

**HEC MONTRÉAL**

**Évaluation des options américaines par méthode quasi-analytique**

**par**

**Adil Abkari**

**Sciences de la gestion**  
Option Ingénierie Financière

*Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du grade de maître ès sciences  
(M.Sc.)*

Août 2008  
© Adil Abkari, 2008

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier le professeur Bruno Rémillard pour son encadrement et ses conseils judicieux ainsi que les professeurs et professeures de l'option Ingénierie Financière pour toutes les connaissances qu'ils m'ont transmises.

Un merci spécial aux professeurs Geneviève Gauthier et Hatem Ben Ameer pour leur lecture attentive du mémoire.

Je remercie également ma famille pour son support moral, support sans lequel la réalisation de ce mémoire n'aurait pas été possible.

A la fin de ce mémoire, mes pensées vont à mon père pour son soutien indéfectible et ses sacrifices.

A la mémoire de ma mère.

## SOMMAIRE

Estimer le prix d'une option américaine est l'un des problèmes les plus difficiles de la théorie des options. La difficulté réside dans le fait que contrairement à une option européenne, une option américaine n'a pas de solution explicite (excepté le cas de l'option d'achat sur titre sans dividende). Ceci s'explique par le fait que la borne au delà (en deçà) de laquelle l'option d'achat (l'option de vente) américaine s'exerce est inconnue. Pour cela, des solutions numériques ont été développées. Ces solutions nécessitent parfois un temps de calcul fastidieux, d'où la nécessité de réfléchir à d'autres méthodes d'évaluation.

Une de ces méthodes nous a semblé intéressante à présenter, à savoir l'approche quasi-analytique de Barone-Adesi et Whaley (1987). Dans leur article, les auteurs présentent des résultats pour les options sur commodités et sur les contrats Futures sur commodités.

Notre objectif est de présenter cette approche pour les options sur actions, puis de vérifier les résultats par rapport à ceux obtenus par deux autres approches numériques : l'arbre binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979) et une méthode de différences finies implicite, améliorée par une variable de contrôle.

## TABLE DES MATIERES

<b>Remerciements.....</b>	<b>1</b>
<b>Sommaire.....</b>	<b>2</b>
<b>Liste des tableaux.....</b>	<b>5</b>
<b>Liste des Figures.....</b>	<b>7</b>
<b>1. Introduction.....</b>	<b>8</b>
<b>2. Revue de littérature.....</b>	<b>10</b>
2.1 Les méthodes numériques .....	10
2.2 Les méthodes de représentation de la frontière d'exercice .....	16
2.3 Les méthodes d'interpolation .....	20
2.4 Les approximations analytiques .....	22
<b>3. Évaluation d'une option américaine par la méthode CRR .....</b>	<b>25</b>
<b>4. Évaluation d'une option américaine par la MDFI améliorée .....</b>	<b>30</b>

<b>5. Évaluation d'une option américaine par la méthode BAW.....</b>	<b>41</b>
5.1 Fondements et hypothèses du modèle .....	41
5.2 Évaluation de l'option d'achat américaine .....	48
5.2.1 Cadre théorique .....	48
5.2.2 Exemple .....	50
5.3 Évaluation de l'option de vente américaine .....	52
5.3.1 Cadre théorique .....	52
5.3.2 Exemple .....	55
5.4 Symétrie option d'achat option de vente dans le modèle BAW ...	57
5.5 Analyse de la sensibilité.....	59
5.5.1 Sensibilité de l'erreur du prix BAW en fonction de la Maturité et du prix d'exercice.....	60
5.5.2 Sensibilité de l'erreur du prix BAW en fonction du prix d'exercice et de la volatilité.....	64
5.5.3 Sensibilité de l'erreur du prix BAW en fonction de la Maturité et de la volatilité.....	68
<b>6. Comparaison des résultats.....</b>	<b>72</b>
6.1 Présentation des résultats.....	72
6.2 Efficacité.....	77
6.3 Limite de la méthode BAW.....	83
<b>7. Conclusion.....</b>	<b>85</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>87</b>

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1	Prix théoriques des options d'achat américaines selon le modèle BAW. (prix d'exercice : 100).....	51
Tableau 2	Prix théoriques des options de vente américaines selon le modèle BAW. (prix d'exercice : 100).....	55
Tableau 3	Prix théoriques de l'option d'achat et de l'option de vente américaines selon le modèle BAW ( $r=8\%$ et $y=12\%$ ).....	57
Tableau 4	Prix théoriques de l'option de vente et de l'option d'achat américaines selon le modèle BAW ( $r=12\%$ et $y=8\%$ ).....	58
Tableau 5	Sensibilité de l'erreur du prix de l'option d'achat américaine à la maturité et au prix d'exercice (modèle BAW par rapport à CRR à 10000 pas de temps).....	60
Tableau 6	Sensibilité de l'erreur du prix de l'option de vente américaine à la maturité et au prix d'exercice (modèle BAW par rapport à CRR à 10000 pas de temps).....	62
Tableau 7	Sensibilité de l'erreur du prix de l'option d'achat américaine au prix d'exercice et à la volatilité (modèle BAW par rapport à CRR à 10000 pas de temps).....	64
Tableau 8	Sensibilité de l'erreur du prix de l'option de vente américaine au prix d'exercice et à la volatilité (modèle BAW par rapport à CRR à 10000 pas de temps).....	66
Tableau 9	Sensibilité de l'erreur du prix de l'option d'achat américaine à la maturité et à la volatilité (modèle BAW par rapport à CRR à 10000 pas de temps).....	68

Tableau 10	Sensibilité de l'erreur du prix de l'option de vente américaine à la maturité et à la volatilité (modèle BAW par rapport à CRR à 10000 pas de temps).....	70
Tableau 11	Prix théoriques des options d'achat américaines selon les trois modèles développés. (prix d'exercice : 100).....	74
Tableau 12	Prix théoriques des options de vente américaines selon les trois modèles développés. (prix d'exercice : 100).....	75
Tableau 13	Prix théoriques des options d'achat américaines selon BAW et CRR à 200 pas de temps. (prix d'exercice : 100).	79
Tableau 14	Prix théoriques des options de vente américaines selon BAW et CRR à 200 pas de temps. (prix d'exercice : 100).	81
Tableau 15	Prix théoriques des options d'achat américaines selon les trois modèles développés. (prix d'exercice : 100).....	83
Tableau 16	Prix théoriques des options de vente américaines selon les trois modèles développés. (prix d'exercice : 100).....	84

## LISTE DES FIGURES

Figure 1	Prix théoriques des options d'achat américaines avec différents prix de sous-jacents, selon le modèle BAW. (prix d'exercice : 100).....	51
Figure 2	Prix théoriques des options de vente américaines avec différents prix de sous-jacents, selon le modèle BAW. (prix d'exercice : 100).....	56
Figure 3	Représentation graphique de la sensibilité de l'erreur du prix de l'option d'achat américaine à la maturité et au prix d'exercice.....	61
Figure 4	Représentation graphique de la sensibilité de l'erreur du prix de l'option de vente américaine à la maturité et au prix d'exercice.....	63
Figure 5	Représentation graphique de la sensibilité de l'erreur du prix de l'option d'achat américaine au prix d'exercice et à la volatilité.....	65
Figure 6	Représentation graphique de la sensibilité de l'erreur du prix de l'option de vente américaine au prix d'exercice et à la volatilité.....	67
Figure 7	Représentation graphique de la sensibilité de l'erreur du prix de l'option d'achat américaine à la maturité et à la volatilité.....	69
Figure 8	Représentation graphique de la sensibilité de l'erreur du prix de l'option de vente américaine à la maturité et à la volatilité.....	71
Figure 9	Frontière d'exercice d'une option d'achat américaine, selon le modèle BAW. (prix d'exercice : 100).....	86



## 1. INTRODUCTION

Une option vanille donne à son détenteur le droit et non l'obligation d'acheter (dans le cas d'une option d'achat) ou de vendre (dans le cas d'une option de vente) l'actif sous-jacent.

Nous pouvons distinguer deux grandes familles d'options vanille : les options européennes et les options américaines.

À la différence de l'option européenne qui ne peut être exercée qu'à son échéance, l'option américaine peut être exercée à n'importe quel moment, ce qui rend son prix particulièrement difficile à estimer.

Une grande quantité d'options transigées sur les marchés est composée d'options américaines. Que ce soit sur actions, sur commodités, sur Futures ou sur devises, tous les marchés sont concernés. D'où l'intérêt de bien les évaluer.

Dans ce mémoire, nous nous proposons d'aborder l'évaluation de l'option américaine. De nombreux modèles proposent des cadres d'évaluation.

Dans le cas qui nous intéresse, l'évaluation se fera selon trois approches : la première est la méthode quasi-analytique de Barone-Adesi et Whaley (1987) communément appelée BAW, la seconde est l'arbre binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979) et la troisième est la méthode de différences finies implicite, améliorée par une variable de contrôle.

Concernant l'approche BAW, nous présenterons la théorie sur laquelle elle se base, mais contrairement aux deux auteurs, nous l'appliquerons sur des actions et non pas sur des commodités ou sur des contrats Futures sur commodités. Puis nous essayerons à l'aide d'un code informatique d'appliquer la méthode décrite par les deux auteurs pour essayer de retrouver le prix de certaines options cotées sur le marché.

Quant aux deux approches numériques, à savoir l'arbre binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979), communément appelée CRR, et la méthode de différences finies implicite (appelée MDFI), améliorée par une variable de contrôle, le but de leur présentation ici est d'avoir une base fiable de prix d'options avec laquelle nous pourrions comparer les prix obtenus par la méthode BAW. Pour ce faire nous développerons deux codes informatiques qui nous permettront d'obtenir le prix d'une option américaine.

Les objectifs de ce mémoire seront donc de :

- Présenter et développer un code informatique pour le modèle de Barone-Adesi et Whaley (1987).
- Présenter et développer deux codes informatiques pour l'arbre binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979) ainsi que pour la méthode de différences finies implicite.
- Comparer les résultats obtenus par les trois modèles.

## **2. REVUE DE LITTÉRATURE**

Plusieurs groupes d'approches ont été développés pour estimer le prix d'une option américaine.

### **2.1 Les méthodes numériques**

Le premier, un des plus largement utilisé, est celui des méthodes numériques, telles les différences finies de Brennan et Schwartz (1977), l'arbre binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979) et la méthode de Monte-Carlo introduite en finance par Boyle (1977) pour les options européennes, puis introduite pour les options américaines par Bossaerts (1989) et Tilley (1993).

Certaines de ces méthodes (Monte-Carlo) visent à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires. Elles se basent sur le calcul stochastique (étude des phénomènes aléatoires dépendants du temps), qui est à ce titre une extension de la théorie des probabilités.

Dans leur article, Brennan et Schwartz (1977) proposent un algorithme pour évaluer l'option de vente américaine dont l'échéance est finie, puis ils utilisent leur algorithme pour évaluer les options de vente traitées sur le marché new-yorkais.

Cox, Ross et Rubinstein (1979) proposent un modèle où l'actif sous-jacent évolue suivant un arbre binomial. C'est un arbre en temps discret représentant les trajectoires éventuelles de l'actif sous-jacent dans le futur. Une hypothèse clé du modèle est que les mouvements du prix du sous-jacent sont composés d'un grand nombre de petits mouvements binomiaux.

Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature pour améliorer l'estimation par l'arbre binomial introduite par Cox, Ross et Rubinstein (1979) et communément appelée CRR.

Citons notamment Hull et White (1988) qui proposent une variable de contrôle basée sur le prix de l'option européenne obtenu par le modèle BMS (Black Merton Scholes) développé par Black et Scholes (1973) et par Merton (1973). L'utilisation de cette variable de contrôle permet l'amélioration de l'estimation du prix de l'option américaine équivalente.

Broadie et Detemple (1996) proposent deux modifications à l'arbre binomial. La première consiste à remplacer la valeur de continuation juste avant la maturité par le prix obtenu selon la méthode BMS (Black Merton Scholes). Ils nomment cette méthode BBS (binomial avec modification Black et Scholes). La deuxième modification qu'ils proposent est d'utiliser l'extrapolation de Richardson à la méthode BBS, et ils nomment cette méthode BBSR (le R pour Richardson).

Tian (1999) développe un arbre binomial flexible en utilisant un paramètre qui modifie la forme de l'arbre dépendamment que ce paramètre soit positif ou négatif.

D'autres auteurs proposent de remplacer l'arbre binomial par un arbre trinomial. Citons dans ce cas Boyle (1988) et Kamrad et Ritchken (1991).

Tous ces auteurs ont travaillé pour réduire la divergence entre l'approche discrète et l'approche continue en essayant de concorder les premiers moments de leurs distributions. Une autre approche, développée par Denault, Gauthier et Simonato (2003), propose eux de réduire l'écart entre le prix théorique (Black-Scholes) et le prix obtenu par la grille pour une option européenne. La grille modifiée sert par la suite à estimer le prix de l'option américaine correspondante.

De son côté, la méthode de Monte-Carlo est assez simple. Pour estimer le prix d'une option sur actif sous-jacent par exemple, Il suffit de générer plusieurs trajectoires possibles de l'actif sous-jacent, calculer la valeur finale du produit dérivé pour chaque trajectoire, en faire la moyenne pour l'ensemble des trajectoires et enfin actualiser cette moyenne pour obtenir le prix actuel du produit dérivé.

Ces méthodes, en dépit de leur aspect pratique, présentent l'inconvénient majeur de nécessiter beaucoup de temps de calcul. Cependant, avec le développement de plus en plus rapide de l'outil informatique, nous assistons à un regain d'intérêt en ces méthodes car des calculateurs de plus en plus puissants permettent de pallier à ce handicap de temps de calcul.

Nous aborderons les différences finies et l'arbre binomial CRR plus en détails dans notre développement car ils nous serviront de base pour comparer les résultats obtenus par la méthode Barone-Adesi et Whaley (1987). Mais avant, développons un peu plus la méthode Monte-Carlo qui reste un outil très important surtout avec le développement continue de calculateurs de plus en plus puissants.

Bossaerts (1989) puis Tilley (1993) ont été les premiers à essayer d'appliquer la méthode Monte-Carlo pour évaluer les options américaines. En effet, Tilley (1993) a utilisé un algorithme à induction backward qui est appliqué une fois que toutes les trajectoires ont été simulées.

Une autre façon de formuler le problème de l'évaluation de l'option américaine réside dans le temps d'arrêt optimal. En utilisant une induction backward, Carriere (1996) montre que l'évaluation d'une option américaine est équivalente au calcul d'un certain nombre d'espérances conditionnelles, en utilisant des méthodes de régression avancées.

De leur côté, Broadie et Glasserman (1997) proposent deux algorithmes, l'un basé sur un arbre non recombinaison et l'autre basé sur un treillis stochastique, qui donnent les bornes supérieures et inférieures du prix de l'option américaine, et qui convergent asymptotiquement vers le vrai prix de l'option.

Dans leur article, Longstaff et Schwartz (2001) utilisent une régression des moindres carrés pour estimer la frontière d'exercice anticipé d'une option américaine. L'idée est que la stratégie d'exercice optimal est déterminée par l'espérance conditionnelle du payoff de l'option non exercée, qui est approchée par une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions, dites fonctions de bases. Cette espérance conditionnelle peut être estimée par l'information transversale obtenue par la simulation en utilisant les moindres carrés, ceux-ci servant à déterminer les coefficients des fonctions de base. Concrètement, en estimant la fonction d'espérance conditionnelle à chaque temps d'arrêt, les auteurs obtiennent une estimation de la stratégie d'exercice optimal le long de chaque trajectoire. Avec cette estimation, les options américaines peuvent être évaluées par simulation. Ils appellent cette approche LMS (Least Squares Monte Carlo). Cette approche est relativement facile à implémenter puisqu'elle ne nécessite que l'utilisation des moindres carrés. Les auteurs le prouvent en l'utilisant pour l'estimation de quelques options complexes.

