. En finance, les copules hiérarchiques sont typiquement utilisées pour représenter une dépendance plus forte entre les titres d'un même secteur, et plus faible entre les titres de secteurs différents. Les copules hiérarchiques permettent ainsi de modéliser de façon intuitive et parcimonieuse des structures de dépendance complexes. Quand à elles, les copules dynamiques sont des copules conditionnelles appliquées à la dépendance sérielle, ce qui signifie par exemple que le comportement de titres à une période donnée dépendent du comportement de ces mêmes titres à la période précédente. La nouveauté ne réside pas dans les copules hiérarchiques ou les copules dynamiques, mais bien dans leur combinaison en copules à la fois hiérarchiques et dynamiques. Ces dernières ajoutent

donc à la structure de dépendance des copules hiérarchiques une dimension sérielle. En plus de définir le concept, les propriétés des copules hiérarchiques dynamiques sont analysées, en particulier leur interprétation financière. À ce chapitre, trois variantes sont proposées, soit momentum de marché, momentum de titre et momentum de secteur. La plus intéressante est la variante appelée momentum de marché, qui permet de tenir compte d'une dépendance sérielle sur le marché, c'est-à-dire où le comportement de chacun des titres dépend de la même façon du comportement de tous les titres à la période précédente. C'est d'ailleurs précisément ce qui est observé sur le marché des CDS (*Credit Default Swap*), d'où la pertinence des copules hiérarchiques dynamiques. Finalement, une importante portion du mémoire est dédiée au développement d'algorithmes de simulation efficaces pour les nouvelles copules proposées. À ce chapitre, les algorithmes proposés sont rapides pour les copules hiérarchiques dynamiques à deux niveaux de 125 variables, la plus grande dimension testée pour l'application aux CDOs, mais limités à de faibles dimensions pour les copules hiérarchiques dynamiques à trois niveaux en raison du temps de simulation.

La seconde contribution importante du mémoire est de montrer la faisabilité d'utiliser les copules hiérarchiques dynamiques pour modéliser la dépendance entre le risque de crédit de plusieurs titres, et d'évaluer la pertinence de le faire. Plus précisément, les copules hiérarchiques dynamiques sont appliquées à l'évaluation de CDOs synthétiques, un dérivé de crédit dont la valeur des tranches est fortement liée au risque de contagion des défauts. Pour plus de détails concernant les CDOs, voir la section 4.1.3. Bien que les prix théoriques obtenus ne concordent pas parfaitement avec ceux du marché, l'exercice montre que les copules Gumbel et Gumbel hiérarchique fonctionnent mieux que les copules gaussiennes et Clayton. Cela confirme ainsi l'impact du choix des copules dans la modélisation du risque de crédit et plus particulièrement dans l'évaluation des dérivés de crédit. Par contre, l'impact sur les prix CDOs provient principalement de la copule choisie (Gumbel, gaussienne ou Clayton dans le mémoire) plutôt que de l'introduction d'une composante hiérarchique. Également, la composante dynamique introduit une trop grande volatilité dans les prix de CDOs avec les hypothèses retenues, mais d'autres avenues sont proposées afin de mieux tenir compte de la dépendance sérielle dans l'évaluation de CDOs.

La suite du mémoire comporte les chapitres suivants : revue de littérature, copules, application aux CDOs, résultats et analyse, discussion et finalement la conclusion. La revue de littérature résume plusieurs articles en lien avec le risque de crédit, le risque de contagion des défauts, ou les copules. Le chapitre sur les copules porte

principalement sur la définition, les propriétés et les méthodes de simulation des copules hiérarchiques dynamiques, ainsi que des copules qui servent de base à ces dernières. Le chapitre sur l'application aux CDOs décrit comme son nom l'indique la méthodologie utilisée pour l'évaluation de CDOs synthétiques, à partir de copules présentées au chapitre précédent. Le chapitre suivant, résultats et analyse, présente la performance des différentes méthodes de simulation développées en termes de temps de calcul, et les compare aux méthodes existantes pour des copules plus simples. Également, ce chapitre présente une brève analyse de dépendance dans les données de marchés CDS et compare les prix de CDOs théoriques selon différentes copules avec les prix de marchés. Finalement, une brève discussion et une conclusion closent le mémoire.

Chapitre 2

Revue de littérature

La revue de la littérature est divisée en trois sections : la première porte sur le risque de crédit d'un seul titre, la seconde porte sur le risque de crédit de plusieurs titres, et la troisième porte sur les copules, avec un accent sur les applications financières. Le risque de crédit et de contagion des défauts est couvert de façon générale, sans être restreint aux CDOs, et ce pour deux raisons. Premièrement, la principale difficulté dans l'évaluation de CDO réside dans l'évaluation du risque de crédit et du risque de contagion, les autres aspects faisant appel à des techniques bien établies. Deuxièmement, la majorité des articles sur le risque de crédit ne mentionnent aucunement les CDOs, et les articles classiques sont antérieurs à l'émergence plutôt récente des CDOs.

Dans tous les articles considérés, sauf mention contraire, il n'y a pas de coût de transaction, le marché est complet, on peut transiger en temps continu et par conséquent les actifs sont évalués à partir du principe de réplication.

2.1 Risque de crédit d'un seul titre

Cette section est un survol des principaux articles proposant des modèles pour le risque de crédit d'un seul titre, c'est-à-dire relié à une seule firme. Comme les modèles du risque de crédit d'un seul titre sont à la base des modèles du risque de crédit de plusieurs titres, il est utile de les couvrir mais seulement dans les aspects les plus importants. L'accent est donc mis sur les articles majeurs et qui sont fréquemment cités, plutôt que sur les nombreuses extensions et améliorations apportées par la

suite. Ces modèles sont généralement divisés en trois groupes : l'approche structurelle, l'approche par forme réduite, et l'approche hybride.

2.1.1 Approche structurelle

L'approche structurelle tire son nom du fait que dans ces modèles, le défaut provient directement de la structure de capital de la firme. L'idée à la base de l'approche structurelle est de modéliser l'évolution de la valeur des actifs de la firme dans le temps. Le défaut survient lorsque certaines conditions relatives à la valeur de la firme sont satisfaites. Par exemple, il y a défaut si la valeur des actifs atteint une borne inférieure prédéfinie. Les quatre premiers articles sont présentés en ordre chronologique puisqu'ils proposent des modèles de plus en plus complexes basés sur les précédents. Ils évaluent des obligations risquées en utilisant un cadre très semblable à celui utilisé par Black et Scholes. La valeur des actifs suit un mouvement brownien géométrique avec une volatilité constante et un taux d'intérêt constant et identique pour toutes les échéances. Le cinquième article considère un taux d'intérêt stochastique et la structure à terme associée. Comme il abonde dans une direction différente, il est présenté le dernier malgré la rupture de l'ordre chronologique.

Le premier article important est Merton (1974). Dans ce modèle, la dette de la firme est une obligation zéro-coupon. En conséquence, les actions sont équivalentes à une option d'achat européenne sur les actifs de la firme, dont le prix d'exercice est la valeur nominale de la dette, et dont l'échéance est celle de la dette. À l'échéance, si la valeur de la firme est supérieure ou égale à la dette, celle-ci est remboursée en totalité. Sinon, la valeur de la firme est inférieure à la dette, donc la firme fait défaut et les créanciers reçoivent la valeur de la firme.

Le modèle proposé par Black and Cox (1976) généralise celui de Merton (1974) de plusieurs façons, ce qui en augmente le réalisme. Alors que Merton (1974) ne considère que des flux monétaires à l'échéance, quatre types de paiements sont considérés dans Black and Cox (1976) :

- la valeur payée si la firme fait défaut avant l'échéance ;
- la valeur payée si la firme se réorganise avant l'échéance ;
- la valeur payée à l'échéance s'il n'y a pas eu défaut ou réorganisation ;
- les coupons, qui sont payés jusqu'au premier de ces événements : échéance, défaut ou réorganisation.

Dans la version la plus simple du modèle, la firme fait défaut si sa valeur atteint

la valeur nominale actualisée de la dette. Dans ce cas, les détenteurs d'obligations reçoivent la valeur de la firme. Le défaut peut donc survenir avant l'échéance, et cela donne lieu au premier type de paiement. Le deuxième type de paiement ressemble fort au premier. Si la valeur de la firme atteint une borne supérieure prédéterminée, la structure de capital de la firme est réorganisée et les détenteurs d'obligations reçoivent une valeur prédéterminée. Cela permet par exemple l'évaluation d'obligations convertibles. Le troisième type de paiement est le remboursement du capital à l'échéance. À noter que ces trois types de paiements sont mutuellement exclusifs. Le quatrième type de paiement est les coupons, payés en temps continu. L'inclusion de coupons constitue une généralisation du modèle de Merton (1974) qui ne considère que des obligations zéro-coupon. La valeur de l'obligation est la valeur actualisée des flux monétaires, sous la mesure risque neutre. Finalement, Black and Cox (1976) considère également des classes d'obligations senior et junior, les obligations seniors étant remboursées avant les obligations juniors selon des règles préétablies.

L'article Leland (1994) apporte plusieurs contributions intéressantes par rapport au modèle de Black and Cox (1976). Contrairement aux modèles précédents, celui-ci incorpore l'impôt corporatif et des coûts de faillite, ainsi qu'un seuil de défaut endogène plutôt qu'exogène. En effet, le modèle prédit la valeur des actifs où il est optimal pour les actionnaires de faire défaut sur les dettes. En cas de défaut, les détenteurs d'obligations reçoivent la valeur des actifs moins les coûts de faillite. En plus, contrairement aux autres modèles présentés jusqu'ici, ce modèle considère que la valeur de la firme dépend non seulement de la valeur des actifs, mais aussi de la structure de capital, des coûts de faillite et des économies d'impôt liées à l'endettement. Une des principales limites du modèle est qu'il ne considère que les dettes d'échéance infinie, et donc que la valeur des obligations ne dépend pas du temps. Le modèle est donc applicable seulement aux dettes à très long terme ou aux actions privilégiées.

Leland and Toft (1996) propose un modèle semblable à celui de Leland (1994). La principale amélioration est que les dettes peuvent avoir une échéance finie. Toutefois, le modèle suppose que la valeur nominale et le taux de coupon de la dette sont constants dans le temps. Cela implique que la dette est répartie uniformément sur une plage d'échéances variant entre zéro et une échéance maximale, et qu'elles ont toutes le même taux de coupon. Les dettes qui viennent à échéance sont renouvelées exactement aux mêmes conditions, avec l'échéance maximale.

La contribution principale de Longstaff and Schwartz (1995) est de relâcher l'hy-

pothèse peu réaliste d'un taux sans risque constant dans le temps et pour toutes les échéances. Il utilise pour l'évaluation d'obligations corporatives un processus de taux d'intérêt stochastique de Vasicek et la structure à terme des taux associée. Dans ce modèle, la corrélation entre l'évolution de la valeur de la firme et celle des taux d'intérêt est très importante. Quant au défaut, il survient si la valeur de la firme atteint une constante prédéterminée, et la valeur de la firme est alors répartie entre différentes classes d'obligations de façon prédéterminée.

En résumé, l'approche structurelle est intéressante sur le plan théorique car elle explique le défaut de façon intuitive et permet d'y rattacher des facteurs économiques tels la valeur de la firme, le risque de la firme à travers la volatilité des actifs, les taux d'intérêt, les coûts de faillite, l'impôt corporatif et les caractéristiques de la dette émise. De plus, tous les articles présentés proposent des formes fermées. Bien sûr ils comportent plusieurs simplifications, mais des extensions seraient possibles, pour inclure des taux d'intérêt stochastiques par exemple. Cependant, la recherche au sujet de l'approche structurelle n'est plus tellement active, et cette dernière est ardue à appliquer puisque la valeur de la firme est difficilement observable. De plus, l'approche structurelle n'explique pas bien certains phénomènes. En particulier, les défauts à court terme sont très improbables dans l'approche structurelle si la valeur des actifs est nettement supérieure au seuil de défaut. Il en résulte que les primes de risque de défaut à court terme prévues par les modèles structurels sont nettement inférieures à celles observées sur les marchés.

2.1.2 Approche par forme réduite

Alors que l'approche structurelle explique le défaut d'une firme par l'évolution de la valeur de ses actifs, dans l'approche par forme réduite le défaut survient de façon aléatoire et exogène, sans explication endogène. La clé n'est plus l'évolution de la valeur des actifs de la firme, mais bien la probabilité du défaut, ou encore l'intensité du défaut, c'est-à-dire le taux de défaut instantané. L'approche par forme réduite permet donc de régler les principaux problèmes de l'approche structurelle. Premièrement, elle évacue tous les problèmes liés à l'observation de la valeur des actifs de la firme, puisqu'ils ne font plus partie du modèle. Deuxièmement, étant donné que le défaut survient de façon imprévisible, il peut survenir à très court terme même si la firme est peu endettée, ce qui permet d'expliquer les écarts de crédit à court terme observés sur les marchés. De plus, les modèles peuvent correspondre aux données de marché, puisque l'intensité du défaut peut être calibrée à partir de celles-ci. Trois

articles sont présentés, dans l'ordre chronologique.

Le premier article de l'approche réduite est Jarrow and Turnbull (1995). Dans cet article, les auteurs proposent un modèle pour le prix d'une obligation risquée, avec une version en temps discret et une en temps continu. Dans la version en temps discret, le défaut peut survenir à la fin de chaque période avec une certaine probabilité. En cas de défaut, une fraction prédéterminée de la valeur nominale de l'obligation est récupérée à l'échéance. L'obligation est évaluée en tenant compte d'un modèle de taux d'intérêt et de la structure à terme associée, et en supposant que le risque de défaut est indépendant des taux d'intérêt. Pour un taux de recouvrement donné, la probabilité de défaut implicite peut être calculée pour chaque période à partir de données de marché. Dans la version en temps continu, le défaut suit une loi de Poisson d'intensité constante pour chaque période considérée. Le défaut peut donc survenir à n'importe quel moment, plutôt que seulement à la fin de chaque période.

L'article Jarrow et al. (1997) étend Jarrow and Turnbull (1995) en y introduisant les cotes de crédit des firmes. En effet, la cote de crédit de chaque firme évolue selon une chaîne de Markov à n états, allant par exemple de AAA à D , D étant l'état de défaut. L'intensité du défaut dépend de la cote de crédit de la firme, qui elle-même évolue de façon aléatoire. Sous la mesure de probabilité physique, la chaîne de Markov est homogène et les probabilités de transition sont posées égales aux probabilités de transition historiques. Cependant, pour obtenir des probabilités neutres au risque constantes dans le temps, des primes de risque variables sont introduites. La chaîne de Markov neutre au risque est donc non-homogène à cause des primes de risque. Pour un taux de recouvrement donné, les probabilités de transition neutres au risque et les primes de risque peuvent être calculées à partir de données de marché.

L'article de Duffie and Singleton (1999) comporte deux hypothèses centrales originales. Premièrement, il actualise les flux monétaires promis à un taux qui tient compte du risque de crédit, plutôt que d'actualiser à un taux sans risque des flux monétaires tenant compte du risque de crédit. En effet, les flux monétaires promis sont actualisés sous une mesure neutre au risque avec le taux $R_t = r_t + h_t L_t$. La variable r_t est le taux sans risque instantané, h_t l'intensité du défaut, et L_t la perte attendue en cas de défaut (entre 0 et 1). Le terme $h_t L_t$ est donc une prime pour le risque de crédit, et s'interprète comme un taux espéré de perte à cause des défauts. Les auteurs proposent différents modèles de retour à la moyenne pour les variables h_t et L_t , incluant des corrélations avec les taux d'intérêt, et calibrent le tout avec des données de marché. Les auteurs modélisent donc la structure à terme des écarts

de crédit, un peu comme les modèles de structure à terme des taux d'intérêt sans risque. Deuxièmement, Duffie and Singleton (1999) suppose que le taux de recouvrement exogène L_t s'applique à la valeur au marché de l'actif sujet au risque de crédit, plutôt qu'à sa valeur nominale. Cela semble adapté à des produits dérivés où le risque de crédit porte effectivement sur une valeur au marché et non sur une valeur nominale.

En résumé, l'approche par forme réduite semble très intéressante d'un point de vue pratique. L'idée principale est que le défaut survient de façon imprévisible avec une certaine intensité. Comme l'intensité du défaut peut être calibrée sur les données de marché, les modèles par forme réduite sont beaucoup plus flexibles que les modèles structurels. Par contre, contrairement à l'approche structurelle, l'approche par forme réduite a le désavantage de n'expliquer aucunement l'origine du défaut.

2.1.3 Approche hybride

Comme son nom le suggère, l'approche hybride combine quelque peu les approches structurelle et de forme réduite. L'idée est de créer des modèles où les défauts sont prévisibles jusqu'à un certain point, tout en laissant une composante imprévisible. Cela semble plus réaliste que de permettre seulement des défauts prévisibles ou seulement des défauts imprévisibles. Deux articles importants sont présentés.

L'article de Zhou (1997) présente un modèle dont l'hypothèse centrale est que la valeur de la firme suit un processus de diffusion avec sauts. Ce modèle ressemble aux modèles structurels classiques, mais l'introduction d'une composante de saut dans la dynamique de la valeur de la firme a des conséquences importantes. Premièrement, un saut dans la valeur de la firme est un élément imprévisible qui peut causer un défaut par surprise, comme dans l'approche par forme réduite. Toutefois, le défaut peut aussi survenir de façon prévisible, comme dans l'approche structurelle classique. Deuxièmement, la valeur de la firme après le défaut est aléatoire si le défaut survient à cause d'un saut. En effet, dans le modèle de Zhou (1997) comme dans l'approche structurelle, la firme fait défaut si sa valeur est inférieure ou égale à une borne inférieure prédéfinie K . Or, dans l'approche structurelle classique, la valeur de la firme évolue de façon continue dans le temps et donc la firme vaut nécessairement K au moment du défaut (sauf pour Merton (1974), où il y a défaut seulement à l'échéance et si la valeur de la firme est insuffisante; la valeur après défaut est donc aléatoire). Par contre, dans le modèle de Zhou (1997), un saut crée une discontinuité

dans l'évolution de la valeur de la firme, et celle-ci peut subitement passer sous la borne K et causer le défaut. Comme la valeur de la firme avant le défaut ainsi que l'amplitude du défaut sont aléatoires, la valeur de la firme après le défaut imprévisible est nécessairement aléatoire. Un autre élément original de ce modèle est que la valeur de recouvrement est aléatoire, puisque c'est une fonction déterministe de la valeur de la firme après le défaut, qui elle est aléatoire. Dans les autres modèles présentés jusqu'ici, la valeur de recouvrement est proportionnelle à la valeur de la firme, ou carrément égale à la valeur de la firme. Finalement, une version de ce modèle considère un taux d'intérêt sans risque constant, et une autre considère un taux d'intérêt sans risque suivant le modèle de Vasicek. Dans les deux cas, l'évaluation d'instruments financiers fait appel à la simulation Monte Carlo.

Dans Duffie and Lando (2001), les auteurs proposent un modèle qui est basé sur celui de Leland and Toft (1996). Comme pour ce dernier, ils tiennent compte des coûts de faillite et des impôts corporatifs, supposent que la firme choisit les paramètres de la dette afin de maximiser sa valeur, et supposent que la firme fait défaut à un seuil endogène qui maximise la valeur des actions. L'innovation apportée par Duffie and Lando (2001) est que contrairement aux modèles structurels, les créanciers ont une information imparfaite quant à la valeur des actifs. Ils peuvent observer la valeur des actifs seulement à intervalles discrets et avec une erreur aléatoire, ainsi que le défaut aussitôt qu'il survient. Les créanciers ne connaissent donc jamais la véritable valeur des actifs, sauf en cas de défaut ! Selon les hypothèses du modèle, ils connaissent par contre la distribution des erreurs d'observation et la dynamique de l'évolution des actifs entre les dates d'observation. Cela leur permet de calculer une distribution des valeurs de la firme dans le temps, qu'ils utilisent pour évaluer les probabilités de défaut. Ces incertitudes quant aux actifs de la firme introduisent des écarts de crédit à court terme, absents dans l'approche structurelle pure. Les auteurs affirment également que des créanciers pourraient utiliser des variables économiques facilement observables et en lien avec la valeur de la firme pour faire de l'inférence statistique sur l'évolution de la valeur des actifs entre les dates d'observation. Cela ouvre la porte à une foule de modèles dont l'intensité dépendrait de facteurs observables, qu'ils soient macroéconomiques ou reliés à la firme. Quoiqu'il en soit, ce modèle est très intéressant d'un point de vue théorique puisqu'il relâche une des hypothèses problématiques des modèles structurels, c'est-à-dire que les actifs sont observables parfaitement et en temps continu. Par contre, son application semble poser plusieurs problèmes. D'abord, et contrairement aux autres modèles vus jusqu'ici, le concept de réplification ne s'applique pas puisque la véritable valeur des actifs n'est pas observable

et encore moins transigeable. En conséquence, le marché est incomplet et les auteurs doivent poser l'hypothèse peu réaliste que les investisseurs sont neutres au risque pour justifier l'actualisation des flux monétaires au taux sans risque. Ensuite, les auteurs n'indiquent pas comment estimer la distribution de l'erreur sur la valeur des actifs vue par les créanciers, même si c'est un élément central du modèle. Finalement, en plus des problèmes d'application, rien n'indique si les écarts de crédit à court terme introduits sont réalistes ou non.

2.2 Risque de crédit de plusieurs titres

Cette section porte sur le risque de crédit associé à plusieurs titres. Pour le risque de crédit d'un portefeuille, ou pour des produits dérivés liés au crédit d'un panier d'actifs sous-jacents, la dépendance entre les défauts est cruciale. L'accent est donc mis sur la modélisation de la dépendance entre les défauts, et non sur le défaut des titres pris individuellement. La suite de cette section va comme suit. D'abord, les principaux modèles de dépendance sont présentés, et cela introduit les copules. Ensuite, l'importance du choix des copules est discutée, ce qui justifie le projet de recherche puisqu'il vise à développer un nouveau type de copule.

2.2.1 Principaux modèles

Comme pour les modèles de risque de crédit d'un seul titre, les modèles de risque de crédit de plusieurs titres comprennent des approches structurelle et par forme fermée. Dans l'approche structurelle, la dépendance peut être introduite sur la valeur des firmes. Dans l'approche par forme fermée, la dépendance peut être introduite sur les intensités de défaut ou encore sur les temps de défaut. La présente revue porte seulement sur l'approche par forme fermée avec dépendance sur les temps de défaut, puisqu'elle semble fonctionner mieux que les deux autres en pratique. Les autres approches devraient tout de même être incluses brièvement dans le mémoire. Les trois articles présentés sont parmi les plus importants et les plus cités.

Le premier article important est celui de Li (2000). L'auteur y souligne que les défauts sont influencés par la conjoncture économique et donc qu'ils sont corrélés de façon importante. En conséquence, il affirme que la dépendance entre les défauts est cruciale pour les produits dérivés ou les portefeuilles exposés au risque de crédit de plusieurs titres. Pour modéliser cette dépendance, l'auteur propose d'utiliser les

copules pour caractériser la dynamique conjointe des temps de défaut de différentes firmes. D'abord, en considérant n titres, il considère pour chaque firme $i = 1 \dots n$ une variable aléatoire τ_i qui est son temps de défaut. La fonction de répartition du temps de défaut τ_i peut être estimée à partir de données de marché, à la manière de Jarrow and Turnbull (1995) par exemple. Étant donné n fonctions de répartition d'une variable, il existe une infinité de fonctions de répartition conjointes possibles. Pour en construire une, l'auteur propose d'utiliser les copules. La copule spécifie la dépendance entre les temps de défaut, alors que les fonctions de répartition univariées spécifient les marges des temps de défaut. Il suffit donc de choisir une copule à n dimensions pour que la fonction de répartition à n dimensions soit complètement spécifiée. Pour la suite, les copules gaussiennes sont considérées, puisque c'est ce que le logiciel CreditMetrics utilise. Les paramètres de corrélation de la copule gaussienne sont calculés de façon à obtenir, pour chaque paire de titres, une probabilité jointe de défaut sur un an qui est supposée connue. L'auteur donne deux exemples simples d'applications. D'abord, il évalue un CDS sujet au risque de crédit de l'émetteur. À l'aide d'une copule gaussienne bivariée, il démontre l'impact de la corrélation entre le temps de défaut de l'actif sous-jacent au CDS et le temps de défaut de l'émetteur. Ensuite, il évalue un contrat d'assurance contre le premier défaut sur un panier de n titres. En supposant que l'intensité de défaut de ces titres est constante et identique, et que la corrélation est la même entre tous les titres, il montre que l'effet de la corrélation sur le prix du contrat d'assurance est important.

L'article de Schönbucher and Schubert (2001) considère un modèle très semblable à celui de Li (2000) et s'intéresse à son évolution dans le temps. En particulier, les auteurs analysent l'effet de l'état d'un titre (défaut ou non au temps t) sur les autres titres. Ils montrent qu'à moins d'indépendance entre les temps de défaut, l'apparition du défaut d'un titre cause un saut dans l'intensité de défaut des autres titres. De façon conséquente, l'écoulement du temps sans que ne survienne le défaut d'un titre fait graduellement changer l'intensité de défaut des autres titres. Pour illustrer, prenons l'exemple de deux titres avec une dépendance positive de leurs temps de défaut. Au temps $t = 0$, les intensités de défaut sont calibrées sur des données de marché. De plus, une copule pour la dépendance entre les temps de défaut est choisie et calibrée selon des données historiques, tel que suggéré dans l'article. Supposons qu'immédiatement avant l'instant t le premier titre n'a pas fait défaut. L'intensité de défaut du second titre au temps t est moindre que celle anticipée lors de la calibration, puisqu'elle est maintenant évaluée en tenant compte de la réalisation du non-défaut du premier titre. Par contre, si le premier titre fait défaut au temps

t , l'intensité de défaut du second titre doit être réévaluée conditionnellement au fait que le temps de défaut du premier titre est t . En conséquence, l'intensité du défaut du second titre augmentera par un saut, puisque le défaut du premier titre constitue une surprise et que la dépendance entre les temps de défaut est positive. En d'autres mots, le défaut du second titre devient soudainement plus probable avec le défaut du premier titre, puisqu'ils sont dépendants. En décrivant l'évolution conjointe du risque de crédit de n titres, le modèle proposé par Schönbucher and Schubert (2001) est tout à fait original et a plusieurs conséquences importantes. D'abord, le modèle explique théoriquement pourquoi, sur les marchés, le défaut d'un titre est suivi d'une augmentation des écarts de crédit sur d'autres titres. Ensuite, l'impact d'un défaut d'un seul titre sur un portefeuille ou un produit dérivé de crédit sur plusieurs titres n'est pas limité à ce seul titre : le risque de défaut des autres titres augmente et leurs écarts de crédit changent en conséquence, ce qui amplifie l'effet immédiat du défaut. C'est une dynamique de la contagion des défauts qui est plausible. Finalement, un modèle de risque de crédit d'un seul titre devrait inclure d'autres titres, ou du moins avoir un comportement semblable à celui impliqué par le modèle de Schönbucher and Schubert (2001). Malheureusement, l'article est incomplet puisque les auteurs ne réussissent pas à montrer que si l'intensité de défaut est calibrée individuellement sur chacun des titres, alors elle est aussi calibrée dans le modèle à n titres. De plus, l'article n'a pas été publié dans une revue scientifique.

Un autre article important est Laurent and Gregory (2003). Dans cet article, la dépendance entre les temps de défaut de plusieurs titres est fonction d'une variable aléatoire non observable, aussi appelée facteur. Ensuite, conditionnellement à la variable latente, les temps de défaut sont indépendants entre eux, ce qui simplifie beaucoup les calculs. Cette approche n'est pas nouvelle. L'innovation est que les auteurs proposent trois modèles de dépendance et les copules associées. Le premier est un modèle gaussien, le second un mélange gaussien, et le troisième une copule archimédienne. L'article développe également des formules semi-analytiques pour deux applications : un contrat d'assurance contre le $m^{\text{ième}}$ défaut parmi n titres, et des CDOs synthétiques. Pour les contrats d'assurances contre le $m^{\text{ième}}$ défaut, ils considèrent le cas de paniers de titres homogènes et le cas de titres non-homogènes. Des titres homogènes sont des titres ayant tous la même valeur nominale et le même taux de recouvrement, supposé exogène et déterministe, alors que des titres non-homogènes ont des valeurs nominales et des taux de recouvrement qui varient d'un titre à l'autre. Considérer des titres non-homogènes complexifie passablement l'évaluation des contrats d'assurance, puisqu'il ne suffit pas de considérer le nombre de

défauts. Il faut aussi tenir compte de l'identité des titres qui font défaut. Dans les deux cas, les probabilités de défaut peuvent varier d'un titre à l'autre. L'application aux CDOs considère des titres non-homogènes. Des prix de CDOs et de contrat d'assurance contre le $m^{\text{ième}}$ défaut sont présentés pour des copules gaussiennes et de Clayton, une copule archimédienne.

2.2.2 Importance du choix des copules

L'article Berrada et al. (2006) montre que le choix de la copule peut avoir un impact significatif sur le prix de dérivés de crédit. Le modèle proposé est essentiellement une extension multivariée de Jarrow et al. (1997). Chaque titre possède une cote de crédit qui évolue selon une chaîne de Markov en temps continu, et l'évolution jointe des cotes de crédit est décrite à l'aide de copules. En plus des copules gaussienne, de Student et de Clayton utilisées dans d'autres articles, les copules de Frank et Gumbel sont également considérées. De plus, les auteurs proposent une méthodologie pour calibrer le modèle sur des données de marché, ce qui n'est pas le cas des autres articles vus jusqu'ici. Comme les copules décrivent en fait la dépendance entre les temps de transition d'un état à l'autre, il n'y a pas suffisamment de données disponibles pour la calibration. Pour contourner ce problème, les auteurs suivent une approche déjà existante dans la littérature, soit l'utilisation des log-rendement des CDS comme proxy pour calibrer les copules. L'hypothèse sous-jacente est que les log-rendements d'un CDS sont fortement liés à la distribution du temps de défaut de celui-ci. Le temps de défaut est lui-même fortement lié au temps de transition entre les états. Le tout est appliqué à l'évaluation de contrats d'assurance contre le $m^{\text{ième}}$ défaut parmi un panier de n titres, en utilisant des données de marché. Les copules gaussienne et de Student donnent des résultats similaires, comme dans d'autres articles. Par contre, en considérant également les copules de Clayton, Frank et Gumbel, les variations de prix sont importantes d'une copule à l'autre, pour des obligations de cote élevée. Cet article justifie l'étude de différentes copules, afin de déterminer laquelle ou lesquelles sont les plus appropriées pour modéliser la dépendance entre le risque de défaut de plusieurs titres.

2.3 Copules et applications financières

Cette section présente des développements récents relatifs aux copules hiérarchiques et aux copules dynamiques. Celles-ci sont au coeur de mon projet de recherche, qui vise à combiner ces deux types de copules. Les quatre publications mentionnées ont une composante financière.

2.3.1 Copules hiérarchiques

L'article de Savu and Trede (2006) introduit les copules hiérarchiques archimédiennes de façon générale, en bâtissant sur des modèles hiérarchiques existants moins flexibles. Une des limites des copules archimédiennes est que dans une copule archimédienne à n dimensions, les n variables uniformes ont exactement la même structure de dépendance, c'est-à-dire que chacune des paires de variables a exactement la même dépendance que les autres. Le concept de copule archimédienne hiérarchique permet de créer une structure de dépendance beaucoup plus riche et flexible qu'avec une copule archimédienne classique. Par exemple, les auteurs modélisent l'évolution de l'action de 12 firmes réparties en trois secteurs différents (voir figure 2.1). Pour chacun des secteurs, une copule archimédienne est utilisée pour décrire la dépendance entre les actions des firmes de ce secteur. Puis, pour décrire la dépendance entre les trois secteurs, une autre copule archimédienne est utilisée. La copule hiérarchique de cet exemple peut comporter quatre structures de dépendance différentes : une structure de dépendance pour les actions d'un même secteur (donc trois différentes), et une structure de dépendance entre les secteurs. En effet, toutes les copules archimédiennes peuvent être de familles différentes et avoir un paramètre différent. Certaines restrictions s'appliquent toutefois, notamment que la dépendance à niveau hiérarchique donné soit plus faible que celle des niveaux inférieurs. Les copules hiérarchiques archimédiennes sont définies pour un nombre de dimensions n et pour un nombre de niveaux hiérarchiques l quelconques. Également, les auteurs montrent comment calculer les fonctions de densité, simuler et estimer les paramètres de chacune des copules archimédiennes composant la copule hiérarchique. La principale limite des méthodes proposées semble être que les calculs deviennent rapidement fastidieux lorsque le nombre de dimensions n ou de niveaux hiérarchiques l augmente.

L'article de Hofert and Scherer (2008) tente d'expliquer les prix de CDOs observés à l'aide de copules hiérarchiques archimédiennes similaires à celles utilisées dans Savu

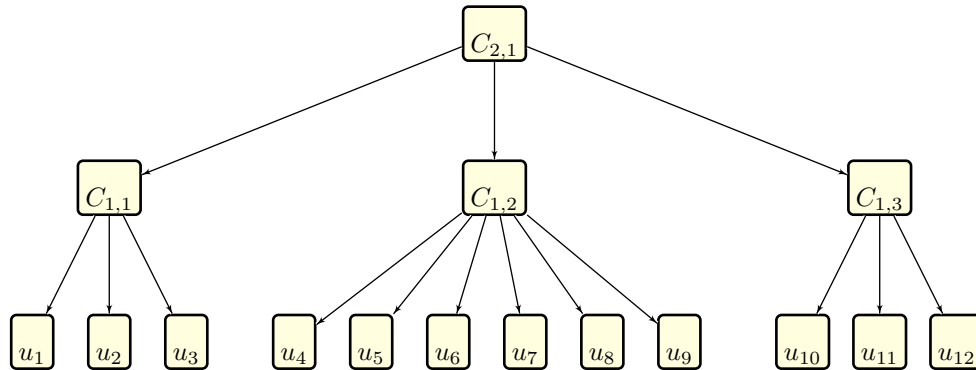


FIGURE 2.1 – Copule hiérarchique : exemple tiré de Savu and Tredde (2006)

and Tredde (2006). D’abord, la dépendance entre les temps de défaut des 125 firmes est modélisée par une copule hiérarchique à deux niveaux. Le premier niveau relie les titres d’un même secteur et le second niveau relie les secteurs ensemble, comme dans Savu and Tredde (2006). Pour faciliter la calibration de la copule hiérarchique, les copules sectorielles ont toutes le même paramètre (les générateurs utilisés ont un seul paramètre). La copule hiérarchique résultante ne comporte que deux paramètres, contre un seul pour une copule archimédienne classique, mais sa structure de dépendance est quand même beaucoup plus riche. Ensuite, la calibration vise à minimiser l’erreur entre les prix du modèle et les prix de marché des tranches de CDO. Finalement, la copule hiérarchique à 125 dimensions est simulée avec une méthode utilisant la transformée inverse de Laplace-Stieltjes et qui est complètement différente de celle proposée dans Savu and Tredde (2006). Cette approche n’est pas nouvelle mais semble mieux adaptée étant donné la dimension élevée de la copule. Les résultats montrent que l’introduction de la hiérarchie diminue l’erreur sur les prix des tranches de CDO pour toutes les copules testées. Celles qui performant le mieux, avec ou sans hiérarchie, sont la puissance de la copule de Clayton, la copule de Gumbel et la copule de Joe. En résumé, cet article démontre la faisabilité et la pertinence d’utiliser des copules hiérarchiques pour l’évaluation de CDOs.

L’article de Berg and Aas (2009) présente un autre type de copule hiérarchique qui est basée sur la spécification de la dépendance pour chacune des $n(n-1)/2$ paires de variables, n étant le nombre de variable. Une telle copule est donc construite à partir de $n(n-1)/2$ copules bivariées, appelées ici copules de base. Au premier niveau de la structure, on retrouve $n-1$ copules bivariées de base. Le second niveau comporte $n-2$ copules bivariées qui relient les $n-1$ copules du premier niveau,

et ainsi de suite jusqu'au niveau $n - 1$ qui comporte une seule copule. Il en résulte une structure dite en vigne qui est montrée à la figure 2.2 pour $n = 4$. Alors que les copules du premier niveau sont simplement des copules bivariées de base, les couples des niveaux supérieurs à un sont des copules conditionnelles construites de façon à inclure la dépendance entre les autres paires. La copule finale dépend non seulement des copules de base spécifiées, mais aussi de l'agencement de l'arbre, c'est-à-dire du choix des paires de variables dont la copule de base se retrouve au premier niveau. Berg and Aas (2009) donnent une formule générale pour la fonction de densité de la copule résultante. Également, les auteurs présentent un exemple d'application en finance, en modélisant l'évolution jointe de quatre titres. Dans ce cas, les copules hiérarchiques en vignes expliquent mieux les données que les copules hiérarchiques présentées dans Savu and Tiede (2006). Finalement, les auteurs affirment que les calculs sont beaucoup moins lourds avec les copules hiérarchiques en vigne que pour les copules hiérarchiques présentées dans Savu and Tiede (2006). En résumé, le principal avantage des copules hiérarchiques en vignes est la très grande flexibilité dans la spécification de la dépendance entre les paires de variables. Par contre, la dépendance jointe entre plus de deux variables ne peut être spécifiée : elle dépend à la fois des copules de base choisies et de l'ordonnement de la vigne, et pour cette raison son comportement semble difficile à cerner. De plus, l'affirmation des auteurs quant à la rapidité des calculs relativement à l'approche présentée par Savu and Tiede (2006) semble basée sur des tests avec $n = 4$ et pourrait ne pas tenir pour des dimensions plus grandes.

2.3.2 Copules dynamiques

Une partie du mémoire de Soustra (2006) étend le concept de copules dynamiques de une à n dimensions. Les copules dynamiques permettent de modéliser la dépendance sérielle de données, c'est-à-dire d'inclure de l'autocorrélation. D'abord, la présence de dépendance sérielle est montrée pour les corrélations implicites extraites des prix de CDOs synthétiques. Cela motive l'introduction de copules dynamiques multidimensionnelles et leur application éventuelle au risque de contagion des défauts. Ensuite, l'auteur considère un vecteur de n variables aléatoires uniformes U_t , dont la dépendance est décrite par une copule quelconque. Il pose que ce vecteur U_t dépend également de U_{t-1} , et introduit par le fait même une dépendance sérielle. Cela s'exprime également sous forme de copule conditionnelle de U_t , sachant U_{t-1} . De telles copules conditionnelles sont développées pour les copules gaussienne et archi-

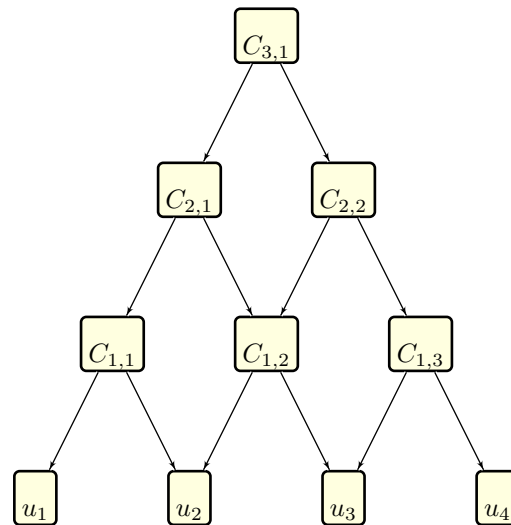


FIGURE 2.2 – Copule hiérarchique : exemple tiré de Berg and Aas (2009)

médienne. Dans tous les cas, les fonctions de densité conditionnelles sont données, ainsi qu'une méthodologie de simulation. La fonction à optimiser pour estimer les paramètres est également présentée pour les copules gaussienne et de Clayton, une copule archimédienne.

2.4 Conclusion

Cette revue de littérature résume d'abord les principaux articles traitant du risque de crédit d'un seul titre, afin de brosser un portrait général du sujet et de mettre la table pour les modèles de risque de crédit pour plusieurs titres. Les trois grandes approches sont couvertes, soit les approches structurelle, par forme réduite, et hybride. Ensuite, quelques articles importants proposant des modèles pour la gestion du risque de crédit de plusieurs titres sont présentés. Ces modèles sont de type forme fermée, et utilisent les copules sur les temps de défaut pour modéliser la dépendance entre le risque de crédit de différents titres. Puis, un article insistant sur l'impact du choix des copules est présenté, ce qui justifie l'introduction subséquente des concepts de copules hiérarchiques et de copules dynamiques. Ces deux types de copules sont au coeur de mon projet de recherche, et sont présentés en détail dans la méthodologie.

Chapitre 3

Copules

Ce chapitre traite des copules qui sont utilisées pour l'application aux CDOs au chapitre 4, et de quelques autres copules reliées. Plus précisément, on traite d'abord de plusieurs copules existantes : gaussiennes (3.1), gaussiennes dynamiques (3.2), archimédiennes (3.3), archimédiennes hiérarchiques (3.4) et archimédiennes dynamiques (3.5). Puis vient la partie maîtresse, soit le développement des copules archimédiennes hiérarchiques dynamiques (3.6). Pour chacune des copules présentées on donne la définition, une ou plusieurs méthodes de simulation et on discute des méthodes d'estimation de paramètres. Finalement, on décrit la méthode choisie pour l'estimation des paramètres à la section 3.8. Mais d'abord, on rappelle la définition d'une copule et quelques propriétés, et on introduit la notation utilisée.

Suivant la présentation de Rémillard (2010), une copule bivariée $C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$ est la fonction de répartition de deux variables aléatoires uniformes, ici U_1 et U_2 . En particulier, on a $C(u_1, 0) = 0$, $C(u_1, 1) = u_1$, $C(0, u_2) = 0$, $C(1, u_2) = u_2$. Selon le théorème de Sklar (Sklar (1959)), toute fonction de répartition jointe F des variables X_1 et X_2 , dont les fonctions de répartition (marges) sont F_1 et F_2 , s'écrit

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

où C est unique si les marges sont continues. Supposons que f_1 et f_2 soient les densités respectives des marges F_1 et F_2 , et c la densité de la copule C , alors on a les relations suivantes :

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2),$$

et

$$c(u_1, u_2) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))}{f_1(F_1^{-1}(u_1))f_2(F_2^{-1}(u_2))}.$$

La densité se calcule simplement $c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$. Finalement, la fonction de répartition de U_2 sachant U_1 se calcule comme suit : $P(U_2 \leq u_2 | U_1) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1}$. L'extension de toutes ces relations à une dimension supérieure à deux est immédiate.

Avant de passer aux différentes copules, la notation utilisée est introduite ci-dessous. Soit d titres dont on modélise le comportement. D'abord, on considère un vecteur de d variables aléatoires uniformes, $U = \{U_i\}, \forall i = 1 \dots d$, qui correspondent aux variations des titres à la période $t-1$. Ensuite, on considère un autre vecteur variables aléatoires uniformes, $V = \{V_i\}, \forall i = 1 \dots d$, qui correspondent aux variations des titres à la période t . On considère également deux séries de d variables réelles sur l'intervalle $[0, 1]$, soit $u = \{u_i\}, \forall i = 1 \dots d$ et $v = \{v_i\}, \forall i = 1 \dots d$. Une copule reliant les variables aléatoires U , associées aux titres d'une période donnée, est notée $C(u)$. De façon similaire, une copule reliant à la fois les variables aléatoires U et V , et donc les variables associées aux périodes $t-1$ et t , est notée $C(u, v)$. Aussi, les d titres sont répartis en s secteurs. Chaque secteur compte s_j titres, avec $s_j \geq 1, \forall j = 1 \dots s$ et $d = \sum_{j=1}^s s_j$. Les variables U s'indiquent soit $U_i, \forall i = 1 \dots d$, soit $U_{j,k}, \forall k = 1 \dots s_j, \forall j = 1 \dots s$ (idem pour V, u , et v).

3.1 Copules gaussiennes

3.1.1 Définition et propriétés

Les copules gaussiennes sont aussi appelées copules normales. Toujours suivant la présentation de Rémillard (2010), elles sont définies par :

$$C(u) = \Phi_d \{ \Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d) \}, \quad (3.1)$$

avec Φ la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite, et Φ_d la fonction de répartition d'une loi normale multivariée centrée à d dimensions dont la matrice de corrélation est définie par ρ , avec $\rho_{i,j}, \forall i, j = 1 \dots d$. Il s'agit simplement d'une

loi normale multivariée dont chacune des variables est ramenée sur l'intervalle $[0, 1]$. La densité d'une telle copule est :

$$c(u) = \frac{1}{|\rho|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\eta^\top (\rho^{-1} - I)\eta},$$

avec $\eta_i = \Phi^{-1}(u_i), i = 1 \dots d$. Les copules gaussiennes font partie des copules métriques elliptiques. Pour toutes les copules de cette famille, le tau de Kendall dépend directement de la corrélation :

$$\tau_{i,j} = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{ij}). \quad (3.2)$$

3.1.2 Simulation

La simulation découle directement de la définition donnée à l'équation 3.1. En effet, il suffit de simuler $Z \sim N(0, \rho)$ et de poser $U_i = \Phi(Z_i), i = 1 \dots d$.

3.2 Copules gaussiennes dynamiques

3.2.1 Définition et propriétés

Les copules gaussiennes dynamiques sont définies dans Soutra (2006), qui montre également plusieurs de leur propriétés et donne une méthode de simulation. La présentation ci-dessous s'en inspire donc fortement. Les copules gaussiennes dynamiques sont basées sur la forme inconditionnelle suivante :

$$C(u, v) = \Phi_{d_1+d_2} \left\{ \Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_{d_1}), \Phi^{-1}(v_1), \dots, \Phi^{-1}(v_{d_2}) \right\}, \quad (3.3)$$

avec une matrice de corrélation $R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$, où R_{11} est la matrice de corrélation de u , R_{22} la matrice de corrélation de v , et $R_{12} = R_{21}^\top$ la matrice de corrélation entre u et v , associés respectivement aux variations des titres aux périodes $t - 1$ et t . Ensuite, les copules dynamiques sont définies comme des copules conditionnelles, de la façon suivante :

$$C(v|u) = \frac{\partial_u C(u, v)}{\partial_u C(u, \mathbf{1})} = \frac{\partial_{u_1} \partial_{u_2} \dots \partial_{u_d} C(u, v)}{\partial_{u_1} \partial_{u_2} \dots \partial_{u_d} C(u, \mathbf{1})}. \quad (3.4)$$

Un des principaux résultats de Soustra (2006) est le théorème 4.2 qui énonce que la copule dynamique $C(v|u)$ est également une copule gaussienne, alors qu'une copule conditionnelle n'est pas une copule en général. Le théorème 4.2 indique également que la copule gaussienne obtenue est définie par la matrice de corrélation $\tilde{\Omega}$ de dimension $d_1 + d_2$ définie par $(\tilde{\Omega})_{ij} = \frac{\Omega_{ij}}{\sqrt{\Omega_{ii}\Omega_{jj}}}$, $\forall i, j = 1 \dots d_1 + d_2$, les Ω_{ij} étant les éléments de la matrice $\Omega = R_{11} - R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}$.

De façon générale, pour qu'une copule dynamique soit effectivement une copule et que la suite de variable aléatoire qu'elle décrit soit stationnaire, on doit avoir :

$$c(u) = \int_{[0,1]^d} c(u, v) dv = \int_{[0,1]^d} c(v, u) dv.$$

Cette condition est énoncée dans Rémillard et al. (2010). Elle est trivialement satisfaite pour $d = 1$. Pour d quelconque, une condition suffisante est simplement que $c(u, v) = c(v, u)$. Les copules gaussiennes dynamiques respectent cette condition en autant que $d_1 = d_2$ et que $R_{11} = R_{22}$. Avec des restrictions semblables, les copules archimédiennes dynamiques et archimédiennes hiérarchiques dynamiques traitées dans ce chapitre respectent également cette condition suffisante.

3.2.2 Simulation

Toujours suivant Soustra (2006), pour simuler des séries chronologiques suivant de telles copules, il faut d'abord simuler les variables à $t = 0$, en simulant $C(u, v = \mathbf{1})$. Ensuite, pour chacune des périodes subséquentes il faut simuler $C(v|u)$, ou encore $C(v_1, \dots, v_d | u_1, \dots, u_d) = P(V_1 \leq v_1, \dots, V_d \leq v_d | U_1 = u_1, \dots, U_d = u_d)$.

Dans le cas des copules dynamiques gaussiennes, on peut simuler $C(v|u)$ avec l'algorithme suivant :

- Simuler $Z \sim N(0, \Omega)$, avec $\Omega = R_{11} - R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}$;
- Calculer $X = Z + BU$, avec $B = R_{21}R_{11}^{-1}$;
- Calculer $V_i = \Phi(X_i)$, $\forall i = 1 \dots d$.

3.3 Copules archimédiennes

3.3.1 Définition et propriétés

Les copules archimédiennes sont intéressantes car elles permettent de représenter des formes de dépendance différentes des copules gaussiennes, dont certaines sont mieux adaptées à des applications financières telles le risque de crédit. Leur principale limitation est leur manque de flexibilité puisque toutes les paires de variables ont la même dépendance, mais ce défaut est en bonne partie éliminé avec les copules archimédiennes hiérarchiques (voir la section 3.4). Les copules de famille archimédienne sont définies ainsi pour une dimension d :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \phi(u_i) \right) \quad (3.5)$$

avec le générateur ϕ qui satisfait aux conditions suivantes (Rémillard (2010)) :

- $\phi : [0, 1] \mapsto [0, \phi(0)]$ décroissante, avec $\phi(1) = 0$ et possiblement $\phi(0) = \infty$;
- pour tout $0 < s < \phi(0)$ et pour tout $1 \leq k \leq d$, $(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial s^k} \phi^{-1}(s) > 0$.

Si la seconde condition est satisfaite pour tout $d \in \mathbb{N}$, alors le générateur est complètement monotone et la copule existe pour toute dimension. Il existe plusieurs copules archimédiennes, dont les plus connues sont la copule de Clayton, Gumbel, Frank et Ali-Mikhail-Haq. Pour ce mémoire, on utilise principalement la copule de Gumbel, car elle est facile à simuler en version hiérarchique (suivant McNeil (2008)) et car elle est bien adaptée aux applications financières (selon Hofert and Scherer (2008)). On utilise également la copule de Clayton dans quelques cas. Les copules de Clayton et de Gumbel sont décrites brièvement au tableau 3.1. Les plages de paramètres présentées sont celles qui donnent une dépendance positive, puisque c'est ce à quoi l'on s'intéresse pour l'application financière. En appliquant la définition des copules archimédiennes de l'équation 3.5 avec les générateurs du tableau 3.1, l'on obtient les copules de Clayton et Gumbel sous la forme présentée aux équations 3.6 et 3.7 respectivement.

$$C(u_1, \dots, u_d) = \left(1 - d + \sum_{i=1}^d (u_i)^{-\theta} \right)^{-1/\theta} \quad (3.6)$$

TABLE 3.1 – Définition des copules Clayton et Gumbel

Caractéristique	Clayton	Gumbel	Référence
Générateur $\phi(t)$	$\frac{t^{-\theta}-1}{\theta}$	$(-\ln t)^{1/\theta}$	Nelsen (2006)
Inverse du générateur $\phi^{-1}(s)$	$(1 + \theta s)^{-1/\theta}$	e^{-s^θ}	na
Plage de paramètre	$(0, \infty)$	$(0, 1]$	Rémillard (2010)
Tau de Kendall τ	$\frac{\theta}{\theta+2}$	$1 - \theta$	Rémillard (2010)
Inverse du tau de Kendall $\theta(\tau)$	$\frac{2\tau}{1-\tau}$	$1 - \tau$	na

$$C(u_1, \dots, u_d) = \exp \left\{ - \left(\sum_{i=1}^d (-\ln u_i)^{1/\theta} \right)^\theta \right\} \quad (3.7)$$

3.3.2 Simulation

La méthode proposée dans Marshall and Olkin (1988) est largement utilisée pour simuler les copules archimédiennes. Cependant, elle n'est applicable que si l'inverse du générateur est complètement monotone, ce qui est le cas lorsque le tau de Kendall est positif. En effet, la méthode de Marshall and Olkin (1988) fait intervenir la transformée de Laplace inverse de l'inverse du générateur, qui n'existe que si l'inverse du générateur est complètement monotone. Or, cette condition est remplie si le tau de Kendall est positif. Le cheminement menant à l'algorithme est expliqué ci-dessous, en s'inspirant principalement de McNeil (2008). D'abord, soit $G(z) = L^{-1} \{ \phi^{-1}(s) \}$ la transformée de Laplace inverse de l'inverse du générateur. On a donc :

$$\phi^{-1}(s) = \int_0^\infty e^{-zs} dG(z), s \geq 0.$$

En partant de la définition des copules archimédiennes (équation 3.5), on peut écrire :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \phi^{-1}(s), s = \sum_{i=1}^d \phi(u_i).$$

En remplaçant $\phi^{-1}(s)$ par la transformée de Laplace, on obtient :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_0^\infty e^{-z \sum_{i=1}^d \phi(u_i)} dG(z),$$

TABLE 3.2 – Facteur latent pour l’algorithme de Marshall and Olkin (1988)

Copule	Distribution du facteur latent	Référence
Clayton	$Z \sim \text{Gamma}(1/\theta, 1)$	Rémillard (2010)
Gumbel	$Z \sim \text{Stable}^+(\theta)$	Rémillard (2010)

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_0^\infty \left\{ \prod_{i=1}^d e^{-z\phi(u_i)} \right\} dG(z).$$

Puis, on pose $F(t; z) = e^{-z\phi(t)}$ et l’on obtient :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_0^\infty \left\{ \prod_{i=1}^d F(u_i; z) \right\} dG(z).$$

Finalement, on interprète le tout avec $F(u_i; z) = P(U_i \leq u_i | Z = z)$ et une méthode de simulation apparaît à travers l’équation suivante :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_0^\infty \left\{ \prod_{i=1}^d P(U_i \leq u_i | Z = z) \right\} dG(z).$$

En effet, cette écriture signifie que conditionnellement à un facteur latent $Z \sim G(z)$, les $F(U_i; Z)$ sont indépendants. Avec $F^{-1}(t; z) = \phi^{-1}(-\ln(t)/z)$, l’algorithme de simulation va comme suit :

- Simuler le facteur latent $Z \sim G(z)$;
- Simuler les variables uniformes indépendantes $W_i, \forall i = 1 \dots d$;
- Calculer $U_i = \phi^{-1}(-\ln(W_i)/Z), \forall i = 1 \dots d$.

Dans le contexte de ce travail, cet algorithme est intéressant pour plusieurs raisons. D’abord, il est très simple, assumant que l’on peut simuler la distribution G , qui est la transformée de Laplace inverse de l’inverse du générateur. Pour plusieurs copules, dont les copules de Clayton et Gumbel, la distribution G est connue ainsi que des méthodes pour la simuler (voir le tableau 3.2). Il faut néanmoins que le tau de Kendall soit positif, ce qui est le cas pour notre application. Ensuite, l’algorithme de Marshall and Olkin (1988) est tout indiqué pour de grandes dimensions puisqu’une fois que le facteur latent est simulé, le coût de la simulation est linéaire en d . En effet, l’algorithme exploite la symétrie de la copule archimédienne par rapport au facteur latent.

3.3.3 Estimation

Pour la copule de Clayton, la densité est facilement calculable analytiquement à partir de sa définition (voir l'équation 3.6), même en grande dimensions :

$$c(u_1, \dots, u_d) = \left(\prod_{i=0}^{d-1} (1 + i\theta) \right) \left(\prod_{i=1}^d u_i^{-\theta-1} \right) \left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\theta} - d + 1 \right)^{-1/\theta-d}. \quad (3.8)$$

Par conséquent, le paramètre θ peut être calculé à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance.

3.4 Copules archimédiennes hiérarchiques

3.4.1 Définition et propriétés

Les copules archimédiennes hiérarchiques définies par Savu and Tiede (2006) offrent une flexibilité qui fait défaut aux copules archimédiennes classiques. En effet, elles permettent de modéliser une dépendance plus forte entre les titres d'un même secteur en les regroupant dans la même copule archimédienne, et moins forte entre les titres de secteurs différents en les reliant par une autre copule archimédienne. Cette approche apparaît donc toute indiquée pour des applications financières, puisque intuitivement elle reflète ce que l'on s'attend à observer sur les marchés. Les copules archimédiennes hiérarchiques permettent donc de modéliser la dépendance entre un grand nombre de titres de façon flexible et intuitive, le tout avec peu de paramètres. Quant à elles, les copules hiérarchiques définies par Berg and Aas (2009) permettent encore plus de flexibilité, mais celle-ci ne semble pas nécessaire du tout pour une application financière telle que le risque de crédit de nombreux titres. Au contraire, la flexibilité est tellement grande que l'utiliser signifierait vraisemblablement sur-calibrer le modèle aux données. De plus, l'approche de Berg and Aas (2009) semble excessivement lourde pour des grandes dimensions, puisque pour d titres elle nécessite $d - 1$ niveaux.

La figure 3.1 montre un exemple simple des copules archimédiennes hiérarchiques définies par Savu and Tiede (2006), et sert à illustrer quelques propriétés. Cette copule peut s'écrire

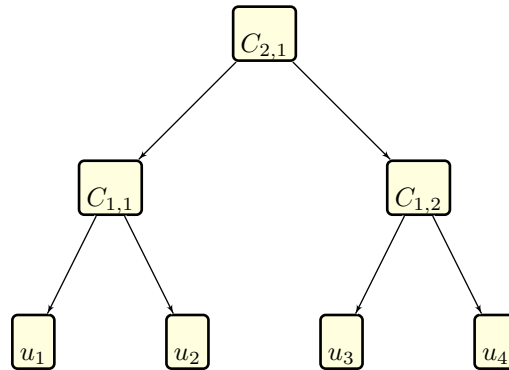


FIGURE 3.1 – Copule hiérarchique de Savu and Tredre (2006), en quatre dimensions

$$C(u_1, u_2, u_3, u_4) = C_{2,1}(C_{1,1}(u_1, u_2), C_{1,2}(u_3, u_4)).$$

La dépendance entre u_1 et u_2 est entièrement déterminée par $C_{1,1}$, puisque

$$C(u_1, u_2, 1, 1) = C_{1,1}(u_1, u_2).$$

De façon plus générale, la dépendance entre les variables aléatoire appartenant à la même copule archimédienne est décrite par cette copule archimédienne. Également, la dépendance entre u_1 et u_3 est entièrement déterminée par $C_{2,1}$:

$$C(u_1, 1, u_3, 1) = C_{2,1}(u_1, u_3).$$

De la même façon, la dépendance entre toute paire de variables aléatoires provenant de copules archimédiennes différentes est décrite exclusivement par la copule $C_{2,1}$. Toutefois, si une copule hiérarchique archimédienne est composée de copules archimédiennes identiques (même générateur et même paramètre θ), alors la copule hiérarchique est en fait une copule archimédienne classique de paramètre θ . Les copules hiérarchiques archimédiennes généralisent donc les copules archimédiennes classiques.

Dans le cas général à deux niveaux, les copules archimédiennes hiérarchiques sont définies de la façon suivante :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \phi_0^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^s \phi_0 \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right) \right\} \quad (3.9)$$

avec les générateurs ϕ_0 et $\phi_j, \forall j = 1 \dots s$ qui satisfont aux conditions des générateurs des copules archimédiennes (voir la section 3.3), ainsi qu'aux conditions suivantes (mentionnées dans McNeil (2008)) : pour tout $0 \leq t \leq 1$ et pour tout $1 \leq k \leq d$, $(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \phi_0 \circ \phi_j^{-1}(t) > 0, \forall j = 1 \dots s$. Le modèle défini pourrait facilement être étendu à plus de deux niveaux, pour subdiviser les secteurs en sous-secteurs par exemple.

Par exemple, la combinaison Gumbel-Gumbel est valide en autant que $\theta_0 > \theta_j, \forall j = 1 \dots s$ et la combinaison Clayton-Clayton est valide si $\theta_0 < \theta_j, \forall j = 1 \dots s$. Dans les deux cas la condition est équivalente à $\tau_0 < \tau_j, \forall j = 1 \dots s$, c'est-à-dire que la dépendance soit plus faible entre les secteurs qu'entre les titres d'un même secteur, ce qui ne pose pas problème. Par contre, les combinaisons Gumbel-Clayton ou Clayton-Gumbel ne satisfont pas aux conditions de validité, et c'est malheureusement le cas de la plupart des combinaisons de générateurs. Pour une liste de combinaisons valides, incluant les conditions de validité sur les paramètres, voir Hofert (2007).

3.4.2 Simulation

Pour simuler les copules archimédiennes hiérarchiques, l'approche indiquée est celle proposée par McNeil (2008), qui est basée sur celle de Marshall and Olkin (1988) qu'on utilise pour les copules archimédiennes. Comme cette dernière, l'approche de McNeil (2008) est très intéressante pour de grandes dimensions et c'est pourquoi on la retient. Elle requiert que $\phi_0^{-1}(s)$ et $\phi_j^{-1}(s), \forall j = 1 \dots s$ soient complètement monotones, comme pour l'approche de Marshall and Olkin (1988), et en plus que $\phi_0 \circ \phi_j^{-1}(t), \forall j = 1 \dots s$ soient complètement monotones (McNeil (2008)). Elle reprend essentiellement le même développement, présenté ici pour une copule hiérarchique à deux niveaux. Le développement part de la définition des copules archimédiennes hiérarchiques (équation 3.9) :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \phi_0^{-1}(s), s = \sum_{j=1}^s \phi_0 \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)$$

Avec $G_0(z_0)$ la transformée de Laplace inverse de $\phi_0^{-1}(s)$, on écrit :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_0^\infty e^{-z_0 \sum_{j=1}^s \phi_0 \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)} dG_0(z_0), \quad (3.10)$$

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^s e^{-z_0 \phi_0 \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)} \right\} dG_0(z_0),$$

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^s H_j(u_{j,1}, \dots, u_{j,s_j}; z_0) \right\} dG_0(z_0) \quad (3.11)$$

avec

$$H_j(u_{j,1}, \dots, u_{j,s_j}; z_0) = e^{-z_0 \phi_0 \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)}.$$

On pose $F(t; z_0) = e^{-z_0 \phi_0(t)}$ et l'on obtient :

$$H_j(u_{j,1}, \dots, u_{j,s_j}; z_0) = F \left\{ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right); z_0 \right\}.$$

Puis on pose $\psi_j^{-1}(s; z_0) = F \left(\phi_j^{-1}(s); z_0 \right) = e^{-z_0 \phi_0 \circ \phi_j^{-1}(s)}$ et on trouve :

$$H_j(u_{j,1}, \dots, u_{j,s_j}; z_0) = \psi_j^{-1} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right); z_0 \right\}. \quad (3.12)$$

On peut appliquer ici l'idée de Marshall and Olkin (1988) de nouveau pour écrire, avec $G_j(z_j; z_0)$ la transformée de Laplace inverse de $\psi_j^{-1}(s; z_0)$:

$$H_j(u_{j,1}, \dots, u_{j,s_j}; z_0) = \int_0^\infty e^{-z_j \sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k})} dG_j(z_j; z_0).$$

En remplaçant l'expression de H_j dans l'équation 3.11, on obtient

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_{\mathbb{R}_+^{s+1}} e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} z_j \phi_j(u_{j,k})} \left\{ \prod_{j=1}^s dG_j(z_j; z_0) \right\} dG_0(z_0).$$

Il en découle l'algorithme de simulation suivant (McNeil (2008)) :

- Simuler le facteur latent $Z_0 \sim G_0(z_0)$;

- Pour chacun des secteurs, c'est-à-dire $\forall j = 1 \dots s$:
 - Simuler le facteur latent $Z_j|Z_0 \sim G_j(z_j; z_0)$;
 - Pour chacune des variables, c'est-à-dire $\forall k = 1 \dots s_j$:
 - Simuler la variable uniforme indépendante $W_{j,k}$;
 - Calculer $U_{j,k} = \phi_j^{-1}(-\ln(W_{j,k})/Z_j)$.

Étant donné la nature récursive de l'algorithme, il permet de simuler des copules de plus de deux niveaux hiérarchiques. Les conditions énoncées pour la validité des copules hiérarchiques à deux niveaux s'appliquent alors à chacun des niveaux récursifs.

Il existe un second algorithme de simulation, plutôt semblable. En repartant de l'équation 3.12, on peut écrire $H_j(u_j, z_0)$ comme une copule archimédienne de générateur $\psi_j(t, z_0)$:

$$H_j(u_{j,1}, \dots, u_{j,s_j}; z_0) = \psi_j^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{s_j} \psi_j(F(u_{j,k}; z_0); z_0); z_0 \right\},$$

puisque $\psi_j(t; z_0) = \phi_j \circ F^{-1}(t; z_0)$ et $\psi_j(F(t; z_0); z_0) = \phi_j(t)$.

Le second algorithme de simulation est donc basé sur cette expression :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^s C_j^*(F(u_{j,1}; z_0), \dots, F(u_{j,s_j}; z_0); z_0) \right\} dG_0(z_0),$$

avec $C_j^*(u_j; z_0)$ une copule de générateur $\psi_j(t; z_0)$, que l'on appellera copule interne. L'algorithme, également de McNeil (2008), est le suivant :

- Simuler le facteur latent $Z_0 \sim G_0(z_0)$;
- Pour chacun des secteurs, c'est-à-dire $\forall j = 1 \dots s$:
 - Simuler les variables uniformes $(W_{j,1}^*, \dots, W_{j,s_j}^*) \sim C_j^*(u_{j,1}, \dots, u_{j,s_j}; z_0)$;
 - Calculer $U_{j,k} = \phi_0^{-1}(-\ln(W_{j,k}^*)/Z_0), \forall k = 1 \dots s_j$.

Avec la méthode de Marshall and Olkin (1988), on peut également développer la seconde étape pour obtenir :

- Simuler le facteur latent $Z_0 \sim G_0(z_0)$;
- Pour chacun des secteurs, c'est-à-dire $\forall j = 1 \dots s$:
 - Simuler le facteur latent $Z_j \sim G_j(z_j; z_0)$;
 - Pour chacune des variables, c'est-à-dire $\forall k = 1 \dots s_j$:

- Simuler la variable uniforme indépendante $W_{j,k}^*$;
- Calculer $W_{j,k} = \psi_j^{-1}(-\ln(W_{j,k}^*)/Z_j; Z_0)$;
- Calculer $U_{j,k} = \phi_0^{-1}(-\ln(W_{j,k})/Z_0)$.

Dans les deux algorithmes présentés, le problème qui demeure est de trouver la transformée de Laplace inverse de l'inverse du générateur, c'est-à-dire $G_j(z_j; z_0) = L^{-1}\left(\psi_j^{-1}(t; z_0)\right)$, et être en mesure de la simuler. Dans la majorité des cas, aucune solution analytique n'est connue.

Tout de même, McNeil (2008) indique comment simuler deux cas : Gumbel-Gumbel et Clayton-Clayton. Dans le cas d'une combinaison de générateurs Gumbel, on trouve $\psi_j^{-1}(s; z_0) = e^{-z_0 s^{\alpha_j}}$ avec $\alpha_j = \theta_j/\theta_0$. Afin de simuler la distribution associée à sa transformée de Laplace inverse, on utilise le fait que $\psi_j^{-1}(s; z_0) = e^{-z_0 s^{\alpha_j}} = \phi_j^{-1}\left(z_0^{1/\alpha_j} s\right)$ avec ϕ_j^{-1} le générateur inverse Gumbel de paramètre α_j . On simule donc une loi stable positive de paramètre α_j , et on multiplie le résultat par Z_0^{1/α_j} . C'est la méthode utilisée dans le premier algorithme, où on simule directement les $U_{j,k}$. Dans l'autre algorithme, on simule la copule interne qui est en fait une Gumbel de paramètre α_j , en autant que $\theta_j > \theta_0$. En effet, son générateur inverse est équivalent à $\psi_j^{-1}(s) = e^{-s^{\alpha_j}}$, puisque les générateurs inverses $\phi^{-1}(s)$ et $\phi^{-1}(ks)$ sont équivalents pour tout $k > 0$ (McNeil (2008)). Dans ce cas particulier la copule interne ne dépend pas donc du facteur latent z_0 . Le tableau 3.3 résume l'information quant à la simulation des facteurs latents.

Dans le cas d'une combinaison de générateurs Clayton, on a besoin des générateurs «tilted» pour la simulation. L'inverse d'un générateur «tilted» est $\varphi^{-1}(s, v) = \psi^{-1}(s + v)/\psi^{-1}(v)$. La distribution associée à sa transformée de Laplace inverse a une densité égale à la densité de $L^{-1}\{\psi^{-1}(s)\}$ multipliée par $e^{-vs}/\psi^{-1}(v)$. Pour une Clayton-Clayton, on trouve $\psi_j^{-1}(s; z_0) = e^{-\frac{z_0}{\theta_0}\{(1+\theta_j s)^{\theta_0/\theta_j} - 1\}}$, qui s'exprime à l'aide de générateur «tilted» $\psi_j^{-1}(s; z_0) = \varphi^{-1}(s\theta_j v, v)$, avec $v = (z_0/\theta_0)^{\theta_j/\theta_0}$ et $\psi^{-1}(s) = e^{-s^{\theta_0/\theta_j}}$. Comme $\psi^{-1}(s)$ est le générateur inverse Gumbel de paramètre $1/\alpha_j$, la distribution associée à sa transformée de Laplace inverse est une loi Stable de même paramètre. Pour simuler le tout, on simule d'abord une loi Stable «tilted» par une méthode de rejet, puis on multiplie le résultat par $\theta_j(z_0/\theta_0)^{\theta_j/\theta_0}$ (en fait on peut laisser tomber quelques facteurs, comme au tableau 3.3). Selon McNeil (2008) et l'expérience de ce mémoire, celle-ci est toutefois lente pour certaines valeurs de z_0 et de α_j en raison d'un haut taux de rejet. Enfin, selon Hofert (2007) la seule combinaison pour laquelle la simulation de copules archimédiennes hiérarchiques est

TABLE 3.3 – Simulation des facteurs latents des copules archimédiennes hiérarchiques

Copule	Simulation du facteur Z_0	Simulation du facteur Z_j
Clayton-Clayton	$\text{Gamma}(1/\theta_0, 1)$	$Z_0^{\alpha_j} * \text{Stable}^+(1/\alpha_j; Z_0^{\alpha_j})$ (Stable^+ «tilted» par $Z_0^{\alpha_j}$)
Gumbel-Gumbel (sans copules internes)	$\text{Stable}^+(\theta_0)$	$Z_0^{1/\alpha_j} * \text{Stable}^+(\alpha_j)$
Gumbel-Gumbel (avec copules internes)	$\text{Stable}^+(\theta_0)$	$\text{Stable}^+(\alpha_j)$

faisable pour de grandes dimensions est Gumbel-Gumbel.

La méthode de rejet permet de simuler une variable ayant une densité proportionnelle à $f(z)g(z)$, en autant que l'on puisse simuler une variable ayant une densité proportionnelle à $f(z)$. L'algorithme est le suivant :

- Simuler Z de densité proportionnelle à $f(z)$;
- Simuler une variable uniforme W indépendante de Z ;
- Accepter Z si $\bar{g}W < g(Z)$, sinon reprendre à la première étape.

À noter que \bar{g} doit borner supérieurement la fonction g sur le domaine de z . Évidemment, on cherche autant que possible à utiliser $\bar{g} = \max\{g(z)\}$ afin de réduire le taux de rejet au minimum. Pour la simulation de copules hiérarchiques Clayton-Clayton, on assimile la fonction f à la loi Stable positive de paramètre $1/\alpha_j$. Ensuite, on pose $g(z) = e^{-vz}$ avec $v = z_0^{\alpha_j/\alpha_0}$, dont le maximum est $\bar{g} = 1$.

3.5 Copules archimédiennes dynamiques

3.5.1 Définition et propriétés

Les copules archimédiennes dynamiques présentées dans Soustra (2006) sont définies de la façon suivante :

$$C(v|u) = \frac{\partial_u C(u, v)}{\partial_u C(u, \mathbf{1})} = \frac{\partial_{u_1} \partial_{u_2} \dots \partial_{u_d} C(u, v)}{\partial_{u_1} \partial_{u_2} \dots \partial_{u_d} C(u, \mathbf{1})}. \quad (3.13)$$

avec $C(u, v)$ de générateur $\phi(t)$, u étant associé aux variations des titres à la période $t - 1$ et v à celles des mêmes titres à la période t . Elles mettent donc en relations des variables à des temps différents, et permettent de modéliser des séries chronologiques.

Toutefois, elles ne sont pas adaptées à des applications financières multivariées en raison du manque de flexibilité des copules archimédiennes. En effet, comme les copules archimédiennes ne permettent qu'une seule structure de dépendance entre toutes les variables, dans une copule dynamique archimédienne la variable V_i a la même dépendance à $V_{l \neq i}$ qu'à U_l , $\forall i = 1 \dots d, l = 1 \dots d$. Pour une application financière, cela signifie que le rendement du titre i à la période t dépend autant du rendement du titre j à la période t , que du rendement du titre i ou même l à la période $t - 1$. Intuitivement, ce n'est pas ce que l'on s'attend à observer sur les marchés. En effet, le rendement d'un titre i à la période t devrait dépendre davantage du rendement des autres titres à la même période que du rendement de l'ensemble des titres à la période $t - 1$. Ce manque de flexibilité sera réglé avec l'introduction des copules archimédiennes hiérarchiques dynamiques à la section 3.6. Les copules archimédiennes dynamiques sont malgré tout présentées ici comme fondement des copules archimédiennes hiérarchiques dynamiques et puisque les algorithmes de simulation sont dérivés de façon similaire.

3.5.2 Simulation

Dans cette partie on traite les copules archimédiennes dynamiques de façon générale, en considérant que u et v n'ont pas nécessairement la même dimension. En effet, on considère ici les variables U et V de dimensions d_1 et d_2 respectivement, qui suivent une copule archimédienne $C(u, v)$ de générateur $\phi(t)$.