Garcia (2003) présente un algorithme pour évaluer le prix d'une option américaine par la méthode Monte Carlo en se basant sur la représentation paramétrique de la frontière d'exercice. Il montre comment estimer la valeur d'une option américaine en introduisant deux estimateurs l'un plus biaisé que l'autre. Mais les deux sont des estimateurs asymptotiquement non biaisés pour la valeur de l'option.

Ibanez et Zapatero (2004) propose une approche pour évaluer les options américaines multidimensionnelles. La méthode se base sur le calcul de la frontière d'exercice, définie comme étant un ensemble de points où la valeur intrinsèque de l'option équivaut à la valeur de continuation. Si la valeur intrinsèque est supérieure à la valeur de continuation, on exerce l'option. Dans le cas contraire, on attend l'opportunité suivante. Ceci est une propriété générale des options bermudiennes et est indépendante de la dimensionnalité du problème. Les auteurs considèrent des options qui peuvent être exercées à un nombre fini d'opportunités (type bermudien) et calculent la frontière d'exercice optimale de manière récursive. Pour chaque opportunité d'exercice, ils calculent quelques points de la frontière d'exercice optimale. Dans le cas d'une option multidimensionnelle, ils fixent tous les paramètres sauf un (généralement le sous-jacent) et ils calculent sa valeur à la frontière d'exercice optimale. Puis ils utilisent une interpolation ou une régression pour avoir la frontière d'exercice optimale. Après avoir obtenu la frontière à chaque opportunité d'exercice anticipé, ils simulent des trajectoires pour obtenir le prix de l'option bermudienne.

L'article d'Andersen et Broadie (2004) décrit un algorithme pratique, basé sur la simulation Monte Carlo pour évaluer les options américaines multidimensionnelles et les options bermudiennes. Cette approche donne les bornes inférieures et supérieures de l'option bermudienne et fournit ainsi un intervalle de confiance pour la vraie valeur de l'option. La borne inférieure peut être déterminée par un algorithme classique. La borne supérieure est calculée en



utilisant un nouvel algorithme Monte Carlo, se basant sur la représentation duale de la valeur de la fonction bermudienne, suggérée dans Haugh et Kogan (2004) et Rogers (2002). L'algorithme proposé peut être appliqué à pratiquement tout type de processus dynamique.

## 2.2 Les méthodes de représentation de la frontière d'exercice

Le deuxième groupe de méthodes est celui des schémas d'approximation basés sur la représentation exacte de la frontière d'exercice des options américaines ou de l'équation différentielle partielle (EDP) satisfaite par le prix de l'option, et qui se présente comme suit

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - y)SV_S + V_t \leq rV \text{ ,}$$

où  $V$  représente l'option,  $S$  le prix de l'actif sous-jacent,  $r$  le taux sans risque,  $y$  le taux de dividende continu,  $V_S$  la dérivée de  $V$  par rapport à  $S$ ,  $V_t$  la dérivée de  $V$  par rapport à  $t$  et  $V_{SS}$  la dérivée seconde de  $V$  par rapport à  $S$ .

Quand il est optimal de garder l'option, cette inégalité devient une égalité avec la condition que  $V$  est strictement supérieure à la valeur intrinsèque. C'est le cas par exemple d'une option européenne. Par contre, quand il est optimal d'exercer l'option, l'inégalité devient une inégalité stricte avec  $V$  égale à la valeur intrinsèque (valeur de l'actif sous-jacent moins le prix d'exercice pour une option d'achat et le contraire pour une option de vente).

Parmi les auteurs ayant travaillé sur cette approche, nous citerons Geske et Johnson (1984), Bunch et Johnson (1992), Huang, Subrahmanyam et Yu (1996), Carr (1998) et Ju (1998). Ces méthodes sont principalement des approximations analytiques et elles sont convergentes dans le sens où plus on y incorpore des paramètres plus elles sont précises. Cependant, elles peuvent devenir rapidement non efficaces dans la mesure où elles deviennent très complexes à partir d'un certain nombre de paramètres incorporés.

Dans leur modèle, Geske et Johnson (1984) présentent une formule analytique pour résoudre l'équation différentielle partielle en prenant en compte les conditions d'exercice anticipé qui caractérisent le problème d'évaluation de l'option de vente américaine. En fait, comme à chaque instant, dépendamment de la valeur intrinsèque de l'option de vente, on peut l'exercer, cela revient à considérer une suite infinie d'options sur options (les options composées).

Gesk (1979) avait déjà montré comment évaluer des options composées. En utilisant cette solution technique, les auteurs développent une méthode de calcul du prix de l'option de vente américaine en utilisant l'extrapolation de Richardson sur une séquence d'options de vente hypothétiques, où chaque option de vente a un nombre fini de points d'exercice localisés à intervalles de temps équidistants. Pour évaluer les options de vente, ils utilisent des intégrales normales quadrivariées sur quatre points d'exercice localisés à intervalles de temps équidistants.

Bunch et Johnson (1992) améliorent cette technique en démontrant qu'un choix optimal des points d'exercice ne nécessite plus de normales quadrivariées, mais seulement des normales trivariées et même parfois des normales bivariées.

Dans leur article, Huang, Subrahmanyam et Yu (1996) présentent une méthode d'évaluation et de couverture des options américaines, basée sur un calcul récursif de la frontière d'exercice anticipé. Ils montrent que leur approche peut être appliquée aux options américaines sur actions, sur devises, ou sur futures. Pour calculer les prix d'options et les paramètres de couverture, ils mettent en place une méthode numérique combinant une formule d'évaluation analytique et l'approximation de Geske et Johnson (1984). Cette procédure implique l'estimation de la frontière d'exercice anticipé à quelques points seulement, puis par la suite, approximer toute la frontière en utilisant l'approximation de Richardson, plutôt que de calculer la frontière point par point. Ils comparent leur méthode à celle de Geske et Johnson (1984) et montrent qu'elle est plus précise et plus efficiente.

Dans son article, Carr (1998) utilise une technique appelée « randomization » pour évaluer l'option de vente et l'option d'achat américaines sur des actions donnant droit à un dividende. Cette technique se décompose en trois étapes : la première consiste à « randomizer » un paramètre en supposant qu'il suit une distribution plausible. Lors de la deuxième étape, il faut calculer la valeur espérée de la variable dépendante dans cet ensemble aléatoire du paramètre

choisi. La troisième étape consiste à laisser la variance de la distribution qui gouverne le paramètre choisi s'approcher de zéro, tout en gardant la moyenne de la distribution constante et égale à la valeur fixée du dit paramètre. L'auteur choisit de « randomizer » la maturité de l'option en la définissant comme le temps d'attente d'un nombre prédéterminé de sauts d'un processus de Poisson. Le processus de Poisson ne sert qu'à déterminer la maturité de l'option (le nième saut). Le processus du prix de l'actif sous-jacent est lui continu. Entre les temps de sauts, la distribution exponentielle étant sans mémoire, la valeur de l'option et la frontière d'exercice sont stationnaires. Par contre, aux temps des sauts, la valeur de l'option effectue un saut vers le bas et la frontière d'exercice saute près du prix d'exercice. La stationnarité locale conduit à une solution semi explicite du prix de l'option et du prix critique de l'actif sous-jacent, tandis que le comportement de saut reflète le comportement global de ces valeurs. En laissant le nombre de temps de sauts tendre vers l'infini, tout en gardant la moyenne de la maturité constante, l'auteur observe que la valeur de l'option parait converger vers le vrai prix de l'option américaine.

Ju (1998) propose d'estimer le prix d'une option américaine en approximant sa frontière d'exercice anticipé comme une fonction exponentielle. La formule fermée est obtenue en termes des bases et des exposants de la fonction exponentielle. Il montre que sa méthode est aussi précise qu'un arbre binomial de 800 pas, mais 130 fois plus rapide.

### 2.3 Les méthodes d'interpolation

La troisième catégorie de méthodes utilise des techniques de régression pour trouver une approximation analytique basée sur les bornes supérieure et inférieure de l'option américaine. Cette approche est due à Johnson (1983) et développée par Broadie et Detemple (1996). La méthodologie consiste à déterminer d'abord les bornes pour le prix de l'option américaine, puis ce prix est calculé par interpolation.

Pour l'option de vente américaine par exemple, Johnson (1983) propose l'encadrement suivant comme base pour calculer le prix d'une option de vente américaine

$$p(S, T-t, K) \leq P(S, T-t, K) \leq p(S, T-t, Ke^{r(T-t)}), \quad (1)$$

où  $P$  est l'option de vente américaine,  $p$  l'option de vente européenne,  $S$  est le prix de l'actif sous-jacent,  $K$  le prix d'exercice et  $T$  est l'échéance de l'option.

Les deux options de vente européennes étant connues analytiquement, Johnson propose l'interpolation linéaire suivante

$$P(S, T-t, K) = \alpha p(S, T-t, Ke^{r(T-t)}) + (1-\alpha)p(S, T-t, K), \quad (2)$$

où  $\alpha \in [0,1]$  et il est calculé suite à une méthode de régression.

Ces méthodes sont rapides mais ont besoin de coefficients de régression, ce qui nécessite le calcul d'un grand nombre de données. L'autre inconvénient de ces méthodes, c'est qu'elles ne convergent pas.

D'autres auteurs ont abordé le problème des bornes inférieures et supérieures des options américaines, non pas d'un point de vue analytique mais en essayant de les calculer par des procédures numériques.

Citons dans ce cas Broadie et Glasserman (1997) qui proposent deux algorithmes, l'un basé sur un arbre non recombinaison et l'autre basé sur un treillis stochastique, qui donnent les bornes supérieures et inférieures du prix de l'option américaine, et qui convergent asymptotiquement vers le vrai prix de l'option.

Haugh et Kogan (2004) développent un algorithme qui permet d'obtenir les bornes inférieures et supérieures des options américaines en utilisant la méthode Monte Carlo.

Magdon-Ismail (2003) présente des familles de bornes inférieures pour l'option de vente américaine sur un sous-jacent qui suit un processus lognormal et qui distribue un dividende.

Laprise et al. (2006) proposent une approche pour estimer l'option américaine en approximant la fonction valeur par une fonction d'interpolation appropriée. L'estimation du prix de l'option américaine passe par un portefeuille

d'options d'achat européennes. Ils montrent également que dans certains cas, leur approche permet d'obtenir la borne inférieure et la borne supérieure de l'option américaine.

Dans le même ordre d'idées, Ben Ameur et al. (2007) proposent une interprétation différente des résultats de Laprise et al. (2006), en utilisant la programmation dynamique et des interpolations linéaires par morceaux de la fonction valeur de Bellman à chaque date de décision. Leur programme dynamique ne dépend pas directement de portefeuilles d'options d'achat comme c'est le cas pour Laprise et al. (2006), mais plutôt sur des paramètres de transition du processus d'état.

## **2.4 Les approximations analytiques**

Le quatrième groupe de méthodes concerne les approximations analytiques. MacMillan (1986) et Barone-Adesi et Whaley (1987) en sont les précurseurs. L'idée maîtresse en est la transformation de l'Équation Différentielle Partielle (EDP) en Équation Différentielle Ordinaire (EDO). En fait, et contrairement à ce que nous avons abordé plus haut lorsque nous avons parlé des méthodes de représentation des frontières d'exercice, Barone-Adesi et Whaley (1987) ne posent pas l'EDP de l'option américaine sous forme d'une inégalité mais plutôt sous la forme d'une égalité. Et c'est en faisant la différence entre deux EDP, une pour l'option américaine et l'autre pour l'option européenne qu'ils dégagent

l'avantage de l'exercice anticipé que contient l'option américaine. À partir de là et moyennant certaines conditions qu'ils posent, ils transforment l'EDP en EDO et développent ainsi un modèle pour une approximation analytique de l'option américaine.

L'avantage de cette approche est la rapidité de calcul. Son inconvénient est le manque de précision quand certaines hypothèses ne sont pas satisfaites. C'est ce modèle que nous étudierons plus en détails dans ce mémoire, en essayant de comparer ses résultats à ceux de l'arbre binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979) et la méthode de différences finies implicite (MDFI), améliorée par une variable de contrôle.

Nous verrons également lorsque nous développerons le modèle Barone-Adesi et Whaley (1987), que celui-ci satisfait la propriété de symétrie option d'achat/option de vente des options américaines (propriété satisfaite par les options européennes également). La symétrie option d'achat/option de vente est une propriété des options américaines et européenne, dans le cadre du modèle standard de Black Scholes. Cette propriété stipule que la valeur d'une option d'achat sur un sous-jacent  $S$ , avec un taux de dividende continu  $y$ , avec un prix d'exercice  $K$ , à échéance  $T$  et avec un taux d'intérêt de marché  $r$  est identique à la valeur d'une option de vente sur un sous-jacent  $K$ , avec un taux de dividende continu  $r$ , avec un prix d'exercice  $S$ , à échéance  $T$  et avec un taux d'intérêt de marché  $y$ . Plus précisément,



$$C(S, T, K, \sigma, r, y) = P(K, T, S, \sigma, y, r).$$

Ce résultat a été initialement démontré par McDonald et Schroder (1990,1998), qui ont utilisé une approximation binomiale du modèle lognormal, puis il a été redémontré par Chesney et Gibson (1995) qui ont étendu l'idée à un modèle où les taux d'intérêt et le taux de dividende continu sont stochastiques. Puis Bjerk Sund et Stensland (1993) ont démontré cette parité dans un modèle à temps continu.

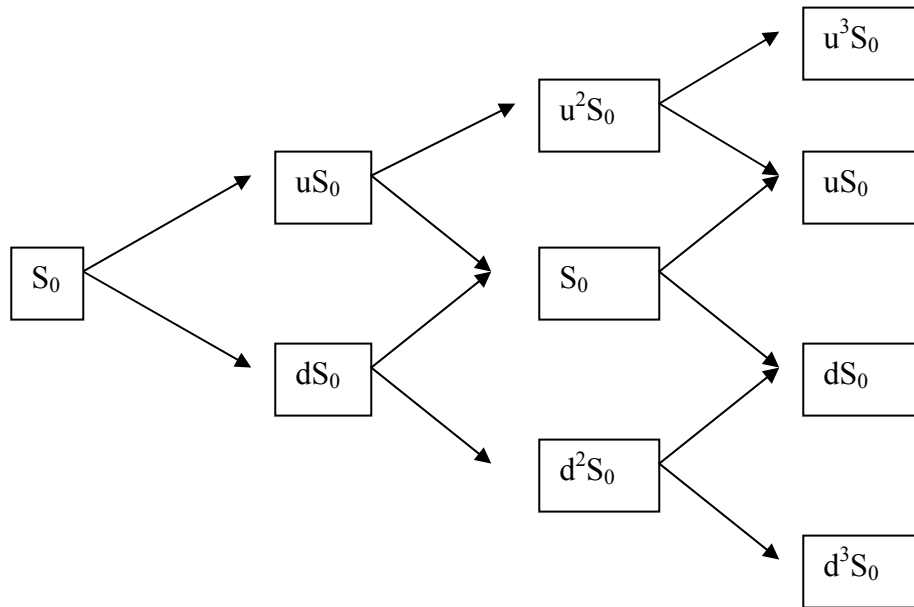
### 3 ÉVALUATION D'UNE OPTION AMÉRICAINNE PAR LA MÉTHODE CRR

Développée par J.C. Cox, S.A. Ross et M. Rubinstein en 1979, cette méthode est une approche par arbre binomial dans un monde risque neutre avec propriété martingale.

Elle suppose une évolution binomiale de l'actif sous-jacent. Les trajectoires possibles du prix de l'actif sont représentées sur un arbre recombinant. L'intervalle de temps  $[0, T]$  entre aujourd'hui et la date d'expiration de l'option sur l'actif sous-jacent est discrétisé et divisé en " $n$ " petits intervalles de longueur  $\Delta t$ . A partir de chaque nœud de l'arbre et entre deux dates successives, le prix de l'actif sous-jacent monte en multipliant le prix à ce nœud par un facteur " $u$ ", ou bien descend en multipliant le prix par un facteur " $d$ ".

Dans un cas général le nombre de possibilités pour le prix du sous-jacent entre 0 et  $T$  est  $2^n$ . Cependant, la propriété recombinate de l'arbre, choisie pour simplifier les calculs, réduit le nombre de possibilités à " $n+1$ " seulement. Pour ce faire, nous posons  $ud=1$ .

Ainsi, en partant de  $S_0$  le prix de l'actif sous-jacent à l'instant 0, et si l'on divise l'intervalle  $[0, T]$  en trois sous intervalles par exemple, l'évolution du prix du sous-jacent se présentera comme suit :



Dans un monde risque neutre, la valeur espérée de l'actif sous-jacent à la fin d'un intervalle de temps  $\Delta t$  est  $S \exp[(r-y) \Delta t]$ , où  $S$  est le prix de l'actif au début de l'intervalle de temps,  $r$  le taux sans risque et  $y$  le taux de dividende continu.

Nous pouvons donc écrire

$$S \exp[(r-y)\Delta t] = qSu + (1-q)Sd, \quad (3)$$

où  $q$  est la probabilité risque neutre d'un mouvement à la hausse du prix de l'actif.

$1-q$  est alors la probabilité risque neutre d'un mouvement à la baisse.

Ce qui donne

$$\exp[(r - y)\Delta t] = qu + (1 - q)d. \quad (4)$$

D'où

$$q = \frac{\exp[(r - y)\Delta t] - d}{u - d}. \quad (5)$$

D'un autre côté, le processus stochastique supposé pour le prix de l'actif sous-jacent implique que la variance du changement proportionnel dans le prix de l'actif dans un intervalle de longueur  $\Delta t$  est approximée par  $\sigma^2 \Delta t$ .

Et puisque la variance d'une variable  $Y$  est définie comme étant  $E(Y^2) - [E(Y)]^2$ , il s'en suit que

$$qu^2 + (1 - q)d^2 - [qu + (1 - q)d]^2 = \sigma^2 \Delta t. \quad (6)$$

En utilisant l'équation (4), l'égalité (6) devient

$$\exp[(r - y)\Delta t](u - d) - ud - \exp[2(r - y)\Delta t] = \sigma^2 \Delta t. \quad (7)$$

Les équations (4), (7) en plus de la contrainte  $ud=1$  impliquent que

$$u = \exp(\sigma\sqrt{\Delta t}), \quad (8)$$

$$d = \exp(-\sigma\sqrt{\Delta t}). \quad (9)$$

Après avoir construit l'arbre des prix de l'actif sous-jacent en partant du prix actuel  $S_0$ , les options sont évaluées en commençant à la fin de l'arbre, soit à l'instant  $T$ .

Par exemple, à l'échéance, une option d'achat vaut  $\max(S_T - X; 0)$  et une option de vente vaut  $\max(X - S_T; 0)$ , où  $S_T$  est le prix de l'actif sous-jacent à l'instant  $T$  et  $X$  est le prix d'exercice de l'option.

Étant donné que nous évoluons en monde neutre au risque, la valeur de l'option européenne à chaque nœud de l'arbre à l'instant  $T - \Delta t$  peut être calculée comme étant la valeur espérée à l'instant  $T$ , actualisée au taux sans risque  $r$ , pour la période de temps  $\Delta t$ .

De manière similaire, la valeur à chaque nœud de l'arbre à l'instant  $T - 2\Delta t$  peut être vue comme étant la valeur espérée à l'instant  $T - \Delta t$ , actualisée au taux sans risque  $r$ , pour la période de temps  $\Delta t$ , et ainsi de suite.

Pour l'option américaine, il est nécessaire de comparer, à chaque nœud de l'arbre, cette valeur actualisée avec la valeur intrinsèque de l'option, pour vérifier si l'on doit exercer l'option ou la garder une période  $\Delta t$  de plus. Ainsi, en continuant cette induction backward à travers tout l'arbre, nous obtenons le prix de l'option à l'instant 0.

Il est à noter que cette approche binomiale de Cox, Ross et Rubinstein (1979) converge vers le modèle développé par Black et Scholes (1973) et par Merton (1973).

En effet, lorsque le nombre de pas " $n$ " tend vers l'infini, la modélisation binomiale CRR converge vers la modélisation log-normale du cours de l'actif sous-jacent.

Les résultats obtenus par le modèle CRR seront présentés au point 6, soit lors de la comparaison des trois méthodes décrites dans ce mémoire.

#### 4 ÉVALUATION D'UNE OPTION AMERICAINE PAR LA METHODE IMPLICITE DE DIFFERENCES FINIES

La méthode de différences finies implicite (MDFI) fait partie, comme son nom l'indique, de la famille des méthodes de différences finies, qui elles même font partie des méthodes numériques.

Héritées de la physique (équation de diffusion de la chaleur), les méthodes de différences finies ont été introduites en finance par Brennan et Schwartz (1978). Elles permettent d'évaluer un produit dérivé par la résolution de l'équation différentielle partielle (EDP) qu'il satisfait. Il s'agit de discrétiser l'EDP puis de la résoudre de manière itérative, tel un algorithme.

L'approche de différences finies est une méthode qui s'inspire de l'approche binomiale, sauf qu'au lieu de parler d'arbre, on considère plus généralement une grille pour représenter l'évolution du prix de l'actif sous-jacent à travers le temps.

La grille se présente comme suit : l'axe des abscisses représente l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Il est divisé en  $N$  intervalles de longueur égale :  $\Delta t = T/N$ . Nous obtenons alors  $N+1$  intervalles :  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T\Delta t$ .

L'axe des ordonnées représente les prix possibles "S" de l'actif sous-jacent. Nous supposons généralement une valeur maximale  $S_{max}$  suffisamment élevée que quand elle est atteinte, l'option de vente n'a virtuellement aucune valeur. L'intervalle  $[0,$

$S_{max}$ ] est divisé en  $M$  intervalles de longueur égale :  $\Delta S = S_{max}/M$ . Nous obtenons alors  $M+1$  intervalles :  $0, \Delta S, 2\Delta S, \dots, S_{max}$ .

La grille se compose donc d'un total de  $(M+1)(N+1)$  nœuds. Chaque nœud  $(i,j)$  de la grille représente le prix possible de l'actif sous-jacent  $j\Delta S$  à une date donnée  $i\Delta t$ . Nous utiliserons la variable  $V_{i,j}$  pour représenter la valeur de l'option  $V$  au point  $(i,j)$ .

La différence avec un arbre binomial c'est qu'à chaque instant, l'actif sous-jacent peut prendre plusieurs valeurs (le nombre de possibilité étant le même à chaque instant) alors que sur un arbre le nombre de possibilités augmente en avançant dans le temps suivant le nombre de pas " $n$ ", tel que nous l'avons expliqué plus haut.

Dans l'approche de différences finies, l'actif sous-jacent est gouverné par un mouvement brownien géométrique.

Soit donc

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - y)dt + \sigma dw_t, \quad (10)$$

où  $S$  représente l'actif sous-jacent,  $\mu$  le taux de rendement espéré instantané de l'actif sous-jacent,  $y$  le taux de dividende continu,  $\sigma^2$  est la variance instantanée du rendement des actifs et  $w$  est un processus de Wiener.



En absence d'opportunité d'arbitrage, le lemme d'Itô nous permet d'écrire tout produit dérivé  $V$ , écrit sur l'actif sous-jacent, sous la forme de l'équation différentielle partielle (EDP) suivante

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - y)SV_S + V_t = rV, \quad (11)$$

où  $V$  représente l'option,  $r$  le taux sans risque,  $V_S$  la dérivée de  $V$  par rapport à  $S$ ,  $V_t$  la dérivée de  $V$  par rapport à  $t$  et  $V_{SS}$  la dérivée seconde de  $V$  par rapport à  $S$ .

À partir d'ici, il faut faire la distinction entre la méthode de différences finies implicites (MDFI) et d'autres méthodes de différences finies telles la méthode de différences finies explicite (MDFE) par exemple.

Nous avons choisi de travailler avec la MDFI car elle est plus stable et plus précise que la MDFE.

La principale différence entre les deux est que la MDFI relie la valeur de l'option à un nœud donné avec celles de trois valeurs de nœuds précédents alors que la MDFE permet de déterminer la valeur de l'option à un point donné grâce aux trois valeurs des nœuds suivants.

Donc contrairement à la MDFE, la MDFI ne permet pas la résolution de l'EDP de manière explicite avec une induction backward. Elle nécessite plutôt la résolution d'un système d'équations linéaires.

La méthodologie générale peut se résumer comme suit :

En un point  $(i,j)$  de la grille,  $V_S$  peut être estimé par approximation forward comme suit

$$V_S = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta S}, \quad (12)$$

ou encore par approximation backward

$$V_S = \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta S}. \quad (13)$$

Nous utiliserons une approximation plus symétrique en faisant la moyenne des deux

$$V_S = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta S}. \quad (14)$$

Pour  $V_t$ , nous utiliserons l'approximation forward, de manière à ce que la valeur en  $i\Delta t$  est déterminée par la valeur en  $(i+1)\Delta t$

$$V_t = \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t}. \quad (15)$$

De la même manière que l'approximation backward donnée en équation (13) pour  $V_S$ , nous pouvons calculer  $V_S$  au point  $(i,j+1)$

$$V_S = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta S}. \quad (16)$$

Ainsi, l'approximation de  $V_{SS}$  au point  $(i,j)$  s'écrit

$$V_{SS} = \left( \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta S} - \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta S} \right) / \Delta S \quad (17)$$

ou encore

$$V_{SS} = \frac{V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j}}{\Delta S^2}. \quad (18)$$

En remplaçant les équations (14), (15) et (18) dans l'équation différentielle (11) et en remplaçant  $S$  par  $j\Delta S$ , nous obtenons

$$\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j}}{\Delta S^2} = rV_{i,j}. \quad (19)$$

pour  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$  et  $j = 1, 2, \dots, M-1$

En réarrangeant les termes, nous obtenons

$$a_j V_{i,j-1} + b_j V_{i,j} + c_j V_{i,j+1} = V_{i+1,j}, \quad (20)$$

où

$$a_j = \frac{1}{2}(rj\Delta t - \sigma^2 j^2 \Delta t),$$

$$b_j = 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t,$$

$$c_j = -\frac{1}{2}(rj\Delta t + \sigma^2 j^2 \Delta t).$$

D'un autre côté, il est possible de définir les conditions aux bornes selon qu'il s'agisse d'une option d'achat ou d'une option de vente :

➤ Conditions aux bornes de l'option d'achat:

Au temps  $T$ , la valeur de l'option d'achat est égale à  $\max(S_T - X; 0)$ , où  $X$  est le prix d'exercice et  $S_T$  le prix du sous-jacent à l'instant  $T$ .

D'où

$$V_{N,j} = \max(j\Delta S - X; 0). \quad (21)$$

Pour  $j = 0, 1, 2, \dots, M$ .

Quand l'actif sous-jacent vaut 0, la valeur de l'option d'achat est égale à 0

$$V_{i,0} = 0. \quad (22)$$

Pour  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Quand l'actif sous-jacent vaut  $S_{max}$ , la valeur de l'option d'achat est égale à  $S_{max} - X$

$$V_{i,M} = S_{max} - X. \quad (23)$$

Pour  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ .

➤ Conditions aux bornes de l'option de vente :

Au temps  $T$ , la valeur de l'option de vente est égale à  $\max(X - S_T; 0)$ , où  $X$  est le prix d'exercice et  $S_T$  le prix du sous-jacent à l'instant  $T$ .

D'où

$$V_{N,j} = \max(X - j\Delta S; 0). \quad (24)$$

Pour  $j = 0, 1, 2, \dots, M$ .

Quand l'actif sous-jacent vaut 0, la valeur de l'option de vente est égale à  $X$

$$V_{i,0} = X. \quad (25)$$

Pour  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Quand l'actif sous-jacent vaut  $S_{max}$ , la valeur de l'option de vente est égale à 0

$$V_{i,M} = 0. \quad (26)$$

Pour  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Ces conditions aux bornes permettent d'avoir autant d'équations que d'inconnues et la résolution du système d'équations permettant de résoudre l'EDP est alors possible.

Pour l'option américaine, la résolution par la méthode de différences finies se complique un peu plus à cause de la possibilité de l'exercice anticipé de l'option. Ceci se traduit mathématiquement par le fait qu'on ne peut plus écrire l'EDP (11) comme une égalité mais plutôt comme une inégalité car le rendement du portefeuille d'arbitrage constitué pour obtenir cette EDP n'est plus unique. L'EDP se présente alors comme suit

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - y)SV_S + V_t \leq rV. \quad (11-a)$$

Le problème de la borne libre de l'option américaine (là où l'on doit l'exercer) peut se traduire comme suit :

Pour chaque instant  $t$ , nous divisons l'axe de la valeur du sous-jacent  $S$  en deux régions distinctes : Là où il est optimal d'exercer l'option et là où il ne l'est pas.

Si  $V$  est une option d'achat, la région où il est optimal d'exercer est quand  $S^* < S < \infty$  et on a alors

$$V = S - X, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - y) S V_S + V_t \leq rV. \quad (11-b)$$

Dans l'autre région définie par  $0 \leq S < S^*$ , il n'est pas optimal d'exercer et on a alors

$$V > S - X, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - y) S V_S + V_t = rV. \quad (11-c)$$

Les conditions à la borne  $S^*$  sont que l'option d'achat  $V$  et sa pente (son delta) sont continues

$$V(S_t^*, t) = \max(S_t^* - X, 0), \quad \text{et} \quad V_S(S_t^*, t) = 1.$$

Si  $V$  est une option de vente, la région où il est optimal d'exercer est quand  $0 \leq S < S^*$  et on a alors

$$V = X - S, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - y) S V_S + V_t \leq rV. \quad (11-d)$$

Dans l'autre région définie par  $S^* < S < \infty$ , il n'est pas optimal d'exercer et on a alors

$$V > X - S, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - y) S V_S + V_t = rV. \quad (11-e)$$

Les conditions à la borne  $S^*$  sont que l'option de vente  $V$  et sa pente (son delta) sont continues

$$V(S_t^*, t) = \max(X - S_t^*, 0), \quad \text{et} \quad V_S(S_t^*, t) = -1.$$

Les deux conditions à la borne  $S^*$  servent à déterminer la valeur de l'option en  $S^*$  ainsi que l'emplacement de la borne libre car il est important de noter que  $V_S(S_t^*, t) = 1$  (respectivement  $V_S(S_t^*, t) = -1$ ) n'est pas déduit du fait qu'en  $S^*$ , nous avons  $C = S^* - X$  (respectivement  $P = X - S^*$ ) pour l'option d'achat (respectivement l'option de vente) américaine.

Nous avons choisi d'améliorer la précision de la MDFI en introduisant une variable de contrôle. Le principe est simple : Étant donné que nous travaillons dans un univers de Black et Scholes (1973), nous connaissons parfaitement la valeur d'une option européenne sous sa formule analytique.

Pour une option d'achat

$$c(S_0, T) = S_0 \exp(-yT)N[d_1(S_0)] - X \exp(-rT)N[d_2(S_0)], \quad (27)$$

tandis que pour une option de vente

$$p(S_0, T) = X \exp(-rT)N[-d_2(S_0)] - S_0 \exp(-yT)N[-d_1(S_0)], \quad (28)$$



$$\text{où } d_1(S_0) = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r - y + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad \text{et} \quad d_2(S_0) = d_1(S_0) - \sigma\sqrt{T},$$

où  $S_0$  représente le prix du sous-jacent à l'instant 0 et  $N$  la fonction de distribution d'une loi normale.

Il est donc possible d'appliquer la MDFI sur une option européenne (de mêmes caractéristiques que l'option américaine qui nous intéresse) pour laquelle nous disposons d'une formule explicite.

La différence entre les prix de l'option européenne obtenus par formule explicite et par MDFI constitue l'erreur de la méthode numérique.

L'hypothèse que nous faisons ensuite c'est que cette même erreur se produit lorsqu'on évalue l'option américaine. Nous pouvons alors améliorer l'estimation de cette dernière selon l'équation suivante

$$V^a = V_{num}^a + V^e - V_{num}^e, \quad (29)$$

où  $V^e$  et  $V^a$  représentent respectivement les valeurs des options européennes et américaines obtenues par formule explicite, tandis que  $V_{num}^e$  et  $V_{num}^a$  représentent respectivement les valeurs des options européennes et américaines obtenues par MDFI.