Il est montré dans Soustra (2006) qu'une copule archimédienne dynamique $C(v|u)$ de générateur $\phi(t)$ est en fait une copule archimédienne de générateur différent, lequel dépend de $\phi(t)$ et de u . Sur cette base, un algorithme de simulation est donné dans le cas Clayton et dans le cas général ($\phi(t)$ quelconque). Toutefois, on présente ici un algorithme différent, inspiré des développements effectués dans Rémillard et al. (2010). D'abord, on écrit la copule inconditionnelle comme une transformée de Laplace :

$$C(u, v) = \int_0^\infty e^{-z(\sum_{i=1}^{d_1} \phi(u_i) + \sum_{i=1}^{d_2} \phi(v_i))} dG(z)$$

avec $G(z)$ la transformée de Laplace inverse de $\phi^{-1}(t)$. Ensuite, en appliquant la définition de la copule conditionnelle de l'équation 3.13 on obtient :

$$C(v|u) = \frac{\int_0^\infty z^{d_1} e^{-z(\sum_{i=1}^{d_1} \phi(u_i) + \sum_{i=1}^{d_2} \phi(v_i))} dG(z)}{\int_0^\infty z^{d_1} e^{-z \sum_{i=1}^{d_1} \phi(u_i)} dG(z)},$$

que l'on réécrit pour simplifier avec un terme $\kappa(u)$:

$$C(v|u) = \kappa(u) \int_0^\infty e^{-z \sum_{i=1}^{d_2} \phi(v_i)} z^{d_1} e^{-z \sum_{i=1}^{d_1} \phi(u_i)} dG(z).$$

Cette expression indique l'algorithme de simulation suivant :

- Simuler le facteur latent Z de densité proportionnelle à $z^{d_1} e^{-zA} G(z)$, avec $A = \sum_{i=1}^{d_1} \phi(u_i)$;
- Simuler les variables uniformes indépendantes $W_i, \forall i = 1 \dots d_2$;
- Calculer $V_i = \phi^{-1}(-\ln(W_i)/Z), \forall i = 1 \dots d_2$.

Le terme $G(z)$ est la densité de Z pour une copule classique de générateur $\phi(t)$. Le facteur latent Z est conditionnel aux réalisations de U , et V peut être exprimé en fonction du facteur latent conditionnel seulement. Autrement dit, V ne dépend de U qu'à travers le facteur latent conditionnel. En fait, cet algorithme est exactement l'algorithme de Marshall and Olkin (1988) utilisé pour les copules archimédiennes classiques, puisque la copule archimédienne conditionnelle est également une copule archimédienne. La seule différence est le générateur, et la transformée de Laplace inverse de son inverse.

Le problème potentiel avec cette méthode est de simuler le facteur latent conditionnel. Dans le cas d'une Clayton, le facteur inconditionnel suit une distribution Gamma de paramètres $a = 1/\theta$ et $b = 1$. Rappelons que la densité d'une loi Gamma est $f(t) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t/b}$. On trouve donc que le facteur conditionnel suit une distribution Gamma de paramètres $a = \frac{1+d_1\theta}{\theta}$ et $b = \frac{1}{A+1}$. À noter que Soustra (2006) propose de simuler d'abord une Clayton de paramètre $\frac{\theta}{1+d_1\theta}$, ce qui requiert de simuler une loi Gamma de paramètres $a = \frac{1+d_1\theta}{\theta}$ et $b = 1$. Pour les copules autres que Clayton, la méthode indiquée apparaît être la méthode de rejet, comme proposé dans Rémillard et al. (2010).

La méthode de rejet permet de simuler une variable ayant une densité proportionnelle à $f(z)g(z)$, en simulant une variable suivant $f(z)$ et en la rejetant sur la base de $g(z)$. Pour la simulation de copules conditionnelles, on assimile la fonction f à la densité du facteur de la copule classique. On sait donc simuler la copule archimédienne

si on sait simuler la copule conditionnelle. Ensuite, on pose $g(z) = z^{d_1} e^{-zA}$, dont le maximum est $\bar{g} = g(d_1/A) = (d_1/A)^{d_1} e^{-d_1}$. Afin d'éviter des dépassements de capacité («underflow» et «overflow») lorsque d_1 est grand, on utilise en fait la condition équivalente $(\bar{g})^{1/d_1} W^{1/d_1} < g(Z)^{1/d_1}$, et donc on évalue plutôt $g(Z)^{1/d_1} = ze^{-zA/d_1}$ et $(\bar{g})^{1/d_1} = d_1 e^{-1/A}$. Une technique similaire est appliquée pour les copules hiérarchiques dynamiques.

3.6 Copules archimédiennes hiérarchiques dynamiques

Les développements d'un nouveau type de copule sont présentés : des copules archimédiennes à la fois hiérarchiques et dynamiques. Le tout est développé dans l'optique de modéliser la dynamique d'actifs financiers. Dans un premier temps, on introduit dans une structure hiérarchique à deux niveaux un caractère dynamique, c'est-à-dire que l'on relie les rendements aux périodes t et $t - 1$. Deux modèles à deux niveaux sont présentés, soit momentum de marché et momentum de titre. Dans les deux cas, la dépendance entre les titres à une même période est décrite par une copule archimédienne. Puis on introduit un caractère dynamique dans une structure à trois niveaux, de sorte que la dépendance entre les titres à une même période soit décrite par une copule hiérarchique à deux niveaux où les titres sont regroupés par secteurs. Trois modèles à trois niveaux sont présentés : momentum de marché, momentum de titre et momentum de secteur. Les cinq modèles sont définis et leurs caractéristiques analysées. Également, au moins une méthode de simulation est présentée pour chacun des modèles.

3.6.1 Deux niveaux type I - Momentum de marché

Définition et propriétés

Soit une copule hiérarchique à deux niveaux définie par l'expression $C(u, v) = C_0(C_1(u), C_1(v))$ avec C_0 de générateur $\phi_0(t)$, C_1 de générateur $\phi_1(t)$, u correspondant aux variations des titres à la période $t - 1$ et v aux variations des mêmes titres à la période t :

$$C(u, v) = \phi_0^{-1} \left\{ \phi_0 \circ \phi_1^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \phi_1(u_i) \right) + \phi_0 \circ \phi_1^{-1} \left(\sum_{i=1}^d \phi_1(v_i) \right) \right\}.$$

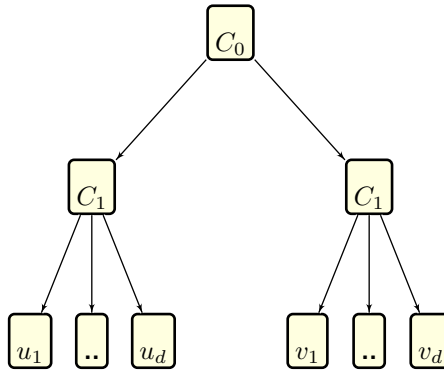


FIGURE 3.2 – Copule à deux niveaux type I - Momentum de marché

TABLE 3.4 – Niveau de définition de la dépendance, copule à deux niveaux type I - Momentum de marché

	Titre	Marché (sauf titre)
t	-	1
$t - 1$	2	2

La figure 3.2 illustre la structure de cette copule. La dépendance entre les titres à une période donnée est décrite par $C_1(v)$, alors que la dépendance entre un titre i à la période t et un titre l à la période $t - 1$ est décrite par $C_0(u_l, v_i)$. Dans le cas où $l = i$, on a la dépendance d'un titre avec lui-même à la période précédente, et cette dépendance est la même qu'avec n'importe quel autre titre. Le caractère dynamique de la copule s'applique donc au marché dans son ensemble, d'où le nom de *momentum de marché*. Le tableau 3.4 résume la dépendance modélisée et indique à quel niveau hiérarchique elle est définie pour les différentes combinaisons de titres et de périodes (le niveau 1 correspond au bas de l'arbre de la figure 3.2, donc dans le cas présent à C_1). La dépendance du titre avec lui-même à la période t n'est pas indiquée car non applicable.

On s'intéresse à la copule conditionnelle $C(v|u)$, qui est en fait une copule archimédienne. La preuve se trouve dans Rémillard et al. (2010).

Simulation

On cherche à simuler $C(v|u)$ pour de grandes dimensions. On suit un développement similaire à celui suivi pour la simulation des copules dynamiques à la section 3.5.2.

On écrit d'abord $C(u, v)$ comme une transformée de Laplace :

$$C(u, v) = \int e^{-x \sum_{i=1}^d \phi_1(u_i) - y \sum_{i=1}^d \phi_1(v_i)} dG_1(x; z) dG_1(y; z) dG_0(z),$$

avec $G_0(z) = L^{-1} \{ \phi_0^{-1}(z) \}$ et $G_1(x; z) = L^{-1} \{ e^{-z \phi_0 \circ \phi_1^{-1}(x)} \}$. Ensuite, on applique la définition de la copule conditionnelle (voir l'équation 3.13) et on obtient :

$$C(v|u) = \frac{\int x^d e^{-x \sum_{i=1}^d \phi_1(u_i) - y \sum_{i=1}^d \phi_1(v_i)} dG_1(x; z) dG_1(y; z) dG_0(z)}{\int x^d e^{-x \sum_{i=1}^d \phi_1(u_i)} dG_1(x; z) dG_0(z)}.$$

En simplifiant avec un terme $\kappa(u)$, on trouve :

$$C(v|u) = \kappa(u) \int e^{-y \sum_{i=1}^d \phi_1(v_i)} x^d e^{-x \sum_{i=1}^d \phi_1(u_i)} dG_1(x; z) dG_1(y; z) dG_0(z). \quad (3.14)$$

L'équation 3.14 indique un algorithme de simulation, que l'on nomme algorithme A. L'idée générale est de générer le facteur Z par une méthode de rejet, puis de suivre l'algorithme de simulation d'une copule archimédienne pour V . L'algorithme détaillé est comme suit :

- Simuler le facteur latent Z par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z \sim G_0(z)$;
 - Simuler $X|Z \sim G_1(x; z)$;
 - Accepter Z sur la base de la densité $x^d e^{-xA}$, avec $A = \sum_{i=1}^d \phi(u_i)$.
- Simuler le facteur $Y|Z \sim G_1(y; z)$;
- Simuler les variables uniformes indépendantes $W_i, \forall i = 1 \dots d$;
- Calculer $V_i = \phi_1^{-1}(-\ln(W_i)/Y), \forall i = 1 \dots d$.

Pour la méthode de rejet, on utilise les expressions $g(X)^{1/d} = x e^{-xA/d}$ et $(\bar{g})^{1/d} = d e^{-1/A}$, conformément à la méthode établie à la section 3.5.2.

Il est possible de refaire le développement de façon légèrement différente pour en arriver à un autre algorithme. En effet, on réécrit $C(u, v)$ mais sans appliquer la transformée de Laplace sur la portion u de l'équation :

$$C(u, v) = \int e^{-z \phi_0 \circ \phi_1^{-1}(\sum_{i=1}^d \phi_1(u_i))} e^{-y \sum_{i=1}^d \phi_1(v_i)} dG_1(y; z) dG_0(z).$$

Puis, on applique simplement la définition de la copule conditionnelle et on obtient, avec $\kappa(u)$ une constante, une intégrale double au lieu d'une intégrale triple :

$$C(v|u) = \kappa(u) \int e^{-y \sum_{i=1}^d \phi_1(v_i)} (-1)^d \frac{\partial^d}{\partial u^d} \left\{ e^{-z \phi_0 \circ \phi_1^{-1}(\sum_{i=1}^d \phi_1(u_i))} \right\} dG_1(y; z) dG_0(z). \quad (3.15)$$

Il découle de l'équation 3.15 l'algorithme de simulation suivant, que l'on nomme algorithme B :

- Simuler le facteur latent Z par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z \sim G_0(z)$;
 - Accepter Z sur la base de la densité $(-1)^d \frac{\partial^d}{\partial u^d} \left\{ e^{-z \phi_0 \circ \phi_1^{-1}(\sum_{i=1}^d \phi_1(u_i))} \right\}$.
- Simuler le facteur $Y|Z \sim G_1(y; z)$;
- Simuler les variables uniformes indépendantes $W_i, \forall i = 1 \dots d$;
- Calculer $V_i = \phi_1^{-1}(-\ln(W_i)/Y), \forall i = 1 \dots d$.

Le problème semble être le calcul de la dérivée d'ordre d . Dans le cas Gumbel-Gumbel toutefois, l'expression à dériver est toutefois relativement simple puisqu'il s'agit d'un générateur inverse de Gumbel. Une expression récursive pour une telle dérivée est développée dans Rémillard et al. (2010). Malgré tout, cet algorithme n'est pas implanté car il semble plus complexe que le premier, dont l'implantation fonctionne de façon satisfaisante.

3.6.2 Deux niveaux type II - Momentum de titre

Définition et propriétés

Les copules hiérarchiques dynamiques à deux niveaux de type II sont définies sur la base de $C_0(C_1(u_1, v_1), \dots, C_d(u_d, v_d))$, avec C_i de générateur $\phi_i(t), \forall i = 0 \dots d$, u correspondant aux variations des titres à la période $t - 1$ et v à celles des mêmes titres à la période t :

$$C(u, v) = \phi_0^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^d \phi_0 \circ \phi_i^{-1}(\phi_i(u_i) + \phi_i(v_i)) \right\}.$$

La figure 3.3 montre la structure de cette copule. La dépendance temporelle d'un titre i par rapport à lui-même est donnée par $C_i(u_i, v_i)$, d'où le nom de *momentum*

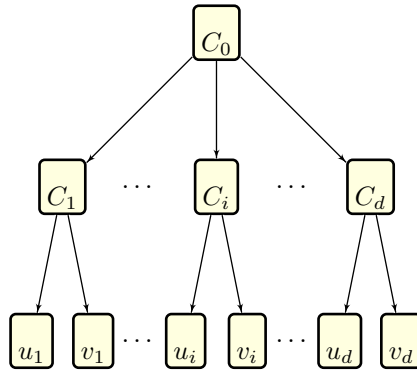


FIGURE 3.3 – Copule hiérarchique dynamique à deux niveaux, momentum de titre

TABLE 3.5 – Niveau de définition de la dépendance, copule à deux niveaux type II - Momentum de titre

	Titre	Marché (sauf titre)
t	-	2
$t - 1$	1	2

de titre. Aussi, la dépendance entre les titres à une période donnée est décrite par $C_0(v)$. Par contre, le titre i est autant dépendant du comportement du titre $l \neq i$ aux périodes t et $t - 1$, ce qui constitue un désavantage majeur. Le tableau 3.5 résume les caractéristiques de la copule momentum de titre à deux niveaux.

Comme pour la copule momentum de marché à deux niveaux, la preuve que la copule conditionnelle $C(v|u)$ est en fait une copule archimédienne se trouve dans Rémillard et al. (2010).

Simulation

On réécrit la copule inconditionnelle sous la forme d'une transformée de Laplace :

$$C(u, v) = \int e^{-\sum_{i=1}^d z_i(\phi_i(u_i) + \phi_i(v_i))} \left\{ \prod_{i=1}^d dG_i(z_i; z_0) \right\} dG_0(z_0),$$

avec $G_0(z_0) = L^{-1} \{ \phi_0^{-1}(z_0) \}$ et $G_i(z_i; z_0) = L^{-1} \{ e^{-z_0 \phi_0 \circ \phi_i^{-1}(z_i)} \}$

En suivant le même cheminement que pour les copules de type I, on obtient l'expression suivante pour la simulation :

$$C(v|u) = \kappa(u) \int e^{-\sum_{i=1}^d z_i \phi_i(v_i)} \left\{ \prod_{i=1}^d z_i e^{-z_i \phi_i(u_i)} dG_i(z_i; z_0) \right\} dG_0(z_0), \quad (3.16)$$

avec $\kappa(u)$ une constante. L'algorithme de simulation basé sur l'équation 3.16, que l'on nomme algorithme A, est également très semblable :

- Simuler les facteurs latents Z_0, \dots, Z_d par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z_0 \sim G_0(z_0)$;
 - Simuler $Z_i|Z_0 \sim G_i(z_i; z_0), \forall i = 1 \dots d$;
 - Accepter Z_0, \dots, Z_d sur la base de la densité $\prod_{i=1}^d z_i e^{-z_i \phi_i(u_i)}$.
- Simuler les variables uniformes indépendantes $W_i, \forall i = 1 \dots d$;
- Calculer $V_i = \phi_i^{-1}(-\ln(W_i)/Z_i), \forall i = 1 \dots d$.

Pour la méthode de rejet, l'évaluation de la densité et du maximum peuvent poser des problèmes numériques pour de grandes dimensions, même si on travaille avec l'exposant $1/d$ tel qu'établi à la section 3.5.2. En effet, le calcul de la densité $\left(\prod_{i=1}^d z_i\right)^{1/d}$ par la multiplication des z_i suivie du calcul de la puissance $1/d$ du produit peut résulter en un débordement numérique lors de la multiplication des z_i . L'évaluation de l'expression équivalente $\prod_{i=1}^d z_i^{1/d}$ règle ce problème, c'est-à-dire que les z_i sont élevés à la puissance $1/d$ avant d'être multipliés. Le maximum à considérer est $(\bar{g})^{1/d} = e^{-1} \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{\phi_i(u_i)}\right)^{1/d}$, et il doit être évalué de façon similaire.

L'algorithme précédent devient très lent lorsque d augmente, en raison d'un taux de rejet élevé pour la simulation du facteur latent Z_0 . Heureusement, il existe une alternative basée sur le développement suivant. D'abord, dans l'équation 3.16, la loi jointe des facteurs latents est donnée à une constante près par :

$$f(z_0, z_1, \dots, z_d) = \left\{ \prod_{i=1}^d z_i e^{-z_i \phi_i(u_i)} G_i(z_i; z_0) \right\} G_0(z_0).$$

À partir de cette expression, on peut calculer la loi univariée du facteur Z_0 par intégration :

$$f_0(z_0) = \int_{\mathbb{R}_+^d} f(z_0, z_1, \dots, z_d) dz_1 \dots dz_d,$$

$$f_0(z_0) = G_0(z_0) \left\{ \prod_{i=1}^d \int_0^\infty z_i e^{-z_i \phi_i(u_i)} dG_i(z_i; z_0) \right\},$$

$$f_0(z_0) = \kappa(u) G_0(z_0) \left\{ \prod_{i=1}^d -\frac{\partial}{\partial u_i} \int_0^\infty e^{-z_i \phi_i(u_i)} dG_i(z_i; z_0) \right\},$$

$$f_0(z_0) = \kappa(u) G_0(z_0) \left\{ \prod_{i=1}^d -\frac{\partial}{\partial u_i} e^{-z_0 \phi_0(u_i)} \right\},$$

$$f_0(z_0) = \kappa(u) z_0^d e^{-z_0 \sum_{i=1}^d \phi_0(u_i)} G_0(z_0),$$

avec $\kappa(u)$ une constante. Finalement, on écrit la loi jointe comme le produit des lois univariées :

$$f(z_0, z_1, \dots, z_d) = f_0(z_0) f_1(z_1; z_0) \dots f_d(z_d; z_0),$$

avec $f_i(z_i; z_0) = z_i e^{-z_i \phi_i(u_i)} G_i(z_i; z_0)$ la densité conditionnelle de $Z_i|Z_0$, puisque $f(z_0, z_1, \dots, z_d) = f(z_1, \dots, z_d; z_0) f_0(z_0)$ et que les Z_i sont indépendants conditionnellement à Z_0 . En reportant le dernier résultat dans l'équation 3.16, on trouve une nouvelle expression pour la simulation :

$$C(v|u) = \kappa(u) \int e^{-\sum_{i=1}^d z_i \phi_i(v_i)} \left\{ \prod_{i=1}^d z_i e^{-z_i \phi_i(u_i)} dG_i(z_i; z_0) \right\} z_0^d e^{-z_0 \sum_{i=1}^d \phi_0(u_i)} dG_0(z_0). \quad (3.17)$$

Basé sur l'équation 3.17, on a l'algorithme de simulation suivant, nommé algorithme B :

- Simuler le facteur latent Z_0 par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z_0 \sim G_0(z_0)$;
 - Accepter Z_0 sur la base de la densité $z_0^d e^{-z_0 A}$, avec $A = \sum_{i=1}^d \phi_0(u_i)$.
- Simuler les facteurs latents $Z_i, \forall i = 1 \dots d$ par une méthode de rejet, c'est-à-dire $\forall i = 1 \dots d$:
 - Simuler $Z_i|Z_0 \sim G_i(z_i; z_0)$;
 - Accepter Z_i sur la base de la densité $z_i e^{-z_i \phi_i(u_i)}$.

- Simuler les variables uniformes indépendantes $W_i, \forall i = 1 \dots d$;
- Calculer $V_i = \phi_i^{-1}(-\ln(W_i)/Z_i), \forall i = 1 \dots d$.

Pour les méthodes de rejet, les expressions pertinentes sont $g(z_0)^{1/d} = z_0 e^{-z_0 A/d}$, $(\bar{g}_0)^{1/d} = d e^{-1/A}$, $g_i(z_i) = z_i e^{-z_i \phi_i(u_i)}$ et $\bar{g}_i = e^{-1/A}$.

Cet algorithme permet de réduire très considérablement le temps de simulation. En effet, il comporte $d + 1$ simulations rapides avec méthode de rejet, plutôt qu'une seule très lourde. La simulation du facteur Z_0 est identique à celle pour une copule archimédienne dynamique à un niveau. C'est très intuitif, puisque c'est précisément ce que l'on retrouve en posant $v = \mathbf{1}$ dans la copule hiérarchique dynamique à deux niveaux de type II.

3.6.3 Trois niveaux type I - Momentum de marché

Définition et propriétés

La copule hiérarchique dynamique momentum de marché à trois niveaux est composée d'une copule hiérarchique $C_0(v)$ pour la période t , d'une copule hiérarchique $C_0(u)$ identique pour la période $t - 1$ et d'une copule D qui relie les deux premières : $D(C_0(u), C_0(v))$. La copule D est nommée ainsi pour indiquer son caractère dynamique. En développant l'expression des copules hiérarchiques C_0 , la copule de momentum de marché s'écrit comme suit :

$$C(u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_d) = D\{C_0(C_1(u_{1,1}, \dots, u_{1,s_1}), \dots, C_s(u_{s,1}, \dots, u_{s,s_s})), C_0(C_1(v_{1,1}, \dots, v_{1,s_1}), \dots, C_s(v_{s,1}, \dots, v_{s,s_s}))\}, \quad (3.18)$$

avec D de générateur $\varphi(t)$, C_j de générateur $\phi_j(t)$ pour $j = 0 \dots s$, u correspondant aux variations des titres à la période $t - 1$ et v à celles des mêmes titres à la période t . La figure 3.4 illustre la structure de la copule de momentum de marché à trois niveaux.

Le tableau 3.6 décrit la dépendance entre un titre donné à la période t par rapport à l'ensemble des autres titres pour les périodes t et $t - 1$. Le comportement à une période donnée est évidemment celui d'une copule hiérarchique non dynamique. En ce qui concerne l'aspect dynamique, le rendement d'un titre à une période donnée dépend de la même façon du rendement de tous les titres à la période précédente,

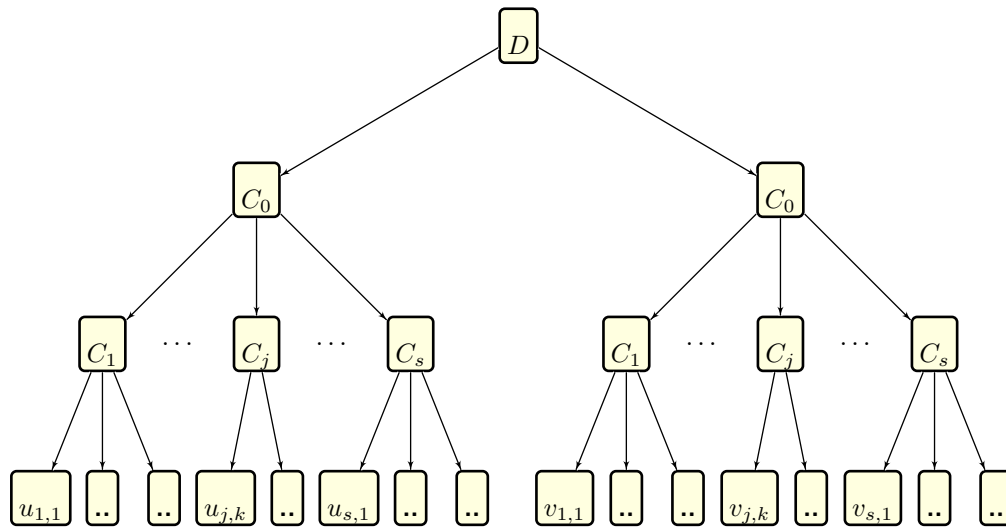


FIGURE 3.4 – Copule hiérarchique dynamique à trois niveaux, momentum de marché

TABLE 3.6 – Niveau hiérarchique de dépendance, copule momentum de marché

	Titre	Secteur (sauf titre)	Marché (sauf secteur)
t	-	1	2
$t - 1$	3	3	3

d'où le momentum de marché. Si le marché procure un rendement supérieur à la médiane à la période $t - 1$, alors il aura également tendance à procurer un rendement supérieur à la médiane à la période t .

Simulation

On exprime d'abord la copule inconditionnelle définie à la section 3.18 avec des transformées de Laplace :

$$C(u, v) = \int e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} x_j \phi_j(u_{j,k}) + y_j \phi_j(v_{j,k})} \left\{ \prod_{j=1}^s dG_j(x_j; x_0) dG_j(y_j; y_0) \right\} dG_0(x_0; z) dG_0(y_0; z) dH(z), \quad (3.19)$$

avec $H(z) = L^{-1} \{ \varphi^{-1}(z) \}$, $G_0(x_0; z) = L^{-1} \{ e^{-z\varphi \circ \phi_0^{-1}(x_0)} \}$ et $G_j(x_j; x_0) = L^{-1} \{ e^{-x_0 \phi_0 \circ \phi_j^{-1}(x_j)} \}$.

En appliquant la même démarche que pour les copules à deux niveaux, on trouve que l'expression à la base de la simulation est la suivante :

$$C(v|u) = \kappa(u) \int e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} y_j \phi_j(v_{j,k})} \left\{ \prod_{j=1}^s x_j^{s_j} \right\} e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} x_j \phi_j(u_{j,k})} \left\{ \prod_{j=1}^s dG_j(x_j; x_0) dG_j(y_j; y_0) \right\} dG_0(x_0; z) dG_0(y_0; z) dH(z). \quad (3.20)$$

L'algorithme de simulation basé sur l'équation 3.20, nommé algorithme A, est comme suit :

- Simuler le facteur latent Z par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z \sim H(z)$;
 - Simuler $X_0|Z \sim G_0(x_0; z)$;
 - Simuler $X_j|X_0 \sim G_j(x_j; x_0), \forall j = 1 \dots s$;
 - Accepter Z sur la base de la densité $\left\{ \prod_{j=1}^s x_j^{s_j} \right\} e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} x_j \phi_j(u_{j,k})}$ dont le maximum est $\bar{g} = e^{-d} \prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^{s_j} \frac{1}{\phi_j(u_{j,k})}$.
- Simuler $Y_0|Z \sim G_0(y_0; z)$;
- Pour chacun des secteurs, c'est-à-dire $\forall j = 1 \dots s$:
 - Simuler $Y_j|Y_0 \sim G_j(y_j; y_0)$;
 - Simuler les d variables uniformes indépendantes $W_{j,k}, \forall k = 1 \dots s_j$;
 - Calculer $V_{j,k} = \phi_j^{-1}(-\ln(W_{j,k})/Y_j), \forall k = 1 \dots s_j$.

Pour la méthode de rejet, l'évaluation de la condition de rejet suit la méthodologie établie à la section 3.5.2, et donc les expressions pertinentes sont

$$(\bar{g})^{1/d} = e^{-1} \left\{ \prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^{s_j} (\phi_j(u_{j,k}))^{-1/d} \right\}$$

et

$$g(x) = \left\{ \prod_{j=1}^s x_j^{s_j/d} \right\} e^{-\left(\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} x_j \phi_j(u_{j,k})\right)/d}.$$

On a implanté et testé cet algorithme. Il fonctionne pour de faibles dimensions, mais devient inutilisable aussitôt que la dimension augmente. On développe donc des alternatives ci-dessous en suivant un cheminement similaire à celui suivi pour la copule momentum de marché à deux niveaux. D'abord, suivant l'équation 3.20, la densité jointe des facteurs latents Z et X_0 à X_s est, à une constante près :

$$f(z, x_0, x_1, \dots, x_s) = \left\{ \prod_{j=1}^s x_j^{s_j} \right\} e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} x_j \phi_j(u_{j,k})} \left\{ \prod_{j=1}^s G_j(x_j; x_0) \right\} G_0(x_0; z) H(z). \quad (3.21)$$

On calcule la densité jointe de Z et X_0 par intégration, comme suit :

$$f(z, x_0) = \int_{\mathbb{R}_+^s} f(z, x_0, x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s,$$

$$f(z, x_0) = G_0(x_0; z) H(z) \left\{ \prod_{j=1}^s \int_0^\infty x_j^{s_j} e^{-x_j \sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k})} dG_j(x_j; x_0) \right\},$$

$$f(z, x_0) = \kappa(u) G_0(x_0; z) H(z) \left\{ \prod_{j=1}^s \frac{\partial^{s_j}}{\partial u_j} \int_0^\infty e^{-x_j \sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k})} dG_j(x_j; x_0) \right\},$$

$$f(z, x_0) = \kappa(u) G_0(x_0; z) H(z) \left\{ \prod_{j=1}^s \frac{\partial^{s_j}}{\partial u_j} e^{-x_0 \phi_0 \circ \phi_j^{-1}(A_j)} \right\},$$

avec $A_j = \sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k})$. On peut réécrire le tout de façon plus compacte :

$$f(z, x_0) = \kappa(u)G_0(x_0; z)H(z) \left\{ \frac{\partial^d}{\partial u} e^{-x_0 B} \right\},$$

avec $B = \sum_{j=1}^s \phi_0 \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)$. En remplaçant le résultat de l'intégrale multiple de la densité jointe dans l'équation 3.20, on obtient une nouvelle expression pour la simulation :

$$C(v|u) = \kappa(u) \int e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} y_j \phi_j(v_{j,k})} \left\{ \frac{\partial^d}{\partial u} e^{-x_0 B} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^s dG_j(y_j; y_0) \right\} dG_0(x_0; z) dG_0(y_0; z) dH(z). \quad (3.22)$$

L'algorithme de simulation basé sur l'équation 3.22 est nommé algorithme B et va comme suit :

- Simuler le facteur latent Z par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z \sim H(z)$;
 - Simuler $X_0|Z \sim G_0(x_0; z)$;
 - Accepter Z sur la base de la densité $\frac{\partial^d}{\partial u} e^{-x_0 B}$, avec $B = \sum_{j=1}^s \phi_0 \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)$.
- Simuler $Y_0|Z \sim G_0(y_0; z)$;
- Pour chacun des secteurs, c'est-à-dire $\forall j = 1 \dots s$:
 - Simuler $Y_j|Y_0 \sim G_j(y_j; y_0)$;
 - Simuler les d variables uniformes indépendantes $W_{j,k}, \forall k = 1 \dots s_j$;
 - Calculer $V_{j,k} = \phi_j^{-1}(-\ln(W_{j,k})/Y_j), \forall k = 1 \dots s_j$.

Il est également possible de calculer directement la densité $f(z)$ (à une constante près) :

$$f(z) = \int_0^\infty f(z, x_0) dx_0,$$

$$f(z) = H(z) \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial^d}{\partial u} e^{-x_0 B} \right\} dG_0(x_0; z),$$

$$f(z) = H(z) \frac{\partial^d}{\partial u} \int_0^\infty e^{-x_0 B} dG_0(x_0; z),$$

$$f(z) = H(z) \frac{\partial^d}{\partial u} e^{-z\varphi \circ \phi_0^{-1}(B)}.$$

En remplaçant le résultat de l'intégrale par rapport à X_0 dans l'équation 3.22, on obtient :

$$C(v|u) = \kappa(u) \int e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} y_j \phi_j(v_{j,k})} \left\{ \frac{\partial^d}{\partial u} e^{-z\varphi \circ \phi_0^{-1}(B)} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^s dG_j(y_j; y_0) \right\} dG_0(y_0; z) dH(z). \quad (3.23)$$

L'équation 3.23 permet d'écrire l'algorithme de simulation suivant, nommé algorithme C :

- Simuler le facteur latent Z par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z \sim H(z)$;
 - Accepter Z sur la base de la densité $\frac{\partial^d}{\partial u} e^{-z\varphi \circ \phi_0^{-1}(B)}$, avec $B = \sum_{j=1}^s \phi_0 \circ \phi_j^{-1}(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}))$.
- Simuler $Y_0|Z \sim G_0(y_0; z)$;
- Pour chacun des secteurs, c'est-à-dire $\forall j = 1 \dots s$:
 - Simuler $Y_j|Y_0 \sim G_j(y_j; y_0)$;
 - Simuler les d variables uniformes indépendantes $W_{j,k}, \forall k = 1 \dots s_j$;
 - Calculer $V_{j,k} = \phi_j^{-1}(-\ln(W_{j,k})/Y_j), \forall k = 1 \dots s_j$.

Par rapport à l'algorithme de simulation basé sur l'équation 3.20, ceux basées sur les équations 3.22 et 3.23 diffèrent seulement quant à la simulation du facteur Z . Ces deux derniers algorithmes n'ont pas été implantés. Ils pourraient être plus rapide que le premier, mais posent des problèmes pratiques pour l'évaluation des dérivées partielles d'ordre d .

Finalement, on peut aussi obtenir les équations 3.22 et 3.23 en procédant de la même façon que pour l'équation 3.17 de la copule hiérarchique à deux niveaux de type I, c'est-à-dire développant l'expression de la copule $C(u, v)$ avec des transformées de Laplace de façon partielle et sélective.

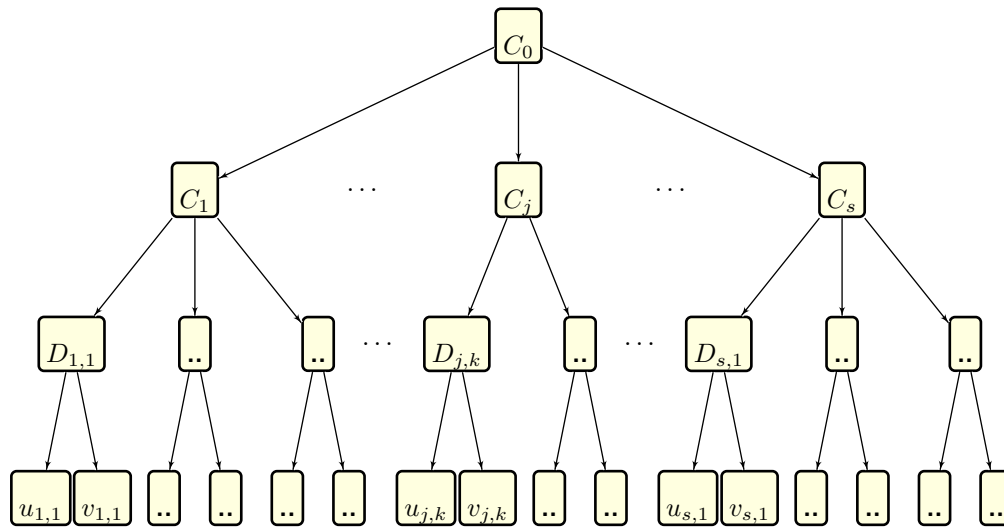


FIGURE 3.5 – Copule hiérarchique dynamique à trois niveaux, momentum de titre

3.6.4 Trois niveaux type II - Momentum de titre

Définition et propriétés

La copule momentum de titre à trois niveaux est définie par l'équation suivante :

$$C(u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_d) = C_0\{C_1(D_{1,1}(u_{1,1}, v_{1,1}), \dots, D_{1,s_1}(u_{1,s_1}, v_{1,s_1})), \dots, C_s(D_{s,1}(u_{s,1}, v_{s,1}), \dots, D_{s,s_s}(u_{s,s_s}, v_{s,s_s}))\}, \quad (3.24)$$

avec C_0 de générateur $\phi_0(t)$, C_j de générateur $\phi_j(t)$, $D_{j,k}$ de générateur $\phi_{j,k}(t)$ et avec encore une fois u et v correspondant aux variations des titres aux périodes $t - 1$ et t respectivement. La figure 3.5 illustre sa structure. Il s'agit d'une copule hiérarchique à deux niveaux $C_0(w_1, \dots, w_d)$ dans laquelle on a remplacé les variables w_i par une copule dynamique $D_i(u_i, v_i)$. La dépendance entre les titres à une même période est décrite par la copule hiérarchique C_0 . La dépendance d'un titre i donné par rapport à la période précédente est décrite par la copule D_i , d'où le nom *momentum de titre*. Par contre, comme pour les copules momentum de titre à deux niveaux, le comportement d'un titre à la période t dépend autant du comportement des autres titres à la période t qu'à la période $t - 1$. C'est ici aussi un désavantage majeur. Le tableau 3.7 résume la structure de dépendance de la copule.