Nous avons développé un code pour l'approche MDFI avec variable de contrôle. Comme expliqué plus haut, les résultats seront présentés au point 6, soit lors de la comparaison des trois méthodes décrites dans ce mémoire.

## 5 ÉVALUATION D'UNE OPTION AMÉRICAINNE PAR LA MÉTHODE BARONE-ADESI WHALEY

### 5.1 Fondements et hypothèses du modèle

Le modèle BAW est un modèle analytique développé en 1983 par Giovanni Barone-Adesi et Robert E. Whaley. Originellement, il a été développé pour les options sur commodités et pour les options sur Futures. Nous allons le développer pour les options sur actions.

Dans ce modèle, on suppose que la dynamique de l'actif sous-jacent suit le processus stochastique suivant

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - y)dt + \sigma dw_t, \quad (30)$$

où  $S$  représente l'actif sous-jacent,  $\mu$  le taux de rendement espéré instantané de l'actif sous-jacent,  $y$  le taux de dividende continu,  $\sigma^2$  est la variance instantanée du rendement des actifs et  $w$  est un processus de Wiener.

Le modèle cherche à estimer le prix de l'exercice anticipé, qui représente la différence entre l'option européenne et l'option américaine.

L'équation différentielle partielle (EDP) satisfaite par le prix de l'option européenne  $V^e$  est la suivante

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}^e + (r - y)SV_S^e + V_t^e = rV^e, \quad (31)$$

où  $V^e$  représente l'option européenne,  $r$  le taux sans risque,  $V_S^e$  la dérivée de  $V^e$  par rapport à  $S$ ,  $V_t^e$  la dérivée de  $V^e$  par rapport à  $t$  et  $V_{SS}^e$  la dérivée seconde de  $V^e$  par rapport à  $S$ .

Dans leur article, Barone-Adesi et Whaley partent du principe que l'équation différentielle partielle (EDP) mentionnée plus haut, s'applique également à l'option américaine. Le prix satisfait par le prix de l'option américaine  $V^a$  s'écrit comme suit

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}^a + (r - y)SV_S^a + V_t^a = rV^a, \quad (32)$$

où  $V^a$  représente l'option américaine,  $r$  le taux sans risque,  $V_S^a$  la dérivée de  $V^a$  par rapport à  $S$ ,  $V_t^a$  la dérivée de  $V^a$  par rapport à  $t$  et  $V_{SS}^a$  la dérivée seconde de  $V^a$  par rapport à  $S$ .

Il me paraît important de noter ici que les auteurs ne précisent pas que l'équation (32) ne s'applique que quand on n'exerce pas l'option par anticipation.

L'hypothèse des auteurs est que si l'EDP s'applique à l'option européenne et à l'option américaine, elle s'applique de la même manière à la prime d'exercice anticipé de l'option américaine. Appelons  $\varepsilon$  l'option d'exercice anticipé. Soit donc

$$\varepsilon = V^a - V^e. \quad (33)$$

En soustrayant l'équation (31) de l'équation (32) nous obtenons

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 (V_{SS}^a - V_{SS}^e) + (r - y)S(V_S^a - V_S^e) + V_t^a - V_t^e = r(V^a - V^e),$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \varepsilon_{SS} + (r - y)S\varepsilon_S + \varepsilon_t = r\varepsilon, \quad (34)$$

où  $\varepsilon_S$  représente la dérivée de  $\varepsilon$  par rapport à  $S$ ,  $\varepsilon_t$  la dérivée de  $\varepsilon$  par rapport à  $t$  et  $\varepsilon_{SS}$  la dérivée seconde de  $\varepsilon$  par rapport à  $S$ .

Posons

$$\tau = T - t,$$

$$M = \frac{2r}{\sigma^2},$$

$$\text{et } N = \frac{2(r-y)}{\sigma^2},$$

et multiplions (34) par  $\frac{2}{\sigma^2}$ .

Ceci donne

$$S^2 \varepsilon_{SS} + \frac{2}{\sigma^2}(r-y)S\varepsilon_S - \frac{2}{\sigma^2} \varepsilon_\tau = \frac{2}{\sigma^2} r\varepsilon,$$

$$\Rightarrow S^2 \varepsilon_{SS} + NS\varepsilon_S - \frac{M}{r} \varepsilon_\tau = M\varepsilon. \quad (35)$$

Les auteurs font l'hypothèse que  $\varepsilon$  est définie comme suit

$$\varepsilon(S, h) = h(\tau)f(S, h), \quad (36)$$

d'où

$$\varepsilon_{SS} = hf_{SS},$$

$$\varepsilon_S = hf_S,$$

$$\varepsilon_\tau = h_\tau f + hh_\tau f_h,$$

où  $f_s$  représente la dérivée de  $f$  par rapport à  $S$ ,  $f_h$  la dérivée de  $f$  par rapport à  $h$ ,  $f_{ss}$  la dérivée seconde de  $f$  par rapport à  $S$  et  $h_\tau$  la dérivée de  $h$  par rapport à  $\tau$ .

En remplaçant dans (35)

$$S^2 h f_{ss} + N S h f_s - \frac{M}{r} (h_\tau f + h h_\tau f_h) = M h f,$$

$$\Rightarrow S^2 f_{ss} + N S f_s - M f \left( 1 + \frac{h_\tau}{r h} + \frac{h_\tau f_h}{r f} \right) = 0,$$

$$\Rightarrow S^2 f_{ss} + N S f_s - M f \left[ 1 + \frac{h_\tau}{r h} \left( 1 + \frac{h f_h}{f} \right) \right] = 0. \quad (37)$$

À ce stade, les auteurs font une deuxième hypothèse, en choisissant une forme pour  $h(\tau)$

$$h(\tau) = 1 - \exp(-r\tau),$$

d'où

$$h_r(\tau) = r \exp(-r\tau) = r(1 - h(\tau)).$$

et (37) devient

$$S^2 f_{SS} + NSf_S - \frac{M}{h} f - (1 - h)Mf_h = 0. \quad (38)$$

Jusque là, les auteurs avaient fait deux hypothèses mais aucune approximation. L'approximation sera cependant faite sur l'équation (38), de manière à obtenir  $(1 - h)Mf_h = 0$ . Ceci est surtout vrai quand la maturité  $T$  de l'option tend vers l'infini ou vers 0.

En effet,

- Si  $T \rightarrow \infty$ , alors  $\exp(-r\tau) \rightarrow 0$ , ce qui implique que  $h(\tau) \rightarrow 1$ .
- Si  $T \rightarrow 0$ , alors  $\exp(-r\tau) \rightarrow 1$ , ce qui implique que  $h(\tau) \rightarrow 0$ , et par conséquent  $f_h \rightarrow 0$ .

L'équation (38) devient alors

$$S^2 f_{SS} + NSf_S - \frac{M}{h} f = 0. \quad (39)$$

L'EDP (38) est donc devenue grâce à cette approximation une Équation Différentielle Ordinaire (EDO) de deuxième ordre avec deux solutions linéairement indépendantes, de la forme :  $aS^q$ .

La solution générale de l'équation (39) s'écrit

$$f(S) = a_1 S^{q_1} + a_2 S^{q_2},$$

où  $q_1$  et  $q_2$  sont les racines du polynôme

$$q^2 + (N-1)q - \frac{M}{h} = 0.$$

Ceci donne

$$q_1 = \frac{1}{2} \left[ -(N-1) - \sqrt{(N-1)^2 + \frac{4M}{h}} \right] < 0$$

et

$$q_2 = \frac{1}{2} \left[ -(N-1) + \sqrt{(N-1)^2 + \frac{4M}{h}} \right] > 0.$$



Jusqu'ici, le raisonnement présenté était valable à la fois pour l'option d'achat et l'option de vente. A partir d'ici, une distinction s'impose. Nous allons commencer par présenter le cas d'une option d'achat avant d'aborder le cas d'une option de vente.

## 5.2 Évaluation de l'option d'achat américaine

### 5.2.1 Cadre théorique

Puisque  $q_1 < 0$ , si  $a_1 \neq 0$  alors  $f \rightarrow \infty$  quand  $S \rightarrow 0$ . Ce qui n'est pas vrai car  $\lim_{S \rightarrow 0} C(S, T, X) = 0$ , d'où  $a_1 = 0$ , où  $S, T$  et  $X$  sont respectivement le prix de l'actif sous-jacent, la maturité et le prix d'exercice de l'option d'achat.

Ce qui implique

$$C = c + ha_2 S^{q_2}, \quad (40)$$

où  $C$  est l'option d'achat américaine,  $c$  l'option d'achat européenne et  $ha_2 S^{q_2}$  représente bien entendu  $\varepsilon$ , l'option d'exercice anticipé.

Appelons  $S^*$  le seuil d'exercice de l'option d'achat américaine. Nous avons alors

$$C(S, T) = \begin{cases} c(S, T) + h(\tau)a_2S^{q_2} & \text{si } S < S^* \\ S - X & \text{si } S \geq S^* \end{cases}$$

Pour trouver le seuil critique  $S^*$  ainsi que  $a_2$ , il suffit de se rappeler qu'en  $S^*$ , l'option d'achat américaine vaut sa valeur intrinsèque

$$S^* - X = c(S^*, T) + ha_2S^{*q_2}. \quad (41)$$

En dérivant (41) par rapport à  $S^*$ , on obtient

$$1 - 0 = \exp(-y\tau)N(d_1(S^*)) + (hq_2a_2S^{*q_2-1}), \quad (42)$$

$$\text{où } d_1(S^*) = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S^*}{X}\right) + \left(r - y + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

L'équation (42) implique

$$a_2 = \frac{1 - \exp(-y\tau)N[d_1(S^*)]}{(hq_2S^{*q_2-1})}. \quad (43)$$

En remplaçant dans (41), nous obtenons

$$S^* - X = c(S^*, T) + [1 - \exp(-y\tau)N[d_1(S^*)]] \left( \frac{S^*}{q_2} \right). \quad (44)$$

$S^*$  est la seule inconnue de l'équation (44) et elle est obtenue par itération.

En remplaçant (43) dans (40), nous obtenons

$$C(S, T) = \begin{cases} c(S, T) + A_2 \left( \frac{S}{S^*} \right)^{q_2} & \text{si } S < S^* \\ S - X & \text{si } S \geq S^* \end{cases} \quad (45)$$

$$\text{où } A_2 = \left( \frac{S^*}{q_2} \right) [1 - \exp(-y\tau)N[d_1(S^*)]].$$

### 5.2.2 Exemple

Nous présentons ici un exemple d'évaluation d'une option d'achat avec les paramètres suivant : le taux sans risque est à 8%, le taux de dividende continu à 12%, la volatilité à 0.2 et la maturité à 3 mois.

Une comparaison plus détaillée sera présentée dans la section 6.

Paramètres de l'option	Prix S	Option d'achat européenne $c(S,T)$	Option d'achat américaine CRR	Option d'achat américaine BAW
	80	0.0291	0.0277	0.0322
	90	0.5700	0.5846	0.5896
$r=0.08, y=0.12, \sigma=0.2, T=0.25$	100	3.4211	3.5136	3.5249
	110	9.8470	10.3630	10.3146
	120	18.6180	20.0000	20.0000

Tableau 1

Prix théoriques des options d'achat américaines selon le modèle BAW. (prix d'exercice : 100)

La figure suivante montre le prix de l'option d'achat américaine évaluée par la méthode BAW, en fonction des différents prix de l'actif sous jacent, et avec les paramètres du tableau 1.

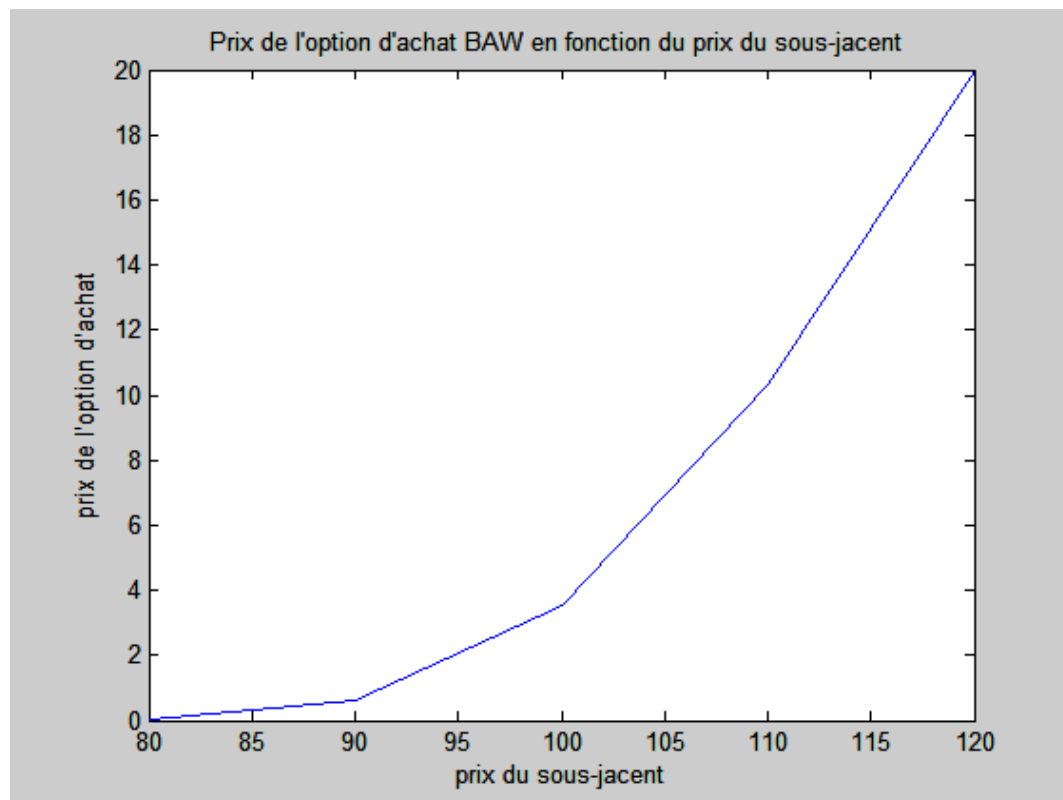


Figure 1

Prix théoriques des options d'achat américaines avec différents prix de sous-jacents, selon le modèle BAW. (prix d'exercice : 100)

### 5.3 Évaluation de l'option de vente américaine

#### 5.3.1 Cadre théorique

Après avoir présenté dans la section précédente une évaluation de l'option d'achat américaine selon la méthode BAW, une analyse similaire peut être faite pour l'option de vente américaine en partant encore une fois de la solution générale de l'équation (39).

En effet, puisque  $q_2 > 0$ , si  $a_2 \neq 0$  alors  $f \rightarrow \infty$  quand  $S \rightarrow \infty$ . Ce qui n'est pas acceptable car  $\lim_{S \rightarrow \infty} P(S, T, X) = 0$ , d'où  $a_2 = 0$ , où  $S, T$  et  $X$  sont respectivement le prix de l'actif sous-jacent, la maturité et le prix d'exercice de l'option de vente.

Ce qui implique

$$P = p + ha_1 S^{q_1}, \quad (46)$$

où  $P$  est l'option de vente américaine,  $p$  l'option de vente européenne et  $ha_1 S^{q_1}$  représente  $\varepsilon$ , l'option d'exercice anticipé.

Appelons  $S^{**}$  le seuil d'exercice de l'option de vente américaine. Nous avons alors

$$P(S, T) = \begin{cases} p(S, T) + h(\tau)a_1 S^{q_1} & \text{si } S^{**} < S \\ X - S & \text{si } S^{**} \geq S \end{cases}.$$

Pour trouver le seuil critique  $S^{**}$  ainsi que  $a_1$ , il suffit de se rappeler qu'en  $S^{**}$ , l'option de vente américaine vaut sa valeur intrinsèque

$$X - S^{**} = p(S^{**}, T) + ha_1 S^{**q_1}. \quad (47)$$

En dérivant (47) par rapport à  $S^{**}$ , on obtient

$$0 - 1 = -\exp(-y\tau)N(-d_1(S^{**})) + (hq_1 a_1 S^{**q_1-1}), \quad (48)$$

$$\text{où } d_1(S^{**}) = \frac{\text{Ln}\left(\frac{S^{**}}{X}\right) + \left(r - y + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

L'équation (48) implique

$$a_1 = \frac{-[1 - \exp(-y\tau)N(-d_1(S^{**}))]}{(hq_1 S^{**q_1-1})}. \quad (49)$$

En remplaçant dans (47), nous obtenons

$$X - S^{**} = p(S^{**}, T) - [1 - \exp(-y\tau)N[-d_1(S^{**})]] \left( \frac{S^{**}}{q_1} \right). \quad (50)$$

$S^{**}$  est la seule inconnue de l'équation (50) et elle est obtenue par itération.

En remplaçant (49) dans (46), nous obtenons

$$P(S, T) = \begin{cases} p(S, T) + A_1 \left( \frac{S}{S^{**}} \right)^{q_1} & \text{si } S^{**} < S \\ X - S & \text{si } S^{**} \geq S \end{cases}, \quad (51)$$

avec  $A_1 = - \left( \frac{S^{**}}{q_1} \right) [1 - \exp(-y\tau)N[-d_1(S^{**})]]$ .

### 5.3.2 Exemple

Nous présentons ici un exemple d'évaluation d'une option de vente avec les paramètres suivant : le taux sans risque est à 8%, le taux de dividende continu à 12%, la volatilité à 0.2 et la maturité à 3 mois.

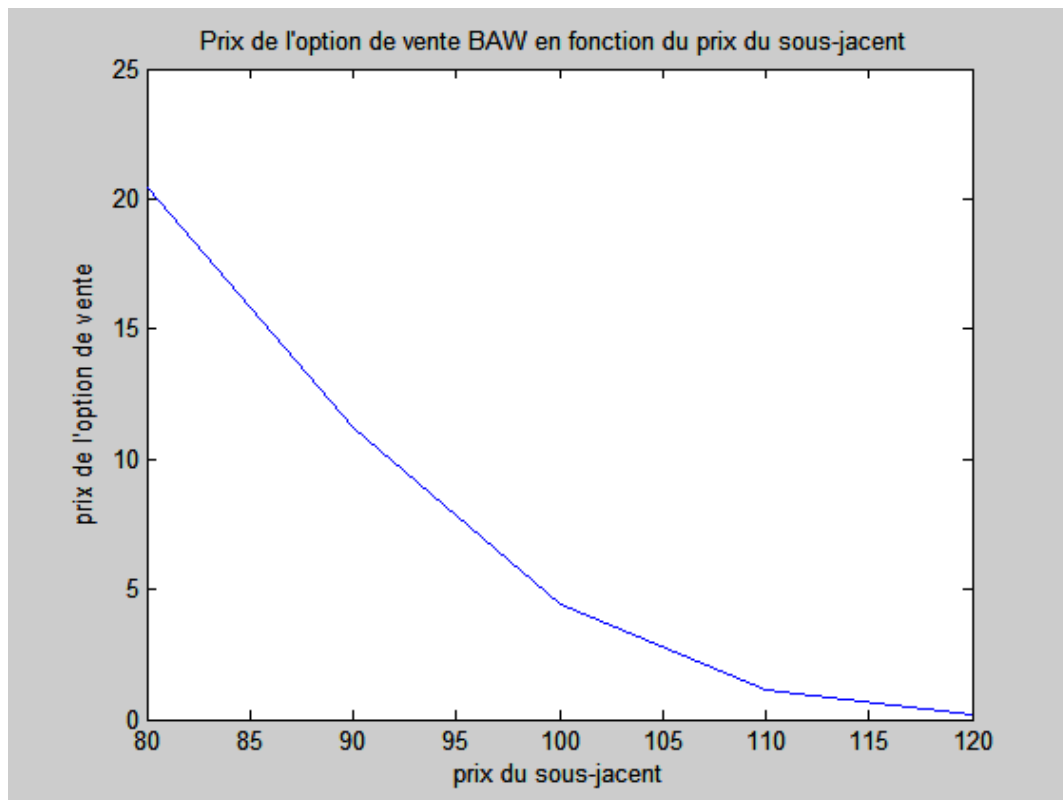
Une comparaison plus détaillée sera présentée dans la section 6.

<b>Paramètres de l'option</b>	<b>Prix S</b>	<b>Option de vente européenne p(S,T)</b>	<b>Option de vente américaine CRR</b>	<b>Option de vente américaine BAW</b>
	80	20.4133	20.4121	20.4190
	90	11.2498	11.2532	11.2510
R=0.08, y=0.12, $\sigma$ =0.2, T=0.25	100	4.3964	4.3967	4.3967
	110	1.1178	1.1242	1.1179
	120	0.1844	0.1829	0.1845

**Tableau 2**  
**Prix théoriques des options de vente américaines selon le modèle BAW. (prix d'exercice : 100)**



La figure suivante montre le prix de l'option de vente américaine évaluée par la méthode BAW, en fonction des différents prix de l'actif sous jacent, et avec les paramètres du tableau 2.



**Figure 2**  
**Prix théoriques des options de vente américaines avec différents prix de sous-jacents, selon le modèle BAW. (prix d'exercice : 100)**

#### 5.4 Symétrie option d'achat option de vente dans le modèle BAW

Tel que mentionné dans la revue de littérature, le modèle Barone-Adesi et Whaley (1987) satisfait la propriété de symétrie option d'achat/option de vente des options américaines.

Cette propriété stipule que la valeur d'une option d'achat sur un sous-jacent  $S$ , avec un taux de dividende continu  $y$ , avec un prix d'exercice  $K$ , à échéance  $T$  et avec un taux d'intérêt de marché  $r$  est identique à la valeur d'une option de vente sur un sous-jacent  $K$ , avec un taux de dividende continu  $r$ , avec un prix d'exercice  $S$ , à échéance  $T$  et avec un taux d'intérêt de marché  $y$ .

$$C(S, T, K, \sigma, r, y) = P(K, T, S, \sigma, y, r).$$

Nous présentons ici les résultats obtenus pour un exemple d'évaluation d'une option d'achat et d'une option de vente avec les paramètres suivant : le taux sans risque est à 8%, le taux de dividende continu à 12%, la volatilité à 0.2 et la maturité à 3 mois.

$r=0.08$	$y=0.12$	$T=0.25 \quad \Sigma=0.2$		
		Option d'achat BAW		
S / K	95	100	105	110
90	1,464	0,590	0,209	0,066
95	3,349	1,615	0,689	0,262
100	6,295	3,525	1,768	0,794
105	10,233	6,445	3,701	1,924

$r=0.08$	$y=0.12$	$T=0.25 \quad \sigma=0.2$		
		Option de vente BAW		
S / K	95	100	105	110
90	7,201	11,251	15,783	20,548
95	4,177	7,397	11,397	15,883
100	2,147	4,397	7,595	11,547
105	0,976	2,344	4,617	7,795

Tableau 3

Prix théoriques de l'option d'achat et de l'option de vente américaines selon le modèle BAW ( $r=8\%$  et  $y=12\%$ )

Puis nous présentons les résultats d'une option d'achat et d'une option de vente avec les paramètres suivant : le taux sans risque est à 12%, le taux de dividende continu à 8%, la volatilité à 0.2 et la maturité à 3 mois. Dans ce deuxième exemple, les prix d'exercice sont remplacés par les prix des sous-jacents du premier exemple, et vice-versa.

$r=0.12$	$y=0.08$	$T=0.25$ $\sigma=0.2$		
		Option de vente BAW		
<b>K / S</b>	<b>95</b>	<b>100</b>	<b>105</b>	<b>110</b>
<b>90</b>	1,464	0,590	0,209	0,066
<b>95</b>	3,349	1,615	0,689	0,262
<b>100</b>	6,295	3,525	1,769	0,794
<b>105</b>	10,234	6,445	3,702	1,924

$r=0.12$	$y=0.08$	$T=0.25$ $\sigma=0.2$		
		Option d'achat BAW		
<b>K / S</b>	<b>95</b>	<b>100</b>	<b>105</b>	<b>110</b>
<b>90</b>	7,201	11,251	15,783	20,548
<b>95</b>	4,177	7,397	11,397	15,883
<b>100</b>	2,147	4,397	7,595	11,547
<b>105</b>	0,976	2,344	4,617	7,795

**Tableau 4**  
Prix théoriques de l'option de vente et de l'option d'achat américaines selon le modèle BAW ( $r=12\%$  et  $y=8\%$ )

Il apparaît donc clairement que la symétrie option d'achat/option de vente est respectée et que par exemple la valeur d'une option d'achat sur un sous-jacent de 90, avec un taux de dividende continu de 12%, avec un prix d'exercice de 95, à échéance 3 mois et avec un taux d'intérêt de marché de 8% est identique à la valeur d'une option de vente sur un sous-jacent de 95, avec un taux de dividende continu de 8%, avec un prix d'exercice de 90, à échéance 3 mois et avec un taux d'intérêt de marché de 12% : soit 1,464.

## 5.5 Analyse de sensibilité

Nous présentons dans cette section trois analyses de sensibilité de l'erreur des prix des options selon le modèle BAW par rapport au modèle CRR à 10000 pas de temps, utilisé pour obtenir la « vraie » valeur de l'option. Ce choix de 10000 pas de temps s'inspire de l'article de Huang, Subrahmanyam et Yu (1996), qui lui même fait référence à Broadie et Detemple (1996) pour ce choix.

Pour les trois analyses, nous avons fixé le sous-jacent à 100, le taux d'intérêt à 8% et le taux de dividende continu à 12%.

Les paramètres que nous avons analysés sont la maturité, la volatilité et le prix d'exercice. A chaque fois, nous avons fixé un paramètre et fait varier simultanément les deux autres.

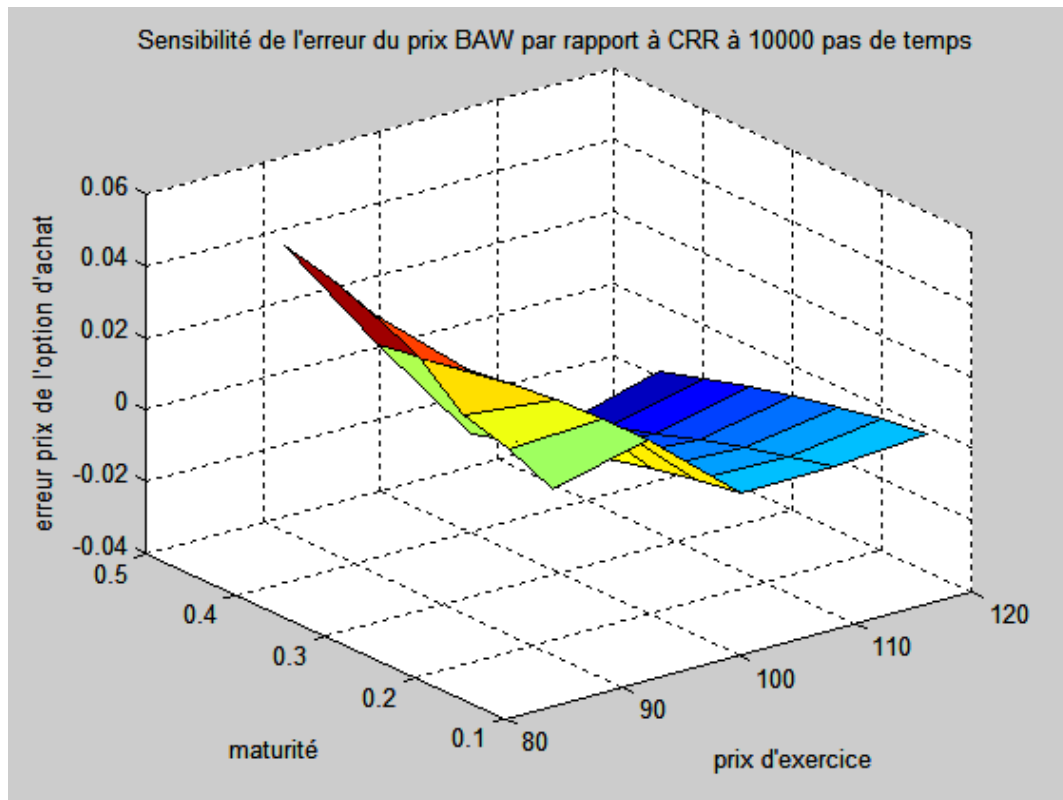
### 5.5.1 Sensibilité de l'erreur du prix BAW en fonction de la maturité et du prix d'exercice

Pour commencer nous avons fixé la volatilité à 20%. Le tableau qui suit résume les résultats obtenus pour une option d'achat pour différentes maturités  $T$  et prix d'exercice  $K$ .

<i>r=0.08</i>	<i>y=0.12</i>			<i>σ=0.2</i>	<i>S=100</i>
<b>T / K</b>	<b>88</b>	<b>96</b>	<b>104</b>	<b>112</b>	<b>120</b>
<b>0,15</b>	0,0110	0,0180	-0,0040	-0,0040	-0,0015
<b>0,2</b>	0,0161	0,0181	-0,0063	-0,0068	-0,0033
<b>0,25</b>	0,0201	0,0174	-0,0088	-0,0100	-0,0056
<b>0,3</b>	0,0303	0,0161	-0,0119	-0,0136	-0,0083
<b>0,35</b>	0,0369	0,0143	-0,0151	-0,0175	-0,0115
<b>0,4</b>	0,0413	0,0121	-0,0186	-0,0215	-0,0150
<b>0,45</b>	0,0441	0,0096	-0,0223	-0,0257	-0,0187

**Tableau 5**  
Sensibilité de l'erreur du prix de l'option d'achat américaine à la maturité et au prix d'exercice (modèle BAW par rapport à CRR à 10000 pas de temps)

La représentation graphique de ces résultats donne le graphe suivant :



**Figure 3**  
Représentation graphique de la sensibilité de l'erreur du prix de l'option d'achat américaine à la maturité et au prix d'exercice

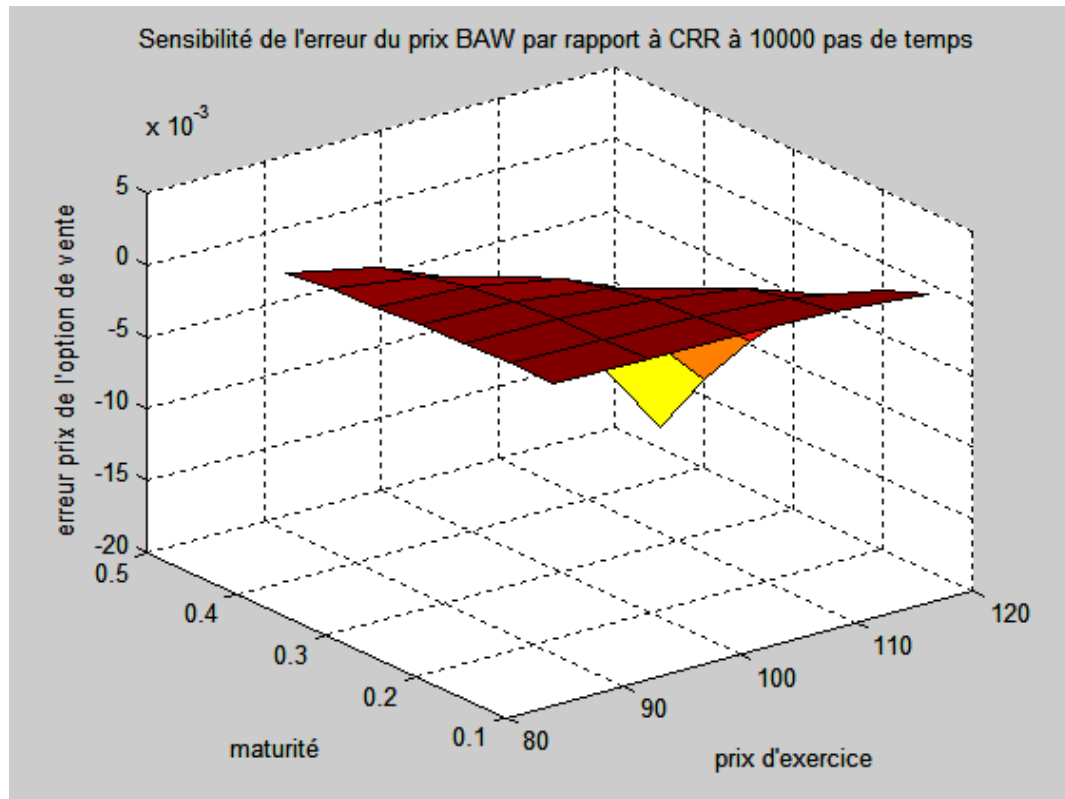
Nous constatons que l'erreur du prix de l'option d'achat américaine obtenue par différence entre la méthode BAW et la méthode CRR avec 10000 pas de temps devient plus importante quand l'option est de plus en plus dans la monnaie (prix d'exercice inférieur au prix du sous-jacent), ainsi que lorsqu'on augmente la maturité. Ce dernier point sera discuté plus en détail lorsque l'on abordera la limite de la méthode BAW au fur et à mesure que l'on augmente la maturité.