TABLE 3.7 – Niveau hiérarchique de dépendance, copule momentum de titre

	Titre	Secteur (sauf titre)	Marché (sauf secteur)
t	-	2	3
$t - 1$	1	2	3

Simulation

On exprime d'abord la représentation inconditionnelle sous forme de transformées de Laplace :

$$C(u, v) = \int e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} z_{j,k}(\phi_{j,k}(u_{j,k}) + \phi_{j,k}(v_{j,k}))} \left\{ \prod_{j=1}^s \left\{ \prod_{k=1}^{s_j} dG_{j,k}(z_{j,k}; z_j) \right\} dG_j(z_j; z_0) \right\} dG_0(z_0), \quad (3.25)$$

avec $G_0(z_0) = L^{-1} \{ \phi_0^{-1}(z_0) \}$, $G_j(z_j; z_0) = L^{-1} \{ e^{-z_0 \phi_0 \circ \phi_j^{-1}(z_j)} \}$ et $G_{j,k}(z_{j,k}; z_j) = L^{-1} \{ e^{-z_j \phi_j \circ \phi_{j,k}^{-1}(z_{j,k})} \}$.

En appliquant la même démarche que précédemment, on trouve que l'expression à la base de la simulation est la suivante :

$$C(v|u) = \kappa(u) \int e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} z_{j,k} \phi_{j,k}(v_{j,k})} \left\{ \prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^{s_j} z_{j,k} \right\} e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} z_{j,k} \phi_{j,k}(u_{j,k})} \left\{ \prod_{j=1}^s \left\{ \prod_{k=1}^{s_j} dG_{j,k}(z_{j,k}; z_j) \right\} dG_j(z_j; z_0) \right\} dG_0(z_0). \quad (3.26)$$

L'algorithme de simulation basé sur l'équation 3.26 est nommé algorithme A et va comme suit :

- Simuler les facteurs latents $Z_0, Z_j, \forall j = 1 \dots s$ et $Z_{j,k}, \forall k = 1 \dots s_j, \forall j = 1 \dots s$ par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z_0 \sim G_0(z_0)$;
 - Simuler $Z_j | Z_0 \sim G_j(z_j; z_0), \forall j = 1 \dots s$;
 - Simuler $Z_{j,k} | Z_j \sim G_{j,k}(z_{j,k}; z_j), \forall k = 1 \dots s_j, \forall j = 1 \dots s$;

- Accepter les facteurs latents sur la base de la densité $\prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^{s_j} z_{j,k} e^{-z_{j,k} \phi_{j,k}(u_{j,k})}$ dont le maximum est $\bar{g} = e^{-d} \prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^{s_j} \frac{1}{\phi_{j,k}(u_{j,k})}$.
- Simuler les d variables uniformes indépendantes $W_{j,k}, \forall k = 1 \dots s_j, \forall j = 1 \dots s$;
- Calculer $V_{j,k} = \phi_{j,k}^{-1}(-\ln(W_{j,k})/Z_{j,k}), \forall k = 1 \dots s_j, \forall j = 1 \dots s$.

Le précédent algorithme est lent pour de grandes dimensions, mais comme dans le cas de copules hiérarchiques à deux niveaux de type II, un algorithme plus rapide existe. À partir de l'équation 3.26, on écrit d'abord à une constante près la densité jointe des facteurs latents :

$$f(z_0, z_1, \dots, z_s, z_{1,1}, \dots, z_{s,s_s}) = \left\{ \prod_{j=1}^s \left\{ \prod_{k=1}^{s_j} z_{j,k} e^{-z_{j,k} \phi_{j,k}(u_{j,k})} G_{j,k}(z_{j,k}; z_j) \right\} G_j(z_j; z_0) \right\} G_0(z_0). \quad (3.27)$$

Ensuite on intègre le tout par rapport aux $z_{j,k}$:

$$f(z_0, z_1, \dots, z_s) = \int_{\mathbb{R}_+^d} f(z_0, z_1, \dots, z_s, z_{1,1}, \dots, z_{s,s_s}) dz_{1,1} \dots dz_{s,s_s},$$

$$f(z_0, z_1, \dots, z_s) = \kappa(u) \left\{ \prod_{j=1}^s G_j(z_j; z_0) \right\} G_0(z_0) \left\{ \prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^{s_j} \frac{\partial}{\partial u_{j,k}} \int_0^\infty e^{-z_{j,k} \phi_{j,k}(u_{j,k})} dG_{j,k}(z_{j,k}; z_j) \right\}, \quad (3.28)$$

$$f(z_0, z_1, \dots, z_s) = \kappa(u) \left\{ \prod_{j=1}^s G_j(z_j; z_0) \right\} G_0(z_0) \left\{ \prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^{s_j} \frac{\partial}{\partial u_{j,k}} e^{-z_j \phi_j(u_{j,k})} \right\}.$$

On peut réécrire cette loi ainsi :

$$f(z_0, z_1, \dots, z_s) = \kappa(u) \left\{ \prod_{j=1}^s G_j(z_j; z_0) \right\} G_0(z_0) \left\{ \prod_{j=1}^s z_j^{s_j} e^{-z_j \sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k})} \right\}.$$

Or, les facteurs $z_{j,k}$ sont indépendants étant donnés Z_0 et Z_1 à Z_s , ce qui implique que $f(z_0, z_1, \dots, z_s, z_{1,1}, \dots, z_{s,s_s}) = f(z_0, z_1, \dots, z_s) \prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^{s_j} f(z_{j,k}; z_0, z_1, \dots, z_s)$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} C(v|u) &= \kappa(u) \int e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} z_{j,k} \phi_{j,k}(v_{j,k})} \left\{ \prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^{s_j} z_{j,k} e^{-z_{j,k} \phi_{j,k}(u_{j,k})} \right\} \\ &\quad \left\{ \prod_{j=1}^s z_j^{s_j} e^{-z_j \sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k})} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^s \left\{ \prod_{k=1}^{s_j} dG_{j,k}(z_{j,k}; z_j) \right\} dG_j(z_j; z_0) \right\} dG_0(z_0). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Basé sur l'équation 3.29, on trouve l'algorithme de simulation suivant, que l'on nomme algorithme B :

- Simuler les facteurs latents Z_0 et $Z_j, \forall j = 1 \dots s$ par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z_0 \sim G_0(z_0)$;
 - Simuler $Z_j|Z_0 \sim G_j(z_j; z_0), \forall j = 1 \dots s$;
 - Accepter les facteurs latents sur la base de la densité $\prod_{j=1}^s z_j^{s_j} e^{-z_j A_j}$ dont le maximum est $\bar{g} = e^{-d} \prod_{j=1}^s \left(\frac{s_j}{A_j}\right)^{s_j}$, avec $A_j = \sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k})$.
- Simuler les facteurs latents $Z_{j,k}, \forall k = 1 \dots s_j, \forall j = 1 \dots s$ par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z_{j,k}|Z_j \sim G_{j,k}(z_{j,k}; z_j)$;
 - Accepter le facteur latent $Z_{j,k}$ sur la base de la densité $z_{j,k} e^{-z_{j,k} \phi_{j,k}(u_{j,k})}$ dont le maximum est $\bar{g} = (e \phi_{j,k}(u_{j,k}))^{-1}$.
- Simuler les d variables uniformes indépendantes $W_{j,k}, \forall k = 1 \dots s_j, \forall j = 1 \dots s$;
- Calculer $V_{j,k} = \phi_{j,k}^{-1}(-\ln(W_{j,k})/Z_{j,k}), \forall k = 1 \dots s_j, \forall j = 1 \dots s$.

Pour la méthode de rejet concernant Z_0 et les Z_j , on utilise la méthode établie à la section 3.5.2 avec l'exposant $1/d$. Cet algorithme basé sur l'équation 3.29 a été implémenté et s'est avéré beaucoup plus rapide que celui basé sur l'équation 3.26.

On poursuit tout de même le cheminement afin d'arriver à un autre algorithme potentiellement encore plus rapide. D'abord, on intègre afin de calculer la densité de Z_0 (toujours à une constante près) :

$$f_0(z_0) = \int_{\mathbb{R}_+^s} f(z_0, z_1, \dots, z_s) dz_1 \dots dz_s,$$

$$f_0(z_0) = G_0(z_0) \left\{ \prod_{j=1}^s \int_0^\infty z_j^{s_j} e^{-z_j \sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k})} dG_j(z_j; z_0) \right\},$$

$$f_0(z_0) = \kappa(u) G_0(z_0) \frac{\partial^d}{\partial u} e^{-z_0 B},$$

avec $B = \sum_{j=1}^s \phi_0 \circ \phi_j^{-1} (\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}))$. La densité du facteur Z_0 , conditionnellement aux réalisations u , est identique à celle d'une copule hiérarchique $C(u)$ telle que définie à l'équation 3.9 (pour le vérifier il suffit de dériver l'équation 3.10 par rapport au vecteur u). Comme pour $C(u, \mathbf{1})$, la copule momentum de titre à trois niveaux évaluée en $v = \mathbf{1}$, la densité de Z_0 ne dépend pas de $\phi_{j,k}(t)$, ce qui est très intuitif. On réécrit la copule $C(v|u)$ en utilisant le fait que $f(z_0, z_1, \dots, z_s) = f_0(z_0) \prod_{j=1}^s f_j(z_j; z_0)$:

$$C(v|u) = \kappa(u) \int e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} z_{j,k} \phi_{j,k}(v_{j,k})} \left\{ \prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^{s_j} z_{j,k} e^{-z_{j,k} \phi_{j,k}(u_{j,k})} \right\}$$

$$\left\{ \prod_{j=1}^s z_j^{s_j} e^{-z_j \sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k})} \right\} \left\{ \frac{\partial^d}{\partial u} e^{-z_0 B} \right\}$$

$$\left\{ \prod_{j=1}^s \left\{ \prod_{k=1}^{s_j} dG_{j,k}(z_{j,k}; z_j) \right\} dG_j(z_j; z_0) \right\} dG_0(z_0). \quad (3.30)$$

Basé sur l'équation 3.30, on trouve l'algorithme de simulation suivant, nommé algorithme C :

- Simuler le facteur latent Z_0 par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z_0 \sim G_0(z_0)$;
 - Accepter le facteur latent sur la base de la densité $\frac{\partial^d}{\partial u} e^{-z_0 B}$,

- avec $B = \sum_{j=1}^s \phi_0 \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)$.
- Simuler les facteurs latents $Z_j, \forall j = 1 \dots s$ par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z_j|Z_0 \sim G_j(z_j; z_0)$;
 - Accepter le facteur latent Z_j sur la base de la densité $z_j^{s_j} e^{-z_j A_j}$ dont le maximum est $\bar{g} = e^{-s_j} \left(\frac{s_j}{A_j} \right)^{s_j}$, avec $A_j = \sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k})$.
 - Simuler les facteurs latents $Z_{j,k}, \forall k = 1 \dots s_j, \forall j = 1 \dots s$ par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z_{j,k}|Z_j \sim G_{j,k}(z_{j,k}; z_j)$;
 - Accepter le facteur latent $Z_{j,k}$ sur la base de la densité $z_{j,k} e^{-z_{j,k} \phi_{j,k}(u_{j,k})}$ dont le maximum est $\bar{g} = (e \phi_{j,k}(u_{j,k}))^{-1}$.
 - Simuler les d variables uniformes indépendantes $W_{j,k}, \forall k = 1 \dots s_j, \forall j = 1 \dots s$;
 - Calculer $V_{j,k} = \phi_{j,k}^{-1}(-\ln(W_{j,k})/Z_{j,k}), \forall k = 1 \dots s_j, \forall j = 1 \dots s$.

Cet algorithme n'a pas été implanté. La principale difficulté apparaît être l'évaluation de la dérivée d'ordre d .

3.6.5 Trois niveaux type III - Momentum de secteur

Définition et propriétés

Les copules hiérarchiques dynamiques à trois niveaux de type III sont définies comme suit :

$$C(u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_d) = C_0 \{ D_1(C_1(u_{1,1}, \dots, u_{1,s_1}), C_1(v_{1,1}, \dots, v_{1,s_1})), \dots, D_s(C_s(u_{s,1}, \dots, u_{s,s_s}), C_s(v_{s,1}, \dots, v_{s,s_s})) \}, \quad (3.31)$$

avec C_0 de générateur $\phi_0(t)$, D_j de générateur $\varphi_j(t)$, C_j de générateur $\phi_j(t)$ et toujours u correspondant aux variations des titres à la période $t-1$ et v correspondant aux variations des mêmes titres à la période t . La copule momentum de secteur consiste en une copule deux niveaux type I pour chacun des secteurs, qui sont ensuite reliées entres elles par une autre copule C_0 . La figure 3.6 illustre cette structure.

La dépendance entre les titres à une même période est décrite par une copule hiérarchique, comme dans toutes les autres copules hiérarchiques dynamiques. La dépendance dynamique quant à elle se situe au niveau du secteur, d'où le nom *momentum*

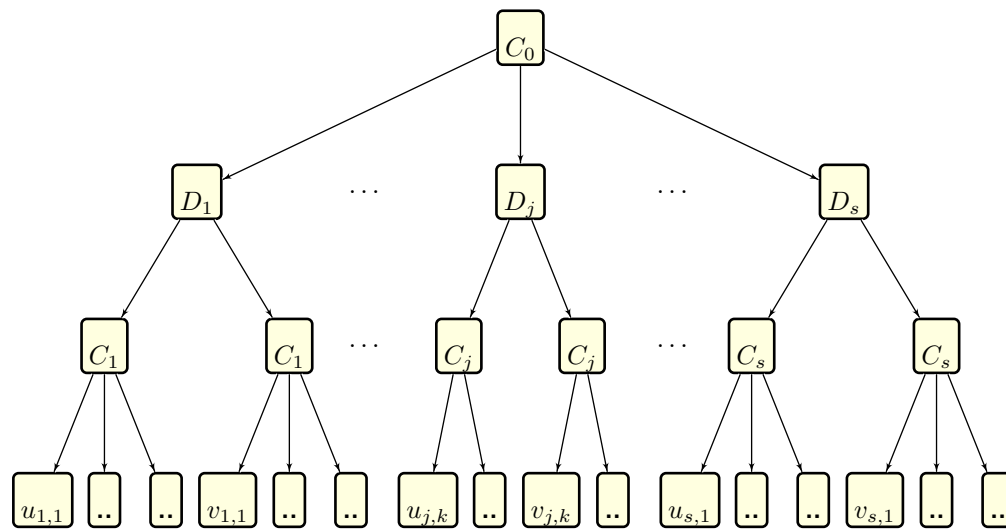


FIGURE 3.6 – Copule hiérarchique dynamique à trois niveaux, momentum de secteur

TABLE 3.8 – Niveau hiérarchique de dépendance, copule momentum de secteur

	Titre	Secteur (sauf titre)	Marché (sauf secteur)
t	-	1	3
$t - 1$	2	2	3

de secteur. En effet, les titres du secteur j à la période t dépendent des mêmes titres à la période $t - 1$ en vertu de la copule D_j . Finalement, les titres du secteur j à la période t dépendent du comportement des titres de tous les autres secteurs aux périodes t et $t - 1$ suivant la copule C_0 . Le fait que la dépendance envers les titres des autres secteurs soit la même pour les périodes t et $t - 1$ constitue un problème majeur. Le tableau 3.8 résume la structure de dépendance de la copule momentum de secteur.

Simulation

On exprime d'abord l'équation 3.31 à l'aide de transformée de Laplace :

$$C(u, v) = \int e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} x_j \phi_j(u_{j,k}) + y_j \phi_j(v_{j,k})} \left\{ \prod_{j=1}^s dH_j(x_j; z_j) dH_j(y_j; z_j) dG_j(z_j; z_0) \right\} dG_0(z_0). \quad (3.32)$$

En appliquant la même démarche que précédemment, on trouve que l'expression à la base de la simulation est la suivante :

$$C(v|u) = \kappa(u) \int e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} y_j \phi_j(v_{j,k})} \left\{ \prod_{j=1}^s x_j^{s_j} \right\} e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} x_j \phi_j(u_{j,k})} \left\{ \prod_{j=1}^s dH_j(x_j; z_j) dH_j(y_j; z_j) dG_j(z_j; z_0) \right\} dG_0(z_0), \quad (3.33)$$

avec $G_0(z_0) = L^{-1} \{ \phi_0^{-1}(z_0) \}$, $G_j(z_j; z_0) = L^{-1} \{ e^{-z_0 \phi_0 \circ \phi_j^{-1}(z_j)} \}$ et $H_j(x_j; z_j) = L^{-1} \{ e^{-z_j \varphi_j \circ \phi_j^{-1}(x_j)} \}$. Sur la base de l'équation 3.33, l'algorithme de simulation est nommé A et va comme suit :

- Simuler les facteurs latents Z_0 et $Z_j, \forall j = 1 \dots s$ par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z_0 \sim G_0(z_0)$;
 - Simuler $Z_j|Z_0 \sim G_j(z_j; z_0), \forall j = 1 \dots s$;
 - Simuler $X_j|Z_j \sim H_j(x_j; z_j), \forall j = 1 \dots s$;
 - Accepter les facteurs latents sur la base de la densité $\prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^{s_j} x_j e^{-x_j \phi_j(u_{j,k})}$ dont le maximum est $\bar{g} = e^{-d} \prod_{j=1}^s \left(\frac{s_j}{A_j} \right)^{s_j}$, avec $A_j = \sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k})$.
- Pour chacun des secteurs, c'est-à-dire $\forall j = 1 \dots s$:
 - Simuler $Y_j|Z_j \sim H_j(y_j; z_j)$;
 - Simuler les variables uniformes indépendantes $W_{j,k}, \forall k = 1 \dots s_j$;
 - Calculer $V_{j,k} = \phi_j^{-1}(-\ln(W_{j,k})/Y_j), \forall k = 1 \dots s_j$.

Le précédent algorithme est lent pour de grandes dimensions, mais comme pour les autres copules hiérarchiques, d'autres algorithmes existent. D'abord, on exprime la densité jointe des facteurs Z et X :

$$f(z_0, z_1, \dots, z_s, x_1, \dots, x_s) = \left\{ \prod_{j=1}^s x_j^{s_j} e^{-\sum_{k=1}^{s_j} x_j \phi_j(u_{j,k})} H_j(x_j; z_j) G_j(z_j; z_0) \right\} G_0(z_0).$$

Ensuite, on intègre pour éliminer les X et on obtient :

$$f(z_0, z_1, \dots, z_s) = G_0(z_0) \left\{ \prod_{j=1}^s G_j(z_j; z_0) \right\} \frac{\partial^d}{\partial u} e^{-\sum_{j=1}^s z_j \varphi_j \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)}.$$

Puis, on utilise ce dernier résultat pour réécrire l'expression de la copule conditionnelle :

$$C(v|u) = \kappa(u) \int e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} y_j \phi_j(v_{j,k})} \left\{ \frac{\partial^d}{\partial u} e^{-\sum_{j=1}^s z_j \varphi_j \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^s dH_j(y_j; z_j) dG_j(z_j; z_0) \right\} dG_0(z_0). \quad (3.34)$$

L'équation 3.34 permet d'écrire l'algorithme suivant, que l'on nomme algorithme B :

- Simuler les facteurs latents Z_0 et $Z_j, \forall j = 1 \dots s$ par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z_0 \sim G_0(z_0)$;
 - Simuler $Z_j|Z_0 \sim G_j(z_j; z_0), \forall j = 1 \dots s$;
 - Accepter les Z_j sur la base de la densité $\frac{\partial^d}{\partial u} e^{-\sum_{j=1}^s z_j \varphi_j \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)}$.
- Pour chacun des secteurs, c'est-à-dire $\forall j = 1 \dots s$:
 - Simuler $Y_j|Z_j \sim H_j(y_j; z_j)$;
 - Simuler les variables uniformes indépendantes $W_{j,k}, \forall k = 1 \dots s_j$;
 - Calculer $V_{j,k} = \phi_j^{-1}(-\ln(W_{j,k})/Y_j), \forall k = 1 \dots s_j$.

On développe un autre algorithme en intégrant la densité jointe des Z pour obtenir la densité de Z_0 :

$$f_0(z_0) = G_0(z_0) \frac{\partial^d}{\partial u} e^{-z_0 \sum_{j=1}^s \phi_0 \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)}.$$

Comme dans le cas des copules hiérarchiques dynamiques à trois niveaux de type II, on trouve que la distribution de Z_0 étant donné les réalisations U est la même que celle d'une copule hiérarchique $C(u, \mathbf{1})$, et donc qu'elle ne dépend pas des $\varphi_j(t)$. Quant à elle, la densité de Z_j étant donné Z_0 est :

$$f_j(z_j; z_0) = G_j(z_j; z_0) \frac{\partial^{s_j}}{\partial u_j} e^{-z_j \varphi_j \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)}.$$

À partir des densités de Z_0 et de $Z_j|Z_0$, on réécrit l'expression de la copule conditionnelle :

$$C(v|u) = \kappa(u) \int e^{-\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{s_j} y_j \phi_j(v_{j,k})} \left\{ \frac{\partial^d}{\partial u} e^{-z_0 \sum_{j=1}^s \phi_0 \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^s \frac{\partial^{s_j}}{\partial u_j} e^{-z_j \varphi_j \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^s dH_j(y_j; z_j) dG_j(z_j; z_0) \right\} dG_0(z_0). \quad (3.35)$$

L'équation 3.35 indique l'algorithme de simulation qui suit et que l'on nomme algorithme C :

- Simuler le facteur latent Z_0 par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z_0 \sim G_0(z_0)$;
 - Accepter Z_0 sur la base de la densité $\frac{\partial^d}{\partial u} e^{-z_0 \sum_{j=1}^s \phi_0 \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)}$.
- Simuler les facteurs latents $Z_j, \forall j = 1 \dots s$ par une méthode de rejet, c'est-à-dire :
 - Simuler $Z_j|Z_0 \sim G_j(z_j; z_0)$;
 - Accepter Z_j sur la base de la densité $\frac{\partial^{s_j}}{\partial u_j} e^{-z_j \varphi_j \circ \phi_j^{-1} \left(\sum_{k=1}^{s_j} \phi_j(u_{j,k}) \right)}$.
- Pour chacun des secteurs, c'est-à-dire $\forall j = 1 \dots s$:
 - Simuler $Y_j|Z_j \sim G_j(y_j; z_j)$;
 - Simuler les variables uniformes indépendantes $W_{j,k}, \forall k = 1 \dots s_j$;
 - Calculer $V_{j,k} = \phi_j^{-1}(-\ln(W_{j,k})/Y_j), \forall k = 1 \dots s_j$.

Les deux derniers algorithmes (ceux basés sur les équations 3.34 et 3.35) sont potentiellement plus rapides que le premier (équation 3.33), mais n'ont pas été implémentés. Comme pour les autres types de copules hiérarchiques dynamiques, la difficulté semble être l'évaluation des dérivées d'ordre d ou s_j .

TABLE 3.9 – Synthèse des structures de dépendance archimédiennes

Copule archimédienne	Titre Mom.	Secteur		Marché		Pertinence financière
		Sta.	Mom.	Sta.	Mom.	
Classique				1		Oui
Dynamique				1		Non
Deux niveaux hiérarchique		1		2		Oui
Deux niv, mom. de marché				1	2	Oui
Deux niv, mom. de titre	1			2		Non
Trois niv, mom. de marché		1		2	3	Oui
Trois niv, mom. de titre	1	2		3		Non
Trois niv, mom. de secteur		1	2	3		Non

3.7 Synthèse des structures de dépendance

Le tableau 3.9 résume les formes de dépendance modélisées par les copules archimédiennes de différentes structures. Chacune des structures de copule archimédienne traitée fait l'objet d'une ligne du tableau. Également, chacune des formes de dépendance traitée fait l'objet d'une colonne : dépendance d'un titre avec lui-même à une période précédente, dépendance d'un titre avec les autres de son secteur pour les périodes courante et précédente, et dépendance d'un titre avec le marché pour les périodes courante et précédente (les titres du secteur ne sont pas inclus lorsque des secteurs sont définis). L'abréviation *mom* signifie *momentum* ou dépendance intertemporelle, alors que l'abréviation *sta* signifie *statique*, c'est-à-dire dépendance à l'intérieur d'une période donnée. Les chiffres indiquent le niveau hiérarchique où la dépendance est modélisée, 1 étant le niveau inférieur (dépendance la plus forte). Si un chiffre couvre deux colonnes, cela signifie que la dépendance est la même pour ces deux cases. Pour toutes les copules où cela se produit, la dépendance est la même par rapport aux périodes t et $t - 1$, ce qui est inadéquat pour une application financière. Une case vide signifie que cette forme de dépendance n'est pas modélisée. La dernière colonne du tableau 3.9 indique si la copule est pertinente ou non pour modéliser des données financières, en supposant évidemment la présence de dépendance sérielle. La pertinence est ici déterminée à partir de l'intuition et de connaissances générales sur le comportement des marchés financiers. Néanmoins, l'analyse du comportement du marché des CDS faite à la section 5.2 suggère que les modèles jugés pertinents représentent assez bien la réalité. Le seul bémol est qu'on n'a pas de modèle satisfaisant qui incorporent le momentum de titre ou le momentum de secteur, phénomènes qui pourraient être présents dans d'autres séries de données.

Concernant les copules gaussiennes, celles-ci possèdent la flexibilité nécessaire pour représenter les formes de dépendances définies, même de façon simultanée dans un seul modèle. En fait, avec les matrices de corrélation, les copules gaussiennes ont beaucoup plus de flexibilité que nécessaire, ce qui peut poser des problèmes de sur-spécification. Pour régler ce problème, il semble possible d'introduire des contraintes sur les matrices de corrélation de sorte que la structure de dépendance soit semblable à celle des copules archimédiennes hiérarchiques dynamiques. Par exemple, on pourrait vraisemblablement reproduire la structure hiérarchique en forçant la corrélation entre les titres à être constante à l'intérieur d'un secteur et constante pour toutes les paires intersectorielles. On aurait alors un paramètre global et un paramètre par secteur, ou même un paramètre global et autre applicable à chacun des secteurs pour un total de deux seulement (un par niveau hiérarchique).

3.8 Estimation des paramètres

Pour estimer les paramètres des copules archimédiennes, les méthodes suivantes sont proposées (Rémillard (2010)) :

- Maximum de vraisemblance (approche paramétrique) ;
- Pseudo maximum de vraisemblance (approche semi-paramétrique) ;
- Inverse du tau de Kendall (approche semi-paramétrique).

La méthode du maximum de vraisemblance requiert d'estimer la densité de la copule et la densité de chacune des marges. Comme on ne s'intéresse pas aux marges des log-variations des CDS pour l'application aux CDOs, cette méthode n'est pas retenue. La méthode du pseudo maximum de vraisemblance consiste à estimer la copule sur les pseudo-observations, par maximum de vraisemblance. La densité des marges n'est donc pas requise, puisque les pseudo-observations sont calculées en triant les observations en ordre croissant en divisant leur rang (l'indice de chacune des observations, variant de 1 au nombre d'observation) par le nombre d'observations plus un. La densité d'une copule classique de Clayton peut être calculée facilement pour toute dimension, voir 3.3.3. Pour les autres copules archimédiennes, la densité peut être calculée analytiquement à l'aide des formules récursives de Barbe (Rémillard (2010)), mais le calcul est pénible pour des dimensions élevées en raison du nombre de dérivations, même avec un logiciel de calcul symbolique. En effet, l'estimation est très lente pour des copules simples telles les Gumbel classiques, même de dimension modérée. De plus, le calcul devient encore plus complexe pour des copules hiérar-

chiques, les formules récursives de Barbe n'étant plus applicables. Pour les copules Clayton, la formule est donnée dans Soustra (2006) pour le cas dynamique, mais si on introduit une hiérarchie les formules simples ne tiennent plus et les calculs deviennent également très lourds. Bref, malgré que la méthode du pseudo maximum de vraisemblance soit en principe préférable, elle pose des problèmes pratiques importants. On retient donc l'inverse du tau de Kendall pour sa simplicité et son aspect pratique.

L'inverse du tau de Kendall peut être utilisée pour les copules à paramètre unidimensionnel dont l'inverse du tau de Kendall est strictement monotone, ce qui est le cas pour les copules de Clayton et Gumbel. En dimension deux, il suffit de calculer le tau de Kendall des données et de calculer l'inverse pour obtenir une estimation du paramètre. Comme le tau de Kendall n'est défini que pour des paires, on ne peut appliquer directement cette méthode pour $d > 2$. Pour contourner ce problème, on calcule simplement le tau de Kendall sur toutes les paires de données et on prend la moyenne. Cette approche est coûteuse car on a $d(d-1)/2$ paires à considérer, mais il semble préférable de les utiliser toutes plutôt que de sélectionner un échantillon de paires, surtout dans le contexte où on dispose de relativement peu de données pour chacune des paires.

Pour les copules gaussiennes, des approches par pseudo maximum de vraisemblance sont également disponibles pour les copules classiques et dynamiques (voir respectivement Rémillard (2010) et Soustra (2006)). Toutefois, pour fins de simplicité et afin d'obtenir une comparaison la plus significative possible, on utilise également l'inverse du tau de Kendall pour les copules gaussiennes. En effet, comme pour les copules archimédiennes, on calcule le tau de Kendall puis on l'inverse pour trouver la corrélation correspondante (voir l'équation 3.2). Évidemment, on doit s'assurer que la matrice de corrélation résultante est bel et bien définie positive.

Finalement, une autre raison pratique d'utiliser l'inverse du tau de Kendall plutôt que le pseudo maximum de vraisemblance est la présence de trous dans les données. Ce problème et sa solution détaillée sont présentés à la section 4.2.3.

Chapitre 4

Application aux CDOs

4.1 Définitions et données

4.1.1 Taux d'intérêt

Des taux d'intérêt en devise américaine sont requis pour l'évaluation des CDOs, pour actualiser les flux monétaires des CDOs et des CDS sous-jacents. Comme l'évaluation de produit dérivés est basée sur le principe de réplication en absence d'arbitrage, le taux d'actualisation pertinent est le taux auquel les banques et autres joueurs peuvent emprunter pour construire des portefeuilles de réplication. Tel que recommandé par Hull (2007), on utilise donc le LIBOR pour des échéances jusqu'à un an et les swap de taux d'intérêt pour des échéances plus longues. Les taux LIBOR et swap sont très liquides et sont cotés pour des institutions possédant une cote de crédit de AA, qui représentent en principe un très faible risque de crédit. Hull (2007) mentionne aussi la possibilité d'utiliser les eurodollars pour les échéances entre un et deux ans, mais on ne les utilise pas car ils sont de nature légèrement différente. En effet, comme ils sont transigés en bourse ils ne comportent pas de risque de contrepartie comme le LIBOR et les swap.

Le taux LIBOR considéré est le taux 6 mois, pour la période du 1er janvier 2007 au 1er juin 2009. Les données proviennent de Bloomberg (US0006M Curncy). Les intérêts sont cotés pour 360 jours et capitalisés à l'échéance sur la base du nombre jours réellement écoulés (convention actual/360).

Comme les taux LIBOR sont cotés jusqu'à 12 mois, on doit utiliser d'autres taux

pour les échéances plus longues. On utilise donc les taux sur swap d'intérêt d'échéance de un, deux, trois, quatre, cinq et sept ans, en provenance de Bloomberg (USSWx Curncy, avec x l'échéance en années). Les paiements des swaps ont lieu tous les six mois. Les intérêts sont cotés en base annuelle et calculés sur la base du nombre de mois écoulés depuis le dernier paiement (convention 30/360).

4.1.2 CDS

D'abord, CDS signifie *Credit Default Swap*. C'est un contrat d'assurance dans lequel le vendeur s'engage à verser à l'acheteur un certain montant advenant le défaut d'une tierce partie. En échange, l'acheteur paie une prime périodique au vendeur jusqu'à l'échéance du contrat, ou jusqu'au défaut de la tierce partie si celui-ci survient avant la fin du contrat. Le montant payé peut être une portion prédéterminée de la valeur nominale assurée, ou encore une fraction de la valeur nominale assurée correspondant à l'ampleur du défaut. Les CDS sont des instruments transigés au comptoir, mais ils sont devenus très liquides depuis quelques années en raison de leur popularité.

Les cotations CDS des 125 compagnies composant l'indice CDX.NA.IG sont requises, pour chacune des séries considérées. Elles serviront à calculer les probabilités de défaut implicites de chacune des firmes, et à calibrer les copules décrivant la dépendance entre les temps de défaut (voir la section 4.2).

Les CDS sont généralement cotés pour des échéances de six mois et un, deux, trois, cinq, sept et dix ans. On utilise par contre les CDS d'échéance cinq ans seulement, car se sont les plus liquides. Les CDS sont transigés au comptoir, et donc comportent un risque de contrepartie. Les CDS sont cotés avec leur prime, en taux annuel exprimé en points de bas. La prime est payée à chaque trimestre. Les données recueillies vont du 1er janvier 2007 au 25 juin 2009, et proviennent de Bloomberg.

4.1.3 CDO

L'acronyme CDO signifie *Collateralized Debt Obligation*. Un CDO est une obligation qui est garantie par un panier d'actifs sous-jacent (ASJ) sujets au risque de crédit. Les ASJ des CDOs peuvent être des obligations corporatives, des prêts hypothécaires ou encore des CDS dans le cas de CDOs synthétiques. Outre la titrisation des ASJ, ce qui caractérise les CDOs est la subdivision en tranches ayant des expositions différentes au risque de crédit des ASJ. Par exemple, un CDO synthétique est divisé

en une tranche d'équité, des tranches mezzanines et plusieurs tranches seniors. La tranche équité absorbe les pertes reliées aux défauts des CDS jusqu'à concurrence de sa valeur nominale. Une fois que le capital de la tranche équité est épuisé, c'est la première tranche mezzanine qui absorbe les pertes subséquentes jusqu'à concurrence de sa valeur nominale. Lorsque le capital de la première tranche mezzanine est également épuisé, la tranche mezzanine suivante commence à absorber les pertes, et ainsi de suite. La tranche équité est donc la plus risquée, suivie des tranches mezzanines, et finalement des tranches seniors qui sont les moins risquées. Pour toutes les tranches, les intérêts sont payés sur la valeur nominale résiduelle. Pour plus de détails sur les CDOs, voir Schönbucher (2003).

Pour ce projet, il est intéressant de travailler avec des CDOs synthétiques puisqu'ils sont standardisés. Les données choisies sont celles de l'indice CDX.NA.IG, en raison de la liquidité de cet indice. Le CDX.NA.IG, ou *North America Investment Grade CDX*, porte sur 125 entreprises nord-américaines dont les obligations de référence sont de classe investissement. Chacune des entreprises compte pour 0.8 % de l'indice. Ces entreprises sont regroupés en cinq sous-indices, chacun représentant un grand secteur de l'économie (voir le tableau 4.1). À chaque six mois, une nouvelle série est émise pour des échéances de un, deux, trois, cinq, sept et dix ans. Jusqu'à ce que la prochaine série soit émise, la nouvelle série est la plus liquide et elle est appelée la série courante. Les séries considérées dans le mémoire sont listées au tableau 4.2, pour la période où chacune est la série courante. Aussi, on ne considère que les CDOs d'échéance cinq ans, encore une fois car ce sont les plus liquides. Les prix des CDOs complets et des tranches sont requis. Le prix des tranches est essentiel pour ce projet puisque il est fonction de la dépendance entre les défauts, contrairement au prix du CDO complet. Le tableau 4.3 contient les noms des tranches du CDX.NA.IG et leurs points d'ancrage et de détachement. Ceux-ci définissent l'exposition d'une tranche aux pertes du CDO, en pourcentage de la valeur nominale du CDO. Ainsi, la tranche mezzanine 1 absorbe les pertes excédant trois pourcent de la valeur nominale du CDO, jusqu'à ce qu'elles atteignent sept pourcent. Les informations concernant l'indice CDX.NA.IG proviennent principalement de *www.markit.com*.

Finalement, le tableau 4.4 présente les défauts de paiement ayant un impact sur les séries d'intérêt durant la période considérée. Le tableau indique le nom de l'entreprise, la date de défaut, le taux de recouvrement ainsi que les séries CDX.NA.IG dont l'entreprise fait partie.

TABLE 4.1 – Nombre d'entreprises par sous-indices du CDX.NA.IG (Source : Markit Group Limited)

Sous-indice		Série 7	Série 8	Série 9	Série 10	Série 11	Série 12
Sigle	Nom						
CONS	Consumer	34	34	36	38	40	39
ENRG	Energy	14	14	14	14	15	16
FIN	Financials	25	25	25	24	21	21
INDU	Industrials	30	30	28	27	26	26
TMT	TMT	22	22	22	22	23	23
Total	CDX.NA.IG	125	125	125	125	125	125

Note : TMT signifie Technology, Media and Telecommunications.