Nous présentons maintenant le tableau qui résume les résultats obtenus pour une option de vente pour différentes maturités  $T$  et prix d'exercice  $K$ .

$r=0.08$	$Y=0.12$			$\sigma=0.2$	$S=100$
<b>T / K</b>	<b>88</b>	<b>96</b>	<b>104</b>	<b>112</b>	<b>120</b>
<b>0,15</b>	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0002	-0,0007
<b>0,2</b>	0,0000	-0,0001	-0,0003	-0,0007	-0,0019
<b>0,25</b>	-0,0001	-0,0001	-0,0005	-0,0015	-0,0038
<b>0,3</b>	-0,0001	-0,0003	-0,0012	-0,0029	-0,0064
<b>0,35</b>	-0,0004	-0,0008	-0,0020	-0,0048	-0,0098
<b>0,4</b>	-0,0005	-0,0014	-0,0032	-0,0072	-0,0139
<b>0,45</b>	-0,0009	-0,0022	-0,0049	-0,0102	-0,0187

**Tableau 6**  
Sensibilité de l'erreur du prix de l'option de vente américaine à la maturité et au prix d'exercice (BAW par rapport à CRR à 10000 pas de temps)

La représentation graphique de ces résultats donne le graphe suivant pour l'option de vente américaine :



**Figure 4**  
Représentation graphique de la sensibilité de l'erreur du prix de l'option de vente américaine à la maturité et au prix d'exercice

L'erreur du prix de l'option de vente américaine obtenue par différence entre la méthode BAW et la méthode CRR avec 10000 pas de temps est plus importante quand l'option est de plus en plus dans la monnaie (prix d'exercice supérieur au prix du sous-jacent), ainsi que lorsqu'on augmente la maturité. Ces observations rejoignent celles faites pour les options d'achat. Cependant nous constatons qu'en valeur absolue l'erreur sur le prix de l'option de vente est inférieure à celle sur l'option d'achat.



### 5.5.2 Sensibilité de l'erreur du prix BAW en fonction du prix d'exercice et de la volatilité

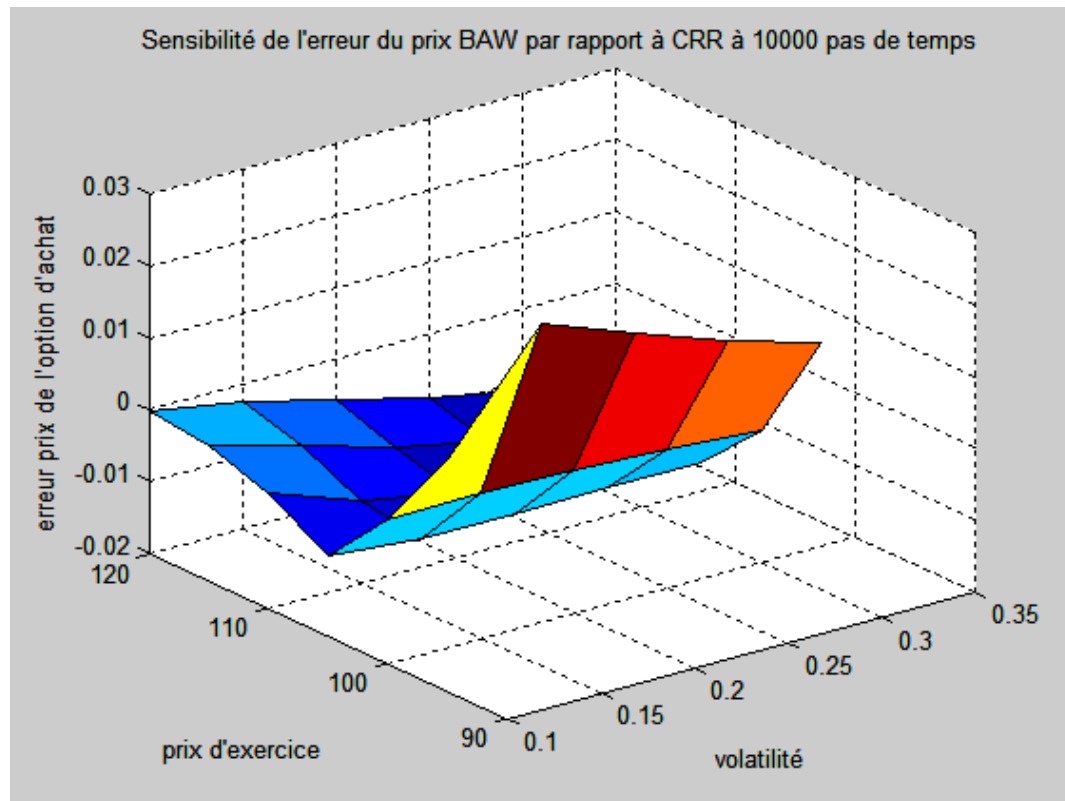
Pour cette sensibilité, nous avons fixé la maturité à 3 mois. Le tableau qui suit résume les résultats obtenus pour une option d'achat pour différents prix d'exercice  $K$  et volatilité  $\sigma$ .

<i>R=0.08</i>	<i>y=0.12</i>			<i>T=0.25</i>	<i>S=100</i>
<b>K / <math>\sigma</math></b>	<b>0,1</b>	<b>0,15</b>	<b>0,2</b>	<b>0,25</b>	<b>0,3</b>
<b>95</b>	0,0122	0,0275	0,0227	0,0181	0,0143
<b>100</b>	0,0000	0,0001	-0,0001	-0,0007	-0,0015
<b>105</b>	-0,0088	-0,0100	-0,0099	-0,0097	-0,0099
<b>110</b>	-0,0038	-0,0084	-0,0108	-0,0122	-0,0130
<b>115</b>	-0,0011	-0,0048	-0,0084	-0,0111	-0,0129
<b>120</b>	-0,0003	-0,0023	-0,0056	-0,0087	-0,0113

Tableau 7

Sensibilité de l'erreur du prix de l'option d'achat américaine au prix d'exercice et à la volatilité (BAW par rapport à CRR à 10000 pas de temps)

La représentation graphique de ces résultats donne le graphe suivant :



**Figure 5**  
Représentation graphique de la sensibilité de l'erreur du prix de l'option d'achat américaine au prix d'exercice et à la volatilité

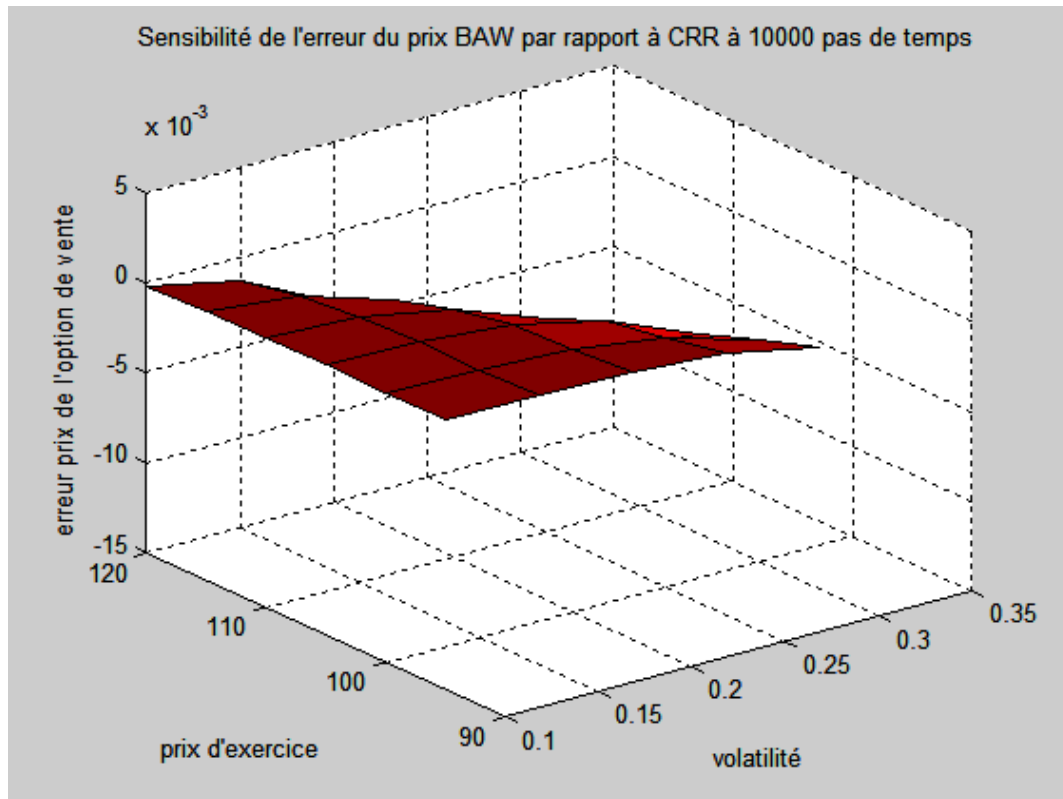
Nous constatons que l'erreur du prix de l'option d'achat américaine obtenue par différence entre la méthode BAW et la méthode CRR avec 10000 pas de temps est plus importante quand le prix d'exercice est aux alentours du prix du sous-jacent, et est au plus bas en valeur absolue quand le prix d'exercice est égal au prix du sous-jacent. L'importance de la volatilité apparaît quand l'option est de plus en plus hors de la monnaie (prix d'exercice supérieur au prix du sous-jacent).

Voici maintenant le tableau qui résume les résultats obtenus pour une option de vente pour différents prix d'exercice  $K$  et volatilité  $\sigma$ .

$r=0.08$	$y=0.12$			$T=0.25$	$S=100$
<b>K / <math>\sigma</math></b>	<b>0,1</b>	<b>0,15</b>	<b>0,2</b>	<b>0,25</b>	<b>0,3</b>
<b>95</b>	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0005	-0,0016
<b>100</b>	-0,0001	-0,0001	-0,0004	-0,0012	-0,0027
<b>105</b>	0,0000	-0,0001	-0,0006	-0,0018	-0,0039
<b>110</b>	0,0000	-0,0003	-0,0012	-0,0031	-0,0059
<b>115</b>	-0,0001	-0,0006	-0,0022	-0,0050	-0,0084
<b>120</b>	-0,0002	-0,0013	-0,0038	-0,0075	-0,0117

**Tableau 8**  
Sensibilité de l'erreur du prix de l'option de vente américaine au prix d'exercice et à la volatilité (BAW par rapport à CRR à 10000 pas de temps)

La représentation graphique de ces résultats donne le graphe suivant pour l'option de vente américaine



**Figure 6**  
 Représentation graphique de la sensibilité de l'erreur du prix de l'option de vente américaine au prix d'exercice et à la volatilité

L'erreur du prix de l'option de vente américaine obtenue par différence entre la méthode BAW et la méthode CRR avec 10000 pas de temps devient plus importante quand l'option est de plus en plus dans la monnaie (prix d'exercice supérieur au prix du sous-jacent), ainsi que lorsqu'on augmente la volatilité. Nous constatons encore une fois qu'en valeur absolue, l'erreur sur le prix de l'option de vente est inférieure à celle sur l'option d'achat.

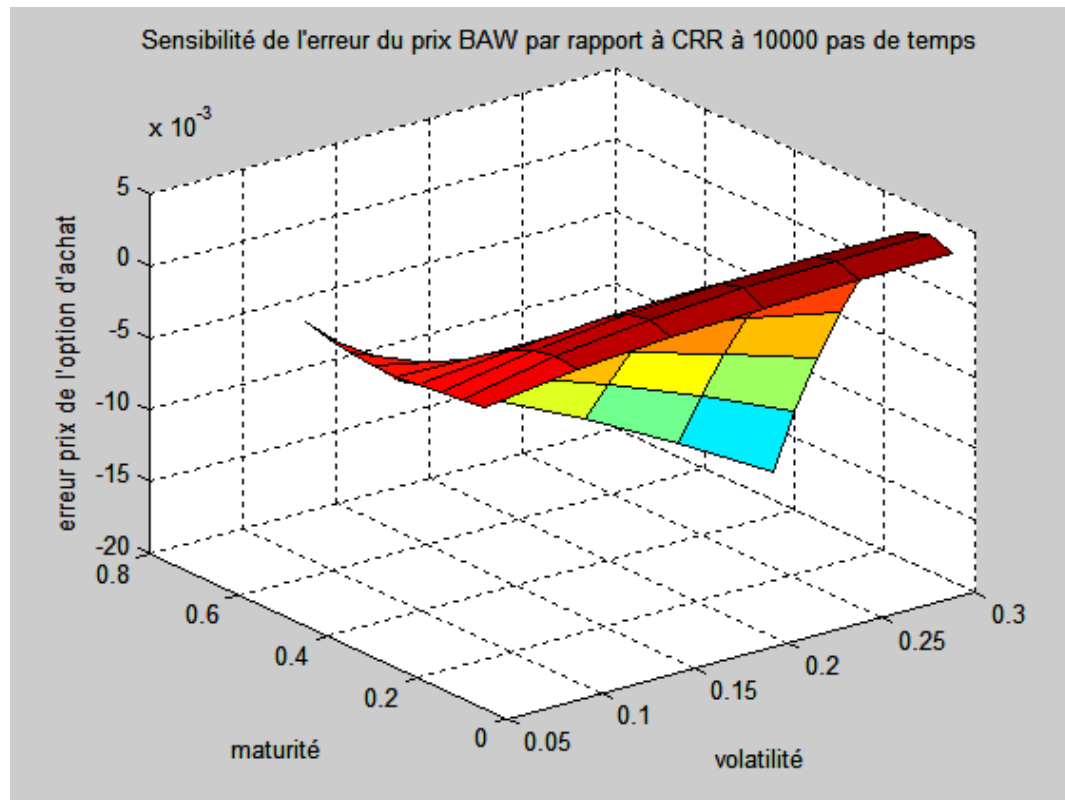
### 5.5.3 Sensibilité de l'erreur du prix BAW en fonction de la maturité et de la volatilité

Pour cette sensibilité, nous avons fixé le prix d'exercice à 100. Le tableau qui suit résume les résultats obtenus pour une option d'achat pour différentes maturités  $T$  et volatilité  $\sigma$ .

$r=0.08$	$y=0.12$				$K=100$	$S=100$
$T / \sigma$	<b>0,05</b>	<b>0,1</b>	<b>0,15</b>	<b>0,2</b>	<b>0,25</b>	<b>0,3</b>
<b>0,05</b>	0,0009	0,0018	0,0023	0,0025	0,0027	0,0028
<b>0,1</b>	0,0008	0,0021	0,0028	0,0032	0,0034	0,0035
<b>0,15</b>	0,0005	0,0017	0,0025	0,0028	0,0029	0,0028
<b>0,2</b>	0,0003	0,0009	0,0015	0,0016	0,0015	0,0011
<b>0,25</b>	0,0002	(0,0000)	0,0001	(0,0001)	(0,0007)	(0,0015)
<b>0,3</b>	0,0003	(0,0011)	(0,0015)	(0,0023)	(0,0034)	(0,0048)
<b>0,35</b>	0,0004	(0,0023)	(0,0034)	(0,0049)	(0,0067)	(0,0087)
<b>0,4</b>	0,0007	(0,0035)	(0,0055)	(0,0078)	(0,0103)	(0,0132)
<b>0,45</b>	0,0011	(0,0047)	(0,0078)	(0,0109)	(0,0143)	(0,0180)

**Tableau 9**  
Sensibilité de l'erreur du prix de l'option d'achat américaine à la maturité et à la volatilité (BAW par rapport à CRR à 10000 pas de temps)

La représentation graphique de ces résultats donne le graphe suivant :



**Figure 7**  
**Représentation graphique de la sensibilité de l'erreur du prix de l'option d'achat américaine à la maturité et à la volatilité**

Nous constatons que l'erreur du prix de l'option d'achat américaine obtenue par différence entre la méthode BAW et la méthode CRR avec 10000 pas de temps est plus faible en valeur absolue quand la maturité de l'option est de trois mois, et s'accroît en valeur positive ou négative quand l'on s'éloigne de cet horizon. L'erreur augmente également avec la volatilité.

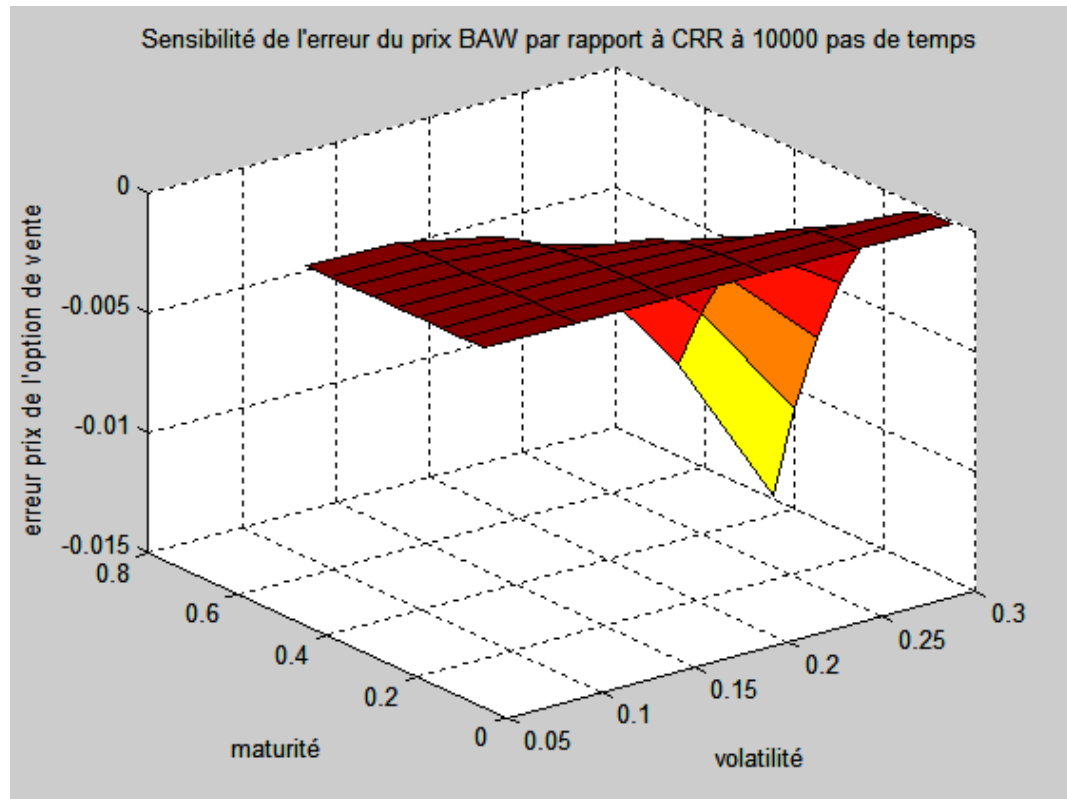
Voici à présent le tableau qui résume les résultats obtenus pour une option de vente pour différentes maturités et volatilité  $\sigma$ .

<i>r=0.08</i>	<i>y=0.12</i>		<i>K=100</i>			<i>S=100</i>
<b>T / <math>\sigma</math></b>	<b>0,05</b>	<b>0,1</b>	<b>0,15</b>	<b>0,2</b>	<b>0,25</b>	<b>0,3</b>
<b>0,05</b>	(0,0000)	(0,0000)	(0,0000)	(0,0000)	(0,0001)	(0,0001)
<b>0,1</b>	(0,0000)	(0,0000)	(0,0000)	(0,0001)	(0,0001)	(0,0002)
<b>0,15</b>	(0,0000)	(0,0000)	(0,0001)	(0,0001)	(0,0002)	(0,0005)
<b>0,2</b>	(0,0000)	(0,0000)	(0,0001)	(0,0002)	(0,0006)	(0,0013)
<b>0,25</b>	(0,0000)	(0,0001)	(0,0001)	(0,0004)	(0,0012)	(0,0027)
<b>0,3</b>	(0,0000)	(0,0001)	(0,0002)	(0,0008)	(0,0023)	(0,0047)
<b>0,35</b>	(0,0000)	(0,0001)	(0,0004)	(0,0014)	(0,0038)	(0,0074)
<b>0,4</b>	(0,0000)	(0,0001)	(0,0006)	(0,0023)	(0,0058)	(0,0108)
<b>0,45</b>	(0,0000)	(0,0001)	(0,0010)	(0,0035)	(0,0083)	(0,0149)

**Tableau 10**

**Sensibilité de l'erreur du prix de l'option de vente américaine à la maturité et à la volatilité (BAW par rapport à CRR à 10000 pas de temps)**

La représentation graphique de ces résultats donne le graphe suivant pour l'option de vente américaine.



**Figure 8**  
 Représentation graphique de la sensibilité de l'erreur du prix de l'option de vente américaine à la maturité et à la volatilité

L'erreur du prix de l'option de vente américaine obtenue par différence entre la méthode BAW et la méthode CRR avec 10000 pas de temps devient plus importante avec le temps ainsi que lorsqu'on augmente la volatilité. Nous constatons encore une fois qu'en valeur absolue, l'erreur sur le prix de l'option de vente est inférieure à celle sur l'option d'achat.

Dans la section suivante, nous présenterons les résultats de l'approche BAW, ainsi que les résultats des deux méthodes numériques décrites plus haut.



## 6 COMPARAISON DES RÉSULTATS

### 6.1 Présentation des résultats

Nous avons développé trois codes informatiques, soit un code pour chaque méthode présentée plus haut.

Nous présentons ici les résultats obtenus pour l'évaluation théorique de quelques options américaines.

Les paramètres de l'actif sous-jacent et des options sont tirés de l'article de Barone-Adesi et Whaley (1987). Nous n'avons pas jugé nécessaire de travailler sur d'autres variations de ces paramètres car nous pouvons ainsi comparer les résultats présentés par les auteurs avec ceux que nous trouvons grâce aux codes informatiques développés.

En effet, même si dans leur article, Barone-Adesi et Whaley (1987) travaillent sur les options sur commodités et sur Futures, alors que nous avons présenté leur modèle appliqué à des actions, une comparaison est possible si l'on remarque que ce que les auteurs notent " $b$ " dans l'équation (4) de leur article, soit le coût de portage, n'est autre que " $r-y$ ", le taux sans risque moins le taux de dividende dans le développement du modèle BAW que nous avons présenté plus haut.

Les deux tableaux qui suivent donnent les prix théoriques des options d'achat et des options de vente américaines, selon les approches CRR, MDFI corrigée par une variable de contrôle et BAW.

Les résultats présentés peuvent largement être comparés au tableau 1 de l'article de Barone -Adesi et Whaley (1987), soit lorsque le coût de portage " $b$ " dont parlent les auteurs est égal à  $-0.04$ . Et comme nous l'avons mentionné, " $b$ " n'est autre que " $r-y$ " dans notre développement du modèle BAW pour les titres. Ainsi, dans les tableaux présentés ci-après, nous avons tenu à ce que  $r-y = -0.04$  dans tous les cas pour que nos résultats soient comparables à ceux des auteurs.

Paramètres de l'option	Prix S	Option d'achat européenne c(S,T)	Option d'achat américaine CRR	Option d'achat américaine MDFI avec variable de contrôle	Option d'achat américaine BAW
	80	0.0291	0.0277	0.0294	0.0322
	90	0.5700	0.5846	0.5799	0.5896
r=0.08, y=0.12, $\sigma=0.2$ , T=0.25	100	3.4211	3.5136	3.5233	3.5249
	110	9.8470	10.3630	10.3536	10.3146
	120	18.6180	20.0000	19.9988	20.0000
	80	0.0288	0.0274	0.0291	0.0323
	90	0.5643	0.5797	0.5751	0.5868
r=0.12, y=0.16, $\sigma=0.2$ , T=0.25	100	3.3871	3.4910	3.5005	3.5064
	110	9.7490	10.3323	10.3236	10.2885
	120	18.4328	20.0000	19.9988	20.0000
	80	1.0462	1.0416	1.0551	1.0667
	90	3.2321	3.2728	3.2697	3.2842
r=0.08, y=0.12, $\sigma=0.4$ , T=0.25	100	7.2910	7.3804	7.4055	7.4108
	110	13.2480	13.5512	13.5265	13.5022
	120	20.7279	21.3012	21.3102	21.2332
	80	0.2095	0.2163	0.2146	0.2285
	90	1.3119	1.3736	1.3594	1.3874
r=0.08, y=0.12, $\sigma=0.2$ , T=0.50	100	4.4647	4.6963	4.7085	4.7241
	110	10.1635	11.0100	10.9958	10.9552
	120	17.8505	20.0000	19.9993	20.0000

**Tableau 11**  
**Prix théoriques des options d'achat américaines**  
**selon les trois modèles développés. (prix d'exercice : 100)**

Paramètres de l'option	Prix S	Option de vente européenne P(S,T)	Option de vente américaine CRR	Option de vente américaine MDFI avec variable de contrôle	Option de vente américaine BAW
	80	20.4133	20.4121	20.4140	20.4190
	90	11.2498	11.2532	11.2498	11.2510
r=0.08, y=0.12, $\sigma=0.2$ , T=0.25	100	4.3964	4.3967	4.3964	4.3967
	110	1.1178	1.1242	1.1178	1.1179
	120	0.1844	0.1829	0.1844	0.1845
	80	20.2102	20.2281	20.2303	20.2482
	90	11.1378	11.1422	11.1389	11.1462
r=0.12, y=0.16, $\sigma=0.2$ , T=0.25	100	4.3527	4.3334	4.3527	4.3548
	110	1.1067	1.1130	1.1067	1.1073
	120	0.1826	0.1811	0.1826	0.1828
	80	21.4304	21.4279	21.4445	21.4632
	90	13.9119	13.9121	13.9152	13.9273
r=0.08, y=0.12, $\sigma=0.4$ , T=0.25	100	8.2663	8.2282	8.2671	8.2742
	110	4.5188	4.5433	4.5190	4.5231
	120	2.2943	2.2947	2.2943	2.2968
	80	20.9473	20.9578	20.9566	20.9822
	90	12.6320	12.6459	12.6330	12.6445
r=0.08, y=0.12, $\sigma=0.2$ , T=0.50	100	6.3672	6.3403	6.3673	6.3722
	110	2.6483	2.6638	2.6483	2.6505
	120	0.9177	0.9223	0.9177	0.9188

**Tableau 12**  
**Prix théoriques des options de vente américaines**  
**selon les trois modèles développés. (prix d'exercice : 100)**

Comme l'on peut le juger à travers ces résultats théoriques présentés plus haut dans les tableaux 11 et 12, l'approche BAW est très précise compte tenu que la différence entre les prix obtenus par cette dernière et ceux obtenus avec la MDFI corrigée par une variable de contrôle est très minime.

La différence avec les prix obtenus par CRR est légèrement plus importante mais reste également minime.

Notons au passage que les résultats rapportés par les auteurs montrent dans leur article des écarts a priori moins importants. Mais si l'on y prête attention, l'on remarquera que les auteurs ne rapportent les prix des options qu'avec deux chiffres après la virgule alors que le présent mémoire augmente la précision à quatre chiffres après la virgule. Si l'on arrondit leur résultats de leur modèle, et en rappelant que ce que les auteurs notent " $b$ " dans l'équation (4) de leur article (traitant des options sur commodités), soit le coût de portage, n'est autre que " $r-y$ ", le taux sans risque moins le taux de dividende dans le développement du modèle BAW pour les options sur actions) que nous avons présenté dans ce mémoire.

## 6.2 Efficacité

Dans ce qui suit, nous reprenons les mêmes options d'achat et de vente, avec comme objectif de ressortir l'efficacité de la méthode BAW. Pour ce faire, nous la comparons avec la méthode CRR connue pour sa précision et le temps de calcul peu élevé qu'elle nécessite.

La différence par rapport aux tableaux précédents est que pour accroître la précision de la méthode CRR (sans trop augmenter le temps de calcul), nous avons augmenté le nombre de pas de temps de 50 à 200.

La référence que nous utilisons pour comparer les résultats est la méthode CRR toujours mais cette fois avec 10000 pas de temps pour obtenir la « vraie » valeur de l'option. Ce choix de 10000 pas de temps s'inspire de l'article de Huang, Subrahmanyam et Yu (1996), qui lui même fait référence à Broadie et Detemple (1996) pour ce choix.

Pour mesurer l'efficacité des deux méthodes, nous utilisons la racine carrée de l'erreur moyenne (connue en anglais par RMSE : Root Mean Squared Error) sur les 20 options d'achats puis sur les 20 options de vente

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{i=20} (g_{vraie} - g)^2},$$

où  $g_{vraie}$  est la « vraie » valeur de l'option estimée par un arbre CRR à 10000 pas de temps,  $g$  étant la valeur estimée de l'option par les méthodes BAW et CRR avec 200 pas de temps.

Le temps de calcul est le temps CPU (connu en anglais par Central Processing Unit). C'est le temps total nécessaire exprimé en secondes pour obtenir les résultats des 20 options d'achat, puis des 20 options de vente. Les codes utilisés ont été développés avec Matlab sur un ordinateur portable Compaq nx9010 avec une RAM de 192.

Le tableau suivant donne les prix théoriques des options d'achat américaines, selon les approches CRR et BAW, ainsi que l'erreur RMSE et le temps de calcul CPU.

Paramètres de l'option	Prix S	Option d'achat européenne $c(S,T)$	Option d'achat américaine CRR 10000	Option d'achat américaine CRR 200	Option d'achat américaine BAW
	80	0.0291	0,0294	0,0291	0.0322
	90	0.5700	0,5802	0,5818	0.5896
$r=0.08, y=0.12, \sigma=0.2, T=0.25$	100	3.4211	3,5248	3,5221	3.5249
	110	9.8470	10,3566	10,3573	10.3146
	120	18.6180	20,0000	20,0000	20.0000
	80	0.0288	0,0291	0,0289	0.0323
	90	0.5643	0,5754	0,5770	0.5868
$r=0.12, y=0.16, \sigma=0.2, T=0.25$	100	3.3871	3,5020	3,4993	3.5064
	110	9.7490	10,3267	10,3274	10.2885
	120	18.4328	20,0000	20,0000	20.0000
	80	1.0462	1,0555	1,0536	1.0667
	90	3.2321	3,2709	3,2758	3.2842
$r=0.08, y=0.12, \sigma=0.4, T=0.25$	100	7.2910	7,4072	7,4006	7.4108
	110	13.2480	13,5264	13,5343	13.5022
	120	20.7279	21,2930	21,2979	21.2332
	80	0.2095	0,2147	0,2137	0.2285
	90	1.3119	1,3599	1,3615	1.3874
$r=0.08, y=0.12, \sigma=0.2, T=0.50$	100	4.4647	4,7098	4,7066	4.7241
	110	10.1635	10,9983	10,9993	10.9552
	120	17.8505	20,0000	20,0000	20.0000
RMSE				0,003109	0,023426
CPU				4,038	2,574

**Tableau 13**  
**Prix théoriques des options d'achat américaines**  
**selon BAW et CRR à 200 pas de temps. (prix d'exercice : 100)**



Comme le montrent les résultats, un arbre CRR à 200 pas de temps donne une erreur moyenne totale inférieure à l'erreur moyenne obtenue par la méthode BAW. Cependant, en termes de temps de calcul, la méthode BAW donne de meilleurs résultats.