TABLE 4.2 – Séries CDX.NA.IG (Source : Bloomberg)

Série	Entrée en vigueur	Premier coupon	Échéance	Taux (bps)
CDX.NA.IG.7	09/21/2006	12/20/2006	12/20/2011	40
CDX.NA.IG.8	03/21/2007	06/20/2007	06/20/2012	35
CDX.NA.IG.9	09/21/2007	12/20/2007	12/20/2012	60
CDX.NA.IG.10	03/21/2008	06/20/2008	06/20/2013	155
CDX.NA.IG.11	09/21/2008	12/22/2008	12/20/2013	150
CDX.NA.IG.12	03/20/2009	06/22/2009	06/20/2014	100

TABLE 4.3 – Tranches du CDX.NA.IG, noms à titre indicatif

Nom	Point d'ancrage (%)	Point de détachement (%)
Équité	0	3
Mezzanine 1	3	7
Mezzanine 2	7	10
Senior	10	15
Super Senior	15	30
	30	100

TABLE 4.4 – Défauts de paiement affectant les CDX.NA.IG (1er janvier 2007 au 25 juin 2009)

Entreprise	Date	Taux de recouvrement (%)	Série					
			7	8	9	10	11	12
Federal Home Loan Mortgage Corporation	07/09/2008	94,000	x	x	x	x		
Federal National Mortgage Association	07/09/2008	91,510	x	x	x	x		
Washington Mutual	25/09/2008	57,000	x	x	x	x		

Source : Markit Group Limited à www.markit.com

4.2 Évaluation des CDOs synthétiques

Cette section décrit en détail l'approche utilisée pour évaluer les CDOs synthétiques. Le risque de crédit est modélisé par une approche à forme fermée, puisque c'est l'approche qui permet le mieux d'expliquer les données de marché. L'innovation de cette section est que la modélisation de la dépendance entre les défauts est basée sur les copules gaussiennes dynamiques et archimédiennes hiérarchiques dynamiques. Les concepts et techniques utilisées pour l'évaluation de CDOs sont donc tous bien établis en ingénierie financière, sauf pour la modélisation de la dépendance qui est au coeur du projet de recherche.

Les principales hypothèses à la base de l'approche utilisée sont les suivantes :

- marché complet, transactions en temps continu et aucun coût de transaction ;
- aucun risque de contrepartie sur les CDS et les CDOs ;
- indépendance entre les taux d'intérêt, la réalisation des défauts et le taux de recouvrement ;
- la dépendance entre les temps de défaut est identique à la dépendance entre les variations quotidiennes des CDS.

Les hypothèses de marché complet, de transactions en temps continu et d'absence de coûts de transactions permettent de valoriser les actifs financiers en monde neutre au risque, en calculant l'espérance des flux monétaires actualisés. L'hypothèse d'absence de risque de contrepartie sur les CDS permet d'utiliser directement les taux CDS comme estimé du risque de crédit de l'entité de référence, sans se préoccuper du vendeur du CDS. L'hypothèse d'indépendance entre les taux d'intérêt, la réalisation des défauts et le taux de recouvrement n'est pas nécessairement réaliste non plus mais permet encore de simplifier l'évaluation. Comme le but du projet est de modéliser la contagion des défauts, ces simplifications permettent de focaliser sur cet aspect. De plus, en se basant sur la revue de littérature, ces hypothèses semblent courantes dans les publications portant sur l'évaluation de CDOs. On utilise un taux de recouvrement espéré de 40 %, comme Markit Group Limited le fait (*www.markit.com*, nouvelles du 25 mars 2009). La dernière hypothèse est nécessaire car comme les temps de défaut ne peuvent être observés avant que les défauts ne surviennent, leur dépendance ne peut non plus être observée et il faut se rabattre sur une méthode indirecte pour la déterminer. On suppose donc que la dépendance entre les temps de défaut des firmes est identique à la dépendance entre les variations quotidiennes des CDS de ces mêmes firmes. La dépendance entre les variations des primes de CDS est donc le proxy pour la dépendance entre les temps de défaut, comme dans Berrada

et al. (2006) et plusieurs autres.

Les principales étapes d'évaluation des CDOs synthétiques sont, dans l'ordre, les suivantes :

- calculer la courbe des taux d'intérêt sans risque ;
- calculer la distribution du temps de défaut pour chacune des firmes ;
- calculer la dépendance entre les temps de défaut ;
- simuler les défauts ;
- calculer les prix des tranches de CDOs comme l'espérance des flux monétaires actualisés.

Ces étapes sont détaillées dans les pages qui suivent. Sauf en ce qui concerne le type de copules utilisé pour la dépendance entre les temps de défaut, on utilise le plus possible des méthodes courantes et admises dans la littérature afin d'isoler l'impact des copules. Cela rend notre méthodologie plus simple, difficile à critiquer, et nos résultats d'autant plus crédibles.

4.2.1 Courbe des taux d'intérêt sans risque

Le calcul de la courbe des taux d'intérêt sans risque est nécessaire pour actualiser les flux monétaires relatifs aux CDS et aux CDOs. Il s'agit de calculer les taux zéro coupons pour une plage d'échéances allant de 0 à 5 ans et un trimestre. Dans les faits, on calcule la courbe jusqu'à sept ans car c'est la plus petite échéance de swap disponible qui est supérieure à cinq ans. On suppose que la courbe des taux a la forme du modèle de Nelson-Siegel (Nelson and Siegel (1987)), une méthode répandue pour représenter la courbe des taux d'intérêt. L'équation 4.1 présente ce modèle de la courbe des taux, qui dépend de quatre paramètres : α permet de contrôler le niveau des taux, β la pente de la courbe des taux, δ la courbure de la courbe et finalement τ est un paramètre d'échelle. On optimise donc les quatre paramètres de l'équation 4.1 afin de retrouver, le plus possible, les cotations observées sur le marché pour les swaps de taux d'intérêt et pour l'obligation de courte échéance. Plus précisément, on minimise la somme du carré de l'écart entre le prix observé sur le marché et le prix du modèle Nelson-Siegel. Les swaps de taux d'intérêt sont évalués comme une position longue dans une obligation à taux fixe et une position courte dans une obligation à taux variable. Comme les deux obligations se transigent au pair, le prix au marché du swap est nul par définition. Le prix théorique est obtenu en actualisant simplement les flux monétaires des obligations avec le facteur d'actualisation de l'équation 4.2. Pour l'obligation de courte échéance, le prix de marché est simplement obtenu en

actualisant un flux monétaire de un au taux du marché. Le prix du modèle est quant à lui obtenu en actualisant le même flux monétaire au taux indiqué par la courbe Nelson-Siegel.

$$r(t) = \alpha + \beta \left(\frac{1 - e^{-t/\tau}}{t/\tau} \right) + \delta \left(\frac{1 - e^{-t/\tau}}{t/\tau} - e^{-t/\tau} \right) \quad (4.1)$$

$$B(0, t) = e^{-r(t)t}. \quad (4.2)$$

Finalement, le taux sans risque obtenu via l'optimisation Nelson-Siegel et le facteur d'actualisation associé servent à actualiser les flux monétaires des CDS et CDOs, dans les sections suivantes.

4.2.2 Distribution des temps de défaut individuels

En conjonction avec une copule, la distribution du temps de défaut de chacune des firmes définit la distribution jointe des défauts. On doit donc estimer la distribution risque neutre du temps de défaut de chacune des 125 firmes sous-jacentes au CDO. Pour chacune des firmes, cette distribution peut être reconstruite à partir des prix de marchés des CDS de diverses échéances, et la courbe des taux sans risque telle que calculée à la section 4.2.1. Cela nécessite toutefois quelques hypothèses. D'abord, on suppose que l'intensité de défaut est constante entre les échéances de CDS. Cela simplifie les calculs, et semble courant dans la littérature. Ensuite, on applique deux hypothèses simplificatrices listées à la section 4.2, soit que les taux d'intérêt, les défauts et le taux de recouvrement sont indépendants, et que le risque de contrepartie est inexistant.

Le développement suivant présente l'évaluation de CDS, de façon semblable à ce qui est fait dans Soustra (2006). Soit τ le temps de défaut de la firme, $F(t) = \mathbb{P}(\tau < t)$ la probabilité que la firme soit en défaut au temps t , et $S(t) = 1 - F(t)$ la probabilité que la firme survive jusqu'au temps t . Avec le taux de défaut instantané $h(t)$, on écrit $F(t) = 1 - e^{-\int_0^t h(u)du}$ et $S(t) = e^{-\int_0^t h(u)du}$. Le CDS comporte deux pattes : la patte des primes de valeur P et la patte de défaut de valeur D . On considère d'abord un contrat dont les primes sont payées en temps continu : s est le taux de la prime, T est l'échéance du contrat, R est le taux de recouvrement, $\delta = E_{\mathbb{Q}}[R]$ est le taux de recouvrement espéré et $B(0, t)$ le facteur d'actualisation pour la période de 0 à t

tel que défini par l'équation 4.2. La patte des primes s'écrit comme suit :

$$P = s \int_0^T B(0, t) S(t) dt. \quad (4.3)$$

Quant à elle, la patte de défaut s'écrit :

$$\begin{aligned} D &= E_{\mathbb{Q}}[(1 - R)B(0, \tau)\mathbb{I}(\tau \leq T)], \\ D &= (1 - \delta) \int_0^T B(0, t) \frac{dF(t)}{dt} dt, \\ D &= (1 - \delta) \int_0^T B(0, t) h(t) S(t) dt. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Comme la valeur au marché initiale d'un CDS est nulle, on a la relation $D=P$. On note qu'en supposant que $h(t) = h$, on trouve $s = h(1 - \delta)$.

On considère maintenant les vrais contrats CDS, dont les primes sont payées à chaque trimestre. Aussi, au moment du défaut, la prime courue depuis le dernier versement est due. Cela nécessite quelques ajustements à la patte des primes qui n'ont qu'un impact marginal sur les résultats mais qui sont tout de même incorporés par souci de rigueur. La patte de défaut est quant à elle inchangée. Soit l'intervalle entre les paiements $\Delta_t = 0.25$ années, le nombre de paiements $n = T/\Delta_t$, les temps de paiement des primes $t_k = k\Delta_t, \forall k = 1 \dots n$, et t_l le moment du versement de la dernière prime avant le défaut ou le moment d'entrée en vigueur du contrat si le défaut survient durant le premier trimestre. La nouvelle patte des primes s'exprime donc comme suit :

$$\begin{aligned} P &= E_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{k=1}^n B(0, t_k) s \Delta_t S(t_k) + B(0, \tau) s (\tau - t_l) \mathbb{I}(\tau \leq T) \right] \\ P &= s \left(\Delta_t \sum_{k=1}^n B(0, t_k) S(t_k) + \int_0^T B(0, t) (t - t_l) h(t) S(t) dt \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour estimer les taux de défaut, on utilise les CDS d'échéance cinq ans, ainsi que la courbe de taux sans risque calculée précédemment. On suppose que le taux de défaut implicite est constant dans le temps, c'est-à-dire que $h(t) = h$. On procède par

méthode numérique itérative afin de trouver le taux de défaut h qui fait en sorte que la valeur au marché est nulle ($D = P$), étant donné la prime s cotée. Pour un taux de défaut h donné, l'évaluation de la patte de défaut selon l'équation 4.4 requiert une méthode d'intégration numérique. L'évaluation de la patte des primes selon l'équation 4.5 requiert également une méthode numérique pour évaluer l'intégrale, alors que l'évaluation de la somme est directe.

4.2.3 Dépendance entre les temps de défaut

La dépendance entre les temps de défaut est, par hypothèse, modélisée à l'aide de diverses copules présentées au chapitre 3. Parmi celles-ci, le fait d'utiliser des copules gaussiennes dynamiques et archimédiennes hiérarchiques dynamiques est nouveau. Ces copules sont calibrées en utilisant la méthode décrite à la section 3.8, avec les ajustements suivants pour gérer les trous dans les données CDS.

En effet, en pratique les données CDS présentent plusieurs trous, c'est-à-dire des jours de négociation où le prix ne change pas par rapport au jour précédent. Le log-rendement est donc nul et on considère ces données invalides. Pour contourner ce problème, on procède comme suit :

- calculer les log-rendements sur tous les jours de négociation (rendement de la période t par rapport à la période $t - 1$) ;
- pour chacune des paires de données CDS, calculer le nombre d'observations où les deux CDS ont un rendement non-nul (t par rapport à $t - 1$) ;
- pour chacune des paires de données CDS, calculer le tau de Kendall sur la base de ces observations (où les deux CDS ont un rendement non-nul à la période t par rapport à $t - 1$) ;
- calculer la moyenne des tau de Kendall sur les paires de CDS, pondérée par le nombre d'observations valides.

Cette méthode permet d'utiliser pleinement les données disponibles, tout en contournant le problème des trous, causé par la faible liquidité.

4.2.4 Simulation des défauts du portefeuille

Une fois que la distribution individuelle des temps de défaut et la dépendance entre les temps de défaut sont déterminées suivant les sections 4.2.2 et 4.2.3, la distribution jointe des temps de défaut est connue. La prochaine étape consiste à simuler les

temps de défaut $\tau_i, \forall i = 1 \dots d$ selon cette distribution. Pour ce faire, il faut d'abord simuler des variables aléatoires uniformes $V_i, \forall i = 1 \dots d$ suivant les copules estimées précédemment, puis inverser les distributions individuelles pour retrouver les temps de défaut des firmes. Avec l'hypothèse énoncé à la section 4.2.2 à l'effet que le taux de défaut instantané $h(t)$ est constant, la probabilité de survie d'une firme devient $S(t) = e^{-ht}$. En posant $S_i(t) = V_i$, on trouve que le temps de défaut de la firme i est $\tau_i = -\ln(V_i)/h_i$, avec h_i son taux de défaut instantané supposé constant. On note que si le temps de défaut τ_i est supérieur à l'échéance du CDO, alors il n'a pas d'impact sur l'évaluation du CDO et on l'ignore. À noter qu'avec les définitions utilisées, les défauts correspondent aux valeurs V près de un et non près de zéro. Ainsi, une entreprise ayant une probabilité de défaut de 0.1 sur la vie du CDO est considérée en défaut si $V > 0.9$.

4.2.5 Actualisation des flux monétaires du CDO

Comme pour les CDS, le juste prix au marché de chaque tranche du CDO synthétique est l'espérance des flux monétaires actualisés en mesure neutre au risque. Soit d'abord N_t , le nombre d'entreprises ayant fait défaut au temps t :

$$N_t = \sum_{i=1}^d \mathbb{I}(\tau_i \leq t),$$

avec $\tau_i, \forall i = 1 \dots d$ le temps de défaut de la firme i simulé à la section 4.2.4, et $d = 125$ le nombre de firmes sous-jacentes au CDO. On définit également le notionnel I du CDO, ainsi que le notionnel pour chacune des firmes comme $\tilde{I} = I/d$. Les pertes cumulatives du CDO au temps t s'écrivent, avec un taux de recouvrement R_i pour la firme i :

$$L_t = \sum_{i=1}^d (1 - R_i) \tilde{I} \mathbb{I}(\tau_i \leq t).$$

Étant donné l'hypothèse d'indépendance entre les défauts et le taux de recouvrement d'espérance δ , l'espérance des pertes en mesure neutre au risque s'exprime ainsi :

$$E_{\mathbb{Q}}[L_t] = (1 - \delta) \tilde{I} E_{\mathbb{Q}}[N_t]$$

Soit maintenant une tranche définie par le point d'attachement a et le point de détachement b , définis comme une proportion du notionnel total du CDO. Les pertes cumulatives de la tranche $[a, b]$ sont :

$$U_t = \begin{cases} 0 & \text{si } L_t \leq aI, \\ L_t - aI & \text{si } aI < L_t \leq bI, \\ (b - a)I & \text{si } L_t > bI. \end{cases}$$

Quand à lui, le montant assuré par la tranche $[a, b]$ s'exprime comme suit :

$$M_t = \begin{cases} (b - a)I - U_t & \text{pour toutes les tranches sauf la moins risquée,} \\ (b - a)I - U_t - \delta \tilde{I} N_t & \text{pour la tranche la moins risquée.} \end{cases}$$

Pour la tranche la plus senior, le montant assuré est réduit non seulement par les pertes, mais également par la portion recouvrée puisque celle-ci n'est plus assurée. Par exemple, au premier défaut à survenir parmi les 125 entreprises, la tranche la plus risquée subit une perte de $0,60\tilde{I}$ et une valeur de $0,40\tilde{I}$ est récupérée. On a donc la certitude que la tranche la moins risquée ne devra pas couvrir cette valeur de $0,40\tilde{I}$. En bref, à chacun des défauts le montant total assuré est réduit de $0,60\tilde{I} + 0,40\tilde{I} = \tilde{I}$ puisque le CDO n'assure plus une entreprise qui a fait défaut.

Comme le CDS, la valeur du CDO est composé de deux pattes : primes et défauts. La valeur de la patte de défaut est calculée comme suit, avec le facteur d'actualisation $B(0, t)$ de l'équation 4.2 et l'échéance T :

$$\begin{aligned} D &= E_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^d B(0, \tau_i) (1 - R_i) \tilde{I} \mathbb{1}(\tau_i \leq T) \right], \\ D &= E_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T B(0, t) dU_t \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Quant à elle, la valeur de la patte des primes se calcule comme suit, avec l'intervalle entre les paiements trimestriels $\Delta_t = 0.25$, $n = \lceil T/\Delta_t \rceil$ le nombre de paiements, et le moment des paiements $t_k = T - (n - k)\Delta_t, \forall k = 1 \dots n$:

$$P = E_{\mathbb{Q}} \left[(b - a)IF_0 + \sum_{k=1}^n B(0, t_k) s \Delta_t M_{t_k} \right],$$
$$P = (b - a)IF_0 + s \Delta_t \sum_{k=1}^n B(0, t_k) E_{\mathbb{Q}}[M_{t_k}]. \quad (4.7)$$

La juste valeur au marché du CDO est telle que $P = D$. La seule inconnue de cette équation, la prime s ou les frais initiaux F_0 selon les tranches, peut être isolée facilement à partir des équations 4.6 et 4.7. En effet, une fois que les défauts sont simulés, les équations peuvent être évaluées directement.

Chapitre 5

Résultats et analyse

Ce chapitre présente les principaux résultats relatifs à la simulation des copules et à l'évaluation de CDOs, en lien avec la contribution des deux chapitres de méthodologie. Également, une section présente une analyse des données CDS puisque le comportement du marché CDS, très intéressant en soi, justifie le choix des copules utilisées dans le cadre de l'évaluation de CDOs.

5.1 Simulation des copules

Cette section montre les résultats de la simulation des copules traitées au chapitre 3. Elle a pour but de montrer le bon fonctionnement des algorithmes implantés, et de montrer leur performance et leurs limites pour différentes dimensions. Plus précisément, on présente d'abord des données simulées selon trois copules et pour trois valeurs de tau de Kendall. Ensuite, pour chacune des structures de copules, on présente les résultats de tests sur les propriétés des variables simulées et on les compare aux propriétés théoriques. On indique également les temps d'exécution et les problèmes rencontrés s'il y a lieu. Finalement, on fait la synthèse des méthodes de simulations implantées et de leur applicabilité.

5.1.1 Graphes bivariés

La figure 5.1 présente 1000 paires de variables simulées suivant les copules gaussienne, Gumbel et Clayton, pour des tau de Kendall de 0,25, 0,5 et 0,75. Chacun des points représente une réalisation (U_1, U_2) , avec U_1 en abscisse et U_2 en ordonnée. On

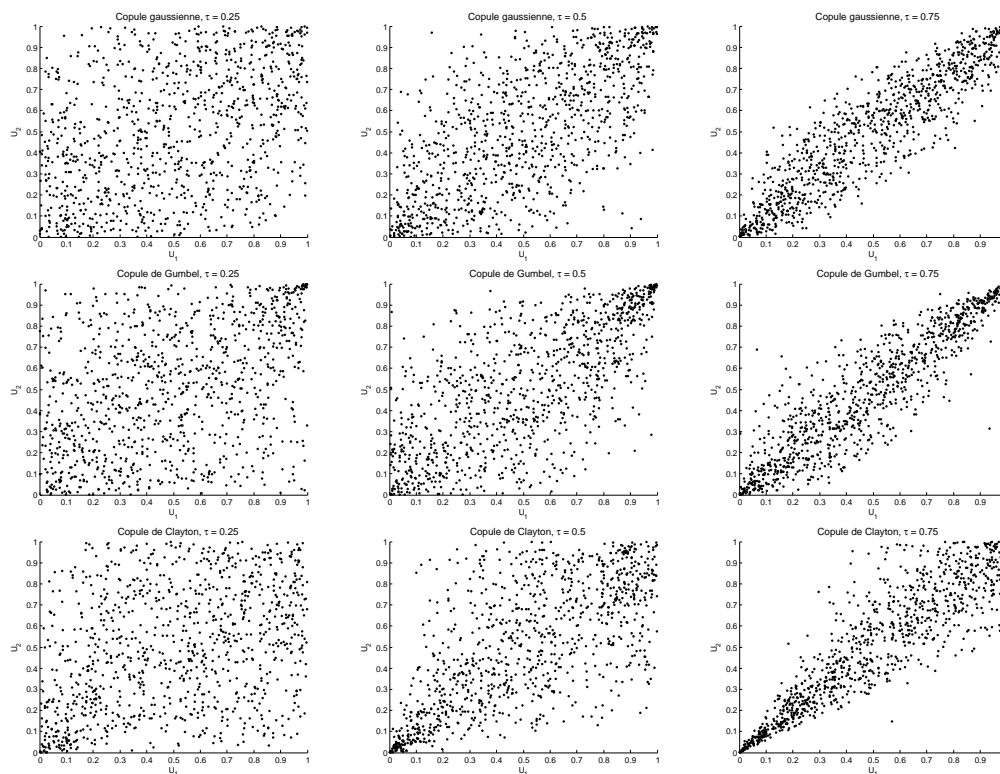


FIGURE 5.1 – Simulation des copules gaussiennes, Gumbel et Clayton, pour des tau de Kendall de 0.25, 0.5 et 0.75

constate d'abord que plus le tau de Kendall est grand, plus la dépendance est forte entre les variables. Ensuite, on constate que la forme de la dépendance varie de façon importante d'une copule à l'autre. Par exemple, avec un tau de Kendall de 0.75, pour la copule Clayton les variables sont très liées près de 0 mais plutôt dispersées près de 1. Pour les copules gaussienne et Gumbel, les variables sont très liées près de 0 et de 1, mais plus dispersées autour de 0,5. Tout de même, les variables sont beaucoup plus liées dans les extrêmes avec Gumbel qu'avec la gaussienne. C'est plus évident près de 1, pour des tau de Kendall de 0,5 et 0,75. La copule Gumbel est d'ailleurs qualifiée de copule d'événements extrêmes, d'où son utilité pour le risque de crédit. En effet, la copule gaussienne sous-estimerait la probabilité d'événements extrêmes, avec des conséquences potentiellement désastreuses pour la gestion des risques.

5.1.2 Validation et performance

Les résultats qui suivent proviennent de l'implantation en C des algorithmes présentés au chapitre 3. Le code a été exécuté sur divers ordinateurs récents et semblables, mais non identiques. En conséquence, les temps de simulations sont donnés à titre indicatif, afin de donner leur ordre de grandeur, de démontrer la faisabilité des algorithmes testés et de comparer la performance des nouveaux algorithmes développés à celles d'algorithmes existants. Les temps de simulations indiqués ne permettent pas de faire des comparaisons pointues entre différentes copules ou algorithmes, et ce n'est pas l'objectif. Également, les algorithmes testés ici ont été conçus pour éviter autant que possible les problèmes numériques rencontrés, c'est-à-dire les dépassements de capacité («underflow» et «overflow»). Sur les ordinateurs utilisés pour faire les simulations et selon les tests effectués, les opérations arithmétiques en point flottant sont valides à l'intérieur de la plage allant de $1e-316$ à $1e+308$.

Afin de valider l'implantation des algorithmes, les trois éléments suivants sont considérés :

- Test du tau de Kendall ;
- Test du χ^2 sur les variables uniformes ;
- Graphes bivariées.

Le premier test consiste à calculer le tau de Kendall sur les données simulées, et de le comparer au tau de Kendall théorique. Le tau de Kendall est une mesure de dépendance entre deux variables aléatoires uniformes. La paire (x_1, y_1) est dite concordante avec la paire (x_2, y_2) si et seulement si $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$ ou $x_1 > x_2$ et $y_1 > y_2$. Sinon, la paire est dite discordante. Le tau de Kendall est défini comme la probabilité qu'une paire de points soit concordante moins la probabilité qu'une paire soit discordante. Un tau de Kendall de 1 signifie que deux variables sont égales (borne supérieure de Fréchet-Hoeffding), alors qu'un tau de Kendall de -1 signifie que deux variables sont opposées (borne inférieure de Fréchet-Hoeffding). L'indépendance implique un tau de Kendall nul, mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai. Pour estimer le tau de Kendall sur n paires de données, on utilise la formule suivante :

$$\tau = -1 + \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \widehat{V}_i,$$

avec

$$\widehat{V}_i = \text{Card}\{k, \widehat{U}_{k,1} < \widehat{U}_{i,1} \text{ et } \widehat{U}_{k,2} < \widehat{U}_{i,2}\} / (n-1),$$

$$\widehat{U}_{i,j} = \frac{R_{i,j}}{n+1}, \forall i = 1 \dots n, j = 1 \dots d,$$

et $R_{i,j}$ le rang de l'observation $X_{i,j}$ parmi $X_{1,j}, \dots, X_{n,j}$. Le rang est l'indice si on place les observations $X_{i,j}, \forall i = 1 \dots n$ en ordre croissant. L'écart type du tau de Kendall est estimé à partir de l'écart type des pseudo-observations :

$$\sigma_\tau = \sigma \left\{ 4(2\widehat{V}_i - \widehat{U}_{i,1} - \widehat{U}_{i,2}) \right\}.$$

La p-valeur se calcule donc sur la base de :

$$z = \frac{\sqrt{n}(\widehat{\tau} - \tau)}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Comme le tau de Kendall est défini sur une paire de variable, on calcule le tau de Kendall et la p-valeur associée sur chacune des paires possibles. Dans les résultats ci-dessous, on donne la proportion de rejet à 5% de l'hypothèse que le tau de Kendall observé sur les données simulées est bel et bien égal au tau de Kendall théorique. Le second test est simplement d'appliquer le test de χ^2 sur chacune des variables uniformes simulées. On donne également ci-dessous la proportion de rejet à 5% de l'hypothèse que les variables simulées sont effectivement uniformes. Le troisième test est qualitatif : il s'agit de placer les réalisations d'une paire de variables sur un graphe, comme à la figure 5.1. Aucune autre figure montrant les réalisations n'est présentée car ce serait redondant. Ces trois tests ne peuvent prouver que l'implantation de l'algorithme est correcte, mais permettent de rejeter certains comportements erronés. Ils procurent ainsi une assurance raisonnable que l'implantation des algorithmes est valide.

Copules gaussiennes et archimédiennes

Le tableau 5.1 présente les résultats de simulation de copules gaussiennes, Gumbel et Clayton à partir d'algorithmes connus dans la littérature. Les résultats sont présentés pour $N = 40,000$ simulations en dimension deux et pour des tau de Kendall allant de 0,01 à 0,99, par incrément de 0,01 afin d'étudier la performance sur une large

TABLE 5.1 – Résultats de simulation, copules gaussiennes et archimédiennes avec $d = 2$, $N = 40,000$ et $\Delta\tau = 0.01$

Copule	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)	Exclusion
Gaussienne	4,0	5,6	0,001	
Gumbel	5,1	4,0	0,002	$\tau = 0,99$
Clayton	4,1	4,0	0,001	$\tau = 0,99$

plage de tau de Kendall. On a donc 99 p-valeurs pour calculer les taux de rejets du tau de Kendall avec la copule Gaussienne, et 98 pour Gumbel et Clayton à cause des problèmes avec $\tau = 0,99$. Pour le taux de rejet du caractère uniforme, on a le double de p-valeurs puisqu'on en a une pour chacune des variables uniformes simulées. Dans ce tableau comme dans les autres, les taux de rejets et temps de calcul présentés excluent les cas problématiques. Les taux de rejets à 5% sont autour de 5%, ce qui suggère que les algorithmes de simulation sont bel et bien implantés correctement, comme pour tous les autres évidemment. Les simulations sont très rapides pour les trois copules, de l'ordre d'un million de réalisations par seconde. Comme l'indique la dernière colonne, les seuls cas problématiques sont avec $\tau = 0,99$ pour les copules Gumbel et Clayton où les p-valeurs du tau de Kendall sont extrêmement faibles, vraisemblablement à cause de problèmes numériques lors des simulations.

Le tableau 5.2 présente les résultats de 1,000 simulations pour les mêmes copules que le précédent, mais en dimension 125 et pour des tau de Kendall incrémentés par 0,1. Même si on n'a fait que neuf simulations pour chacune des copules, les taux de rejets sont basés sur de nombreuses p-valeurs. En effet, le tau de Kendall est calculé sur chacune des paires de variables uniformes, soit 7750 paires en dimension 125, et donc on a $9 \times 7750 = 69750$ p-valeurs en tout. Pour le caractère uniforme des variables, on a $9 \times 125 = 1125$ p-valeurs. Les temps de calcul sont linéaires en d pour les copules archimédiennes, alors les temps de calcul sont de l'ordre de $125/2 = 62,5$ fois plus élevés qu'en dimension 2. Les temps de calcul sont encore comparables pour les différentes copules.

Copules dynamiques

Cette section présente les résultats de simulation des copules gaussiennes, Gumbel et Clayton dynamiques. Pour les copules gaussiennes dynamiques, l'algorithme proposé dans Soutra (2006) est utilisé. Soutra (2006) propose également des algorithmes

TABLE 5.2 – Résultats de simulation, copules gaussiennes et archimédiennes avec $d = 125$, $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.1$

Copule	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)
Gaussienne	6,1	3,8	0,052
Gumbel	3,4	5,0	0,052
Clayton	4,6	3,7	0,040

de simulation pour les copules Gumbel et Clayton dynamiques, mais un algorithme original est ici utilisé pour ces copules. Le tableau 5.3 montre les résultats pour 40,000 simulations en dimension deux avec un incrément du tau de Kendall de 0,01. Les rejets pour le caractère uniforme des variables sont calculés seulement sur les deux variables conditionnelles (donc le tableau est basé sur près de 200 p-valeurs au total pour le caractère uniforme). En effet, on exclut les deux variables inconditionnelles puisqu'elles ne sont pas simulées suivant une copule dynamique. Par contre, les rejets sur le tau de Kendall sont calculés sur toutes les paires de variables comportant des variables conditionnelles. Ainsi, on considère cinq des six paires possibles avec les quatre variables, c'est-à-dire la paire entre les variables conditionnelles et les quatre paires entre une variable conditionnelle et une variable inconditionnelle. La paire entre les variables inconditionnelles n'est pas intéressante puisque ces variables ne sont pas simulées suivant une copule dynamique. Les cinq paires sur près de 100 essais donnent au total près de 500 valeurs de tau de Kendall. Concernant les temps de calcul, la simulation de la copule gaussienne dynamique est environ 100 fois plus lente que pour la gaussienne classique, qui s'explique par le fait que l'algorithme soit beaucoup plus complexe. Pour la copule Gumbel, l'algorithme est environ 25 fois plus lent que dans le cas classique, principalement en raison de l'utilisation d'une méthode de rejet. On constate d'ailleurs des problèmes avec $\tau > 0,95$ en raison d'un taux de rejet très élevé. Également, le temps de simulation peut parfois varier considérablement d'une simulation à l'autre (d'un facteur 100 ou plus). Pour la copule Clayton on retrouve la même limitation que dans le cas classique, c'est-à-dire les problèmes avec $\tau = 0,99$. Le temps de calcul est comparable au cas classique, parce que dans les deux cas on doit simuler une distribution Gamma. En effet, avec Clayton il suffit de changer les paramètres de la distribution Gamma pour tenir compte des réalisations u , et cette simplification permet de ne pas avoir d'impact important sur le temps de calcul.

Le tableau 5.4 montre les résultats de 1,000 simulations pour les trois mêmes copules

TABLE 5.3 – Résultats de simulation, copules dynamiques avec $d_1 = d_2 = 2$, $N = 40,000$ et $\Delta\tau = 0.01$

Copule	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)	Exclusion
Gaussienne	3,4	3,0	0,155	
Gumbel	4,7	2,1	0,046	$\tau > 0,95$
Clayton	6,3	5,6	0,001	$\tau = 0,99$

TABLE 5.4 – Résultats de simulation, copules dynamiques avec $d_1 = d_2 = 125$, $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.1$

Copule	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)	Restrictions
Gaussienne	4,0	5,6	1,358	$\tau_0 < 0,5$ et $\tau_1 = 0,1$
Gumbel	5,1	4,3	0,320	
Clayton	3,6	3,3	0,059	

en dimension 125 et avec des incréments de tau de Kendall de 0,1. Pour les copules gaussiennes, on constate d’abord que pour obtenir une matrice de corrélation semi-définie positive, les tau de Kendall doivent être sérieusement restreints à certaines plages de valeur. Les copules archimédiennes ne souffrent pas d’une telle limitation. Concernant les temps de simulation, ils ont bien sûr augmenté par rapport au cas en deux dimensions, mais demeure suffisamment faibles pour que les copules conditionnelles puissent être utilisables en pratique. Les copules gaussiennes et Gumbel dynamiques sont plusieurs fois plus lentes à simuler que leur contreparties classiques, alors que la copule Clayton dynamique est pratiquement aussi rapide que sa cousine classique pour des raisons déjà exposées (voir le tableau 5.2 pour les temps de simulation des copules classiques).

Copules archimédiennes hiérarchiques

Le tableau 5.5 présente les résultats de simulation de copules archimédiennes hiérarchiques Gumbel et Clayton, à partir de l’algorithme de McNeil (2008). Les résultats de 40,000 simulations sont présentés pour des tau de Kendall incrémentés par 0,05, et pour la dimension minimale, soit deux secteurs de deux variables chacun. Pour chacune des copules, on simule pour chacune des combinaisons de tau de Kendall multiples de $\Delta\tau = 0.05$ telles que $\tau_0 < \tau_1 = \tau_2$, c’est-à-dire toutes les combinaisons

TABLE 5.5 – Résultats de simulation, copules hiérarchiques à deux niveaux avec $s = 2$, $d = 4$, $N = 40,000$ et $\Delta\tau = 0.05$

Copule	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)	Exclusion
Gumbel	6,3	5,4	0,004	
Clayton	5,7	4,5	0,043	$\tau_0 \leq 0,20$

TABLE 5.6 – Résultats de simulation, copules hiérarchiques Gumbel à deux niveaux avec $s = 5$, $d = 125$, $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.05$

Copule	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)
Gumbel	5,3	5,4	0,048

pour lesquelles on obtient une copule valide en procédant par incréments de 0,05. Il en résulte 171 combinaisons qui sont testées. Les taux de rejets sont donc basés sur $6 \cdot 171 = 1026$ p-valeurs pour les tau de Kendall (six paires parmi quatre variables) et $4 \cdot 171 = 684$ p-valeurs pour le caractère uniforme. La simulation pour la copule Gumbel est très rapide, à peine deux fois plus longue que celle de la copule Gumbel classique. La situation est tout autre pour la copule de Clayton. En effet, les cas où $\tau_0 \leq 0,20$ sont très problématiques, le taux de rejet de la méthode de simulation étant très élevé. Pour mieux comprendre le problème, on a introduit pour fin de tests une limite de un million de rejets. Pour $\tau_0 = 0.05$ et $\tau_1 = \tau_2 = 0.1$, une moyenne de 158 simulations sur 1000 atteignent la limite fixée de 1 million de rejets, pour un temps d'exécution de 260 secondes en moyenne. Il n'est tout simplement pas intéressant de travailler avec les copules de Clayton dans ces conditions, et donc elles ne sont plus étudiées pour le reste de cette section. On présente donc les résultats pour les copules de Gumbel uniquement.

Le tableau 5.6 présente les résultats de simulation pour les copules hiérarchiques Gumbel en dimension 125, avec cinq secteurs de 25 variables chacun. Le temps de calcul moyen montre la faisabilité de simuler de telles copules en grande dimension, avec environ 20,000 réalisations par secondes. Le temps de simulation est environ 10 fois celui pour $s = 2$ et $d = 4$. En théorie, au delà d'un certain seuil le coût des simulations est linéaire selon le nombre de variables d et le nombre de secteurs s .

Les tableaux 5.7 et 5.8 présentent les résultats de simulations pour les copules Gumbel hiérarchiques à trois niveaux. Dans les deux cas, les tau de Kendall sont égaux sur un niveau hiérarchique et sont incréments par 0,1, ce qui résulte en 84 combi-

TABLE 5.7 – Résultats de simulation, copules hiérarchiques Gumbel à trois niveaux avec $d = 8$, $N = 40,000$ et $\Delta\tau = 0.1$

Copule	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)
Gumbel	3,6	3,9	0,007

TABLE 5.8 – Résultats de simulation, copules hiérarchiques Gumbel à trois niveaux avec $d = 125$, $N = 5,000$ et $\Delta\tau = 0.1$

Copule	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)
Gumbel	3,9	4,3	0,063

naisons valides de paramètres. Le tableau 5.7 présente les résultats pour $d = 8$, le nombre minimal de dimensions pour une copule à trois niveaux dont l'arborescence est complète (deux secteurs formés chacun de deux sous-secteurs de deux variables chacun). Le temps de calcul est très faible, environ deux fois celui requis pour les copules Gumbel à deux niveaux de dimension $d = 4$. Le tableau 5.8 présente les résultats pour $d = 125$, c'est-à-dire cinq secteurs de cinq sous-secteurs de cinq variables chacun ($5 \times 5 \times 5$). Le temps de calcul est encore une fois relativement petit, du même ordre de grandeur que pour les copules à deux niveaux de même dimension. Ces résultats confirment la faisabilité de simuler des copules Gumbel hiérarchiques, même avec plusieurs niveaux et une dimension élevée.

Copules archimédiennes hiérarchiques dynamiques

Les résultats de simulation des copules Gumbel hiérarchiques dynamiques à deux niveaux de type I - momentum de marché sont montrés aux tableaux 5.9 et 5.10. Suivant les mêmes principes que pour les copules hiérarchiques, toutes les combinaisons valides de tau de Kendall sont testées. Il en est de même pour les autres copules hiérarchiques dynamiques. La dimension d signifie que la copule comporte d variables conditionnelles à d autres variables. Pour $d = 2$, le temps de simulation moyen est d'environ 0,1 seconde pour 1,000 réalisations, alors qu'il est d'environ 0,6 secondes pour 1,000 pour $d = 125$. L'algorithme testé semble ici aussi utilisable en pratique, même pour de grandes dimensions. L'algorithme B pourrait possiblement être plus rapide, mais il n'a pas été implanté pour des raisons expliquées à la section 3.6.4. On note au passage que pour $d = 2$, la simulation est environ 2 fois plus lente que pour les copules dynamiques Gumbel de même dimension, et environ 25 fois plus

TABLE 5.9 – Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à deux niveaux de type I - momentum de marché avec $d = 2$, $N = 5,000$ et $\Delta\tau = 0.05$

Copule	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)
Gumbel	6,3	4,1	0,109

TABLE 5.10 – Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à deux niveaux de type I - momentum de marché avec $d = 125$, $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.05$

Copule	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)
Gumbel	4,5	3,5	0,584

lente que pour les copules hiérarchiques Gumbel de même dimension. Cela s'explique par la complexité accrue de la copule hiérarchique dynamique par rapport aux deux autres.

Pour les copules archimédiennes hiérarchiques dynamiques à deux niveaux de type II - momentum de titre, les résultats de simulation sont présentés aux tableaux 5.11, 5.12 et 5.13. Le tableau 5.11 présente les résultats en dimension deux, pour les deux algorithmes proposés. Selon les temps de simulation obtenus, l'algorithme B est environ 40 fois plus rapide que l'algorithme A en dimension deux. La différence devient encore plus importante pour des dimensions plus élevées. Pour l'illustrer, le tableau 5.12 présente les mêmes résultats mais en dimension trois. L'algorithme B est aussi rapide qu'en dimension deux, mais l'algorithme A est environ 50 fois plus lent qu'en dimension deux et 20,000 fois plus lent que l'algorithme B ! L'algorithme A est complètement inutilisable avec $d \geq 10$. Par contre, l'algorithme B est encore performant en dimensions élevées, tel que montré au tableau 5.13, en dimension 125. Avec une moyenne de 3 secondes pour simuler 1,000 réalisations, les copules à deux niveaux de type II apparaissent aisément utilisables en pratique. On remarque que la simulation des copules de type II est un peu plus lente que celle des copules de type I, ce qui s'explique par le fait que pour le type II il y a $d + 1$ facteurs latents à simuler contre 2 seulement pour le type I.

Le tableau 5.14 présente les résultats de simulation pour les copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à trois niveaux de type I, II et III, respectivement momentum de marché, de titre et de secteur. Pour toutes les copules, on considère deux secteurs de deux variables chacune, donc on a $s = 2$ et $d = 4$, pour un total de huit variables

TABLE 5.11 – Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à deux niveaux de type II - momentum de titre avec $d = 2$, $N = 5,000$ et $\Delta\tau = 0.05$

Copule	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)
Gumbel, algo A	4,9	5,3	4,011
Gumbel, algo B	5,8	6,1	0,093

TABLE 5.12 – Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à deux niveaux de type II - momentum de titre avec $d = 3$, $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.05$

Algorithme	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)
Gumbel, algo A	5,2	4,9	197,019
Gumbel, algo B	5,4	4,7	0,010

avec le caractère dynamique. Les temps de simulation moyens sont passablement plus élevés que pour les copules hiérarchiques dynamiques à deux niveaux de faible dimension. Tout de même, avec les algorithmes testés les copules hiérarchiques dynamiques à trois niveaux semblent utilisables pour de faibles dimensions. Aussi, les temps de simulation varient beaucoup d'un type à l'autre. En particulier, ils sont plus faibles pour le type II, qui est simulé avec l'algorithme B plutôt qu'avec l'algorithme A comme les deux autres. Finalement, même si ce n'est pas montré dans les résultats, les temps de simulation varient beaucoup selon les combinaisons de tau de Kendall.

Le tableau 5.15 montre les résultats de simulation pour la copule à trois niveaux de type II - momentum de marché en différentes dimensions, puisque c'est la seule dont le temps de simulation apparaît raisonnable avec les algorithmes implantés. Le tableau 5.16 reprend les mêmes temps de simulation, mais les présente selon les axes s et d/s , c'est-à-dire selon le nombre de secteurs et le nombre de variables par secteur. Cela permet de montrer plus aisément comment le temps de simulation change en fonction de la dimension de la copule de type II. Le cas $s = 2$, $d/s = 2$

TABLE 5.13 – Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à deux niveaux de type II - momentum de titre avec $d = 125$, $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.05$

Copule	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)
Gumbel, algo B	4,6	4,9	3,022

TABLE 5.14 – Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à trois niveaux avec $s = 2$, $d = 4$, $N = 5,000$ et $\Delta\tau = 0.1$

Copule	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)
Type I	5,4	5,4	96,378
Type II	6,2	4,8	2,067
Type III	7,0	5,7	16,209

TABLE 5.15 – Résultats de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à trois niveaux de type II - momentum de titre avec $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.1$

Dimension	Rejet à 5%, tau de Kendall (%)	Rejet à 5%, uniforme (%)	Temps moyen (s/1000)
$s = 2, d = 4$	6,2	4,8	2,067
$s = 3, d = 6$	4,9	6,5	25,001
$s = 4, d = 8$	6,0	4,8	289,910
$s = 2, d = 6$	4,8	4,8	1,514
$s = 2, d = 10$	5,3	5,5	1,683
$s = 2, d = 50$	6,3	6,0	21,742

reprend simplement les informations du tableau 5.14 pour le type II. La première ligne montre les résultats obtenus avec trois puis quatre secteurs, mais toujours avec deux variables par secteur. On constate que le temps de simulation augmente d'un facteur 10 environ si le nombre de secteur augmente de un. Cela suggère que le temps de simulation augmente de façon exponentielle avec le nombre de secteurs, et illustre les limitations de l'algorithme utilisé. La première colonne illustre quant à elle l'effet de l'augmentation du nombre de variables par secteur, pour deux secteurs. Le temps de simulation est légèrement plus faible pour $d/s = 3$ et $d/s = 5$ que pour $d/s = 2$, ce qui a priori est surprenant. Cela pourrait s'expliquer par la forme de la distribution des facteurs latents, qui donnent un taux de rejet plus faible. Par contre, pour $d/s = 25$, le temps de simulation est environ 10 fois plus grand que pour $d/s = 2$, et continuerait vraisemblablement d'augmenter considérablement avec d/s . Diverses tentatives de simulation pour les types I et II ont mené à la même conclusion : les algorithmes testés sont inutilisables pour de grandes dimensions, du moins dans le cas de CDOs avec $s = 5$ et $d = 125$. Les algorithmes C (voir les différentes variantes des algorithmes à la section 3.6, plus complexes à implanter, pourraient être plus rapide et permettre de simuler des copules hiérarchiques dynamiques à trois niveaux pour de grandes dimensions.

TABLE 5.16 – Temps moyen de simulation, copules hiérarchiques dynamiques Gumbel à trois niveaux de type II - momentum de titre avec $N = 1,000$ et $\Delta\tau = 0.1$

	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$
$d/s = 2$	2,067	25,001	289,910
$d/s = 3$	1,514		
$d/s = 5$	1,683		
$d/s = 25$	21,742		

Synthèse et limitations

Le tableau 5.17 résume les résultats de simulation pour la copule Gumbel, avec laquelle les tests sur la simulation de copule hiérarchique dynamique sont présentés. Pour chacun des types de copule testés, le tableau présente la dimension maximale testée, le temps moyen de simulation pour une copule de cette dimension, et les valeurs de tau de Kendall qui sont exclues des résultats présentés parce que difficile à simuler. L'abréviation HD signifie hiérarchique dynamique. Les copules sont listés en ordre croissant de complexité (approximativement), et les temps de simulation suivent la même tendance à la hausse. On a réussi à simuler en un temps raisonnable toutes les copules en grande dimension, c'est-à-dire avec $d = 125$, sauf les copules hiérarchiques à trois niveaux. Pour ces dernières, avec les algorithmes implantés la dimension maximale testée est de $d = 4$ pour les types I et III, et $d = 8$ pour le type II. Le temps de simulation semble augmenter rapidement avec la dimension, limitant considérablement cette dernière. Heureusement, des algorithmes plus complexes mais potentiellement plus rapides sont présentés au chapitre 3. Finalement, on remarque que pour les Gumbel archimédiennes et hiérarchiques les résultats excluent les cas où le tau de Kendall est supérieur à 0,98, car les p-valeurs obtenues sur le tau de Kendall sont alors extrêmement faibles. Pour les Gumbel dynamiques et hiérarchiques dynamiques, les résultats excluent les cas avec un tau de Kendall supérieur à 0,95, puisque la simulation y est beaucoup plus lente. Ces restrictions ne devraient pas poser problème pour la grande majorité des applications.

5.2 Analyse des données CDS

Cette section présente une analyse de dépendance sur les données CDS, afin de déterminer la pertinence des différents modèles proposés avec l'introduction des copules hiérarchiques dynamiques. L'analyse porte sur les log-rendements des CDS compo-

TABLE 5.17 – Synthèse des temps de simulation et restrictions, copules Gumbel

Copule	Dimension maximale testée	Temps de simulation moyen (s/1000)	Exclusions
Archimédienne	$d = 125$	0,002	$\tau > 0,98$
Dynamique	$d = 125$	0,046	$\tau > 0,95$
Hiérarchique 2 niveaux	$s = 5, d = 125$	0,048	$\tau > 0,98$
Hiérarchique 3 niveaux	$d = 125$	0,063	$\tau > 0,98$
HD 2 niveaux, type I *	$d = 125$	0,584	$\tau > 0,95$
HD 2 niveaux, type II	$d = 125$	3,022	$\tau > 0,95$
HD 3 niveaux, type I *	$s = 2, d = 4$	96,378	$\tau > 0,95$
HD 3 niveaux, type II *	$s = 4, d = 8$	289,910	$\tau > 0,95$
HD 3 niveaux, type III *	$s = 2, d = 4$	16,209	$\tau > 0,95$
* Des algorithmes potentiellement plus rapides pourraient être implantés			

sant la série 7 du CDX.NA.IG, pour la période du 1er janvier 2007 au 25 juin 2009, soit la période pour laquelle nous avons collecté ces données. Le choix de la série 7 maximise le nombre de données disponibles. En effet, les CDS de plusieurs entreprises inclus dans les séries 8 à 12 mais pas dans la série 7 sont disponibles seulement à partir d'une date ultérieure au 1er janvier 2007, et/ou ont une liquidité très faible avant d'être inclus dans au moins une des séries CDX.NA.IG. L'analyse considère le tau de Kendall et la corrélation entre les log-rendements à une période t donnée, et entre ceux aux périodes t et $t - 1$. La dépendance est analysée au niveau du marché dans son ensemble, entre les secteurs, à l'intérieur d'un secteur et sur le titre lui-même. La méthodologie utilisée pour le calcul des paramètres de dépendance sur les données CDS est celle décrite aux sections 3.8 et 4.2.3, sauf mention contraire.

D'abord, le tableau 5.18 présente le tau de Kendall et la corrélation moyens sur l'ensemble du marché, pour une période donnée et d'une période à l'autre. D'abord, on constate sans surprise la dépendance positive entre les rendements CDS pour une période t donnée, le tau de Kendall moyen étant de 0.268. Aucun test statistique n'a été fait sur cette moyenne pour confirmer qu'elle est significativement différente de zéro. Toutefois, le tau de Kendall sur chacune des paires de titres composant la moyenne est significativement positif dans la grande majorité des cas. De plus, un tau de Kendall similaire sur une paire de CDS est significativement différent de zéro, et donc la moyenne l'est nécessairement aussi puisqu'elle est basée sur énormément plus d'observations. Le fait que le tau de Kendall ne soit pas significativement différent de zéro pour certaines paires d'entreprises pourrait s'expliquer par le peu de données disponibles, le peu de liquidité ou la nature réellement différente des entreprises.

TABLE 5.18 – Tau de Kendall et corrélation moyens des CDS du CDX.NA.IG.7

	Tau de Kendall	Corrélation
t	0.286	0.337
$t - 1$	0.133	0.109

Concernant la dépendance entre les CDS aux périodes t et $t - 1$, le tau de Kendall moyen est de 0.133. Bien que plus faible que la dépendance entre les rendements CDS d'une même période, la dépendance sérielle est également significative, suivant le même raisonnement que pour la dépendance à la période t . Cela justifie l'introduction d'une dépendance sérielle dans un modèle de marché CDS, tel que proposé avec les copules hiérarchiques dynamiques. En effet, la dépendance observée correspond à une copule hiérarchique dynamique à deux niveaux de type I, ou momentum de marché. Les corrélations moyennes présentées au tableau 5.18 sont semblables aux tau de Kendall moyens discutés, et indiquent par conséquent les mêmes conclusions. Finalement, les figures 5.2 et 5.3 montrent la distribution de ces mêmes mesures de dépendance sur chacune des paires de CDS, respectivement pour une période donnée et d'une période à l'autre. Les deux diagrammes en boîte montrent une dispersion relativement importante des mesures de dépendance sur l'ensemble des paires de variables. Ce phénomène pourrait s'expliquer, au moins en partie, par des paires de CDS pour lesquelles il n'y a que très peu de données.

Le tableau 5.19 présente le tau de Kendall moyen des CDS de façon plus détaillée. D'abord, le tableau présente la moyenne des tau de Kendall pour les paires de CDS appartenant au même sous-indice, soit 0.302. Pour l'ensemble des autres paires de CDS, la moyenne est de 0.259, alors que pour le marché dans son ensemble la moyenne est de 0.286 (voir tableau 5.18). Tel qu'attendu, la dépendance est donc légèrement plus forte à l'intérieur des sous-indices qu'entre les sous-indices. Bien qu'aucun test statistique n'ait été fait pour le confirmer, la différence de tau de Kendall apparaît significative malgré qu'elle soit relativement faible. À noter qu'un découpage différent des CDS en secteurs peut influencer de façon significative les résultats. Par exemple, tel que tenté lors de tests préliminaires avec les données, un découpage en un nombre plus élevé de secteurs tend à produire une dépendance plus importante à l'intérieur des secteurs, et par conséquent légèrement plus faible entre les secteurs. Évidemment, le tau de Kendall du rendement d'un CDS avec lui-même à la même période est de 1. Concernant la dépendance entre les CDS aux périodes t et $t - 1$, les résultats sont particulièrement intéressants. En effet, la dépendance sérielle telle que mesurée par le tau de Kendall moyen est sensiblement la même pour

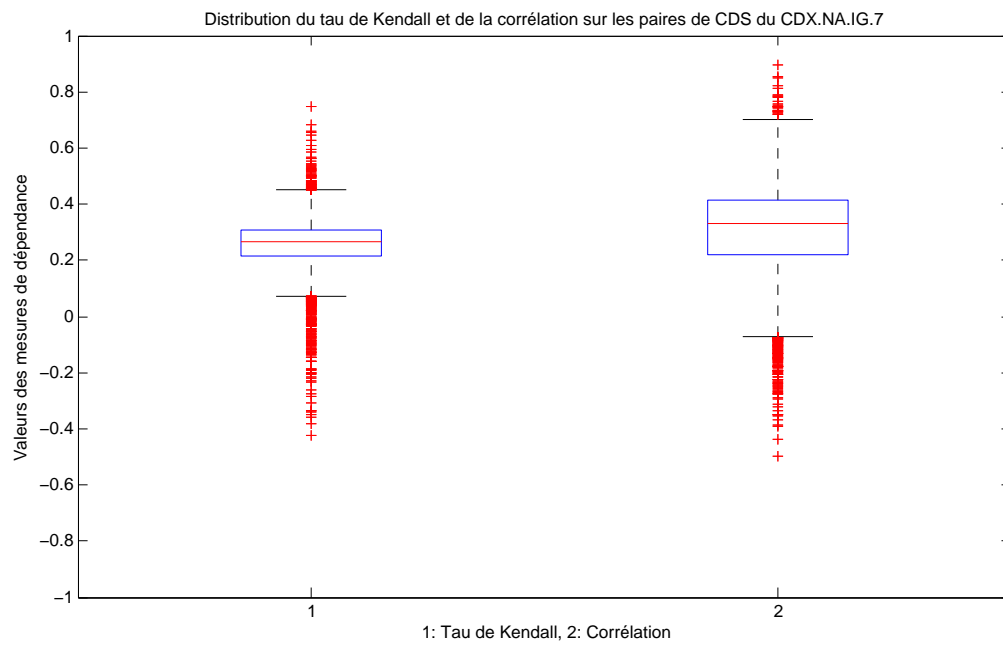


FIGURE 5.2 – Distribution du tau de Kendall et de la corrélation sur les CDS du CDX.NA.IG.7

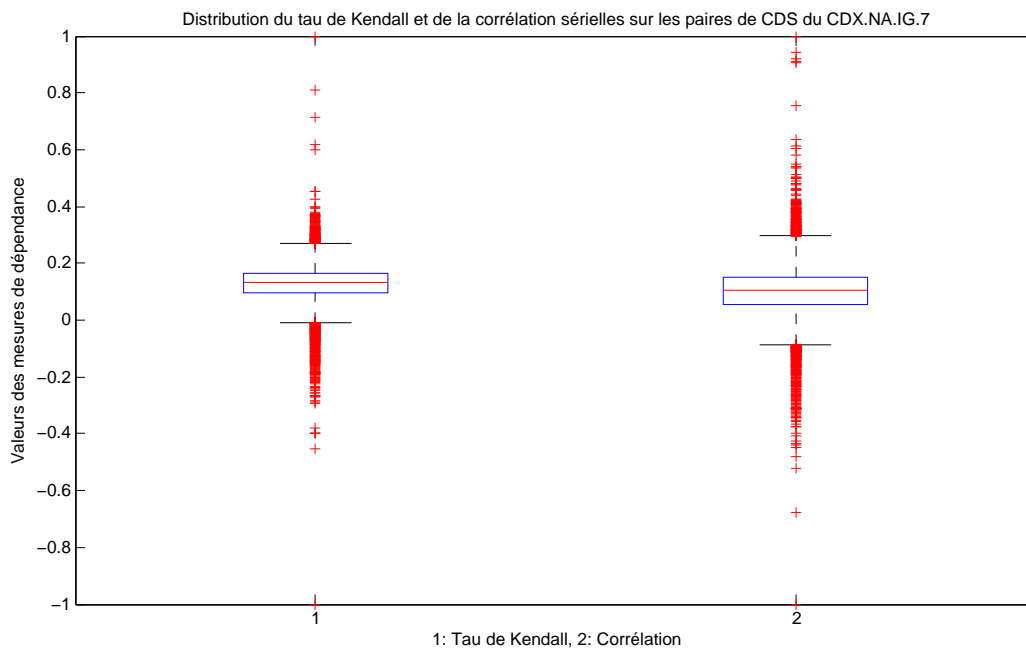


FIGURE 5.3 – Distribution du tau de Kendall et de la corrélation sérielles sur les CDS du CDX.NA.IG.7

TABLE 5.19 – Tau de Kendall moyen des CDS du CDX.NA.IG.7

	Titre	Sous-indice (sauf titre)	Marché (sauf sous-indice)
t	1	0.302	0.259
$t - 1$	0.142	0.143	0.130

TABLE 5.20 – Corrélations moyennes des CDS du CDX.NA.IG.7

	Titre	Sous-indice (sauf titre)	Marché (sauf sous-indice)
t	1	0.376	0.326
$t - 1$	0.084	0.119	0.107

les titres eux-mêmes, les titres du même sous-indice ou les titres de sous-indices différents. Cela signifie que la dépendance sérielle est principalement un phénomène sur le marché dans son ensemble, plutôt qu'un phénomène sectoriel ou sur un titre lui-même. C'est exactement le comportement postulé avec la copule hiérarchique dynamique à trois niveaux de type I proposée, aussi appelée momentum de marché.

Le tableau 5.20 présente les mêmes résultats que le tableau 5.19, mais avec la corrélation plutôt qu'avec le tau de Kendall. Encore une fois les résultats sont semblables et ils confirment les conclusions précédentes.

Finalement, le tableau 5.21 présente le tau de Kendall moyen et la corrélation moyenne par sous-indice, excluant la dépendance de chacun des titres avec lui-même pour ne pas biaiser les résultats. On constate que la dépendance à la période t varie significativement d'un sous-indice à l'autre. Par exemple, le sous-indice énergie, plus petit et très ciblé, a la dépendance la plus forte. Cela suggère d'utiliser un paramètre différent pour chacun des sous-indices. Finalement, la dépendance sérielle semble environ proportionnelle à la dépendance à la période t .

TABLE 5.21 – Tau de Kendall et corrélation moyens par sous-indice des CDS du CDX.NA.IG.7

Sous-indice	Nombre de titres	Tau de Kendall		Corrélation	
		t	$t - 1$	t	$t - 1$
Consumers	34	0.289	0.135	0.386	0.119
Energy	14	0.371	0.167	0.481	0.172
Financials	25	0.276	0.126	0.339	0.120
Industrials	30	0.316	0.153	0.372	0.100
TMT	22	0.306	0.151	0.345	0.134
Moyenne	25	0.302	0.143	0.376	0.119

5.3 Évaluation de CDOs

Avant de passer à l'évaluation des CDOs comme telle, on présente brièvement les résultats intermédiaires concernant l'estimation de la courbe des taux d'intérêt et l'estimation des paramètres des copules. Puis, on compare les prix de CDOs obtenus avec les modèles théoriques ainsi calibrés sur les données de marchés avec les prix du marché, pour le CDX.NA.IG.10. La série 10 est choisie pour la disponibilité des prix CDOs et la période suffisamment longue pour laquelle les CDS sont disponibles afin d'estimer les paramètres des copules. En effet, parmi les séries 7 à 12, les prix de CDOs sont davantage disponibles pour la série 10 que pour les autres séries actives pour la période où les données ont été collectées, c'est-à-dire qu'il y a moins de jour de négociation sans cotes. Également, en choisissant la série 10, une plage de données CDS jugée suffisante est disponible pour estimer les paramètres des copules indiquant la dépendance entre les défauts. En effet, les données CDS collectées vont du 1er janvier 2007 au 25 juin 2009 alors que la série 10 entre en vigueur le 21 mars 2008, ce qui laisse une série de prix CDS d'environ 15 mois pour procéder à l'estimation des paramètres.

5.3.1 Taux d'intérêt

Cette section présente rapidement l'évolution des taux d'intérêt sur la période pertinente, puis les résultats de l'estimation du modèle de Nelson-Siegel sur ces données.

La figure 5.4 montre l'évolution de deux des taux d'intérêt utilisés pour calculer la courbe des taux : le LIBOR six mois et le taux swap cinq ans. On remarque d'abord la tendance à la baisse des taux, et que le LIBOR six mois était en général plus élevé que le taux swap cinq ans en 2007, ce qui suggère une courbe des taux à pente négative. L'élément le plus inusité est le pic du LIBOR six mois à l'automne 2008 (index 650 environ), causé essentiellement par une hausse temporaire de la prime de crédit dans le LIBOR. En effet, cette période correspond au début de la crise financière et les marchés étaient très nerveux avec les faillites ou quasi-faillites de plusieurs grandes institutions financières.

Les figures 5.5 et 5.6 montrent les résultats de l'optimisation des paramètres de Nelson-Siegel. On constate que les paramètres sont assez stables, sauf à l'automne 2008 où deux d'entre eux varient fortement. Cela s'explique par les brusques variations de taux à court terme lors de la crise financière. La figure 5.7 présente quant à

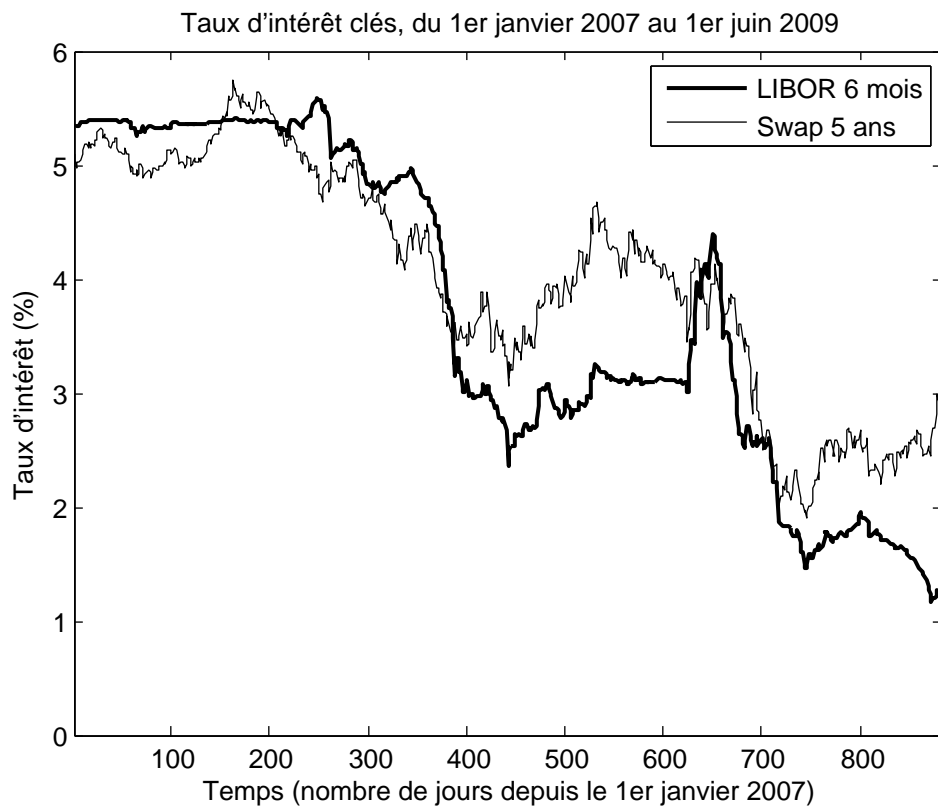
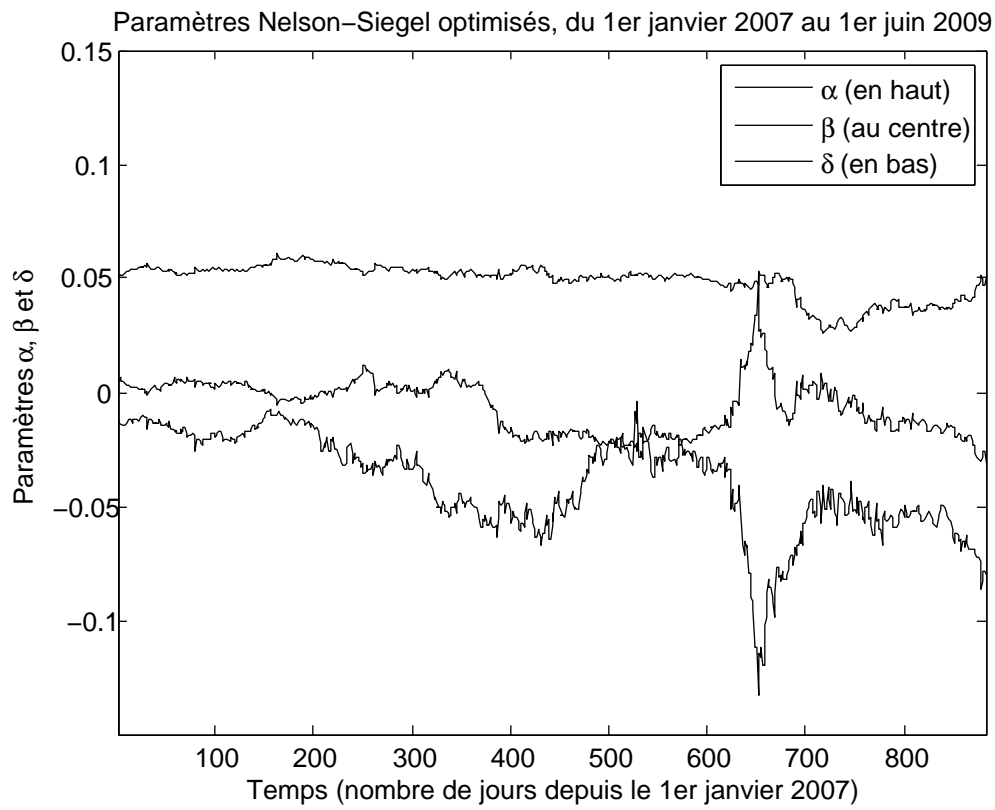


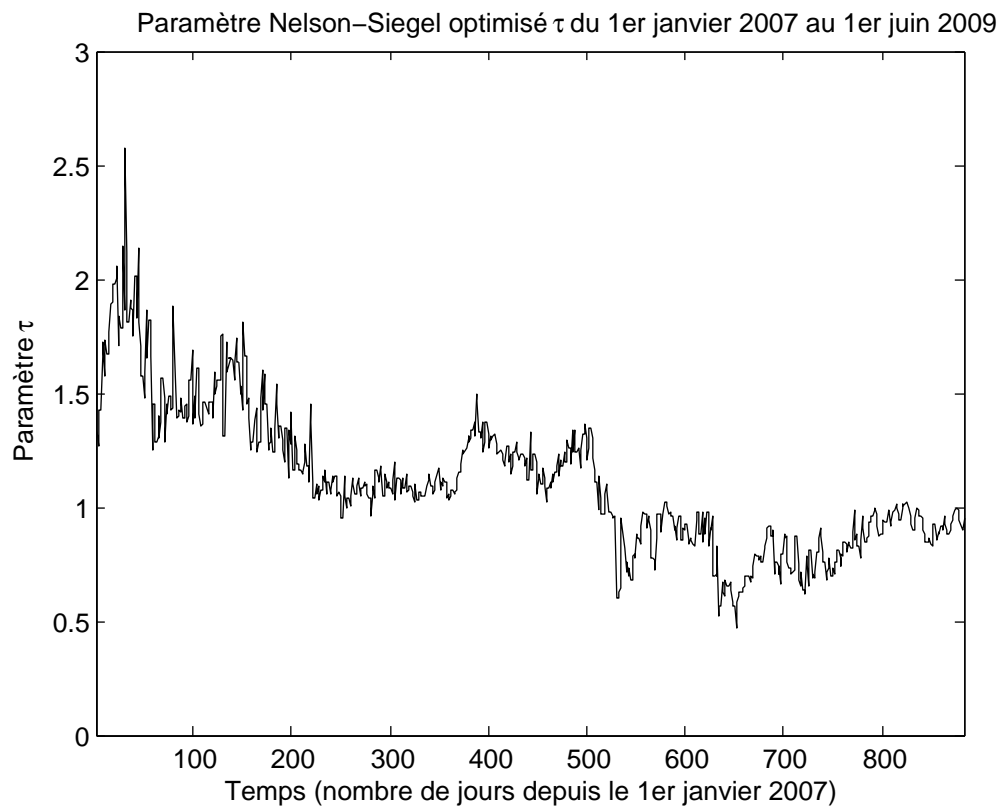
FIGURE 5.4 – Taux LIBOR 6 mois et swap 5 ans

FIGURE 5.5 – Paramètres Nelson-Siegel optimisés : α , β et δ

elle la norme des résidus de l'optimisation, c'est-à-dire la somme des erreurs au carré sur le prix de chacun des sept instruments de référence. Comme la valeur nominale considérée est de 100\$, une erreur de 0,07 sur le graphique correspond à une erreur de 0,10\$ sur 100\$ en moyenne pour chacun des instruments. Étant donné que la norme des résidus est inférieure à 0,07 pour la presque totalité des journées, l'erreur sur la courbe des taux est tout-à-fait acceptable et on conclut que l'optimisation donne un résultat satisfaisant.

5.3.2 Estimation des paramètres des copules

Cette section présente rapidement l'estimation des paramètres des copules utilisées pour simuler les défauts. Par hypothèse, la dépendance entre les défauts est la même que celle des données CDS. On présente donc les données CDS pertinentes, puis les résultats concernant leur dépendance.

FIGURE 5.6 – Paramètre Nelson-Siegel optimisé : τ

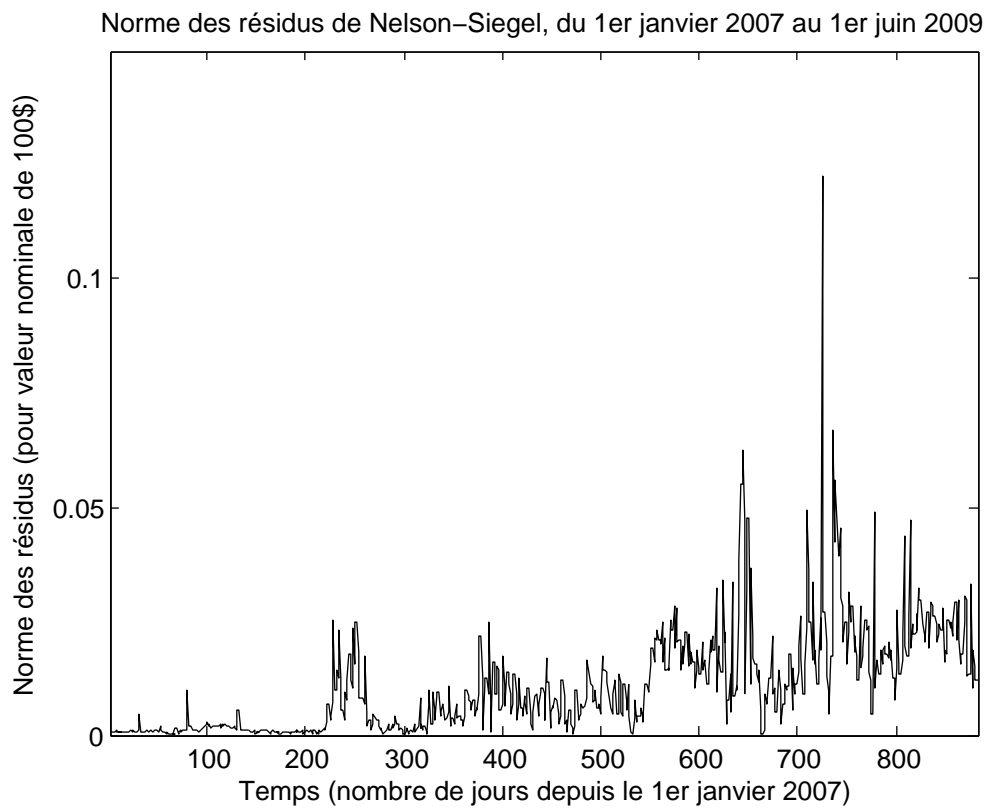


FIGURE 5.7 – Résidus de l'optimisation sur les paramètres Nelson-Siegel

L'estimation des paramètres est basée sur la méthode de l'inverse du tau de Kendall à la fois pour les copules archimédiennes et gaussiennes (voir la section 3.8 pour plus de détails). Les données utilisées sont les CDS composant le CDX.NA.IG.10, dont on évalue les tranches. La période considérée va du 1er janvier 2007 au 20 mars 2008, soit la veille de l'entrée en vigueur de la série 10. On utilise ainsi seulement des données antérieures pour évaluer les CDOs. Également, le fait d'estimer les paramètres une seule fois avant l'entrée en vigueur de la série 10 permet d'alléger les calculs, même si on n'utilise pas l'ensemble des données disponibles, sauf pour la première journée où la série est en vigueur. En effet, pour le 20 juillet 2008 par exemple on pourrait utiliser l'historique du 1er janvier 2007 au 19 juillet 2008, alors qu'on ne considère pas les données après le 20 mars 2008 pour l'estimation des paramètres.

Le tableau 5.22 présente le tau de Kendall moyen et la corrélation moyenne pour l'ensemble du marché. Le tau de Kendall à la période t (tableau 5.22) est utilisé pour calculer les paramètres des copules Clayton, Gumbel et gaussienne à un paramètre, c'est-à-dire que toutes les paires de variables ont le même tau de Kendall. Le tau de Kendall moyen pour les périodes t et $t - 1$ du tableau 5.22 est également utilisé pour les copules hiérarchiques dynamiques à deux niveaux et leur pendant gaussiennes, c'est-à-dire des copules gaussiennes où on a deux paramètres de dépendance sur le marché dans son ensemble, un pour la période t et l'autre pour la période $t - 1$. Une telle copule gaussienne reproduit la structure de dépendance des copules archimédiennes hiérarchiques, avec une même corrélation à l'intérieur de chacun des secteurs et une autre corrélation pour les paires de variables inter-sectorielles, pour un total de six valeurs de corrélation différentes. Les tableaux 5.23 et 5.24 donnent respectivement le tau de Kendall moyen et la corrélation moyenne pour les titres avec eux-mêmes, à l'intérieur des secteurs et entre les secteurs (marché), pour les périodes t et $t - 1$. Le comportement observé est semblable à celui observé pour la série 7 (voir la section 5.2), à l'exception de la dépendance sérielle sur le titre qui est beaucoup plus faible. L'emploi des copules de momentum de marché semble tout de même tout-à-fait justifié. Le dernier tableau de cette section, le tableau 5.25, présente quant à lui le tau de Kendall moyen et la corrélation moyenne à l'intérieur de chacun des sous-indices du CDX.NA.IG.10. Le comportement observé est encore une fois semblable à celui observé sur la série 7 (voir tableau 5.21). Finalement, on utilise les tau de Kendall moyens des tableaux 5.23 et 5.25 pour calculer les paramètres des copule Gumbel hiérarchique à deux niveaux et son pendant gaussien, c'est-à-dire une copule gaussienne où on a un paramètre de dépendance par secteur et un paramètre inter-sectoriel. En effet, pour ces copules, on utilise le tau de Kendall moyen du

TABLE 5.22 – Tau de Kendall et corrélation moyens des CDS du CDX.NA.IG.10

	Tau de Kendall	Corrélation
t	0.197	0.259
$t - 1$	0.080	0.085

TABLE 5.23 – Tau de Kendall moyen des CDS du CDX.NA.IG.10

	Titre	Sous-indice (sauf titre)	Marché (sauf sous-indice)
t	1	0.226	0.189
$t - 1$	0.023	0.083	0.080

marché à la période t du tableau 5.23, ainsi que le tau de Kendall moyen de chacun des sous-indices à la période t du tableau 5.25.