En ce qui concerne les options de vente, le tableau suivant donne les prix théoriques des options de vente américaines, selon les approches CRR et BAW, ainsi que l'erreur RMSE et le temps de calcul CPU.

Paramètres de l'option	Prix S	Option de vente européenne p(S,T)	Option de vente américaine CRR 10000	Option de vente américaine CRR 200	Option de vente américaine BAW
	80	20.4133	20,4140	20,4137	20.4190
	90	11.2498	11,2498	11,2513	11.2510
R=0.08, y=0.12, $\sigma=0.2$ , T=0.25	100	4.3964	4,3963	4,3915	4.3967
	110	1.1178	1,1178	1,1185	1.1179
	120	0.1844	0,1844	0,1829	0.1845
	80	20.2102	20,2303	20,2299	20.2482
	90	11.1378	11,1389	11,1404	11.1462
R=0.12, y=0.16, $\sigma=0.2$ , T=0.25	100	4.3527	4,3526	4,3479	4.3548
	110	1.1067	1,1067	1,1074	1.1073
	120	0.1826	0,1826	0,1809	0.1828
	80	21.4304	21,4445	21,4420	21.4632
	90	13.9119	13,9153	13,9193	13.9273
R=0.08, y=0.12, $\sigma=0.4$ , T=0.25	100	8.2663	8,2669	8,2573	8.2742
	110	4.5188	4,5190	4,5260	4.5231
	120	2.2943	2,2944	2,2991	2.2968
	80	20.9473	20,9566	20,9556	20.9822
	90	12.6320	12,6330	12,6347	12.6445
R=0.08, y=0.12, $\sigma=0.2$ , T=0.50	100	6.3672	6,3672	6,3605	6.3722
	110	2.6483	2,6484	2,6496	2.6505
	120	0.9177	0,9178	0,9143	0.9188
RMSE				0,003888	0,009468
CPU				3,765	2,414

**Tableau 14**  
**Prix théoriques des options de vente américaines**  
**selon BAW et CRR à 200 pas de temps. (prix d'exercice : 100)**

Comme c'était le cas pour les options d'achat, un arbre CRR à 200 pas de temps donne encore une fois une erreur moyenne totale inférieure à l'erreur moyenne obtenue par la méthode BAW. Cependant, en termes de temps de calcul, la méthode BAW donne de meilleurs résultats.

Il est fort probable que si l'on utilise un arbre amélioré et en réduisant un peu le nombre de pas de temps, l'on peut arriver à réduire le temps de calcul car un arbre bien construit est difficile à battre. Mais l'objectif ici était de comparer la méthode BAW à la méthode CRR classique. Et les résultats montrent que c'est une méthode efficace et utile. Un autre avantage qui plaide pour cette méthode est qu'elle permet d'obtenir la frontière d'exercice, qui peut servir pour évaluer plus facilement des options exotiques. Un exemple de représentation de la frontière d'exercice figure en conclusion.

### 6.3 Limite de la méthode BAW

Dans les deux tableaux précédents la maturité des options choisies pour reproduire les résultats des auteurs était de trois mois et six mois.

Les deux tableaux suivants reproduisent une partie des résultats des auteurs (présentés au tableau 5 de leur article) où la maturité des options est de trois ans.

Paramètres de l'option	Prix S	Option d'achat européenne c(S,T)	Option d'achat américaine CRR	Option d'achat américaine MDFI avec variable de contrôle	Option d'achat américaine BAW
	80	1.9286	2.3407	2.3468	2.5238
	90	3.7480	4.7385	4.7626	4.9664
r=0.08, y=0.12, $\sigma=0.2$ , T=3	100	6.3571	8.4676	8.4922	8.6696
	110	9.7527	13.7695	13.7918	13.8817
	120	13.8722	20.8217	20.8986	20.8816

**Tableau 15**  
**Prix théoriques des options d'achat américaines**  
**selon les trois modèles développés. (prix d'exercice : 100)**

Paramètres de l'option	Prix S	Option de vente européenne p(S,T)	Option de vente américaine CRR	Option de vente américaine MDFI avec variable de contrôle	Option de vente américaine BAW
	80	24.7773	25.6556	25.6570	26.2452
	90	19.6199	20.0501	20.0834	20.6410
r=0.08, y=0.12, $\sigma$ =0.2, T=3	100	15.2522	15.4357	15.4990	15.9902
	110	11.6711	11.7429	11.8039	12.2212
	120	8.8138	8.8598	8.8861	9.2345

**Tableau 16**  
**Prix théoriques des options de vente américaines**  
**selon les trois modèles développés. (prix d'exercice : 100)**

Ces résultats montrent la limite de la méthode BAW. Comme le montrent les tableaux 13 et 14 ci-dessus les prix obtenus par la méthode BAW sont relativement loin de ceux obtenus par les méthodes CRR et MDFI. Ces écarts s'expliquent par l'approximation faite dans la méthode BAW (faire tendre la maturité de l'option vers 0 ou vers l'infini comme nous l'avons appliqué à l'équation (38) plus haut).

Nous en concluons que pour évaluer les options à court terme, la méthode BAW présente des avantages indéniables : résultats très proches des méthodes numériques utilisés comme base de comparaison, et avec plus de rapidité. À moyen terme, la méthode montre ses limites. Et dans ce cas, l'évaluation des options devient hasardeuse car non précise. La méthode BAW n'est donc absolument pas recommandée pour le moyen terme.

## 7 CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons essayé de présenter la méthode BAW appliquée à des options sur actions. Nous avons fait l'analogie entre l'article des auteurs qui ont proposé leur méthode pour évaluer les options sur commodités et sur les contrats Futures sur commodités.

Nous avons ensuite comparé les résultats obtenus par cette méthode quasi-analytique avec les résultats obtenus par deux approches numériques : l'arbre binomial de Cox, Ross et Rubinstein (1979) et une méthode de différences finies implicite, améliorée par une variable de contrôle.

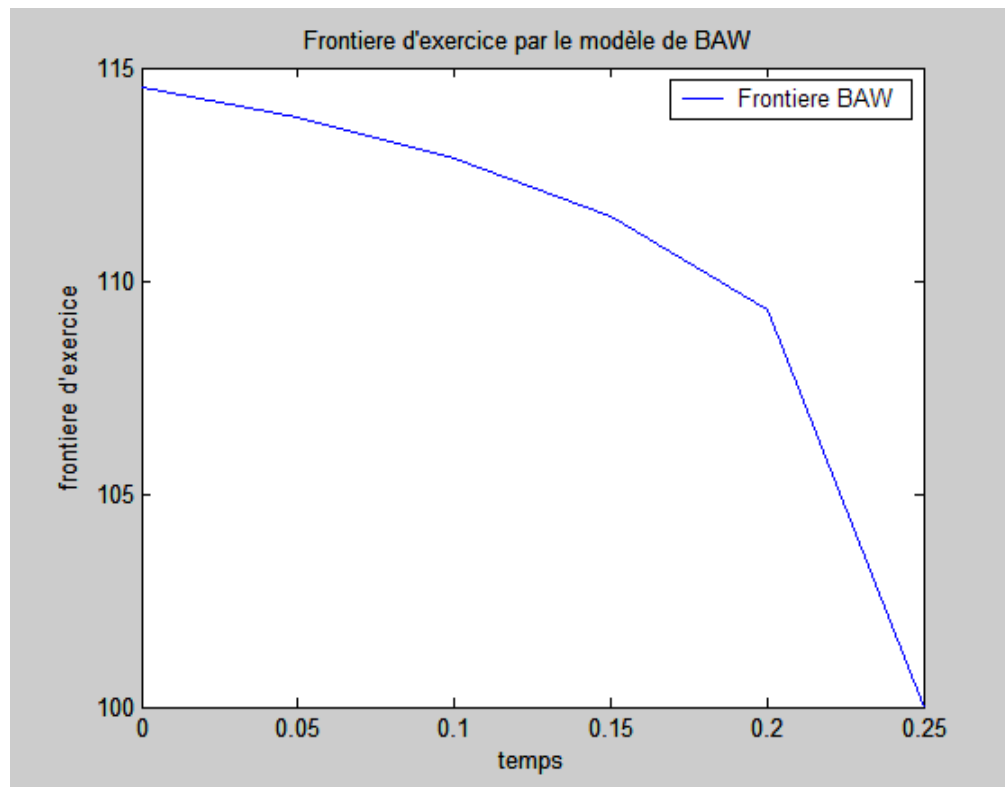
Nous avons prouvé que la méthode BAW donnait des résultats très proches de ceux obtenus par la MDFI pour les options à court terme. Par contre, pour le moyen terme, les résultats de la méthode BAW n'étaient pas précis, ceci étant dû à l'approximation faite lors du développement de la méthode quant à la maturité de l'option.

Ce mémoire pourrait ouvrir la voie à d'autres recherches, à savoir appliquer la méthode BAW à d'autres types d'options, exotiques, tels que les options sur plusieurs sous-jacents, les options sur maximum etc....

L'intérêt réside dans le fait de voir si des options habituellement évaluées par des méthodes numériques pourraient être correctement valorisées par une méthode quasi-analytique.

Un autre avantage de la méthode BAW est que l'on peut représenter la frontière d'exercice. En effet, un processus d'itération appliqué à l'équation (44) pour

l'option d'achat et l'équation (50) pour l'option de vente nous permet d'obtenir la frontière d'exercice. Par exemple, pour une option d'achat américaine avec un prix du sous jacent et un prix d'exercice de 100 (avec  $r=0.08$ ,  $y=0.12$ ,  $\sigma=0.2$ ,  $T=0.25$ ), nous obtenons le graphe suivant :



**Figure 9**  
Frontière d'exercice d'une option d'achat américaine, selon le modèle BAW. (prix d'exercice : 100)

Le fait de pouvoir obtenir la frontière d'exercice par la méthode BAW offre l'opportunité d'évaluer plus facilement des options exotiques car il suffit de trouver le premier temps d'atteinte du prix de l'actif sous jacent à la frontière d'exercice. Sous certaines hypothèses (celles de Black-Merton-Scholes par exemple) ce premier temps d'atteinte est facilement trouvé. Ceci sort du cadre du mémoire actuel mais présente une opportunité de développement de sujets de recherches qui pourraient toucher au même domaine.

**BIBLIOGRAPHIE**

- ANDERSEN, L. et M. BROADIE (2004). « A primal-dual simulation algorithm for pricing multi-dimensional American options », *Management Science*, vol. 50, p. 1222-1234.
  
- BARONE-ADESI, G. et R. WHALEY (1987). « Efficient Analytical Approximation of American Option Values », *Journal of Finance*, vol. 42, p. 301-320.
  
- BEN AMEUR, H, J. DE FRUTOS, T.FAKHFAKH et V. DIABY (2007). « Upper and Lower Bounds for Convex Value Functions of Derivative Contracts », CREF 07-20, September 2007.
  
- BJERKSUND, P. et G. STENSLAND (1993). « American Exchange Options and a Put-Call transformation: a note », *Journal of Business, Finance and Accounting*, vol. 20, p. 761-764.
  
- BLACK, F et M. SCHOLES (1973). « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, vol. 81, p. 637-654.
  
- BOSSAERTS, P (1989). « Simulation estimators for Optimal Early Exercise », Technical report, Carnegie Mellon University.



- BOYLE, P. B (1988). « A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables », Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 23, 1, p. 1-12.
  
- BOYLE, P. B (1977). « Options: A Monte Carlo Approach », Journal of Financial Economics, vol. 4, p. 323-338.
  
- BRENNAN, M. J. et E. SCHWARTZ (1977). « The Valuation of American Put Options », Journal of Finance, vol. 32, p. 449-462.
  
- BRENNAN, M. J. et E. SCHWARTZ (1978). « Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis », Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 13, p. 461-474.
  
- BROADIE, M et J. DETEMPLE (1996). « American Option Valuation : New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods », Review of Financial Studies, vol. 9, p. 1211-1250.
  
- BROADIE, M et P. GLASSERMAN (1997). « Pricing American-style securities using simulation », Journal of Economic Dynamics and Control, vol. 21, p. 1323-1352.

- BUNCH, D.S. et H. JOHNSON (1992). « A simple and Numerically Efficient Valuation Method for America Puts Using a Modified Geske-Johnson Approach », *Journal of Finance*, vol. 47, p. 809-816.
  
- CARR, P. (1998). « Randomization and the American Put », *Review of Financial Studies*, vol. 11, p. 597-626.
  
- CARRIERE, J. (1996). « Valuation of Early-Exercise Price of Options Using Simulations and Non-Parametric Regression », *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 19, p. 19-30.
  
- CHESNEY, M. et R. GIBSON (1995). « State Space Symmetry and Two Factor Option Pricing Models », in J. Janssen and C. H. Skiadas, ed., *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, World Scientific Publishing Co.
  
- COX, J.C., S.A. ROSS et M. RUBINSTEIN (1979). « Option Pricing: A simplified Approach », *Journal of Financial Economics*, vol. 7, p. 229-264.
  
- DENAULT, M, G. GAUTHIER et J-G. SIMONATO (2006). « Improving Lattice Schemes Through Bias Reduction », *Journal of Futures Market* 8, 733-757.

- GARCIA, D. (2003). « Convergence and biases of Monte Carlo estimates of American option prices using a parametric exercise rule », *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 27, p. 1855-1879.
- GESKE, R. (1979). « The valuation of compound options », *Journal of Financial Economics*, vol. 7, p. 63-81.
- GESKE, R. et H.E. JOHNSON (1984). « The American Put Valued Analytically », *Journal of Finance*, vol. 39, p. 1511-1524.
- HAUGH, M. et L. KOGAN (2004). « Approximating pricing and exercising of high-dimensional American options: A duality approach », Technical report, MIT.
- HUANG, J., M. SUBRAHMANYAM et G. YU (1996). « Pricing and Hedging American Options: A Recursive Integration Method », *Review of Financial Studies*, vol. 9, p. 277-300.
- IBANEZ, A. et F. ZAPATERO (2004). « Monte Carlo Valuation of American Options through Computation of the Optimal Exercise Frontier », Technical report, Marshall School of Business, USC.
- JOHNSON, H (1983). « An Analytical Approximation for the American Put Price », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 18, p. 141-148.

- JU, N (1998). « Pricing an American Option by Approximating its Early Exercise Boundary as a Multipiece Exponential Function », Review of Financial Studies, vol. 11, p. 627-646.
  
- KAMRAD, B. et P. RITCHKEN (1991). « Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables », Management Science, vo. 37, p. 1640-1652.
  
- LAPRISE, S.B., M.C. FU, S.I. MARCUS, A.E.B. LIM, et H. ZHANG (2006). « Pricing American-Style Derivatives with European Call Options », Management Science, vol. 52, p. 95-110.
  
- LONGSTAFF, F. et E. SCHWARTZ (2001). « Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach », Review of Financial Studies, vol. 14, p. 113-147.
  
- MACMILLAN, L. W (1986). « An Analytical Approximation for the American Put Prices », Advances in Futures and Options Research, vol. 1, p. 119-139.
  
- MAGDON-ISMAIL, M (2003). « Pricing the American Put Using a New Class of Tight Lower Bounds », International Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering.

- MCDONALD, R et M. SCHRODER (1998). « A Parity Result for American Options », Journal of Computational Finance, 1998. Working paper, Northwestern University, 1990.
- .
- MERTON, R.C (1973). « Theory of rational option pricing », Bell Journal of Economics and Management Science, vol. 4, p. 141-183.
- ROGERS, L.C.G (2002). « Monte Carlo Valuation of American Options. », Mathematical Finance, vol. 12, p. 271-286.
- TIAN, Y (1999). « A Flexible Binomial Option Pricing Model », Journal of Futures Markets, vol. 19, p. 817-843.
- TILLEY, J (1993). « Valuing American options in a path simulation model », Transactions of the Society of Actuaries, vol. 45, p. 83-104.