5.3.3 Prix des modèles et prix du marché

Cette section présente les prix des tranches de CDOs, au marché et tels que calculés avec différentes copules, sous forme graphique pour chacun des jours où les données sont disponibles. Suit ensuite une analyse de la différence entre les prix théoriques et les prix au marché. Les résultats sont présentés pour toutes les tranches sauf pour la tranche 30-100 % puisque très peu de données de marché sont disponibles pour le prix de ces tranches, et les comparaisons seraient par conséquent peu significatives. Également, les résultats présentés sont pour la série 10 du CDX.NA.IG. Cette série est choisie en raison du nombre relativement élevé de données disponibles par rapport aux autres séries.

Finalement, on note que les deux défauts survenus en septembre 2008 et affectant la série 10 ne sont pas considérés pour fins de simplification (pour les défauts, voir le tableau 4.4). Cela devrait avoir un certain effet sur le prix des tranches, mais seulement du 7 au 21 septembre alors que la série 10 était courante de mars à septembre. Aussi, le taux de perte étant très faible (6,0 % pour FHLMC et 8,5 % pour FNMA), l'impact semble mineur. L'effet sur les estimations telles le prix moyen et l'erreur moyenne devrait donc être négligeable.

TABLE 5.24 – Corrélations moyennes des CDS du CDX.NA.IG.10

	Titre	Sous-indice (sauf titre)	Marché (sauf sous-indice)
t	1	0.296	0.249
$t - 1$	-0.010	0.094	0.084

TABLE 5.25 – Tau de Kendall et corrélation moyens par sous-indice des CDS du CDX.NA.IG.10

Sous-indice	Nombre de titres	Tau de Kendall		Corrélation	
		t	$t - 1$	t	$t - 1$
Consumers	34	0.211	0.080	0.285	0.087
Energy	14	0.292	0.107	0.408	0.141
Financials	25	0.236	0.110	0.303	0.126
Industrials	30	0.223	0.067	0.276	0.077
TMT	22	0.218	0.061	0.290	0.059
Moyenne	25	0.226	0.083	0.296	0.094

Les figures 5.8 à 5.12 présentent les prix pour les copules gaussiennes et Clayton. Les copules gaussiennes sont estimées de deux façons différentes : en supposant que la corrélation est la même entre toutes les entreprises (un paramètre), puis en supposant une corrélation différente à l'intérieur de chacun des secteurs (un paramètre par secteur) en plus d'une corrélation uniforme entre les secteurs. À noter que lorsque les données de marchés sont manquantes, elles sont représentées par un zéro. En observant les graphiques, il est clair que les deux variations de copules gaussiennes donnent des résultats pratiquement identiques. Par contre, les copules Clayton donnent des résultats passablement différents. Aussi, la tendance générale des prix théoriques suit la tendance des prix au marchés, même si la différence entre les deux est parfois importante.

Les figures 5.13 à 5.17 présentent les prix pour les copules Gumbel classique et hiérarchique à deux niveaux. Comme pour les copules gaussiennes, l'introduction d'une dépendance interne propre à chacun des secteurs ne fait pas à première vue une grande différence sur le prix des tranches. Par contre, l'utilisation des Gumbel semble donner des résultats différents des gaussiennes et Clayton. En effet, les prix théoriques semblent beaucoup plus proche des prix observés pour les tranches les plus senior, soit mezzanine 2, senior et super senior. Cet aspect est très intéressant et est développé davantage avec une analyse quantitative plus loin dans cette section.

Les figures 5.18 à 5.22 présentent les résultats pour les copules gaussiennes dynamiques et Gumbel hiérarchiques dynamiques à deux niveaux de type I (momentum de marché). Les prix théoriques des tranches sont extrêmement volatils, beaucoup plus que les prix de marché et que pour les autres types de copules. Ceci est vraisemblablement dû à l'introduction de l'aspect dynamique, qui augmente ou diminue de façon importante le nombre de défauts anticipés selon le comportement du marché

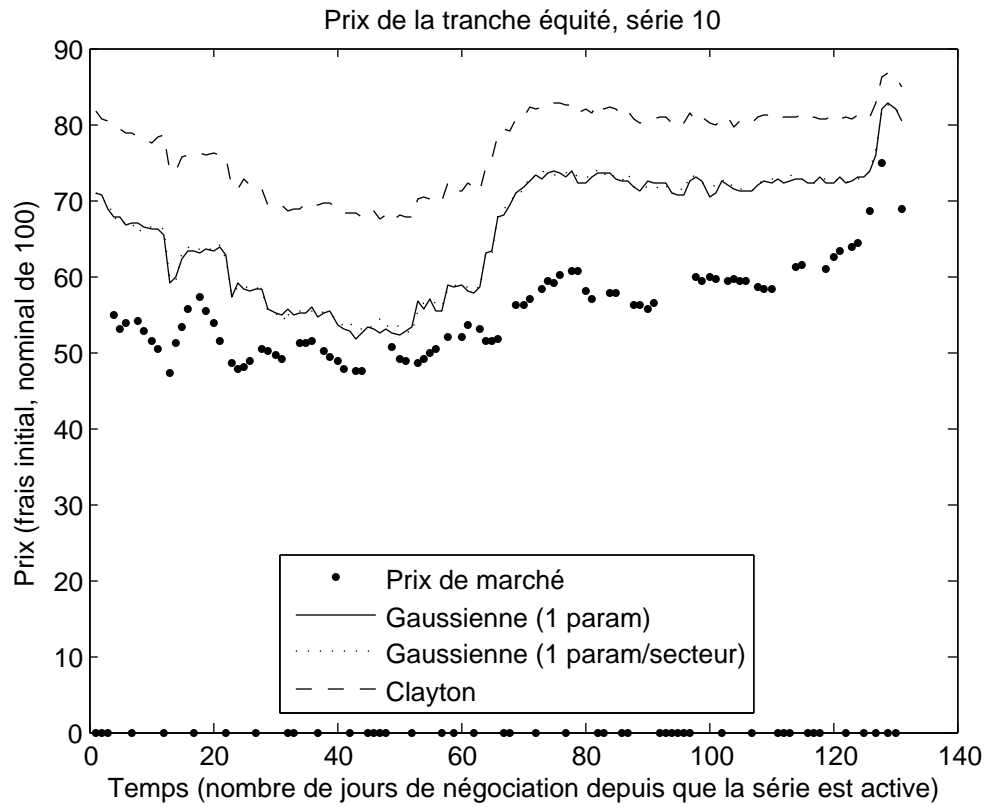


FIGURE 5.8 – Prix de la tranche équité (0-3%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gaussiennes et Clayton

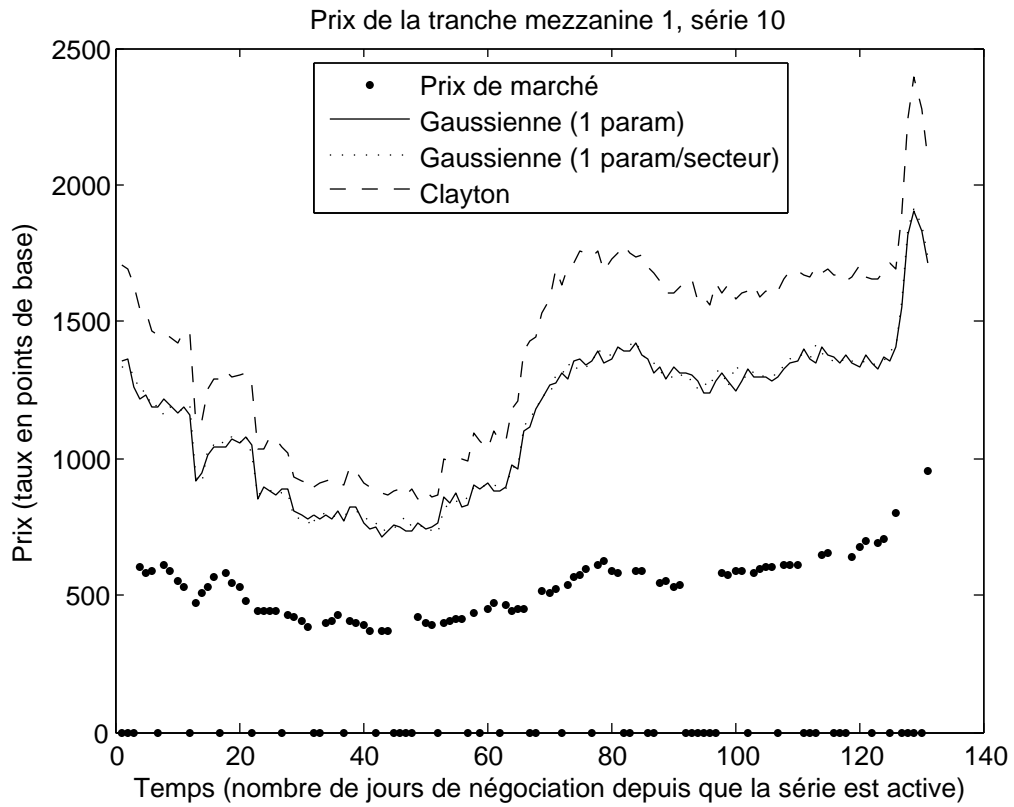


FIGURE 5.9 – Prix de la tranche mezzanine 1 (3-7%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gaussiennes et Clayton

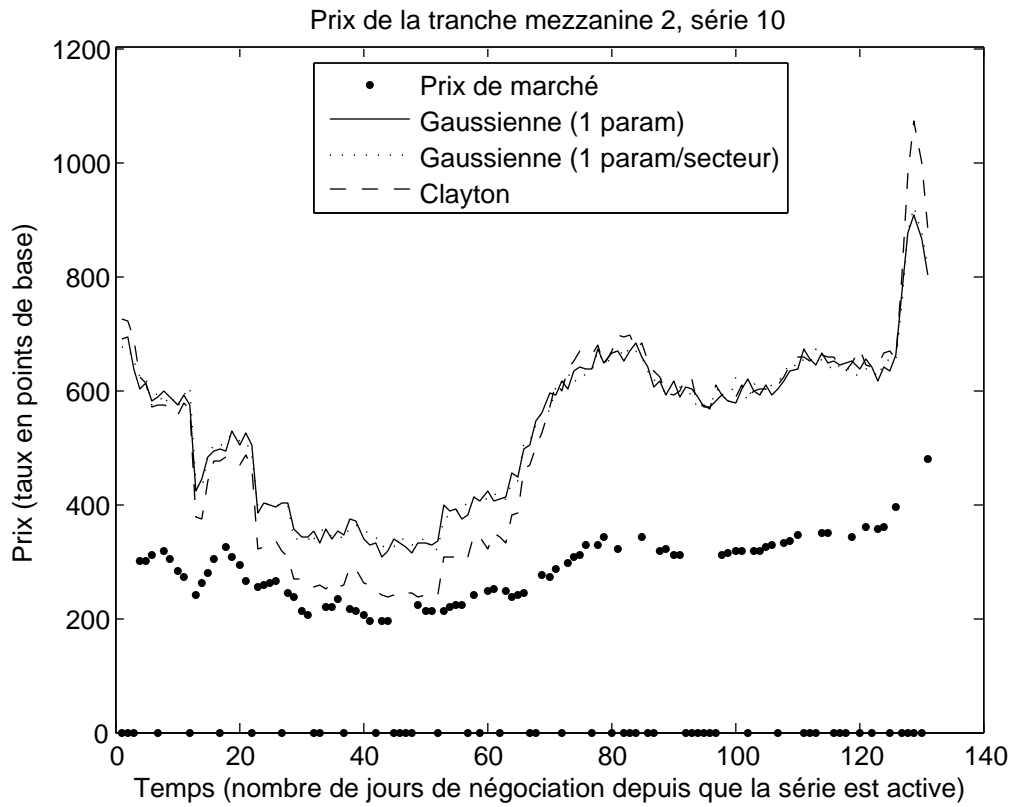


FIGURE 5.10 – Prix de la tranche mezzanine 2 (7-10%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gaussiennes et Clayton

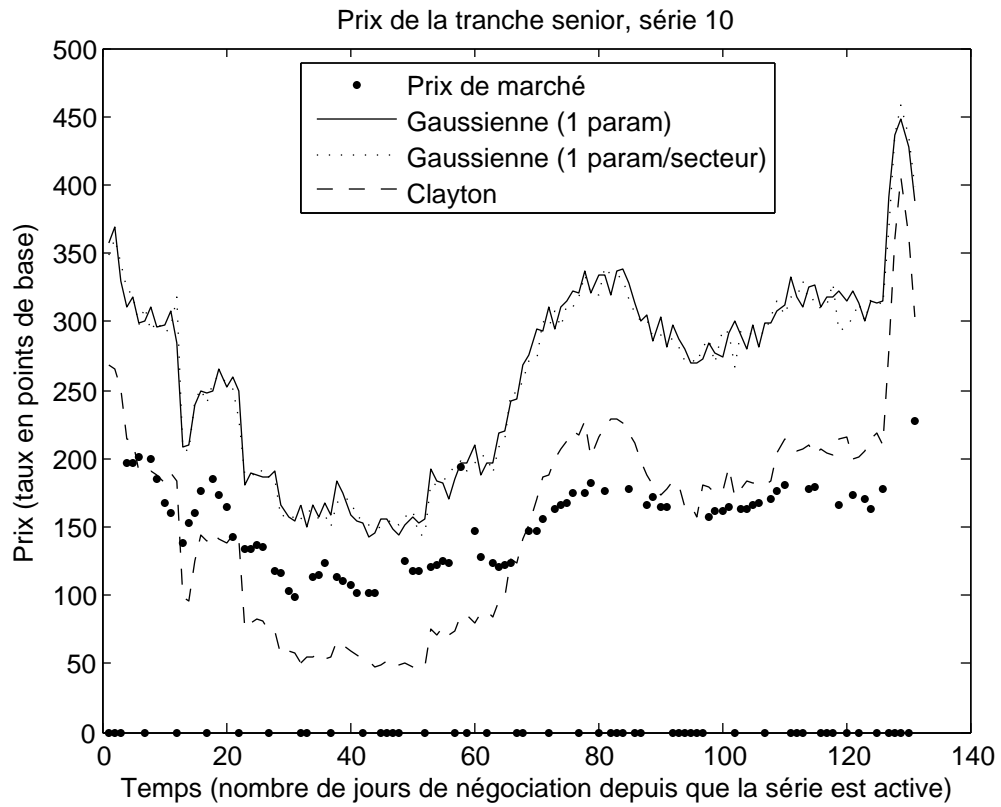


FIGURE 5.11 – Prix de la tranche senior (10-15%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gaussiennes et Clayton

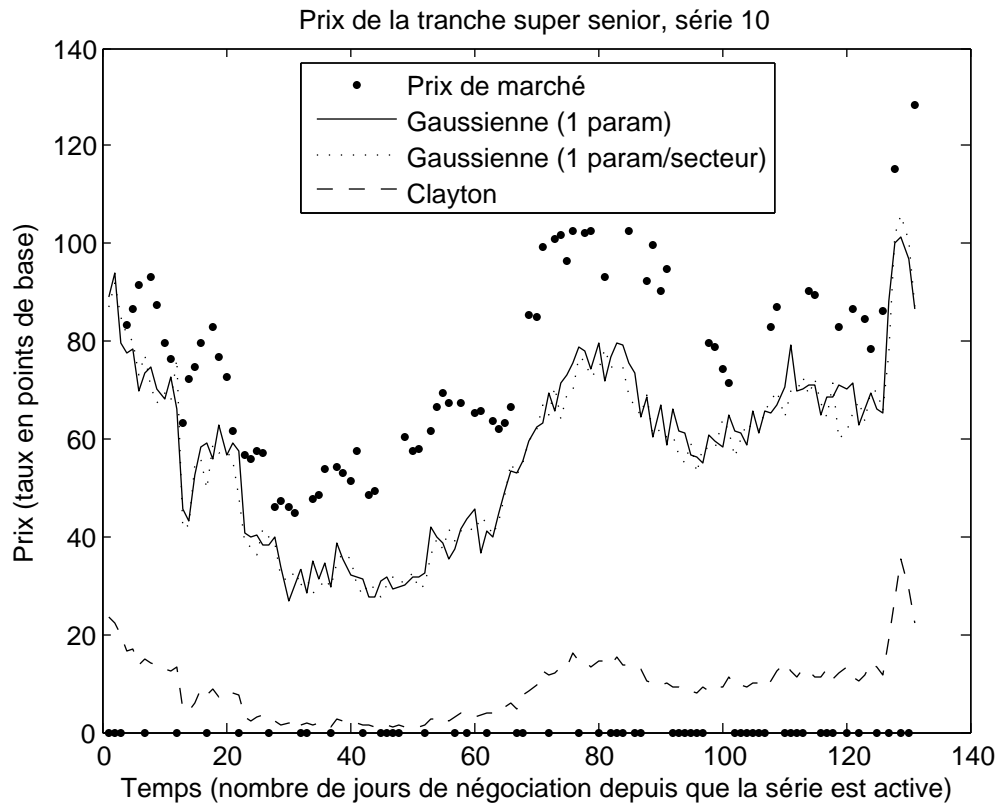


FIGURE 5.12 – Prix de la tranche super senior (15-30%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gaussiennes et Clayton

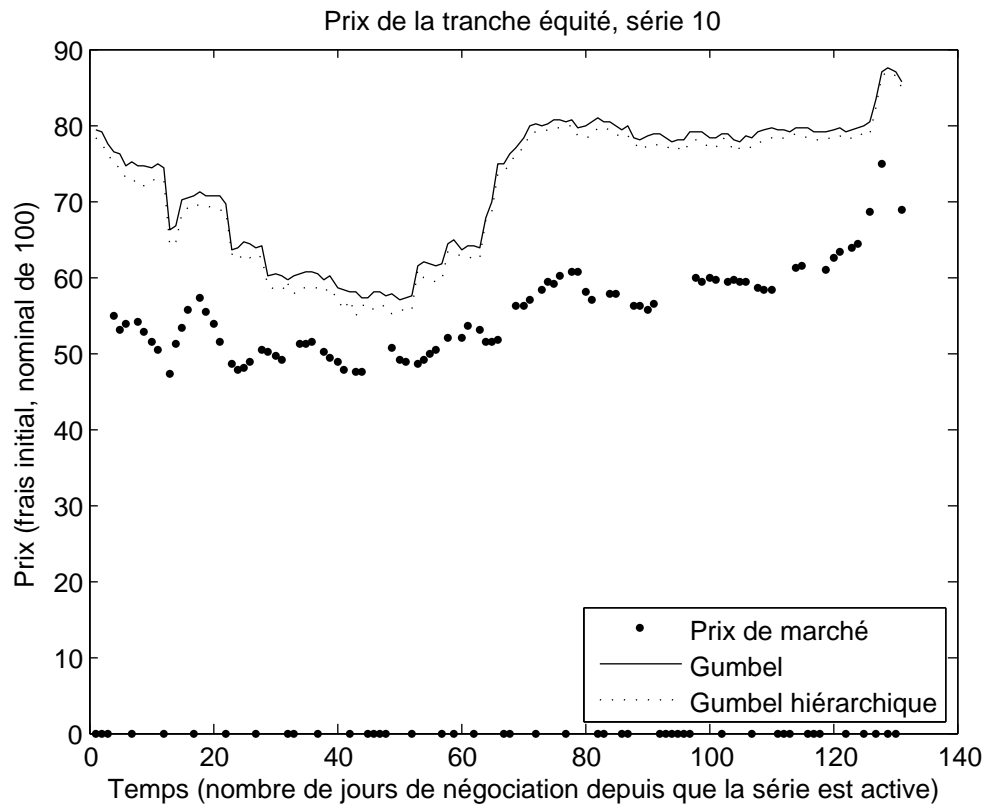


FIGURE 5.13 – Prix de la tranche équité (0-3%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gumbel

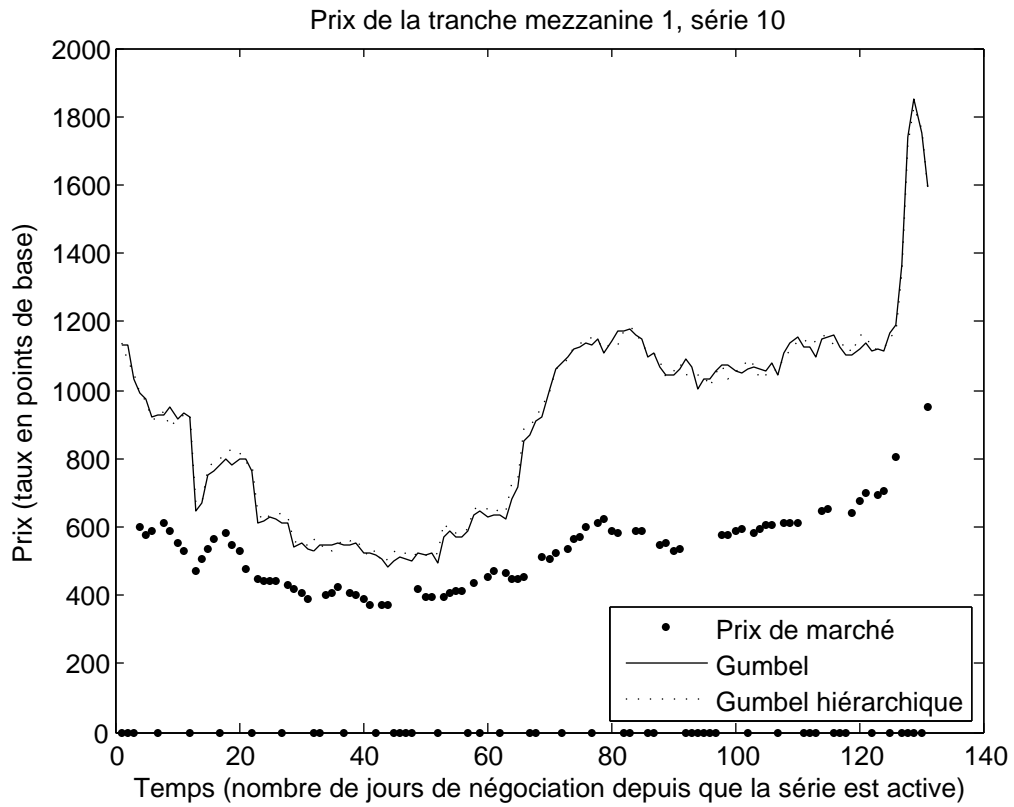


FIGURE 5.14 – Prix de la tranche mezzanine 1 (3-7%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gumbel

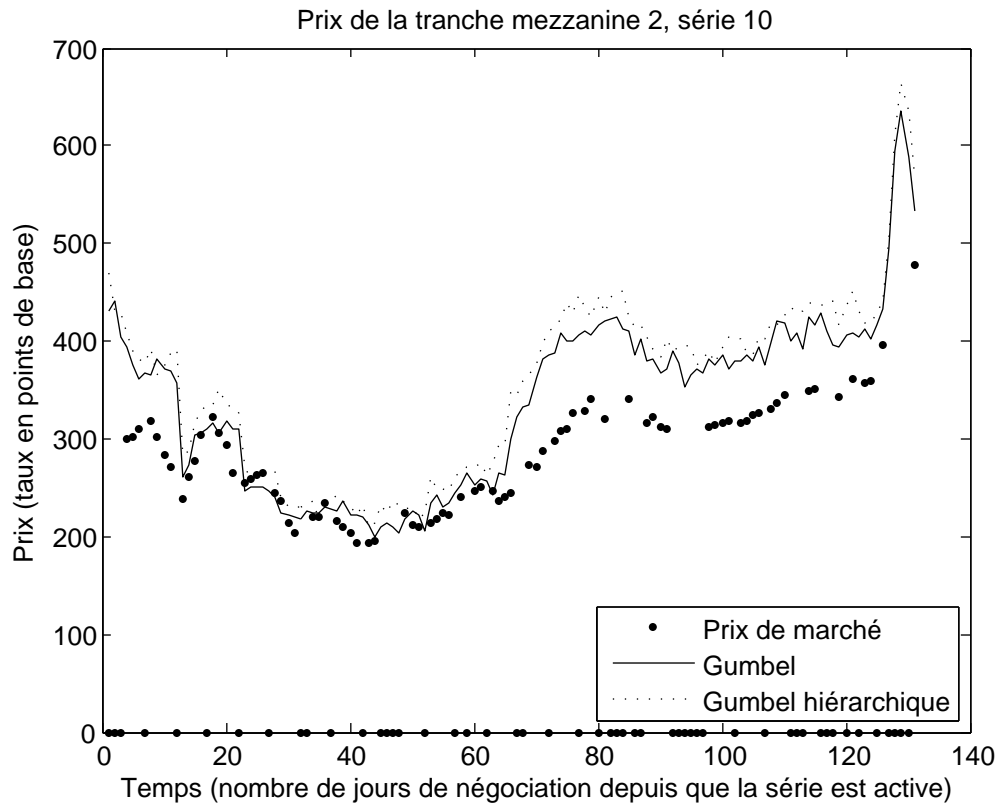


FIGURE 5.15 – Prix de la tranche mezzanine 2 (7-10%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gumbel

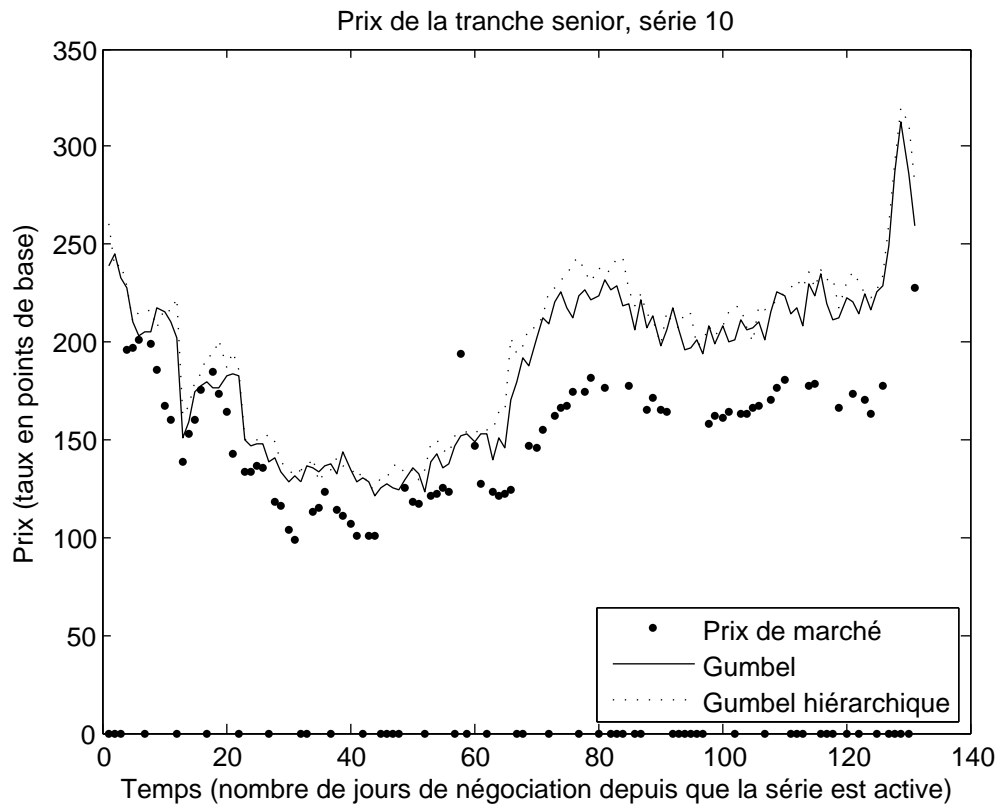


FIGURE 5.16 – Prix de la tranche senior (10-15%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gumbel

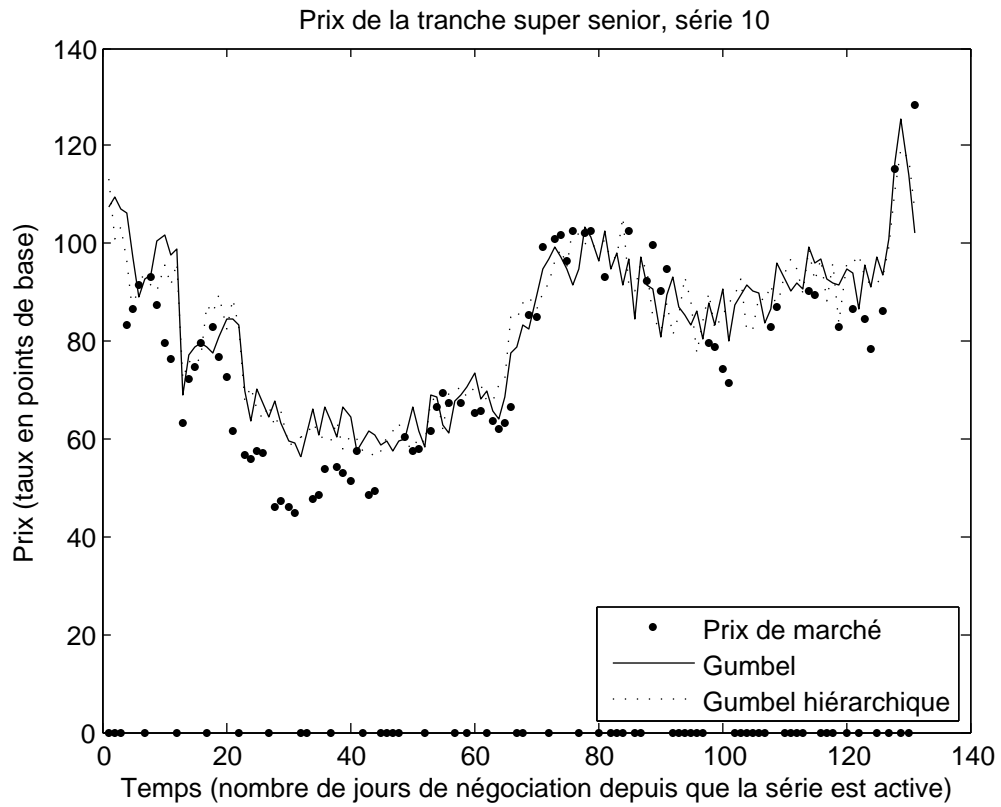


FIGURE 5.17 – Prix de la tranche super senior (15-30%), CDX.NA.IG série 10, avec copules Gumbel

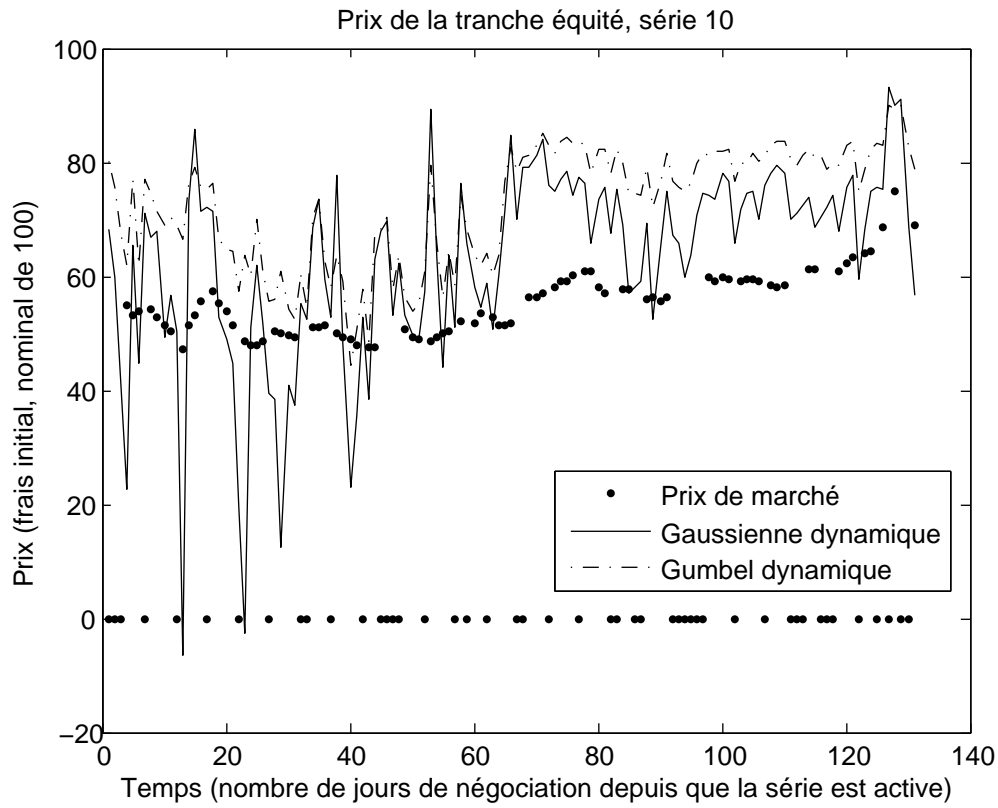


FIGURE 5.18 – Prix de la tranche équité (0-3%), CDX.NA.IG série 10, avec copules dynamiques

le jour précédent. Ces variations sont beaucoup plus importantes que ce qui est anticipé par le marché, et ne semblent pas raisonnables. Ainsi, même si le marché des CDS présente bel et bien une dépendance sérielle significative, il semble que les hypothèses retenues pour évaluer les CDOs avec les copules dynamiques accordent une importance disproportionnée aux variations de la journée précédente. Néanmoins, il demeure possible que cette information soit pertinente à l'évaluation de CDOs, et qu'elle puisse être utile si prise en compte d'une façon différente et plus subtile. Nous y reviendrons.

  titre informatif, le tableau 5.26 présente les prix moyens de marché des cinq tranches du CDX.NA.IG, sur l'ensemble de la période où la série est courante.

Le tableau 5.27 montre la différence moyenne entre le prix théorique et le prix du marché, pour les copules testées. La première constatation est que les prix sont g -

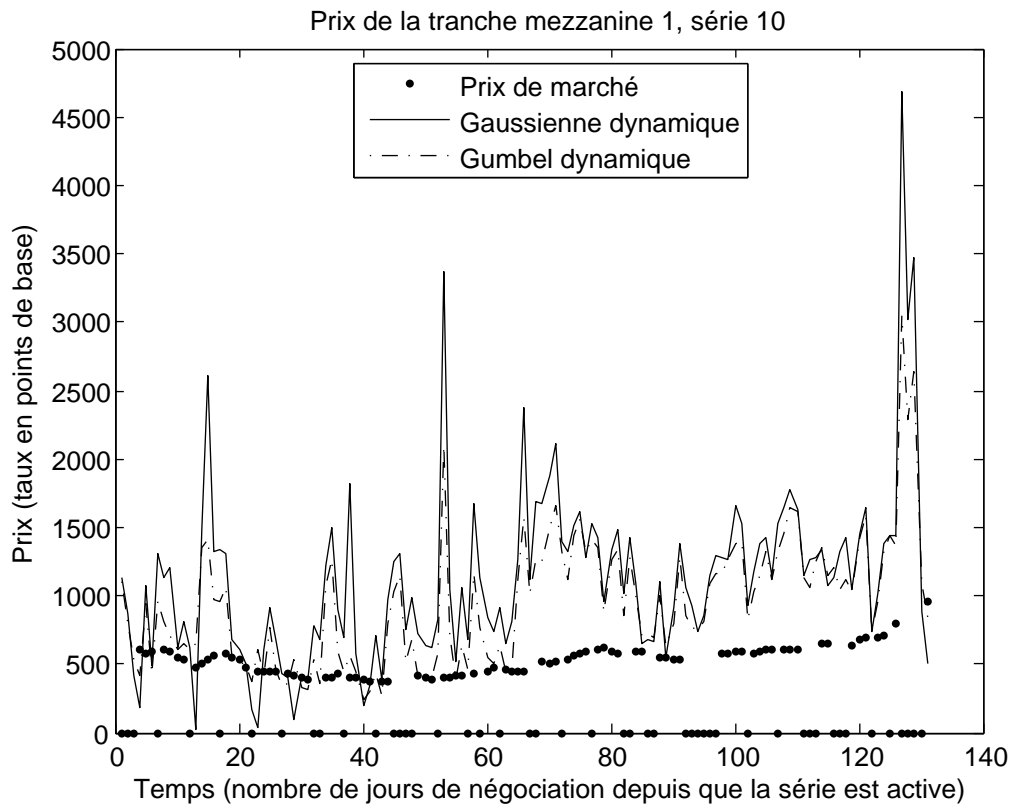


FIGURE 5.19 – Prix de la tranche mezzanine 1 (3-7%), CDX.NA.IG série 10, avec copules dynamiques

TABLE 5.26 – Prix moyen de marché des tranches de CDX.NA.IG.10

Tranche	Prix moyen
Équité (0-3%)	55.1
Mezzanine 1 (3-7%)	527.6
Mezzanine 2 (7-10%)	282.8
Senior (10-15%)	151.6
Super senior (15-30%)	75.2

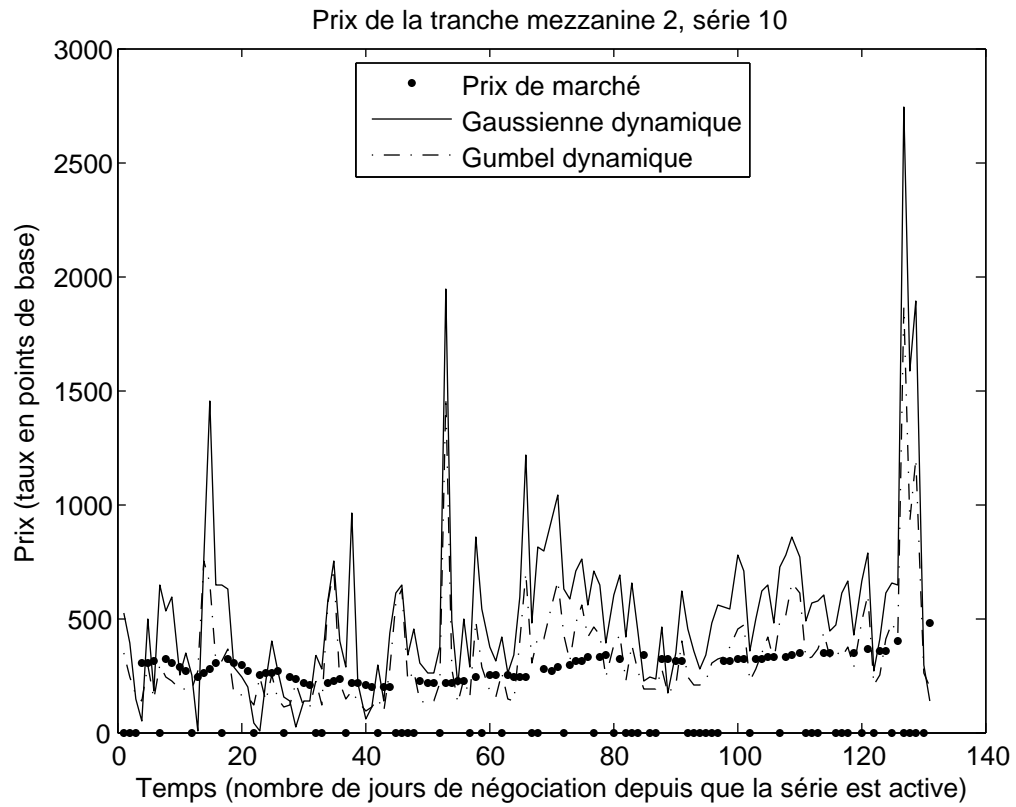


FIGURE 5.20 – Prix de la tranche mezzanine 2 (7-10%), CDX.NA.IG série 10, avec copules dynamiques

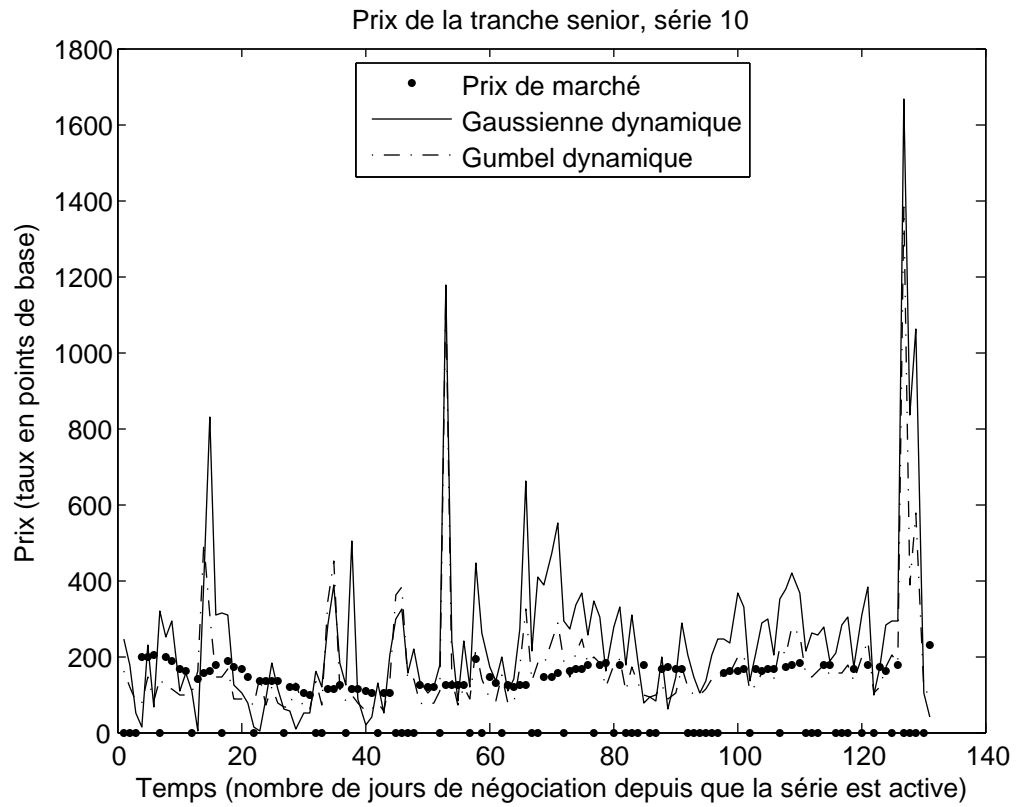


FIGURE 5.21 – Prix de la tranche senior (10-15%), CDX.NA.IG série 10, avec copules dynamiques

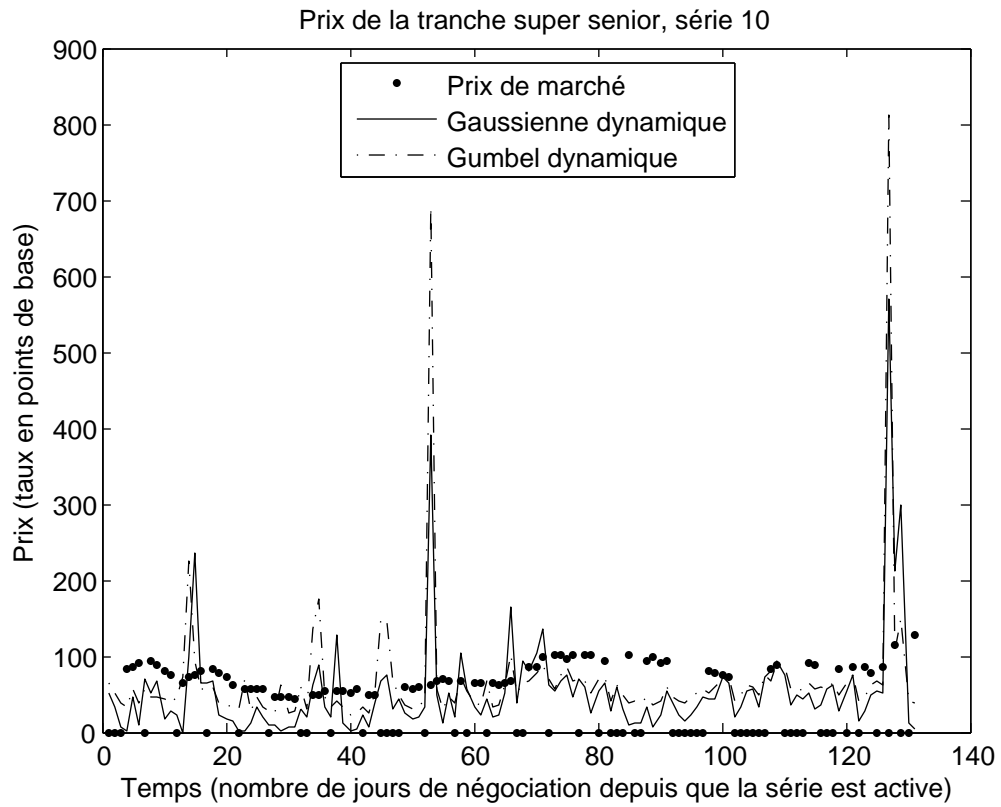


FIGURE 5.22 – Prix de la tranche super senior (15-30%), CDX.NA.IG série 10, avec copules dynamiques

TABLE 5.27 – Erreur moyenne sur les prix des tranches de CDX.NA.IG.10

Copule	Équité (0-3%)	Mezz. 1 (3-7%)	Mezz. 2 (7-10%)	Senior (10-15%)	S. senior (15-30%)
Clayton	21.5	836.7	199.0	-10.3	-67.2
Gumbel	16.7	338.8	40.9	30.1	5.7
Gumbel hiérarchique	15.3	343.1	56.9	36.1	4.9
Gumbel h. dynamique	17.3	405.2	42.7	10.4	-9.6
Gauss. (1 param)	10.3	584.0	229.8	98.4	-20.4
Gauss. (1 param/sect)	10.4	586.3	230.4	97.0	-21.1
Gauss. dynamique	7.4	567.8	212.7	84.3	-23.4

néralement surestimés par le modèle, sauf pour la tranche super senior où c'est le contraire. Les modèles théoriques semblent donc considérer une corrélation implicite plus élevée que le marché, car selon les modèles la tranche équité vaut plus cher et la tranche super senior vaut moins cher. On peut donc présumer que les prix pour la tranche 30-100 % seraient aussi sous-estimés. Ensuite, tel que suggéré par les figures, les résultats sont plutôt semblables pour les copules Gumbel classiques et Gumbel hiérarchiques, et encore plus pour les deux variations des copules gaussiennes (corrélation unique ou par secteur). Pour la suite de cette analyse, on exclut donc la copule gaussienne avec une corrélation par secteur. On exclut également des comparaisons les copules dynamiques en raison de la volatilité extrême de leurs résultats (voir ci-après le tableau 5.29 et l'analyse associée). Parmi les quatre autres copules (gaussienne à corrélation uniforme, Clayton, Gumbel et Gumbel hiérarchiques), aucune ne domine les autres. Par exemple, la copule Clayton donne les pires résultats pour trois des cinq tranches, mais les meilleurs pour la tranche senior. De même, la copule gaussienne donne les pires résultats pour deux des cinq tranches, mais les meilleurs pour la tranche équité. Par ailleurs, la copule Gumbel donne les meilleurs résultats pour deux tranches sans jamais être la pire, et la Gumbel hiérarchique donne les meilleurs résultats pour la tranche super senior, aussi sans jamais être la pire.

Le tableau 5.28 présente l'erreur moyenne relative entre les prix théoriques et les prix au marché, en plus de la norme de cette erreur. La norme de l'erreur pour les copules Gumbel et Gumbel hiérarchique est semblable, mais surtout moins de la moitié de celle pour les copules gaussiennes et Clayton. Les Gumbel performant donc beaucoup mieux que les autres copules pour l'évaluation de CDOs. Cette constatation est en ligne avec celle de Hofert and Scherer (2008), qui affirme que les copules qui performant le mieux, avec ou sans hiérarchie, sont la puissance de la copule de

TABLE 5.28 – Erreur moyenne relative (%) sur les prix des tranches de CDX.NA.IG.10

Copule	Équité (0-3%)	Mezz. 1 (3-7%)	Mezz. 2 (7-10%)	Senior (10-15%)	S. senior (15-30%)	Norme de l'erreur
Clayton	39.0	158.6	70.3	-6.8	-89.3	199.11
Gumbel	30.3	64.2	14.5	19.8	7.6	75.50
Gumbel hiérarchique	27.7	65.0	20.1	23.8	6.5	77.51
Gumbel h. dynamique	31.4	76.8	15.1	6.8	-12.8	85.56
Gaussienne (1 param)	18.6	110.7	81.3	64.9	-27.2	155.43
Gaussienne (1 param/sect)	18.9	111.1	81.5	64.0	-28.1	155.64
Gaussienne dynamique	13.4	107.6	75.2	55.6	-31.1	146.54

Clayton, la copule de Gumbel et la copule de Joe. Finalement, tout comme pour Hofert and Scherer (2008), le facteur ayant le plus d'influence sur les résultats est la copule de base (le générateur dans le cas de copules archimédiennes) plutôt que la présence d'une structure hiérarchique. En effet, la norme de l'erreur est de 75,50 pour Gumbel, 155,43 pour la gaussienne et 199,11 pour Clayton, des différences considérables par rapport aux différences entre la Gumbel et la Gumbel hiérarchique (75,50 vs 77,51) et entre la gaussienne à un paramètre et celle à un paramètre par secteur (155,43 vs 155,64). Cela s'explique vraisemblablement par le fait que la dépendance est assez semblable à l'intérieur d'un secteur et entre les secteurs, et donc qu'introduire une structure hiérarchique modifie moins les résultats que changer de générateur.

Finalement, le tableau 5.29 montre l'écart type moyen de l'erreur sur les prix. Il confirme que les copules dynamiques, Gumbel et gaussienne, donnent des prix extrêmement volatils, tel que constaté sur les graphiques.

TABLE 5.29 – Écart type de l'erreur sur les prix des tranches de CDX.NA.IG.10

Copule	Équité (0-3%)	Mezz. 1 (3-7%)	Mezz. 2 (7-10%)	Senior (10-15%)	S. senior (15-30%)
Clayton	3.1	238.4	115.1	41.1	13.8
Gumbel	4.8	165.0	33.7	18.8	8.8
Gumbel hiérarchique	5.0	160.0	35.9	20.1	8.2
Gumbel h. dynamique	7.5	394.3	214.4	143.8	82.3
Gauss. (1 param)	4.0	154.4	74.5	41.4	7.9
Gauss. (1 param/sect)	4.0	157.3	74.9	40.3	7.9
Gauss. dynamique	16.5	568.6	325.9	186.9	60.0

Chapitre 6

Discussion

Ce chapitre discute des limites du mémoire et suggère quelques pistes pour y remédier. Aussi, une idée de nouveau projet est proposée.

6.1 Copules hiérarchiques dynamiques

La principale innovation de ce mémoire est d'avoir introduit les copules archimédiennes hiérarchiques dynamiques. Ces dernières sont beaucoup plus flexibles que les copules archimédiennes existantes et représentent un progrès significatif. En effet, les copules archimédiennes hiérarchiques ne permettent pas la modélisation d'un phénomène conditionnel, comme la dépendance sérielle. Quand à elles, les copules archimédiennes dynamiques impliquent que la dépendance est la même peu importe si les variables proviennent de la même période d'observation ou non. Cette sévère limite est levée avec l'introduction d'une composante hiérarchique.

Les copules hiérarchiques dynamiques sont en fait des copules hiérarchiques conditionnelles. Dans l'application au marché des CDS, l'aspect conditionnel est utilisé pour modéliser la dépendance sérielle, et plusieurs autres applications financières présentent une dépendance sérielle qui pourrait vraisemblablement être modélisée à l'aide de copules hiérarchiques dynamiques. Toutefois, les modèles proposés permettent d'inclure seulement une dépendance sérielle avec une période de retard, alors que les modèles économétriques incluent souvent plusieurs périodes. L'utilisation de copules hiérarchiques en vignes, couplées ou non aux copules hiérarchiques dynamiques proposées, pourraient permettre de traiter ce problème puisqu'elles sont

encore plus flexibles (voir le résumé de Berg and Aas (2009) à la section 2.3.1). Finalement, l'aspect conditionnel des copules hiérarchiques dynamiques pourrait être utilisé pour une foule d'applications dans d'autres domaines où sont déjà utilisées les copules.

6.1.1 Simulation des copules

Les méthodes de simulations développées pour les copules archimédiennes hiérarchiques dynamiques permettent de simuler avec une performance raisonnable les modèles développés en faible dimension. En dimension plus élevée, seulement les copules hiérarchiques dynamiques à deux niveaux peuvent être simulées avec une performance raisonnable, celles à trois niveaux étant beaucoup trop lentes (voir tableau 5.17). Des algorithmes potentiellement plus rapides pourraient être implantés, mais ils requièrent l'évaluation de dérivées complexes alors ce travail semble fastidieux. Également, bien que les algorithmes développés sont en théorie applicables à tous les générateurs archimédiens, seul le générateur Gumbel a été implanté et testé pour toutes les variantes des copules hiérarchiques dynamiques, puisque facile à simuler et beaucoup plus rapide que le générateur Clayton. En effet, le générateur de Clayton a également été implanté et testé pour plusieurs variantes, mais sa performance est médiocre pour les copules hiérarchiques, même sans aspect dynamique. Il serait intéressant d'implanter et de tester les algorithmes de simulation pour les autres combinaisons de générateurs pour lesquels les copules hiérarchiques sont définies.

Une méthode de simulation originale a également été développée pour les copules archimédiennes dynamiques (voir section 3.5). Il serait intéressant de comparer sa performance avec celle de la méthode proposée dans Soustra (2006), pour différents générateurs et différentes dimensions.

6.1.2 Estimation de paramètres

L'estimation des paramètres pour l'application financière est basée sur l'inverse du tau de Kendall, une méthode simple et pratique. La méthode du pseudo maximum de vraisemblance, en principe préférable, a toutefois été tentée mais elle s'avère beaucoup trop lente. En effet, l'algorithme testé est basé sur l'évaluation analytique des dérivées à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, ce qui devient de plus en plus laborieux à mesure que la dimension augmente, et ce même pour des copules archimédiennes classiques. Bien qu'elles n'aient pas été tentées, deux alternatives semblent

prometteuses. La première consiste à évaluer les dérivées à partir des formules analytiques développées dans Rémillard et al. (2010). Toutefois, cette méthode semble laborieuse à implanter. La seconde alternative consiste à faire comme pour la simulation et exploiter la symétrie des copules. En effet, le maximum de vraisemblance peut être écrit en exprimant la densité de la copule avec les transformées de Laplace, et évalué approximativement par intégration numérique, possiblement par la méthode de Monte Carlo. Évidemment, on obtiendrait ainsi un résultat approximatif, mais ça devrait être plus rapide à implanter et à exécuter, particulièrement pour des copules de grande dimension.

6.1.3 Tests d'adéquation

Les tests d'adéquation permettent de confirmer ou d'infirmier la validité d'une hypothèse quant à la distribution gouvernant un ensemble de données aléatoires, une fois les paramètres de la distribution estimés. Pour pouvoir tester formellement l'adéquation des modèles proposés, il faudrait développer des tests d'adéquation pour des dimensions élevées. Plusieurs avenues sont possibles mais soulignons qu'il faudrait possiblement encore une fois exploiter la symétrie des copules archimédiennes afin de réduire la dimension du problème. Une avenue complètement différente serait de s'inspirer du test de Jarque-Berra pour la loi normale, qui est basé sur les troisième et quatrième moments, soit l'asymétrie et le kurtosis respectivement. En effet, on pourrait développer des mesures similaires adaptées aux copules, par exemple des moments par rapport à la droite $u = v$ (le second moment serait une mesure de dépendance, le troisième une mesure d'asymétrie, etc), et baser un tests d'adéquation sur ces moments.

6.2 Analyse des données de marché CDS

L'analyse du marché des CDS à la section 5.2 a révélé une structure de dépendance des plus intéressante, avec une composante de dépendance sérielle non négligeable.

6.2.1 Inefficiency de marché

La dépendance sérielle significative semble être une inefficiency de marché, d'autant plus qu'elle est persistante et s'applique à l'ensemble des titres considérés. Elle est

a priori surprenante, puisque les titres choisis sont parmi les grandes entreprises nord-américaines de classe investissement (CDX.NA.IG), qui devraient donc être parmi les CDS les plus liquides, et qu'on a considéré les CDS d'échéance cinq ans seulement, choisis justement en fonction de leur liquidité. Toutefois, cette liquidité pourrait être insuffisante pour que le marché soit vraiment efficient, du moins en l'analysant sur la base de données quotidiennes. Cela signifierait que le marché des CDS n'est pas encore mature, même si c'est le dérivé de crédit le plus répandu ! Une autre explication possible serait la période particulière couverte par les données, avec une crise financière qui était principalement une crise du crédit. Pour en savoir davantage sur les causes, il faudrait étudier le marché à d'autres périodes, et d'autres marchés CDS similaires (les souverains par exemple). Également, on pourrait étudier les volumes de transaction et l'écart entre les prix offerts et demandés (bid-ask spread) versus la dépendance sérielle pour voir si c'est vraiment une question de liquidité. On note que Soustra (2006) avait remarqué une dépendance sérielle sur les corrélations implicites extraites des prix de CDOs synthétiques (voir 2.3.2 dans la revue de littérature). Cela porte à croire que la dépendance sérielle pourrait exister sur plusieurs marchés et à différentes périodes, l'étude datant de 2006 alors que les données de ce mémoire ne remontent pas plus loin que 2007. Finalement, que l'observation de dépendance sérielle sur les CDS soit ou non documentée dans la littérature, c'est une constatation très intéressante qui a plusieurs implications tant au niveau académique que pratique, pour la gestion des risques ou la négociation.

6.2.2 Adéquation des modèles

Tel que mentionné à la section 6.1.3, les tests d'adéquation permettent de déterminer à quel point un modèle colle à des données aléatoires. Bien que de tels tests ne soient pas présentement disponibles, un test d'adéquation aurait vraisemblablement rejeté les copules de ce mémoire comme modèle correspondant au comportement de 125 CDS, sauf peut-être les copules gaussiennes et gaussiennes dynamiques qui sont très flexibles. En effet, malgré la flexibilité accrue des copules archimédiennes hiérarchiques et archimédiennes hiérarchiques dynamiques par rapport aux copules archimédiennes et archimédiennes dynamiques, celles-ci demeurent tout de même relativement rigides pour épouser de près le comportement d'un aussi grand nombre de variables. Par exemple, lors de travail préliminaire avec les données CDS, il est apparu qu'un ou deux titres étaient presque indépendants des autres titres, y compris ceux de leur secteur. Également, à l'intérieur même d'un secteur, certains titres sont

vraisemblablement plus liés que d'autres. On pense spontanément au secteur financier avec ses banques et compagnies d'assurances, qui pourraient former des sous-secteurs. Il faut toutefois mettre ces problèmes en perspective : l'évaluation des CDOs n'était que faiblement affectée par le fait de considérer une copule archimédienne hiérarchique plutôt qu'une copule archimédienne classique, alors complexifier davantage la structure de dépendance n'apporterait probablement pas grand chose. À cet égard, les copules archimédiennes hiérarchiques et archimédiennes hiérarchiques dynamiques sont des modèles à la fois intuitifs et parcimonieux pour modéliser un grand nombre de variables. À toute fins pratiques, les copules archimédiennes hiérarchiques et archimédiennes hiérarchiques dynamiques version momentum de marché correspondent bien aux données CDS dans les aspects importants.

Le paragraphe précédent traite de la structure de dépendance mais pas de la forme de celle-ci, qui pourrait aussi ne pas correspondre aux données. Pour cet aspect, des tests d'adéquation pourrait s'avérer très utiles. On note également que les modèles proposés supposent que la structure de dépendance est stable dans le temps, tout comme la distribution des variables, ce qui n'est pas forcément le cas en pratique.

6.3 Évaluation des CDOs

L'évaluation des tranches de CDOs à partir des hypothèses formulées a donné des prix théoriques quelque peu différents des prix du marché. Voici un survol des raisons pouvant l'expliquer.

6.3.1 Importance de la copule

Comme dans Berrada et al. (2006), on constate que la copule a effectivement une influence importante sur le prix des dérivés de crédit considérés. Bien que l'article étudie l'effet de différentes copules sur l'évaluation de n-to-default swaps plutôt que les CDOs synthétiques, la conclusion est essentiellement la même. Pour les tranches de CDOs, il semble également que la structure de la copule ait peu d'impact sur le prix, par rapport à la forme de la copule (le générateur pour une copule archimédienne). La structure pourrait néanmoins avoir un impact important dans d'autres applications. Dans tous les cas, comme dans Berrada et al. (2006), la solution pour obtenir une modélisation réaliste est vraisemblablement d'utiliser un type de copule mieux adapté au problème, et pour cela davantage de recherche est nécessaire.

6.3.2 Dépendance sérielle du marché CDS

Les résultats montrent que l'utilisation de copules dynamiques résulte en des prix CDOs très volatils. En effet, selon l'hypothèse retenue, la dépendance entre les défauts est la même qu'entre les variations quotidiennes des CDS. Pour les copules non dynamiques, c'est-à-dire qui ne considèrent pas la dépendance sérielle, cette hypothèse semble raisonnable au vu des résultats obtenus. Par contre, pour les copules dynamiques, la variation de la journée précédente a un effet énorme sur la probabilité de défaut future et par conséquent sur les prix des tranches CDOs. Comme les rendements des CDS varient d'un jour à l'autre, le prix des tranches varie de façon disproportionnée, et l'hypothèse n'est pas raisonnable. Cela ne signifie pas que cette information est inutile pour autant.

On propose d'adapter l'hypothèse pour mieux incorporer la dépendance sérielle, de la façon suivante. On suppose que la dépendance sérielle indique, à travers une copule dynamique, la juste valeur du CDS via l'espérance de la série de prix CDS à l'infini. Puis, suppose que cette valeur de CDS est utilisée pour simuler les défauts, en conjonction avec l'hypothèse que la dépendance entre les défauts est la même que celle sur les CDS en excluant l'aspect dynamique. Pour bien expliquer, on définit quelques variables. D'abord, on note CDS_t et CDS_{t-1} comme le spread des CDS aux temps t et $t - 1$ respectivement. On définit également le log rendement de ces CDS au temps t , soit $R_t = \log CDS_t - \log CDS_{t-1}$. Finalement, avec F la fonction de répartition de R_t , on définit la variable uniforme $U_t = F(R_t)$.

L'approche tentée dans le mémoire, avec de mauvais résultats, peut être résumée dans l'algorithme suivant :

- estimer un modèle de dépendance $C(v|u)$ sur les log rendements des CDS avec les copules hiérarchiques dynamiques ;
- simuler les défauts avec $C(v|u = U_t)$ et CDS_t , c'est-à-dire la copule hiérarchique dynamique et le log rendement CDS au temps t , et avec le spread CDS au temps t ;
- évaluer les CDOs à partir des défauts simulés.

En contrepartie, l'approche alternative proposée donnerait lieu à l'algorithme ci-dessous :

- estimer un modèle de dépendance $C(v|u)$ sur les log rendements des CDS avec les copules hiérarchiques dynamiques ;
- calculer $CDS_\infty = E[\lim_{s \rightarrow \infty} CDS_s | C(v|u = U_t), CDS_t]$, la valeur vers laquelle les CDS devraient converger à l'infini selon le modèle de dépendance sérielle estimé

- $C(v|u)$, sur la base des log rendements CDS à t et du spread CDS au temps t ;
- simuler les défauts avec $C(v) = C(v|u = \mathbf{1})$ et CDS_∞ , soit la copule de dépendance entre les CDS sans composante dynamique, et les spreads CDS espérés à l'infini selon le modèle de dépendance sérielle ;
- évaluer les CDOs à partir des défauts simulés.

En résumé, l'approche proposée utilise le modèle de dépendance sérielle pour compenser l'apparente inefficience de marché, puis utilise la dépendance entre les rendements CDS (sans aspect dynamique) pour simuler les défauts à partir des cotes CDS ajustées pour la dépendance sérielle.

6.3.3 Limites des autres hypothèses

En principe, une modélisation de la dépendance plus fine devrait se traduire par des prix de tranches de CDOs plus près de ceux observés sur les marchés. C'est effectivement le cas, mais les prix théoriques demeurent passablement différents des prix du marché, même pour les copules performant le mieux. Plusieurs facteurs peuvent expliquer ces écarts, en plus de ceux évoqués précédemment. Les plus vraisemblables sont les d'estimation des paramètres des copules, les inefficiences de marché des CDOs dont notamment la liquidité limitée des tranches de CDOs, ainsi que les simplifications introduites par les hypothèses du modèle.

Les erreurs sur les estimations de paramètres sont inévitables, mais ont vraisemblablement un impact mineur. Les inefficiences de marché des CDOs pourraient être importantes, bien que le travail effectué ne permet aucunement de se prononcer sur cette question. On note tout de même que Soustra (2006) a documenté la présence de dépendance sérielle dans la corrélation implicite des tranches de CDOs synthétiques, ce qui apparaît comme une anomalie de marché. Également, la période couverte était particulière puisqu'elle est englobe une crise financière majeure marquée par la tourmente sur les marchés de crédit. Finalement, plusieurs des hypothèses du modèle sont nécessairement simplificatrices et non respectées en pratique, surtout dans le contexte d'une crise financière. Par exemple, l'hypothèse concernant l'absence de risque de contrepartie sur les CDS se justifie plus difficilement durant la crise avec les faillites d'institutions financières et des interventions gouvernementales afin d'en éviter d'autres. Dernier exemple, les taux de recouvrement peuvent différer passablement du 40 % postulé, comme démontré par le recouvrement de 94 % pour le défaut de l'entreprise Federal Home Loan Mortgage Corporation en septembre 2008.

6.4 Dépendance entre les défauts

La question fondamentale de ce mémoire sur la contagion des défauts demeure de connaître ou plutôt d'estimer la dépendance entre les défauts. Cette question ne peut malheureusement trouver de réponse définitive, puisque la dépendance entre les défauts n'est pas observable. À défaut de modèle théorique explicatif et bien établi, on doit se rabattre sur des méthodes empiriques, avec les risques que cela comporte. Tout de même, ce mémoire apporte quelques pistes, soit des outils pour étudier davantage la question ainsi que des observations concernant le marché des CDS. Afin d'en découvrir davantage, il serait pertinent d'analyser le comportement de nombreuses entreprises ou entités souveraines sur un long historique, les événements de crédit étant rares. En particulier, des agences de notation comme Moody's et Standard & Poor's ont de telles bases de données qui pourraient être utilisées pour modéliser la dépendance entre les défauts, avec les copules hiérarchiques par exemple. De plus, comme dans Berrada et al. (2006), les cotes de crédit de ces agences pourraient être utilisées comme proxy pour le risque de défaut afin de mieux en estimer la dépendance. Les transitions entre les cotes peuvent également être utilisées pour modéliser, si pertinent, un élément de dépendance sérielle. En effet, on s'attend à ce que la décote d'une entité augmente les probabilités d'une décote future, et l'utilisation de copules hiérarchiques dynamiques permettrait de modéliser un tel phénomène. Finalement, les agences de notation publient des données historiques agrégées sur de très longues périodes (1920-2009 par exemple pour le document Moody's Emery and Ou (2010)), telles des taux de défaut annuels par cote ou des taux de défaut par cote pour des cohortes suivies pendant jusqu'à 20 ans. De telles données permettraient de tester, à haut niveau et sur des portefeuilles stylisés, diverses hypothèses quant au comportement à long terme du risque de défaut.

Chapitre 7

Conclusion

Dans le but de mieux modéliser la contagion des défauts, ce mémoire introduit les copules hiérarchiques dynamiques. Ce nouvel outil est ensuite mis à contribution pour mieux modéliser la dépendance entre les défauts telle que sous-tendue par la dynamique du marché des CDS. Finalement, le modèle résultant est mis à l'épreuve avec l'évaluation de tranches de CDOs synthétiques à partir de données de marché.

Le principale contribution de ce mémoire est le développement de copules hiérarchiques dynamiques, obtenues en combinant les copules hiérarchiques et les copules dynamiques. En effet, ces copules sont d'abord définies dans leurs différentes variantes et leurs propriétés sont analysées. Ensuite, sur la base de développements récents relatifs aux copules hiérarchiques et aux copules dynamiques, des algorithmes de simulation exploitant la symétrie des copules archimédiennes sont développés et bien détaillés, notamment quant à la façon de régler les problèmes numériques initialement rencontrés pour des copules de dimensions élevées. L'implantation de ces algorithmes est d'ailleurs testée de façon systématique afin s'assurer qu'elle est correcte et d'en connaître la performance. Il apparaît que les copules hiérarchiques dynamiques à deux niveaux à grande dimension peuvent être facilement simulés, mais qu'à trois niveaux la performance n'est acceptable qu'en faible dimension.

La seconde contribution est de tester les copules hiérarchiques dynamiques en les appliquant à des données de marché. Les CDS présentant une dépendance sérielle significative, la variante momentum de marché des copules hiérarchiques dynamiques se révèle être un modèle réaliste et parcimonieux du comportement de ce marché. Sur la base de ce nouveau modèle de dépendance, les tranches de CDOs synthétiques sont évaluées, et les prix sont comparés à ceux de modèles plus simples et à ceux du

marché. Même si à ce chapitre les résultats ne sont pas concluants, ils confirment l'importance du choix des copules pour modéliser la dépendance entre les défauts et évaluer des dérivés de crédit. Finalement, le mémoire propose diverses pistes afin d'améliorer encore les modèles afin de mieux comprendre et maîtriser la contagion des défauts.

Bibliographie

- Berg, D. and Aas, K. (2009). Models for construction of multivariate dependence : A comparative study. Forthcoming in the European Journal of Finance.
- Berrada, T., Dupuis, D., Jacquier, E., Papageorgiou, N., and Rémillard, B. (2006). Credit migration and basket derivatives pricing with copulas. *Journal of Computational Finance*, 10(1) :43–68.
- Black, F. and Cox, J. C. (1976). Valuing corporate securities : Some effects of bonds indenture provisions. *Journal of Finance*, 31(2) :351–367.
- Duffie, D. and Lando, D. (2001). Term structure of credit spreads with incomplete accounting information. *Econometrica*, 69(3) :633–664.
- Duffie, D. and Singleton, K. J. (1999). Modeling term structures of defaultable bonds. *The Review of Financial Studies*, 12(4) :687–720.
- Emery, K. and Ou, S. (2010). Corporate default and recovery rates, 1920-2009. Technical report, Global Corporate Finance, Moody’s Investors Services.
- Hofert, M. (2007). Sampling archimedean copulas. Version of 2007-10.
- Hofert, M. and Scherer, M. (2008). CDO pricing with nested archimedean copulas. Version of 2008-01-24.
- Hull, J. C. (2007). *Fundamentals of Futures and Options Markets*. Pearson Education. Prentice Hall, sixth edition.
- Jarrow, R. A., Lando, D., and Turnbull, S. M. (1997). A Markov model for the term structure of credit risk spreads. *The Review of Financial Studies*, 10(2) :481–523.
- Jarrow, R. A. and Turnbull, S. M. (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *Journal of Finance*, 50(1) :53–85.

- Laurent, J.-P. and Gregory, J. (2003). Basket default swaps, CDO's and factor copulas. *ISFA Actuarial School*.
- Leland, H. E. (1994). Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure. *Journal of Finance*, 49(4) :1213–1252.
- Leland, H. E. and Toft, K. B. (1996). Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads. *Journal of Finance*, 51(3) :897–1019.
- Li, D. X. (2000). On default correlation : A copula function approach. *Journal of Fixed Income*, 9(4) :43–54.
- Longstaff, F. A. and Schwartz, E. S. (1995). A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt. *Journal of Finance*, 50(3) :789–819.
- Marshall, A. W. and Olkin, I. (1988). Families of multivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 83(403) :834–841.
- McNeil, A. J. (2008). Sampling nested archimedean copulas. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78(6) :567–581.
- Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29(2) :449–470.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer Series in Statistics. Springer, second edition.
- Nelson, C. R. and Siegel, A. F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *The Journal of Business*, 60(4) :473–489.
- Rémillard, B. (2010). Méthodes numériques en ingénierie financière. Notes de cours, HEC Montréal.
- Rémillard, B., Papageorgiou, N., and Soustra, F. (2010). Dynamic copulas. HEC Montréal, Available at SSRN : <http://ssrn.com/abstract=1574524>.
- Savu, C. and Trede, M. (2006). Hierarchical archimedean copulas. Technical report, Institute of Economics, University of Münster.
- Schönbucher, P. J. (2003). *Credit Derivatives Pricing Models ; Models, Pricing and Implementation*. Wiley Finance Series. John Wiley & Sons, 1st edition.

- Schönbucher, P. J. and Schubert, D. (2001). Copula-dependent default risk in intensity models. Department of Statistics, Bonn University. Available at SSRN : [http ://ssrn.com/abstract=301968](http://ssrn.com/abstract=301968) or DOI : 10.2139/ssrn.301968.
- Sklar, M. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 8 :229–231.
- Soustra, F. (2006). Pricing of synthetic CDO tranches, analysis of base correlations and an introduction to dynamic copulas. Master’s thesis, HEC Montréal.
- Zhou, C. (1997). A jump-diffusion approach to modeling credit risk and valuing defaultable securities. Technical report, Federal Reserve Board.